GEN/16

GENERAL MATHEMATICS

BOOK I FOR FORM IV

(According to the Syllabus issued in July 1950)

J. Pavamani, B. A., L. T.
Headmaster, B. E. M. High School, Palghat.

സാമാന്യഗണിതശാസ്ത്രം

ഒന്നാം പുസ്തകം — 4ാം ഫോറത്തിനു.

(1950 ജൂലായി മാസം പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ പാഠ
പദ്ധതിക്കനുസരിച്ചെഴുതിയതു്.)

37171
510
PAV/S

PUBLISHED BY THE
MISSION BOOK DEPOT
MANGALORE
1950

No. 23 12-2

Students' Library
Book No. A-1

KEBICH TECHNICAL TRAINING SCHOOL,
(Basel Mission)
Post Box No. 10. MANGALORE 1 - South India.

No. A-1

Book No. A-1

37171

01.06.15

GENERAL MATHEMATICS

BOOK I FOR FORM IV

(According to the Syllabus issued in July 1950)

J. Pavamani, B. A., L. T.

Headmaster, B. E. M. High School, Palghat.

സാമാന്യഗണിതശാസ്ത്രം

ഒന്നാം പുസ്തകം — 4-ാം ഫോറത്തിനു.

(1950 ജൂലായി മാസം പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ പാഠ്യപദ്ധതിക്കനുസരിച്ചെഴുതിയതു്.)

TIAN COLLEGE
37171
MALABAR * CALICUT * KERALA

PUBLISHED BY THE
BASEL MISSION BOOK DEPOT,
MANGALORE
1950

Price : Rs. 2/.] [വില: 2രൂ.

510
PAV/S



Printed at the Basel Mission Press, Mangalore, S. K.

മുഖവുര.

1950 ജൂലായി 18-ാംനു- പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ സാമാന്യഗണിതശാസ്ത്ര പാഠപദ്ധതിയിൽ നിർദ്ദേശിച്ചിട്ടുള്ളപ്രകാരം ഈ പുസ്തകത്തിലെ അഭ്യാസങ്ങൾ ദൈനംദിനജീവിതത്തോടു സംബന്ധിച്ചവയും അതിനു അനുയോജ്യവും ആയവയാകുന്നു. വിദ്യാലയങ്ങളിൽ പരിശീലിപ്പിക്കപ്പെടുന്ന തൊഴിലുകളിൽ മുഖ്യമായ നൂൽനൂല്പു, തോട്ടപ്പണി മുതലായവയെ സംബന്ധിച്ചുള്ള കണക്കുകളും ഇതിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ട്. ഇതേകാരണത്താൽ പലകണക്കുകളിലെ നിർദ്ദിഷ്ടങ്ങൾ യഥാർത്ഥസ്ഥിതിവിവരക്കണക്കുകളിൽനിന്നും റെയിൽവെസമയപ്പട്ടികകളിൽ നിന്നും ആണ് എടുത്തിട്ടുള്ളതു്.

ഗണിതശാസ്ത്രപഠനം പ്രായോഗികം ആയിരിക്കേണമെന്നുള്ള പ്രമാണം മുൻനിർത്തിയാണ് വിവരണങ്ങളും അഭ്യാസങ്ങളും തയ്യാറാക്കീട്ടുള്ളതു്. ക്ഷേത്രഗണിതത്തിൽ പ്രത്യേകിച്ചും പ്രായോഗിക അഭ്യാസങ്ങൾ സുലഭമായിട്ടുണ്ട്.

ശതമാനം, കൂട്ടുകച്ചവടം, സമയവും പണിയും, സമയവും ദൂരവും, എന്നീ വിഷയങ്ങൾ 5ഉം 6ഉം ഫോറങ്ങളിലെ പാഠപദ്ധതിയിൽ ചേർത്തിട്ടില്ലാത്തതുകൊണ്ടു അവസംബന്ധിച്ചിട്ടുള്ള കണക്കുകൾ എല്ലാം ഈ പുസ്തകത്തിൽ ചേർക്കേണ്ടിവന്നിരിക്കുന്നു. അവയിൽ പ്രയാസമായവയെ വിദ്യാർത്ഥി വലിയക്ലാസ്സുകളിൽവെച്ചു ചെയ്യാൽ മതി. അവയിൽ പലതും ഏകഘാതസമതാപം ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്യുന്നതു നന്നായിരിക്കും.

സൈദ്ധാന്തികക്ഷേത്രഗണിതഭാഗത്തിൽ 4, 11, 12, 14, 15, 16 എന്നീ പ്രമേയങ്ങൾ ഒഴിച്ചു ബാക്കിയുള്ളവയുടെ ഉപപത്തി അറിഞ്ഞിരിക്കേണമെന്നു നിർബ്ബന്ധമില്ലാത്തതുകൊണ്ടു അവയുടെ സത്യങ്ങളെ ഗ്രന്ഥകാരൻ വിശദമാക്കിയാൽ മതിയാകുന്നതാണ്.

കണക്കു ചെയ്യുന്നതിലുള്ള ശീഘ്രതയും, സൂക്ഷ്മതയും വളരെ മുഖ്യമായതുകൊണ്ടു ഗ്രന്ഥകാരൻ അവയെ പരിശോധിപ്പാൻ ഇടക്കിടെ പരീക്ഷ നടത്തുകയും അതിന്റെഫലം വിദ്യാർത്ഥി ഒരു പുസ്തകത്തിൽ കുറിക്കുകയും വേണം. ഈ ആവശ്യാർത്ഥം ചില ചോദ്യക്കടലാസ്സുകൾ ഈ പുസ്തകത്തിന്റെ ഒടുവിൽ ചേർത്തായി കാണാം.

ഗവർമ്മെണ്ടു പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ സാങ്കേതികപദങ്ങൾ മാത്രമാണ് ഈ പുസ്തകത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ളതു്. അവയുടെ ഒരു പട്ടിക പുസ്തകത്തിന്റെ ഒടുവിൽ കാണാം.

പലപരീക്ഷക്കടലാസ്സുകളിൽനിന്നും ചോദ്യങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുത്തു ചേർത്തിട്ടുണ്ട്. മലിരാശി S. S. L. C. പരീക്ഷാചോദ്യങ്ങളുടെ ശേഷം കാണുന്ന സംഖ്യകൾ പരീക്ഷനടന്ന കൊല്ലങ്ങളാണ്.

മുപ്പതുകൊല്ലത്തിൽപരം ഹൈസ്സ്കൂൾ ക്ലാസ്സുകളിൽ ഗണിതശാസ്ത്രം പഠിപ്പിച്ചതിൽനിന്നു സിദ്ധിച്ച പരിചയത്തിന്റെ ഫലമായ എന്റെ ഈ എളിയ ഉദ്യമം ഇതിനുമുമ്പു ഞാൻ പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ പ്രാഥമിക ഗണിതശാസ്ത്രപുസ്തകത്തെപ്പോലെ ഗുരുജനങ്ങളും വിദ്യാർത്ഥികളും സ്നേഹപുരസ്സരം സ്വീകരിക്കുമെന്ന പ്രതീക്ഷയോടുകൂടി ഈ പുസ്തകം ഞാൻ വിദ്യാർത്ഥിലോകത്തിനു സമർപ്പിച്ചുകൊള്ളുന്നു.

പാലക്കാട്,
16—10—1950.

ജെ. പാവമണി.

വിഷയവിവരം.

അദ്ധ്യായം.		ഭാഗം.
1.	ശരാശരി	1
2.	സംബന്ധം	9
3.	അനുപാതം	21
4.	തോതുഭിന്നിതം	28
5.	മിശ്രാനുപാതം	33
6.	സംബന്ധത്തിന്റേയും അനുപാതത്തിന്റേയും പ്രയോഗം: 1. കൂട്ടുകച്ചവടം. 2. സമയവും പണിയും. 3, സമയവും ദൂരവും.	37
7.	ശതമാനം	56
8.	ശതമാനത്തിന്റെ പ്രയോഗം: ലാഭവും നഷ്ടവും കച്ചവടക്കിഴിവും	67
9.	സാധാരണപലിശ	76
10.	ബീജഗണിതത്തിന്റെ പ്രാരംഭം	90
11.	ധനരാശിയും ഋണരാശിയും	98
12.	നാലു മൌലികക്രിയകൾ	107
13.	ഘാതം.	117
14.	അക്ഷരത്തിനു പകരം സംഖ്യ ചേർക്കൽ	119
15.	ആവരണചിഹ്നങ്ങൾ	122
16.	നാലു മൌലികക്രിയകൾ (തുടർച്ച)	127
17.	സൂത്രങ്ങളുടെ വിഷയം മാറ്റൽ	140
18.	ചിഹ്നീയസൂചനം	143
19.	ഏകഘാതസമവാക്യങ്ങൾ	148
20.	ഏകഘാതസമവാക്യം ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്യാവുന്ന കണക്കുകൾ	162
21.	ക്ഷേത്രവസ്തു, തലം, രേഖ, ബിന്ദു.	172
22.	ത്രിഭുജം	176
23.	കോണുകൾ	178
24.	ത്രികോണങ്ങൾ.	186
25.	ലംബനിർമ്മാണങ്ങൾ.	194
26.	സമാന്തരസരളരേഖകൾ	202
27.	പ്രമേയങ്ങൾ	207
28.	ലേഖാചിത്രം	228
29.	പരീക്ഷക്കടലാസ്സുകൾ	243
	സാങ്കേതികപദങ്ങൾ	247
	ഉത്തരങ്ങൾ	255

അദ്ധ്യായം 1.

ശരാശരി (Averages).

ഒരു ആസ്പത്രിയിൽ 5 ദിവസത്തിൽ 200, 186, 215, 173, 191 വീതം രോഗികൾ ചികിത്സക്കായി വരുന്നെന്നു വിചാരിക്കുക. ആ ആസ്പത്രിയിൽ എത്ര ഡോക്ടർമാർ വേണമെന്നു സർക്കാർ ആലോചിക്കുമ്പോൾ ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യയായ 173നേയൊ ഏറ്റവും വലിയ സംഖ്യയായ 215നെയൊ മാത്രം ആസ്പദമാക്കിയല്ല നിശ്ചയം ചെയ്യുക. ഒരു കൊല്ലത്തിൽ ആകെ വന്ന രോഗികളുടെ എണ്ണമെടുത്തു ഓരോ ദിവസത്തിൽ അതു എത്ര വീതമായി എന്നു കണക്കാക്കി ആ സംഖ്യയെ ആസ്പദമാക്കിയാണ് ഡോക്ടർമാരെ നിശ്ചയിക്കുന്നതു. മേൽപ്പറഞ്ഞ 5 ദിവസങ്ങളിൽ ആകെ 965 രോഗികൾ വന്നു; അതായതു ദിവസത്തിൽ $\frac{2\,6\,5}{5}$, 193 വീതം രോഗികൾ—193നെ 5 ദിവസത്തിലെ രോഗികളുടെ ശരാശരി എണ്ണം (Average) എന്നു പറയുന്നു.

$$\text{കുറെ സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി} = \frac{\text{സംഖ്യകളുടെ ആകെത്തുക}}{\text{സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം}}$$

ഉദാ:—(1) ഒരു ക്ലാസ്സിൽ 8 ദിവസത്തിൽ 27, 32, 29, 31, 26, 25, 30, 24 എന്ന ക്രമത്തിൽ കുട്ടികൾ ഹാജരുണ്ടായിരുന്നു. എന്നാൽ ആ ക്ലാസ്സിലെ ദിവസത്തെ ശരാശരി ഹാജരെത്ര?

8 ദിവസത്തെ ആകെ ഹാജർ $= 27+32+29+31+26+25+30+24.$
$= 224$

$\therefore$ ദിവസത്തെ ശരാശരി ഹാജർ $= \frac{2\,2\,4}{8} = 28.$

നാം കൂട്ടേണ്ടതായ സംഖ്യകൾ ഏകദേശം സമമായിരിക്കുമ്പോൾ അവയുടെ ശരാശരി നമുക്കു വേറൊരു വിധത്തിൽ എളുപ്പത്തിൽ കാണാം. ശരാശരി ഹാജർ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ഹാജരായ 24നെക്കാൾ അധികവും, ഏറ്റവും വലിയ ഹാജരായ 32നെക്കാൾ കുറഞ്ഞുമിരിക്കുമെന്നു വ്യക്തമാണല്ലോ. ഈ രണ്ടു സം

ഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യ പരീക്ഷാർത്ഥം ശരാശരിയായി സ്വീകരിക്കുക. ശരാശരി 29 എന്നു വിചാരിക്കുക.

29ൽ കവിഞ്ഞുള്ള ഹാജരുകളുടെ തുക $=(32-29)+(31-29)+(30-29)=3+2+1=6$

29 ആവാൻ പോരാതെ വരുന്ന ഹാജരുകളുടെ തുക $=(29-27)+(29-26)+(29-25)+(29-24)=2+3+4+5=14$

$\therefore$ 29 ആവാൻ പോരാതെ വരുന്ന ആകെ ഹാജർ $=14-6=8$

$\therefore$ 29ൽ ശരാശരി കുറവു $=\frac{8}{8}=1$

$\therefore$ ശരാശരി ഹാജർ $=29-1=28$.

കുറിപ്പ്:—(i) ഹാജരുകളുടെ തുകയെ 8 കൊണ്ടു ഹരിച്ചു ഈ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(ii) 29 ഒഴിച്ചു വേറെ സംഖ്യയെടുത്തു കണക്കു ചെയ്യുക.

ഉദാ:—(2) ഒരു ആപ്പീസിലെ 24 ക്ലാർക്കുമാരുടെ ശരാശരി വയസ്സു 36 ആണ്. 55 വയസ്സുള്ള ഒരാൾ പ്രവൃത്തിയിൽനിന്നു പിരിഞ്ഞതിനു പകരം 23 വയസ്സു പ്രായമുള്ള ഒരാൾ ചേരുന്നതായാൽ ക്ലാർക്കുമാരുടെ ശരാശരി വയസ്സു എത്രയാകും?

24 ആളുകളുടെ ആകെ വയസ്സിലുള്ള കുറവു $=(55-23)=32$.

$\therefore$ ശരാശരി കുറവു $=\frac{32}{24}=1\frac{1}{3}$.

$\therefore$ പുതിയ ശരാശരി വയസ്സു $=(36-1\frac{1}{3})$ കൊ. $=34\frac{2}{3}$ കൊല്ലം.

ഉദാ:—(3) ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ തന്റെ കയ്യിലുണ്ടായിരുന്ന കാപ്പിയുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം റാത്തലിനു 2ക. 4ണ. വീതവും $\frac{1}{4}$ ഭാഗം റാത്തലിനു 1ക. 14ണ. വീതവും, ബാക്കി 750 ക.ങ്ക. വിറ്റപ്പോൾ റാത്തലിനു ശരാശരി 1ക. 13ണ. 6പ. വില കിട്ടിയതായിക്കണ്ടു. എന്നാൽ ഒട്ടുവിൽ വിറ്റതു റാത്തലിനു എത്ര വിലക്കാണ്? ആകെ എത്ര റാത്തൽ കാപ്പി വിറ്റു?

1 റാത്തൽ കാപ്പിയുടെ ശരാശരി വില $=1$ക. 13ണ. 6പ.

റാത്തലിനു 2ക. 4ണ. വീതം $\frac{1}{3}$ റാത്തലിനു വില $=12$ണ.

,, 1ക. 14ണ. വീതം $\frac{1}{4}$ റാത്തലിനു വില $=7$ണ. 6പ.

$\therefore$ ബാക്കി $1\frac{5}{12}$ റാത്തലിനു വില $=1$ക. 13ണ. 6പ. -1ക. 3ണ. 6പ. $=10$ണ.

$\therefore$ മൂന്നാമത്തെ തരം $1\frac{5}{12}$ റാത്തലിനു വില $=10$ണ.

1 റാത്തലിനു വില $=\frac{10\times12}{5}$ണ.

$=1$ക. 8ണ.

∴ മൂന്നാമത്തെ തരം ആകെ കാപ്പിയുടെ തൂക്കം $= \frac{750 \times 2}{3}$ റാ.

$= 500$ റാത്തൽ.

∴ ആകെ കാപ്പിയുടെ തൂക്കം $= \frac{500 \times 12}{5}$

$= 1200$ റാത്തൽ.

[ഈ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.]

അഭ്യാസം 1.

A. (വാങ്മൂലം)

a. ശരാശരി കാണുക:—

1. 107, 101, 106, 103, 108.

2. $a, b, c, d.$ 3. 8·7, 8·1, 8·5, 8·3.

b. 3 കുട്ടികളുടെ ശരാശരി തൂക്കം 60 റാത്തലാണ്. അവരിൽ രണ്ടു പേരുടെ തൂക്കം 45ഉം 67ഉം റാത്തൽ ആണെങ്കിൽ മൂന്നാമത്തേവന്റെ തൂക്കം എത്ര?

c. 11, 5, 6, x എന്നിവയുടെ ശരാശരി 8 ആണെങ്കിൽ x കാണുക.

d. 13, a, b എന്നിവയുടെ ശരാശരി 14 ആണ്. $a = 12$ ആണെങ്കിൽ b കാണുക. $b = 15$ ആണെങ്കിൽ a കാണുക.

e. ഒരു ക്ലാസ്സിൽ 23 ആൺകുട്ടികളും 15 പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്. ആൺകുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സു $12\frac{1}{2}$ കൊല്ലവും പെൺകുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സു $12\frac{1}{4}$ കൊല്ലവും ആണ്. ആകെ കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സു കണക്കാക്കിയ ഒരു കുട്ടി 12 വയസ്സു 1 മാസം എന്നെഴുതി. അവന്റെ ഉത്തരം തെറ്റാണെന്നു ഗണിക്കാതെ നിങ്ങൾക്കു പറയാമോ? കാരണം പറയുക.

1. ശരാശരി കാണുക:—

(*a*) 59, 61, 55, 58, 57, 62, 60, 57, 59.

(*b*) 28·2, 25·4, 16·3, 30, 28·5.

(*c*) 487, 500, 493, 501, 498, 496, 495, 500.

2. 9 അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു കുടുംബത്തിലെ അച്ഛനും 2 മകളും സമ്പാദിക്കുന്നവരും അവരുടെ മാസാന്തരശമ്പളം യഥാക്രമം 290ക., 195ക., 85ക.യും ആകുന്നു. മാസത്തോറുമുള്ള ചെലവു ഇപ്രകാരമാണ്:— ഭക്ഷണം: 237ക. 1ണ. 6പ. വസ്ത്രം: 58ക. 6ണ. വീട്ടുവാടക: 55ക. കുട്ടികളുടെ വിദ്യാഭ്യാസം: 62ക. 3ണ. മറുചെലവു: 81ക. 14ണ. എന്നാൽ കുടുംബത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ ശരാശരി *a*) വരവു, *b*) ചെലവു, *c*) ക്ഷേമചെലവു കാണുക. ഓരോ ആളുടേയും പേരിൽ ശരാശരി കെട്ടിവെച്ചതു?

3. തൊഴിൽപരിശീലനത്തിന്നായി ഒരു ക്ലാസ്സിലെ 40 വിദ്യാർത്ഥികൾ ചെയ്ത തോട്ടപ്പണി സംബന്ധിച്ചുള്ള വിവരങ്ങൾ താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു:—

വരവു—പച്ചക്കറി വിറ്റു കിട്ടിയ സംഖ്യ: 51ക. 15ണ.

ചെലവു—വേലികെട്ടുവാൻ വാങ്ങിയ സാധനങ്ങളുടെ വില: 28ക. 13ണ. 6പ. ഉപകരണങ്ങൾ—119ക. 8ണ. വിത്തുകൾ—4ക. 7ണ.

ഒരു വിദ്യാർത്ഥിയുടെ ശരാശരി *a*) വരവു, *b*) ചെലവു, *c*) ഒരു വിദ്യാർത്ഥിക്കുവേണ്ടി സ്കൂളിൽനിന്നു ചെലവാക്കിയ ശരാശരി സംഖ്യ പൈവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

4. ഇന്ത്യയിൽ 1944-ാം കൊല്ലത്തിൽ ഉല്പാദിപ്പിച്ച തുണി മില്യൻ ചതുരശ്രവാരകണക്കായി താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു:

മില്ലുകളിൽ: 4410. മിൽതൊൽ—കയ്യറി: 1600. ഖദർ: 15.

ഇന്ത്യയിലെ ജനസംഖ്യ 394 മില്യൻ എന്നു കരുതുന്നതായാൽ, *a*) ഒരു കൈ *b*) ഖദർ ഒഴികെ ഓരോ ഇനത്തിലും ഉല്പാദിപ്പിച്ച തുണി ശരാശരി ഒരു ആൾക്കു എത്ര ച.വാര ആയി? (ച.വാരവരെ കൃത്യമായി ഗണിക്കുക.)

5. ഒരു സർക്കാർ ഉദ്യോഗസ്ഥൻ പ്രവൃത്തിയിൽനിന്നു പിരിഞ്ഞാൽ കിട്ടുന്ന പെൻഷ്യൻ അയാളുടെ ഒടുവിലത്തെ 3 കൊല്ലങ്ങളിലെ മാസാന്തര ശമ്പളത്തിന്റെ ശരാശരിയുടെ പകുതിയാണ്. ഒരു ഉദ്യോഗസ്ഥൻ പ്രവൃത്തിയിൽനിന്നു പിരിഞ്ഞതിന്നു മുമ്പുള്ള 3 കൊല്ലങ്ങളിൽ 8മാസം 360ക.; 1കൊല്ലം 390ക.; ബാക്കി മാസങ്ങളിൽ 450ക. വീതം ശമ്പളം കിട്ടിയെങ്കിൽ അയാളുടെ പെൻഷ്യൻ കണക്കാക്കുക.

6. ഒരു പട്ടണത്തിൽ തിങ്കൾ മുതൽ വെള്ളിവരെയുള്ള ദിവസങ്ങളിലെ ഉഷ്ണസ്ഥിതിയും മഴയും താഴെ പറയും പ്രകാരമായിരുന്നു.

പരമതാപം (ഡിഗ്രി): 82·3, 81·0, 80·8, 81·5, 82·4.

നീചതാപം (ഡിഗ്രി): 74·0, 73·9, 73·2, 74·1, 74·8.

മഴ (അംഗുലം): 0·1, 1·0, 2·7, 1·2, 0·0.

(*a*) പരമതാപങ്ങളുടെ (*b*) നീചതാപങ്ങളുടെ (*c*) മഴയുടെ ശരാശരി കാണുക. ഏതു ദിവസങ്ങളിലാണ് ഇവ ഓരോന്നും ശരാശരിയോടു ഏറ്റവും അടുത്തിട്ടുള്ളതു?

7. ആയിരത്തിന്നു 110ക., 120ക., 95ക., 100ക. 105ക. വീതം യഥാക്രമം 800, 550, 600, 850, 2000 നാളികേരം വാങ്ങിയാൽ 100ന്നു ശരാശരി വിലയെത്ര?

8. ഒരു തീവണ്ടി 125 നാഴിക പോയതിൽ 65 നാഴിക മണിക്കൂറിൽ 20 നാഴിക വീതവും ബാക്കി ദൂരം മണിക്കൂറിൽ 16 നാഴിക വീതവും ആയിരുന്നെങ്കിൽ വണ്ടിയുടെ ശരാശരി ശീഘ്രത കണക്കാക്കുക.

9. ഒരു സ്കൂളിലെ കുട്ടികളുടെ വയസ്സു, ഉയരം, തൂക്കം താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

	ആൺകുട്ടികൾ			പെൺകുട്ടികൾ		
വയസ്സു	എണ്ണം	ഉയരം (അംഗുലം)	തൂക്കം (റാത്തൽ)	എണ്ണം	ഉയരം (അംഗുലം)	തൂക്കം (റാത്തൽ)
11 – 12	43	53	54	20	53	58
12 – 13	74	55	58	29	55	64
13 – 14	40	57	67	32	58	75
14 – 15	55	59	76	19	60	89
15 – 16	48	61	87	11	61	92

ആൺകുട്ടികളുടെ ശരാശരി (a) ഉയരം (b) തൂക്കം.
പെൺകുട്ടികളുടെ ശരാശരി (c) ഉയരം (d) തൂക്കം.
രണ്ടു കൂട്ടികളുടെ ശരാശരി (e) ഉയരം (f) തൂക്കം.
അളവുകളുടെ പൂർണ്ണസംഖ്യവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

10. മംഗലാപുരം എക്സ്പ്രസ്സ് വണ്ടിയുടെ സമയവിവരപ്പട്ടിക താഴെ ചേർക്കുന്നു.

കോഴിക്കോട്ടിൽനിന്നുള്ള ദൂരം (നാഴിക)	സ്റ്റേഷൻ	സമയം	
			മ. മി.
	കോഴിക്കോട്	പുറപ്പെടുന്നു	14.48
26	തിരൂർ	എത്തുന്നു	15.53
		പുറപ്പെടുന്നു	15.59
54	ഷൊറണ്ണൂർ	എത്തുന്നു	17. 6
		പുറപ്പെടുന്നു	17.22
81	ഒലവക്കോട്	എത്തുന്നു	18.28

കോഴിക്കോട്ടുനിന്നു ഒലവക്കോട്ടേക്കുള്ള യാത്രയിൽ വണ്ടിയുടെ ശരാശരി ശീഘ്രത മണിക്കൂറിൽ എത്ര നാഴികയാണ്? ആപ്പീസുകളിൽ നിന്ന സമയം ഒഴിച്ചുള്ള സമയത്തിൽ ശീഘ്രത എത്രയാണ്? ഉത്തരം നാഴികവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

11. ഇന്ത്യയിലെ ഏറവും വലിയ 5 നഗരങ്ങളിൽ 1931, 1941 എന്നീ കൊല്ലങ്ങളിൽ ഉണ്ടായിരുന്ന ജനസംഖ്യ താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

	1931	1941
കല്ക്കത്ത	13,88,644	24,88,083
ബോമ്പായി	11,61,383	14,89,883
മദിരാശി	6,47,230	7,77,481
ഹൈദരബാദ്	4,66,894	7,39,159
ഡെൽഹി	3,47,539	5,21,849

a) ഓരോ കൊല്ലവും ഈ 5 നഗരങ്ങളിലെ ശരാശരി ജനസംഖ്യ.

b) ഓരോ കൊല്ലത്തിലും ഓരോ നഗരത്തിലും ശരാശരിയിൽ അധികമോ കുറവോ ആയിരുന്ന സംഖ്യ.

c) ഓരോ നഗരത്തിലും 10 കൊല്ലങ്ങൾക്കിടയിൽ കൊല്ലന്തോറുമുള്ള ശരാശരി വർദ്ധനവു.

ഇവ അടുത്ത പൂർണ്ണസംഖ്യവരെ കൃത്യമായി കണക്കാക്കുക.

12. നമ്മുടെ രാജ്യത്തിലെ 6 സംസ്ഥാനങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണവും ജനസംഖ്യയും താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

(*a*) ഓരോ സംസ്ഥാനത്തിലും (*b*) 6 സംസ്ഥാനങ്ങളിലുംകൂടി ഒരു ചതുരശ്രനാഴികയിൽ നിവസിക്കുന്ന ജനങ്ങളുടെ ശരാശരി എണ്ണം പൂർണ്ണസംഖ്യവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

സംസ്ഥാനം.	ചതുരശ്രനാഴിക.	ജനസംഖ്യ. (ആയിരക്കണക്കായി)
മദിരാശി	127,768	49,841
ബോമ്പായി	101,894	26,069
പശ്ചിമ ബങ്കാൾ	28,155	21,196
ഉത്തരപ്രദേശം	106,247	55,021
പൂവ്വ പഞ്ചാബ്	37,428	12,697

13. 40 കുട്ടികളുള്ള ഒരു ക്ലാസ്സിൽ 8 മുഹമ്മദീയരും 5 അധഃകൃതവർഗ്ഗക്കാരും, 3 പെൺകുട്ടികളും 2 ഹരിജനങ്ങളുമുണ്ട്. ഹരിജനങ്ങൾ ഫീസ് അടക്കേണ്ടതില്ല. മുഹമ്മദീയരും, അധഃകൃതവർഗ്ഗക്കാരും, പെൺകുട്ടികളും പകുതി

ഫീസും ശേഷമുള്ളവർ മുഴവൻ ഫീസും അടക്കുന്നു. നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട ഫീസ് 5ക. 4ണ.യാണെങ്കിൽ ഒരു വിദ്യാർത്ഥി ശരാശരി എത്ര ഫീസ് അടക്കുന്നു? മേല്പറഞ്ഞതിനു പുറമെ 10ണ. വീതം ഹരിജനങ്ങളൊഴികെ എല്ലാ വിദ്യാർത്ഥികളും അടക്കുന്നതായാൽ ശരാശരി ഫീസ് എത്ര?

14. സപ്തംബർ മാസത്തിൽ ഒരു പട്ടണത്തിൽ 18 ദിവസം $1\frac{1}{2}$ അംഗുലം വീതവും, 6 ദിവസം $\frac{3}{4}$ അംഗുലം വീതവും മഴ പെയ്തു. ബാക്കി ദിവസങ്ങളിൽ മഴ ഉണ്ടായിരുന്നില്ല. എന്നാൽ ആ മാസത്തിൽ ഒരു ദിവസം ശരാശരി എത്ര അംഗുലം മഴ പെയ്തു?

15. ഞാൻ കുറെ മാങ്ങ വാങ്ങി. പകുതി ഡസ്സനു 5ണ. വീതവും, $\frac{1}{3}$ ഭാഗം ഡസ്സനു 4ണ. വീതവും, ബാക്കി ഡസ്സനു 7ണ. വീതവുമാണ് വാങ്ങിയതെങ്കിൽ ഡസ്സനു ശരാശരി എത്ര വിലയായി?

16. ഒരു സ്കൂളിൽ ജൂൺ 1-ാം തിയ്യതി 540 വിദ്യാർത്ഥികൾ ഉണ്ടായിരുന്നു. 7ഉം 14ഉം തിയ്യതികളിൽ യഥാക്രമം 35ഉം, 50ഉം, കുട്ടികൾ സ്കൂൾ വിട്ടുപോകയും, ആ തിയ്യതികളിൽ 40ഉം, 35ഉം വിദ്യാർത്ഥികൾ പുതുതായി ചേരുകയും ചെയ്താൽ ആ മാസത്തിൽ സ്കൂളിലെ കുട്ടികളുടെ ശരാശരി എണ്ണം കാണുക.

17. ഒരു സ്കൂളിൽ ജനുവരി മാസത്തിൽ 18 പ്രവൃത്തിദിവസങ്ങളുണ്ടായിരുന്നു. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ 37 കുട്ടികളിൽ 25 പേർ എല്ലാ ദിവസവും ഹാജരായിരുന്നു. 2പേർ 15 ദിവസവും 3 പേർ 14 ദിവസവും ബാക്കിയുള്ളവർ 11 ദിവസവും ഹാജരുണ്ടായിരുന്നെങ്കിൽ ആ മാസത്തിലെ ശരാശരി ഹാജരെത്ര?

18. ഒരു തീവണ്ടി മണിക്കൂറിൽ 24 നാഴിക വീതം 40 മിനുട്ടു ഓടിയ ശേഷം 15 മിനുട്ടു ഒരു ആപ്പീസിൽ നിന്നു. പിന്നെ 35 മിനുട്ടു മണിക്കൂറിൽ 36 നാഴിക വീതം ഓടി. എന്നാൽ ഈ സമയത്തിനിടയിൽ അതിന്റെ ശരാശരി ശീഘ്രത മണിക്കൂറിൽ എത്ര നാഴികയായിരുന്നു?

19. 27 കുട്ടികളുള്ള ഒരു ക്ലാസ്സിൽ ഒരു കുട്ടിക്കു 45 മാക്ക് കിട്ടി. അവനു 54 മാക്കു കിട്ടിയിരുന്നെങ്കിൽ, ആ ക്ലാസ്സിലെ ശരാശരി മാക്കു 45 ആകുമായിരുന്നു. എന്നാൽ വാസ്തവത്തിൽ ശരാശരി മാക്കെത്ര?

20. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ 30 കുട്ടികളുടെ ശരാശരി തൂക്കം 93 റാത്തലാണ്. അവരുടെ മാസ്റ്ററെയും കൂടി ഉൾപ്പെടുത്തുന്നതായാൽ ശരാശരി തൂക്കം $94\frac{1}{2}$ റാത്തൽ ആകും. എന്നാൽ മാസ്റ്ററുടെ തൂക്കമെത്ര?

21. 54 കുട്ടികൾ ഒരു പരീക്ഷയ്ക്കു ഹാജരായിരുന്നു. അവരുടെ മാക്കു ചേർക്കുമ്പോൾ 63 എന്നതിനു പകരം 36 എന്നു ചേർത്തുപോയി. അപ്പോൾ ശരാശരി 33 എന്നായി കണ്ടുവെങ്കിൽ യഥാർത്ഥമായ ശരാശരി എത്രയാണ്?

22. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ 40 കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സു 17 ആയിരുന്നു. 19 വയസ്സു പ്രായമുള്ള ഒരു കുട്ടിയിട്ടു ഒഴിവിലേക്കു വേറൊരു കുട്ടിവന്നു ചേർന്നപ്പോൾ ശരാശരി വയസ്സു $16\frac{7}{8}$ കൊല്ലമായി. എന്നാൽ പുതുതായി ചേർന്ന കുട്ടിയുടെ വയസ്സെത്ര?

23. കുറെ മേശകളുടെ ശരാശരി വില 39ക.യാകുന്നു. 65ക. വിലയുള്ള ഒരു മേശകൂടി വാങ്ങുന്നതായാൽ ആകെ മേശകളുടെ ശരാശരി വില 40ക. യാകും. എന്നാൽ ഇപ്പോൾ എത്ര മേശകളുണ്ടു?

24. ഒരു പട്ടണത്തിൽ ജൂൺ മുതൽ ഒക്ടോബർ ഉൾപ്പെടെ മാസം ഒന്നിന്നു ശരാശരി 18 അംഗുലം മഴ പെയ്തു. ജൂൺ മാസത്തിൽ 31 അംഗുലവും, ജൂലായിമുതൽ നവമ്പർ ഉൾപ്പെടെ മാസം ഒന്നിന്നു ശരാശരി 14·4 അംഗുലവും മഴ പെയ്യുവെങ്കിൽ നവമ്പറിൽ എത്ര അംഗുലം മഴ പെയ്തു?

25. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ ഒരാഴ്ചയിൽ തിങ്കൾ മുതൽ ആദ്യത്തെ 5 ദിവസങ്ങളിൽ ദിവസം ഒന്നിന്നു ശരാശരി 143ക. 3ണ.ക്കും ചൊവ്വാഴ്ച മുതൽ 5 ദിവസങ്ങളിൽ ദിവസം ഒന്നിന്നു ശരാശരി 145ക. 14ണ.ക്കും സാമാനം വിറ്റാൽ ശനിയാഴ്ച തിങ്കളാഴ്ചയേക്കാൾ എത്ര അധികം ഉറുപ്പികയ്ക്കു സാമാനം വിറ്റു?

26. ഒരു പട്ടണത്തിൽ ജൂലായി മാസത്തിൽ 1-൦൦൭- മുതൽ 15-൦൦൭- ഉൾപ്പെടെ ദിവസം ഒന്നിന്നു ശരാശരി 1·02 അംഗുലം മഴ പെയ്തു. 1-൦൦൭- 1·2 അംഗുലവും 16-൦൦൭- 2·1 അംഗുലവും മഴ പെയ്യുവെങ്കിൽ 2-൦൦൭- മുതൽ 16-൦൦൭- ഉൾപ്പെടെ ദിവസം ഒന്നിന്നു ശരാശരി എത്ര അംഗുലം മഴ പെയ്തു?

27. ഞാൻ കുറെ മാങ്ങ വാങ്ങി. ഇതിൽ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം ആയിരത്തിന്നു 20ക. വീതവും, $\frac{2}{5}$ ഭാഗം ആയിരത്തിന്നു $22\frac{1}{2}$ക. വീതവും, ബാക്കിയുള്ളതു 25ക. വീതവുമാണു വാങ്ങിയതെങ്കിൽ ആയിരത്തിന്നു ശരാശരി എത്ര വില്പനയായി?

28. ഒരു ക്ലാസ്സിൽ ആകെയുള്ള കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സു 14·5ഉം, അതിൽ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സു 13ഉം ബാക്കിയുള്ളതിന്റെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗം കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സു 14ഉം ആയാൽ ശേഷമുള്ളവരുടെ ശരാശരി വയസ്സെത്ര?

29. ഒരു പഴവ്യാപാരി കുറെ മാങ്ങ വിറ്റു. ആകെ എണ്ണത്തിന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം ഡജന്നു 6ണ. വീതവും $\frac{1}{3}$ ഭാഗം ഡജന്നു 5ണ. വീതവും ബാക്കി മുഴുവൻ 1ക. 4ണ.ക്കും വിറ്റപ്പോൾ ഡജന്നു ശരാശരി 4ണ. 10പ. വില കിട്ടി. എന്നാൽ ഒടുവിലത്തെ തരം ഡജന്നു എത്ര വിലക്കാണ് വിറ്റതു? ആകെ എണ്ണത്തിന്റെ വിലയെത്ര?

30. ഒരു നിലത്തിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം, ഏക്കറിന്നു 390ക. വീതവും, $\frac{1}{4}$ ഭാഗം 375ക. വീതവും, $\frac{1}{5}$ ഭാഗം 300ക. വീതവും ബാക്കി 3510ക. യ്ക്കും വിറ്റപ്പോൾ

ഏക്കർ ഒന്നിന്നു ശരാശരി 430 ക. കിട്ടി. എന്നാൽ ഒടുവിലത്തെ ഭാഗം ഏക്കർ ഒന്നിന്നു ശരാശരി എത്ര വിലയായി? ആകെ എത്ര വില കിട്ടി?

31. ഒരു തീവണ്ടി ഒരു കയറ്റം കയറുമ്പോൾ മണിക്കൂറിൽ 24 നാഴിക വീതവും ഇറങ്ങുമ്പോൾ മണിക്കൂറിൽ 36 നാഴിക വീതവും പോകുന്നെങ്കിൽ വണ്ടിയുടെ ശരാശരി ശീഘ്രത കാണുക.

32. m സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി xഉം അവയിൽ n സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി yഉം ആണെങ്കിൽ ബാക്കി സംഖ്യകളുടെ ശരാശരി കാണുക.

മലിരാശി പട്ടണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 17,280 ഏക്കറും ഏക്കർ ഒന്നിന്നു ശരാശരി ജനസംഖ്യ 30·3ഉം ആണ്. ജനങ്ങൾ തിങ്ങി പാർക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 2804 ഏക്കറും അവിടത്തെ ജനസംഖ്യ ഏക്കറിന്നു ശരാശരി 135·3ഉം ആണെങ്കിൽ പട്ടണത്തിൽ ബാക്കി സ്ഥലത്തിൽ ഏക്കർ ഒന്നിന്നു ശരാശരി ജനസംഖ്യ എത്രയെന്നു (1 മാശകസ്ഥാനംവരെ) കൃത്യമായി കാണുക. (1914)

33. ഒരു ഗുമസ്തൻ ഉദ്യോഗത്തിൽ പ്രവേശിച്ചശേഷം ആദ്യത്തെ മൂന്നു കൊല്ലങ്ങളിൽ അയാളുടെ ശമ്പളം 80 പവൻ വീതമായിരുന്നു. പിന്നീടു 12 കൊല്ലത്തോളം പ്രതിവർഷം 10 പവൻവീതം വർദ്ധിച്ചശേഷം അയാളുടെ ശമ്പളം മാറാതെ നിന്നു. ഉദ്യോഗത്തിൽനിന്നു പിരിഞ്ഞപ്പോൾ കൊല്ലം ഒന്നിന്നു തന്റെ ശരാശരി ശമ്പളം 174പ. 10ക്കി. ആയിരുന്നുവെന്നു കണ്ടു. എന്നാൽ അയാൾ എത്ര കൊല്ലം പ്രവൃത്തിയെടുത്തു? (1925)

34. 20 കതിരകളുടെ ശരാശരി വില 30 ഗിനിയാകുന്നു. അവയിൽ 8 എണ്ണത്തിന്നു 30 പവൻ വീതമാകുന്ന വില കൊടുത്തതെങ്കിൽ ബാക്കിയുള്ളവയുടെ ശരാശരി വിലയെത്ര? (1934)

35. ഒരു ക്ലാസ്സിൽ 3 വകുപ്പുകൾ ഉണ്ടു. ഒരു കണക്കുപരീക്ഷയിൽ 30 കുട്ടികളുള്ള വകുപ്പിലെ കുട്ടികളുടെ ശരാശരി മാർക്ക് 40 ശ. മാ.വും, 36 കുട്ടികളുള്ള വകുപ്പിലെ ശരാശരി 35 ശ. മാ.വും, 34 കുട്ടികളുള്ള വകുപ്പിലെ ശരാശരി 30 ശ.മാ.വുമാണെങ്കിൽ ഒട്ടാകെ കുട്ടികളുടെ ശരാശരി മാർക്ക് കാണുക. (1936)

അദ്ധ്യായം 2.

സംബന്ധം (Ratio).

ഒരു ഔഷധത്തിന്റെ യോഗം പറയുമ്പോൾ അതിൽ ചേർക്കേണ്ടുന്ന സാധനങ്ങളുടെ തൂക്കമോ അളവോ പറയു

ന്നതിനു പകരം ഓരോ സാധനത്തിന്റെയും ഇത്ര ഓഹരി ചേർക്കേണമെന്നാണ് പറയുന്നത്. ഉദാഹരണമായി 8 പലം തിപ്പല്ലിയോടു 2 പലം ചുക്ക് ചേർക്കേണമെന്നു വിചാരിക്കുക. ഇവിടെ ഔഷധത്തിൽ ചുക്കിനേക്കാൾ, 6 പലം അധികം തിപ്പല്ലി വേണമെന്നല്ല, ചുക്കിന്റെ 4 ഇരട്ടി തൂക്കം തിപ്പല്ലി വേണമെന്നാണ് അർത്ഥം. ഈ വിധത്തിൽ സാധനങ്ങളുടെ പരിമാണങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുന്നതിനു അതായതു ഒന്നു മറ്റതിന്റെ എത്ര ഇരട്ടിയോ അല്ല ഏതൊരംശമോ എന്നു നിശ്ചയിക്കുന്നതിനു അവ തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം (Ratio) കാണുക എന്നു പറയുന്നു.

തിപ്പല്ലിയുടെ തൂക്കം = ചുക്കിന്റെ തൂക്കത്തിന്റെ $\frac{4}{1}$, അഥവാ, 4 ഇരട്ടി.

തിപ്പല്ലിയുടെ തൂക്കം ചുക്കിന്റെ തൂക്കത്തിന്റെ 4 ഇരട്ടിയിൽ അധികമാകുകയോ, കുറയുകയോ ചെയ്താൽ ഔഷധത്തിന്റെ ഗുണം വ്യത്യാസപ്പെടും.

മേല്പറഞ്ഞ സംബന്ധത്തെ താഴെ പറയുംപ്രകാരമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

തിപ്പല്ലിയുടെ തൂക്കവും ചുക്കിന്റെ തൂക്കവും തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം = 8 : 2. : എന്ന ചിഹ്നം ÷ എന്ന ചിഹ്നത്തിലെ വരവിട്ടെഴുതിയതാണ്. 8 : 2 (8നു 2 എന്നു വായിക്കുക) എന്നു പറഞ്ഞാൽ 8നു 2നോടുള്ള സംബന്ധം എന്നർത്ഥം. 8ഉം 2ഉം ഈ സംബന്ധത്തിന്റെ പദ (Terms)ങ്ങളാകുന്നു.

1പലം 10ക.തൂക്കമായതുകൊണ്ടു മേൽപ്പറഞ്ഞ യോഗത്തെ 80ക.തൂക്കം തിപ്പല്ലിയും 20ക.തൂക്കം ചുക്കും ചേർന്ന യോഗം എന്നു പറയാം.

$\therefore$ 8 : 2 = 80 : 20

ഒരു സംബന്ധത്തിന്റെ പദങ്ങളെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ടു പെരുക്കുന്നതിനാൽ സംബന്ധത്തിന്റെ വില മാറുകയില്ലെന്നു ഇതിൽനിന്നു തെളിയുന്നു.

മേൽ പറഞ്ഞ ഔഷധത്തിന്റെ പകുതിയെടുത്താൽ അതിലുള്ള തിപ്പല്ലിയുടെയും ചുക്കിന്റെയും തൂക്കം യഥാക്രമം 4 പലവും 1 പലവും ആയിരിക്കും.

അപ്പോൾ തൂക്കങ്ങളുടെ സംബന്ധം = 4 : 1

∴ 8 : 2 = 4 : 1

ഒരു സംബന്ധത്തിന്റെ പദങ്ങളെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നതിനാൽ സംബന്ധത്തിന്റെ വില മാറുകയില്ലെന്നു ഇതിൽനിന്നു തെളിയുന്നു.

പൂർണ്ണസംഖ്യകളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുന്ന പ്രകാരംതന്നെ ഭിന്നങ്ങളേയും താരതമ്യപ്പെടുത്താം.

3 രാത്തൽ പഞ്ചസാരയും 7 രാത്തൽ ഗോതമ്പുമായി ചേർത്തുള്ള ഒരു പലഹാരത്തിൽ പഞ്ചസാരയുടേയും മാവിന്റേയും സംബന്ധം = 3 : 7.

10 രാത്തൽ പലഹാരത്തിൽ പഞ്ചസാരയുടെ തൂക്കം = 3 രാത്തൽ

= പലഹാരത്തിന്റെ $\frac{3}{10}$.

10 രാത്തൽ പലഹാരത്തിൽ മാവിന്റെ തൂക്കം = 7 രാത്തൽ

= പലഹാരത്തിന്റെ $\frac{7}{10}$.

ഇതിൽനിന്നു $\frac{3}{10} : \frac{7}{10}$ എന്ന സംബന്ധവും 3 : 7 എന്ന സംബന്ധവും സമമാണെന്നു തെളിയുന്നു.

അതിനാൽ രണ്ടു ഭിന്നങ്ങളുടെ സംബന്ധം അവയുടെ ഛേദങ്ങളെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ടു പെരുക്കുന്നതിനാൽ മാറുന്നതല്ലെന്നു തെളിയുന്നു.

ഇതേ പ്രകാരം രണ്ടു ഭിന്നങ്ങളുടെ സംബന്ധം അവയെ ഒരേ സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നതിനാൽ മാറുന്നതല്ലെന്നും തെളിയിക്കാം.

പൂർണ്ണസംഖ്യകളേയോ ഭിന്നങ്ങളേയോ താരതമ്യപ്പെടുത്തിയ പ്രകാരം സംബന്ധങ്ങളേയും താരതമ്യപ്പെടുത്താം.

5 : 3 എന്ന സംബന്ധവും 2 : 3 എന്ന സംബന്ധവും താരതമ്യപ്പെടുത്തുക. രണ്ടിലും 2-ാമത്തെ പദങ്ങൾ സമമാണ്.

∴ 5 : 3 എന്ന സംബന്ധം 2 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തേക്കാൾ വലുതാണ്. ഇതേപ്രകാരം 7 : 8 എന്ന സംബന്ധം 9 : 8 എന്ന സംബന്ധത്തേക്കാൾ ചെറുതാണ്.

6 : 11, 6 : 7 എന്ന രണ്ടു സംബന്ധങ്ങളിൽ ഒന്നാമത്തെ പദങ്ങൾ സമമാണ്. ഒന്നാമത്തേതിന്റെ 2-ാമത്തെ പദം മറ്റേതിന്റെ 2-ാമത്തെ പദത്തേ

ക്കാൾ വലുതായതുകൊണ്ട് ഒന്നാം സംബന്ധം രണ്ടാം സംബന്ധത്തേക്കാൾ ചെറുതാണ്.

സംബന്ധങ്ങളെ ഭിന്നങ്ങളായി കരുതാവുന്നതുകൊണ്ട് ഭിന്നങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുവാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന മാർഗ്ഗങ്ങളെ സംബന്ധങ്ങളേയും താരതമ്യപ്പെടുത്തുവാൻ ഉപയോഗിക്കാം.

3 : 5, 4 : 7 എന്നീ സംബന്ധങ്ങളിൽ ഏതാണ് വലിയതു? ഒന്നാം പദങ്ങളെ സമമാക്കുവാൻ ഒന്നാം സംബന്ധത്തെ 4 കൊണ്ടും രണ്ടാം സംബന്ധത്തെ 3 കൊണ്ടും പെരുക്കണം.

$$3 : 5 = 12 : 20. \qquad 4 : 7 = 12 : 21.$$

∴ ഒന്നാം സംബന്ധം രണ്ടാം സംബന്ധത്തേക്കാൾ വലുതാണ്.

അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടാം പദങ്ങളെ സമമാക്കുക.

സംബന്ധങ്ങളെ യഥാക്രമം 7 കൊണ്ടും 5 കൊണ്ടും പെരുക്കണം.

$$3 : 5 = 21 : 35. \qquad 4 : 7 = 20 : 35.$$

ഇതിൽനിന്നും ഒന്നാം സംബന്ധമാണ് വലുതെന്നു തെളിയുന്നു.

സമമാക്കുന്ന പദങ്ങൾ പരസ്പരം അവിഭാജ്യമല്ലെങ്കിൽ അവയുടെ അധമ സാധാരണഗുണിതം കണ്ടാൽ മതി.

6 : 5, 8 : 7 എന്ന സംബന്ധങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

6 ന്റെയും 8 ന്റെയും അ.സാ.ഗു. = 24

$$6 : 5 = 6 \times 4 : 5 \times 4 = 24 : 20$$
$$8 : 7 = 8 \times 3 : 7 \times 3 = 24 : 21$$

ഒന്നാം സംബന്ധമാണ് വലിയതു.

ഇതേപ്രകാരം രണ്ടിലധികം സംബന്ധങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്താം.

പ്രതിക്രമസംബന്ധം (Inverse ratio).

സംബന്ധങ്ങളെ പ്രസ്താവിക്കുമ്പോൾ പദങ്ങളുടെ ക്രമം വളരെ മുഖ്യമാണെന്നതു വ്യക്തമാണല്ലോ.

20 നാഴിക നടപ്പാൻ A ക്കു 4 മണിക്കൂറും B ക്കു 5 മണിക്കൂറും വേണം. A, B എന്നവക്ക് ഒരേദൂരം നടപ്പാൻ വേണ്ടുന്ന സമയത്തിന്റെ സംബന്ധം 4 : 5 ആണ്. അവരുടെ ശീഘ്രത മണിക്കൂറിൽ 5ഉം 4ഉം നാഴികയാണ്.

MARTHOMA CHRISTIAN COLLEGE LIBRARY * CALICUT 37171

അതായതു ശീഘ്രതയുടെ സംഖ്യവ്യസം = 5 : 4. അഥവാ, ഒരേ ദൂരം നടക്കുവാൻ വേണ്ടുന്ന സമയത്തിന്റെ സംബന്ധം ശീഘ്രതയുടെ സംബന്ധത്തിന്റെ വിപരീതമാണ്. ഇങ്ങിനെയുള്ള സംബന്ധങ്ങളെ പ്രതിക്രമസംബന്ധങ്ങൾ (Inverse ratios) എന്നു പറയുന്നു. (പ്രതിക്രമസംബന്ധങ്ങൾക്കു ഉദാഹരണങ്ങൾ വിദ്യാർത്ഥി കണ്ടുപിടിക്കണം).

നമുക്കു ഒരാട്ടിന്റേയും ഒരു പശുവിന്റേയും വിലയെ താരതമ്യപ്പെടുത്താം. ഒന്നിന്റെ തൂക്കത്തേയും മറ്റതിന്റെ ഉയരത്തേയും താരതമ്യപ്പെടുത്തുവാൻ കഴികയില്ല. താരതമ്യപ്പെടുത്തുന്ന പരിമാണങ്ങൾ ഒരേവർഗ്ഗത്തിൽതന്നെ ഉൾപ്പെട്ടവയായിരിക്കണം.

5ണ. 4പ. യേയും 1ക. 2ണ. യേയും- താരതമ്യപ്പെടുത്താം. കാരണം ഇവ രണ്ടിനേയും ഒരേരൂപത്തിലാക്കിമാറ്റാം. താരതമ്യപ്പെടുത്തുന്ന പരിമാണങ്ങൾ ഒരേവർഗ്ഗത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ട ഒരേരൂപമായോ പല രൂപമായോ ഇരിക്കാം.

7ക. : 4ക. = 7 : 4 = $\frac{7}{4}$. $\frac{7}{4}$ക. യല്ല.

സംബന്ധങ്ങൾ കേവലസംഖ്യകൾ (abstract numbers) ആകുന്നു. അവ വസ്തുസൂചകസംഖ്യകൾ (Concrete numbers) അല്ല.

രണ്ടു തുകകൾ തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം പൂർണ്ണസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നതാണുത്തമം.

7ണ. 4പ.യും 5ണ. 6പ.യും തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം = $7\frac{1}{2}$ണ. : $5\frac{1}{2}$ണ. = 44:33 (രണ്ടു പടങ്ങളേയും അവയുടെ ഛേദകങ്ങളുടെ അ.സാ.ഗു.കൊണ്ടു പെരുക്കി) പടങ്ങളെ കഴിയുന്നതു ചുരുക്കുന്നതു നന്നായിരിക്കും. മേൽപറഞ്ഞ സംബന്ധത്തിന്റെ പടങ്ങളെ അവയുടെ ഉ.സാ.ഘ.കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ സംബന്ധം 4 : 3 എന്നാകും.

a) 2 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിന്റെ പടങ്ങളോടു ഒരേ സംഖ്യകൂട്ടുക. സംബന്ധത്തിന്റെ വില മാറുമോ? വർദ്ധിക്കുമോ? കുറയുമോ? ഉദാഹരണമായി 1 കൂട്ടുക. പുതിയ സംബന്ധം = 2+1 : 3+1 = 3 : 4. വില വർദ്ധിച്ചിരിക്കുന്നു. ഒന്നാം പദം രണ്ടാം പദത്തെക്കാൾ ചെറുതായ വേറെയും സംബന്ധങ്ങളെടുത്തു ഇതേ പരീക്ഷണം ചെയ്യുക.

b) അതേ സംബന്ധങ്ങളുടെ പടങ്ങളിൽനിന്നു ഒരേ സംഖ്യ കിഴിക്കുക. നിങ്ങൾ എന്തു അനുമാനിക്കുന്നു?

c) 1-ാം പദം 2-ാം പദത്തേക്കാൾ വലുതായ സംബന്ധങ്ങളെടുത്തു. (1) അവയുടെ പടങ്ങളോടു ഒരേ സംഖ്യ കൂട്ടുകയും, (2) അവയുടെ പടങ്ങളിൽ നിന്നു ഒരേ സംഖ്യ കിഴിക്കുകയും ചെയ്യുക. ആദ്യസംബന്ധങ്ങളേയും പുതുതായി ഉണ്ടാവുന്ന സംബന്ധങ്ങളേയും താരതമ്യപ്പെടുത്തി നിങ്ങളുടെ അനുമാനം എഴുതുക.

ഉദാ: — (1) എ, ബി എന്നിവക്കു 5 : 2 എന്ന സംബന്ധത്തിൽ 42ക. ഭാഗിച്ചു കൊടുക്കുക. ഏക്കു 5 അംശം കൊടുക്കുമ്പോൾ ബീക്കു 2 അംശം കൊടുക്കണം.

∴ ആകെ 7 അംശമായി ഭാഗിക്കുക.

∴ എയുടെ ഓഹരി = 42ക. യുടെ $\frac{5}{7}$

$= 30$ക.

ബീയുടെ ഓഹരി = 42ക. യുടെ $\frac{2}{7}$

$= 12$ക.

കുറിപ്പു: — ബീയുടെ ഓഹരി എയുടെ ഓഹരി കിഴിച്ചും കാണാം.

ഉദാ: — (2) എ : ബി = 3 : 4; ബി : സി = 6 : 5. എന്നാൽ എ, ബി, സി തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം കാണുക.

ബീയുടെ ഓഹരികളായ 4, 6 എന്നിവയുടെ അ. സാ. ഗു. കാണുക.

ബീക്കു 4 കിട്ടുമ്പോൾ എയുടെ ഓഹരി = 3

,, 12 ,, ,, ,, $= \frac{12 \times 3}{4} = 9$

,, ,, ,, സിയുടെ ,, $= \frac{12 \times 5}{6} = 10.$

∴ എ : ബി : സി = 9 : 12 : 10

ഈ സംബന്ധപ്രകാരം 124ക. പങ്കിടുക.

എയുടെ ഓഹരി = 124ക. യുടെ $\frac{9}{9+12+10} = 36$ക.

ബിയുടെ ഓഹരി = 124ക. യുടെ $\frac{12}{31} = 48$ക.

സിയുടെ ഓഹരി = 124ക. യുടെ $\frac{10}{31} = 40$ക.

കുറിപ്പു: — മൂന്നു ഓഹരികളും കൂട്ടി 124ക. കിട്ടുന്നുവോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ഒരു സംബന്ധത്തിന്റെ പടങ്ങൾ ഭിന്നങ്ങളുമാവാം. കാറു പണം $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{5}$ എന്ന സംബന്ധത്തിൽ എ, ബി, സി എന്ന മൂന്നു പേർക്കു ഭാഗിച്ചുകൊടുത്തപ്പോൾ എയുടേയും, സിയുടേയും ഓഹരികൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 37ക. 8ണ. ആയി

രുന്നെങ്കിൽ ആകെ സംഖ്യ എത്രയെന്നും ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടിയതെത്രയെന്നും കാണുക.

എ : ബി : സി $= \frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{5}$

പലങ്ങളെ അവയുടെ ഛേദകങ്ങളുടെ അ.സാ.ഗു. കൊണ്ടു പെരുക്കുക.

അപ്പോൾ സംബന്ധം $= \frac{30}{2} : \frac{30\times2}{3} : \frac{30\times3}{5}$

$= 15 : 20 : 18.$

∴ ഏയുടേയും സീയുടേയും ഓഹരികൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം = ആകെ സംഖ്യയുടെ $\frac{18-15}{15+20+18}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{3}{53} = 37$ക. 8ണ.

∴ ആകെ സംഖ്യ $= \frac{37\text{ക. }8\text{ണ.}\times53}{3} = 662$ക. 8ണ.

ഏയുടെ ഓഹരി $= 662$ക. 8ണ. $\times \frac{15}{53}$

ഇതേപ്രകാരം ശേഷമുള്ളവരുടെ ഓഹരികൾ കാണാം.

വ്യത്യാസം 37ക. 8ണ. യാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

അഭ്യാസം 2.

A. (വാങ്മൂലം)

a. താഴെയുള്ള സംബന്ധങ്ങൾക്കു സമമായ 2 സംബന്ധങ്ങൾ വീതം പറയുക.

1. 30 : 50. 2. 22 : 8. 3. $1\frac{1}{2} : 4$. 4. 3·5 : 4·2.

b. കോഴിക്കോട്ടിലേയും പാലക്കാട്ടിലേയും ജനസംഖ്യകൾ 117000ഉം 65000ഉം ആണെങ്കിൽ അവയുടെ സംബന്ധം ഏറ്റവും എളുപ്പമായ രൂപത്തിൽ പറയുക.

c. ഒരു മുറിയുടെ നീളം 20 അടിയും വീതി 16 അടിയും ആണ്. വേറൊരു മുറിയുടെ നീളം 25 അടിയും വീതി 12 അടിയും ആണ്. അവയുടെ 1. നീളത്തെ 2. വീതിയെ 3. ചുറ്റളവിനെ 4. ക്ഷേത്രഫലത്തെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

d. ഒരു തീവണ്ടി 5 മണിക്കൂറിൽ 120 നാഴിക ഓടും. അതേ ദൂരം പോകാൻ ഒരു കാറിന്നു 6 മണിക്കൂർ വേണം. രണ്ടിന്റെയും ശീഘ്രതയെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

e. ഒരു പലഹാരത്തിൽ മാവും പഞ്ചസാരയും 10 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ട്. വേറൊരു പലഹാരത്തിൽ 15 റാത്തൽ മാവിനോടു 4 റാത്തൽ പഞ്ചസാര ചേർത്തിട്ടുണ്ട്. അധികം മധുരമുള്ളതു ഏതു പലഹാരമാണ്?

1. താഴെയുള്ള സംബന്ധങ്ങളെ ചുരുക്കിയെഴുതുക.

(i) 117 : 78 (iv) ·25 : 1·5

(ii) $3\frac{1}{5} : 2\frac{1}{5}$ (v) ·38 : ·4

(iii) $4\frac{1}{7} : 1\frac{1}{4}$ (vi) 1ക. 5ണ. 4പ. : 13ണ. 4പ.

2. 10 പറ പൂഴിയും 4 പറ ചുണ്ണാമ്പും ചേർത്തുണ്ടാക്കിയ കുമ്മായത്തിന്റെ ഏതൊരംശമാണ് (*a*) പൂഴി (*b*) ചുണ്ണാമ്പ്?

3. 2 സഞ്ചികളിൽ 4പ. 7ക്വി. 6പൌ. ഉം, 3പ. 6ക്വി. 8പൌ. മുണ്ട്. അവയിലെ സംഖ്യകളുടെ സംബന്ധം കാണുക.

4. 13·2 സെ. മീ. നീളമുള്ള ഒരു രേഖയുടെ ഒരു ഭാഗം 4·8 സെ. മീ. ആണ്. രണ്ടു ഭാഗങ്ങളുടേയും സംബന്ധം കാണുക.

5. കൃഷ്ണന്നു 1ക. 2ണ. കിട്ടുമ്പോൾ രാമന്നു 1ക. 12ണ. കിട്ടത്തക്കവണ്ണം 28ക. 12ണ. പങ്കിടുക.

6. മൂന്നു സ്ത്രീകളിൽ ആകെ 525 കുട്ടികളുണ്ട്. അവയിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം 7 : 8 : 6 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണെങ്കിൽ ഒരോ സ്ത്രീയിലേയും കുട്ടികളുടെ എണ്ണം കാണുക.

7. രണ്ടു കുട്ടികളുടെ വയസ്സ് 6 : 7 എന്ന സംബന്ധത്തിലാകുന്നു. ഇളയവന്നു 15 വയസ്സ് ആണെങ്കിൽ മൂത്തവന്റെ വയസ്സെത്ര? 10 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ അവരുടെ വയസ്സ് ഏതു സംബന്ധത്തിലായിരിക്കും?

8. രണ്ടു പുസ്തകങ്ങളുടെ വില 7 : 9 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണ്. അവയുടെ വിലകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 1ക. യാണെങ്കിൽ ഓരോന്നിന്റെയും വില കാണുക. അവയുടെ വില 8ണ. വീതം കുറച്ചാൽ വിലകളുടെ സംബന്ധം എന്തായിരിക്കും? വില 8ണ. വീതം വർദ്ധിപ്പിച്ചാൽ സംബന്ധം എന്തായിരിക്കും? വില ഉരുപ്പികക്കു 4ണ. വീതം കുറച്ചാൽ സംബന്ധം എന്തായിരിക്കും?

9. ഒരു പ്രവൃത്തിശാലയിൽ പുരുഷന്മാരും സ്ത്രീകളും, കുട്ടികളും കൂടി 195 പ്രവൃത്തിക്കാർ ഉണ്ട്. അവരുടെ എണ്ണം 7 : 5 : 1 എന്ന സംബന്ധത്തിലും കൂലി 4 : 3 : 2 എന്ന സംബന്ധത്തിലും ആണ്. ഒരു സ്ത്രീക്കു ദിവസത്തിൽ $13\frac{1}{2}$ണ. കൂലി കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ പ്രവൃത്തിക്കാർക്കു ആകെ ഒരു ദിവസത്തിൽ എത്ര കൂലി കിട്ടുന്നു?

10. $\frac{2}{5} : \frac{3}{4} : \frac{3}{5}$ എന്ന സംബന്ധത്തിൽ 13ക. 10ണ.യെ ഭാഗിക്കുക.

11. ഒരാൾ തന്റെ സ്വത്ത് അയാളുടെ മൂന്നു മക്കൾക്കു അവരുടെ വയസ്സിന്റെ സംബന്ധത്തിൽ ഭാഗിച്ചുകൊടുത്തു. മക്കളുടെ വയസ്സ് 16കൊ. 4മാസവും, 14 കൊല്ലവും, 11 കൊ. 8 മാസവും, അയാളുടെ സ്വത്തിന്റെ വില 7200ക.

യും ആണെങ്കിൽ ഏററവും മൂത്തവനും, ഏററവും ഇളയവനെക്കാൾ എത്രയധികം കിട്ടിയിരിക്കണം?

12. കറെ നിലം 3 സഹോദരന്മാർക്കു $\frac{2}{5}$: $\frac{3}{7}$: $\frac{1}{6}$ എന്ന സംബന്ധത്തിൽ ഭാഗിച്ചപ്പോൾ ഏററവും അധികം കിട്ടിയവനു $2\frac{1}{2}$ ഏക്കർ നിലമുണ്ടെന്നു കണ്ടു. എന്നാൽ മററു രണ്ടു പേർക്കും എത്ര ഏക്കർവീതം കിട്ടിയിരിക്കണം?

13. എ : ബി = 7 : 8; ബി : സി = 12 : 7 എന്നാൽ എ, ബി, സി എന്നിവയുടെ സംബന്ധം കാണുക.

14. എ : ബി = 11 : 10; ബി : സി = 11 : 9 എന്നാൽ എ : ബി : സി എന്ന സംബന്ധം കാണുക.

15. എ : ബി = 16 : 21; എ : സി = 14 : 15. എന്നാൽ ബീയും, സീയും തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം ഏററവും ചെറിയ പൂർണ്ണസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുക.

16. എ : ബി = 5 : 7; സി : ബി = 6 : 5 എന്നാൽ സി : എ എന്ന സംബന്ധം ഏററവും ചുരുക്കി എഴുതുക.

17. ഏയുടെയും ബീയുടെയും ശമ്പളം 10 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണ്. ഏയുടെയും സീയുടെയും ശമ്പളം 6 : 7 എന്ന സംബന്ധത്തിലുമാണ്. മൂന്നു പേരുടേയും ആകെ ശമ്പളം 555 ക.യാണെങ്കിൽ ഓരോരുത്തരുടെയും ശമ്പളം വെവ്വേറെ കാണുക.

18. മൂന്നു ക്ലാസ്സുകളുള്ള ഒരു സ്കൂളിൽ ആകെ 477 വിദ്യാർത്ഥികളുണ്ട്. ഒന്നും രണ്ടും ക്ലാസ്സുകളിലെ എണ്ണം 9 : 8 എന്ന സംബന്ധത്തിലും രണ്ടും മൂന്നും ക്ലാസ്സുകളിലെ എണ്ണം 7 : 5 എന്ന സംബന്ധത്തിലുമാണെങ്കിൽ ഓരോ ക്ലാസ്സിലും എത്ര വിദ്യാർത്ഥികളുണ്ട്?

19. ഏക്കർ 1ണ. കിട്ടുമ്പോൾ ബീക്കു 1ണ. 4പ.യും ബീക്കു 2ക. 3ണ. കിട്ടുമ്പോൾ സീക്ക് 1ക. 14ണ.യും കിട്ടുകയുള്ളൂ 36ക. 8ണ. ഈ മൂന്നു പേർക്കു ഭാഗിച്ചുകൊടുക്കുക.

20. x ഔൺസ് ചെമ്പും y ഔൺസ് വെള്ളിയും ചേർത്തു ഒരു കലപ്പിന്റെ ഏതൊരംശമാണ് വെള്ളി? 15 റാത്തൽ തൂക്കമുള്ള കലപ്പിൽ എത്ര ഔൺസ് ചെമ്പുണ്ട്? ഒരു കലപ്പിൽ 8 റാത്തൽ വെള്ളിയുണ്ടെങ്കിൽ ചെമ്പ് എത്ര റാത്തൽ ഉണ്ട്?

21. c കുട്ടികളുള്ള ഒരു ക്ലാസ്സിൽ g പെൺകുട്ടികളുണ്ട്. ആൺകുട്ടികൾ ക്ലാസ്സിന്റെ ഏതൊരംശമാണ്? ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണവും പെൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണവും ഏതൊരു സംബന്ധത്തിലാണുള്ളതു്?

22. ഒരു ദിവസം സൂര്യൻ 6മ.10മി.ന്നു് ഉദിച്ചു 5മ.50മി.ന്നു് അസ്തമിച്ചു. അന്നത്തെ രാവിന്റെയും പകലിന്റെയും മൈഷ്യം താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

23. കാലണയും പൈയും മാത്രമുള്ള ഒരു സഞ്ചിയിൽ ഈ നാണയങ്ങളുടെ എണ്ണം 5 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണു്. അവയുടെ എണ്ണത്തിന്റെ സംബന്ധം 3 : 5 ആയാൽ സഞ്ചിയിലെ സംഖ്യ 4ണ. കുറയും. എന്നാൽ സഞ്ചിയിൽ ഇപ്പോൾ എത്ര പണം ഉണ്ടു്?

24. ഒരു തീവണ്ടി ഒരു മണിക്കൂറിൽ 25 നാഴിക പോകും. വേറൊന്നിനു 275 നാഴിക പോകുവാൻ 12 മണി. 13 മി. 20 സെ. വേണ്ടിവരുന്നു. എന്നാൽ ഇവയുടെ ശീഘ്രതയെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

25. ഏയും, ബീയും 5 നാഴിക ദൂരം നടക്കുവാൻ നിശ്ചയിച്ചു. ബി ഒരു മണിക്കൂറിൽ 3 നാഴിക വീതം നടക്കുന്നു. ബി പുറപ്പെട്ട 10 മിനുട്ടു കഴിഞ്ഞു എ പുറപ്പെട്ടെങ്കിലും നിശ്ചിതസ്ഥലത്തു ബി എത്തുന്നതിനു 15 മിനുട്ടു മുമ്പെ എത്തി. എന്നാൽ അവരുടെ ശീഘ്രതയെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

26. ഒരു സംഖ്യയുടെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗം വേറൊരു സംഖ്യയുടെ $\frac{5}{7}$ ഭാഗത്തിനു സമമാണെങ്കിൽ ആ സംഖ്യകളുടെ സംബന്ധം കാണുക.

27. എന്റെ കൈവശം ഉറുപ്പികയും, കാലുറുപ്പികയും, അരയണയും കൂടി ആകെ 185 നാണയങ്ങൾ ഉണ്ടു്. ഓരോതരം നാണയത്തിന്റെയും ആകെ വില സമമാണെങ്കിൽ ഓരോ നാണയവും എത്ര വീതമുണ്ടു?

28. 4 കസേലയുടെയും 3 മേശയുടെയും വിലയുടെ സംബന്ധം 2 : 5 ആകുന്നു. എന്നാൽ ഒരു മേശയുടെയും ഒരു കസേലയുടെയും വിലയുടെ സംബന്ധം കാണുക.

29. 15 ആടുകൾക്കും 17 പശുക്കൾക്കും കൂടി 905ക. വിലയായി. ഒരു ആട്ടിന്റെയും ഒരു പശുവിന്റെയും വില 3 : 8 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണെങ്കിൽ ഒരു പശുവിന്റെ വിലയെത്ര?

30. രണ്ടു സംഖ്യകൾ 14 : 17 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണു്. അവയുടെ ഗുണനഫലം 5950 ആകുന്നു. എന്നാൽ സംഖ്യകൾ ഏവ?

31. 7 പലം മാവും 3 പലം പഞ്ചസാരയും ചേർത്തുണ്ടാക്കിയ ഒരു പലഹാരമുണ്ടു. വേറൊരു പലഹാരത്തിൽ ഇവ 5 : 2 എന്ന സംബന്ധത്തിൽ ചേർത്തിരിക്കുന്നു. ഏതു പലഹാരമായിരിക്കും അധികം മധുരമുള്ളതു?

32. ഒരേ തൂക്കമുള്ള രണ്ടാഭരണങ്ങളിൽ ഒന്നിൽ സ്വർണ്ണത്തിന്റെയും ചെമ്പിന്റെയും തൂക്കങ്ങളുടെ സംബന്ധം 17 : 7ഉം മറ്റേതിൽ 27 : 11ഉം ആകുന്നു. എന്നാൽ ഏതു ആഭരണത്തിനാണു് അധികം വിലയുള്ളതു?

33. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ 4 : 5 : 6 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണു്. എന്നാൽ ഏറ്റവും വലിയ കോണിന്റെ വലിപ്പം കാണുക.

34. രണ്ടു സമചതുരങ്ങളുടെ ഭുജങ്ങൾ 3 : 5 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണ്. എന്നാൽ അവയുടെ ക്ഷേത്രഫലം ഏതു സംബന്ധത്തിലാണ്?

35. ഒരു തൊഴിൽശാലയിലെ പുരുഷന്മാരുടേയും, സ്ത്രീകളുടേയും, കുട്ടികളുടേയും എണ്ണം 1 : 2 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിലും അവരുടെ കൂലി 6 : 3 : 2 എന്ന സംബന്ധത്തിലുമാണ്. 50 പുരുഷന്മാരുള്ളപ്പോൾ ആകെ ആഴ്ചക്കൂലി 225പവൻ ആണെങ്കിൽ ഓരോ പുരുഷനും, സ്ത്രീക്കും, കുട്ടിക്കും ഒരാഴ്ചയിൽ കിട്ടുന്ന കൂലി വെവ്വേറെ കാണുക. (1919)

36. ഒരു നിയമനിർമ്മാണസഭയിലേക്കു തിരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള അംഗങ്ങളിൽ മന്ത്രികക്ഷിക്കാരുടേയും, ശേഷമുള്ളവരുടേയും എണ്ണം 5 : 2 എന്ന സംബന്ധത്തിലായിരുന്നു. 18 പേർ മന്ത്രികക്ഷിവിട്ട് എതുകക്ഷിയിൽ ചേർന്നതിനാൽ രണ്ടു കക്ഷികളുടേയും എണ്ണം 26 : 23 എന്ന സംബന്ധത്തിലായി. എന്നാൽ തിരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട അംഗങ്ങളുടെ ആകെ എണ്ണമെത്ര? (1924)

37. ഒരു തിരഞ്ഞെടുപ്പിൽ എ, ബി എന്ന രണ്ടുപേർക്കു കിട്ടിയ വോട്ടുകളുടെ എണ്ണം 19 : 16 എന്ന സംബന്ധത്തിലായിരുന്നു. പിന്നീടു നടന്ന ഒരു തിരഞ്ഞെടുപ്പിൽ ആകെ വോട്ടുകളുടെ എണ്ണം 450 അധികമാകുകയും ഏക്ക് ബീയെക്കാൾ ആദ്യത്തെ തിരഞ്ഞെടുപ്പിൽ കിട്ടിയ വോട്ടിനേക്കാൾ 270 വോട്ടുകൾ അധികം കിട്ടുകയും ചെയ്തു. രണ്ടാമത്തെ തിരഞ്ഞെടുപ്പിൽ ഏക്കു ബീയുടെ $\frac{14}{11}$ ഇരട്ടിവോട്ടുകൾ കിട്ടിയെങ്കിൽ ഓരോ തിരഞ്ഞെടുപ്പിലും ഓരോ ആൾക്കും കിട്ടിയ വോട്ടുകളെത്ര? (1926)

38. ഒരു പുരുഷനും, 5 സ്ത്രീകൾക്കും 73 കുട്ടികൾക്കും കൂടി സമ്മാനമായി 9240ക. പങ്കിട്ടുകൊടുക്കണം. ഒരു പുരുഷന്റേയും, സ്ത്രീയുടേയും, കുട്ടിയുടേയും ഓഹരികൾ 10 : 7 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണെങ്കിൽ ഓരോരുത്തരുടേയും ഓഹരി വെവ്വേറെ കാണുക. (1936)

39. രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസം 2·4ഉം, 4·8ഉം അംഗുലമാണ്. അവയുടെ ക്ഷേത്രഫലത്തെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക. സംബന്ധത്തിലെ പദങ്ങളെ കഴിയുന്നത്ര ചുരുക്കുക. (1937)

40. എ, ബി എന്ന രണ്ടു തീവണ്ടി ആപ്പീസുകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം 50 നാഴികയാണ്. രാവിലെ 8 മണിക്കു ഏയിൽനിന്നു പുറപ്പെടുന്ന ഒരു തീവണ്ടി, 35 മിനുട്ടിനു ശേഷം ബീയിൽനിന്നു പുറപ്പെടുന്ന വേറൊരു തീവണ്ടിയെ രാവിലെ 9മ. 30മി.നു്, ഏയിൽനിന്നു 30 നാഴിക ദൂരത്തുവെച്ചു കടന്നു പോകുന്നെങ്കിൽ രണ്ടു തീവണ്ടികളുടേയും ശീഘ്രതയുടെ സംബന്ധം ഏറ്റവും എളുപ്പരൂപത്തിൽ എഴുതുക. (1939)

സമ്മിശ്രലോഹങ്ങൾ (Alloys).

നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന വെള്ളിനാണയങ്ങൾ വെള്ളിയും ചെമ്പും ചേർന്ന ഒരു സമ്മിശ്രലോഹം (alloy) കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയവയാണ്. ഇതേപ്രകാരം പവൻ നാണയത്തിലും ചെമ്പു ചേർത്തിട്ടുണ്ടു. ഇതിലുള്ള സ്വർണ്ണത്തിന്റെ ശുദ്ധിയെ അതിന്റെ "മാറ്റു്" എന്നും ഇംഗ്ലീഷിൽ "കാറ റ് (Carat)" എന്നും പറയുന്നു. തനിസ്വർണ്ണം 24 മാറ്റു് ശുദ്ധമെന്നും, 22 അംശം സ്വർണ്ണവും 2 അംശം മറ്റു ലോഹവും ചേർന്നിട്ടുള്ള സമ്മിശ്രലോഹം 22 മാറ്റു് ശുദ്ധമെന്നും പറയുന്നു.

ഉദാ: — 14 മാറ്റു് ശുദ്ധിയുള്ള 10 ഔൺസ് സ്വർണ്ണവും 16 മാറ്റു് ശുദ്ധിയുള്ള 5 ഔൺസ് സ്വർണ്ണവും ഉരുക്കിച്ചേർത്തുണ്ടാക്കിയ സ്വർണ്ണത്തിന്റെ ശുദ്ധി എത്ര മാറ്റു്?

10 ഔൺസിലുള്ള ശുദ്ധസ്വർണ്ണത്തിന്റെ തൂക്കം $= \frac{14 \times 10}{24}$ ഔ.

5 ,, ,, ,, $= \frac{16}{24} \times 5$ ഔ.

$\therefore$ 15 ,, ,, ,, $= \frac{140+80}{24}$ ഔ.

$\therefore$ 24 ,, ,, ,, $= \frac{220}{24} \times \frac{24}{15}$ ഔ.

$= 14\frac{2}{3}$ ഔ.

$\therefore$ സമ്മിശ്രലോഹത്തിന്റെ ശുദ്ധി $\underline{14\frac{2}{3}}$ മാറ്റു്.

41. 17 മാറ്റു് ശുദ്ധിയുള്ള 8 ഔൺസ് സ്വർണ്ണവും, 14 മാറ്റു് ശുദ്ധിയുള്ള 12 ഔൺസ് സ്വർണ്ണവും ഉരുക്കിച്ചേർത്തുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമ്മിശ്രലോഹത്തിന്റെ ശുദ്ധി എത്ര മാറാണ്?

42. 3ഉം, 8ഉം, 9ഉം ഔൺസ് വീതം തൂക്കമുള്ള മൂന്നു സ്വർണ്ണക്കട്ടികളുടെ ശുദ്ധി യഥാക്രമം 18ഉം, 15ഉം, 14ഉം മാറാണെങ്കിൽ അവ ഉരുക്കി ചേർത്തുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമ്മിശ്രലോഹത്തിന്റെ ശുദ്ധികാണുക.

43. 4 സമ്മിശ്രലോഹങ്ങളിൽ സ്വർണ്ണത്തിനേറയും, വെള്ളിയുടേയും തൂക്കം യഥാക്രമം 1 : 2, 2 : 3, 3 : 1, 1 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണ്. ഈ സമ്മിശ്രലോഹങ്ങളുടെ സമതൂക്കങ്ങൾ ചേർത്തുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമ്മിശ്രലോഹത്തിൽ സ്വർണ്ണത്തിനേറയും വെള്ളിയുടേയും തൂക്കത്തിന്റെ സംബന്ധം കാണുക.

44. 15ഉം, 13ഉം മാറ്റ് ശുദ്ധിയുള്ള രണ്ടു സമ്മിശ്രലോഹങ്ങളെ 2 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിൽ ചേർത്തുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമ്മിശ്രലോഹത്തിന്റെ ശുദ്ധി കാണുക.

45. 16 മാറ്റ് ശുദ്ധിയുള്ള 9ക.തുക്കം സ്വർണ്ണത്തിനോട് 7ക.തുക്കം ശുദ്ധസ്വർണ്ണം ചേർത്താൽ ഉണ്ടാകുന്ന സമ്മിശ്രലോഹത്തിന്റെ ശുദ്ധി കാണുക.

46. 8 മാറ്റ് ശുദ്ധിയുള്ള 13 ക.തുക്കം സ്വർണ്ണത്തോട് 12ക.തുക്കം സമ്മിശ്രലോഹം ചേർത്തപ്പോൾ $10\frac{2}{5}$ മാറ്റ് ശുദ്ധിയുള്ള സ്വർണ്ണം കിട്ടുമെങ്കിൽ സമ്മിശ്രലോഹത്തിന്റെ ശുദ്ധികാണുക.

47. 17 മാറ്റ് ശുദ്ധിയുള്ള 14 ഔൺസ് സ്വർണ്ണത്തോട് 13 മാറ്റ് ശുദ്ധിയുള്ള എത്ര ഔൺസ് സ്വർണ്ണം ചേർത്താൽ $15\frac{2}{3}$ മാറ്റ് ശുദ്ധിയുള്ള സ്വർണ്ണം കിട്ടും?

48. ഒരു പീപ്പയിൽ 16 ഗാലൻ മദ്യമുണ്ടായിരുന്നു. അതിൽനിന്നു 2 ഗാലൻ എടുത്തതിനു പകരം വെള്ളം ചേർത്തു വീണ്ടും 2 ഗാലൻ എടുക്കുകയും അത്രതന്നെ വെള്ളം ചേർക്കുകയും ചെയ്തു. ഇങ്ങിനെ ആകെ 3 പ്രാവശ്യം ചെയ്താൽ പീപ്പയിലുള്ള മദ്യവും വെള്ളവും ഏതു സംബന്ധത്തിലായിരിക്കും?
(Mad. Mat. 1890)

49. ഒരു പാത്രത്തിൽ വെള്ളവും മദ്യവും 3 : 5 എന്ന സംബന്ധത്തിൽ കലർത്തീട്ടുണ്ട്. എന്നാൽ കലർപ്പിന്റെ ഏതൊരംശം എടുത്തു അത്രതന്നെ വെള്ളം ചേർത്താൽ കലർപ്പിന്റെ പകുതി വെള്ളമാകും?

50. ഒരാൾ ഒരു കുപ്പിയിലുള്ള മരുന്നിന്റെ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം കുടിച്ചു. പിന്നെ കുപ്പി നിറയുന്നതുവരെ വെള്ളം ചേർത്തു കുപ്പിയുടെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗം കുടിച്ചു, വീണ്ടും വെള്ളം ചേർത്തു കുപ്പി നിറച്ചു കുപ്പിയുടെ പകുതി കുടിച്ചു. എന്നാൽ അയാൾ ഓരോ പ്രാവശ്യവും എത്ര മരുന്നു കുടിച്ചു?

അദ്ധ്യായം 3.

അനുപാതം (Proportion).

2ണ.യും, 5ണ.യും തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം തന്നെയാണ് അവയിൽ അടങ്ങിയ 24പ.യും, 60പ.യും തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം. ഈ സംബന്ധസാമ്യത്തെ നമുക്കു 2 വിധത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കാം.

(i) $2 : 5 = 24 : 60.$

(ii) $\frac{2}{5} = \frac{24}{60}.$

"=" എന്ന ചിഹ്നത്തിലെ വരകളെ അവയുടെ അറ്റത്തുള്ള ബിന്ദുക്കളെക്കൊണ്ടു മാത്രം സൂചിപ്പിക്കുന്നതായാൽ ആ ചിഹ്നം : : ആയിത്തീരും.

മേൽപ്പറഞ്ഞ സംബന്ധസാമ്യത്തെ സാധാരണമായി താഴേ കാണിച്ചപ്രകാരമാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

2 : 5 :: 24 : 60

(2നും 5 സമം 24നും 60 എന്നും വായിക്കുക.)

വേറെ രണ്ടു സംബന്ധങ്ങളെ പരിശോധിക്കുക.

2 : 3; 1 : 4. 2ഉം 3ഉം തമ്മിലുള്ള സംബന്ധമല്ല 1ഉം 4ഉം തമ്മിലുള്ള സംബന്ധമെന്നും സ്പഷ്ടമാണല്ലൊ.

രണ്ടു പരിമാണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം വേറെ രണ്ടു പരിമാണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സംബന്ധത്തോടു സമമാണെങ്കിൽ ഈ നാലു പരിമാണങ്ങൾ തമ്മിൽ **അനുപാത** (Proportion) മുണ്ടെന്നു പറയുന്നു. അതായത് രണ്ടു സംബന്ധങ്ങൾ സമമാണെങ്കിൽ അവ തമ്മിലുള്ള സാമ്യതയെ അനുപാതമെന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി 2, 5, 24, 60 എന്നീ നാലു സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ അനുപാതമുണ്ട്.

(i) ഇവയെ എഴുതിയ ക്രമത്തിൽ അനുപാതത്തിലെ ഒന്നാം, രണ്ടാം, മൂന്നാം, നാലാം പദമെന്നു പറയുന്നു.

(ii) ആദ്യത്തെ പദമായ 2നേയും ഒടുവിലത്തെ പദമായ 60നേയും **അഗ്രപദങ്ങളെ** (Extreme terms)ന്നും ചുരുക്കി **അഗ്രങ്ങളെ** (Extremes)ന്നും പറയുന്നു.

(iii) മദ്ധ്യത്തിലുള്ള പദങ്ങളായ 5നേയും 24നേയും **മദ്ധ്യപദങ്ങളെ** (Middle terms)ന്നും ചുരുക്കി **മദ്ധ്യങ്ങളെ** (Means)ന്നും പറയുന്നു.

താഴേ എഴുതിയ അനുപാതങ്ങളെ പരിശോധിക്കുന്ന

തായാൽ അനുപാതങ്ങളുടെ പദങ്ങൾക്കുള്ള ചില ലക്ഷണങ്ങളെ അനുമാനിക്കാം.

• $3:7::6:14$

$44:20::11:5$

(i) $3\times14=42=7\times6$; $44\times5=220=20\times11$.

അഗ്രങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം = മദ്ധ്യങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം.

(ii) മൂന്നാമത്തെ പദം നാലാമത്തെ പദത്തേക്കാൾ വലുതാണെങ്കിൽ (ചെറുതാണെങ്കിൽ) ഒന്നാമത്തെ പദം രണ്ടാമത്തെ പദത്തെക്കാൾ വലുതായിരിക്കും (ചെറുതായിരിക്കും)

വേറൊരു സത്യം നമുക്കനുമാനിക്കാം.

ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം വേറെ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തോടു സമമാണെങ്കിൽ ആ നാലു സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ അനുപാതമുണ്ടായിരിക്കും.

$14\times3=6\times7$. $14:6::7:3$; $14:7::6:3$.

സമഗുണനഫലങ്ങളെടുത്തു ഈ അനുമാനം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ഒരു അനുപാതത്തിലെ ഏതെങ്കിലും 3 പദങ്ങൾ അറിഞ്ഞാൽ 4-ാമത്തെ പദം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാ:— ഒരു അനുപാതത്തിലെ ആദ്യത്തെ 3 പദങ്ങൾ 14, 8, 21 ആണ്. എന്നാൽ അഗ്രപദം കാണുക.

അഗ്രപദം x ആണെന്നു വിചാരിക്കുക.

അഗ്രങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $=14x$.

മദ്ധ്യങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $=8\times21$

$\therefore\ 14x=8\times21$

$\therefore\ x=\dfrac{8\times21}{14}=12$.

ഒരു അനുപാതത്തിലെ ഏതെങ്കിലും 3 പദങ്ങളെ അറിഞ്ഞാൽ 4-ാമത്തെ പദം നിശ്ചയിക്കുന്ന ഈ മാർഗ്ഗത്തെ ത്രൈരാശികം (Rule of Three) എന്നു പറയുന്നു.

അഭ്യാസം 3.

താഴെ കണ്ടുന്ന അനുപാതങ്ങൾ പൂരിപ്പിക്കുക.

1. $287 : 492 :: 3136 :$
2. $7\frac{1}{2} : 12\frac{1}{2} :: \quad : \frac{5}{6}$.
3. $2 \cdot 6 : \quad :: 9 : 12 \cdot 6$.
4. $\quad : 51 :: 225 : 68$.
5. 7ക. 5ണ. 4പ. : ::2പ. 10ക്കി. 8പൈ. : 10പ. 2ക്കി. 8പൈ.
6. 13വാര 1അടി : 16വാര 2അടി :: : 5ണ.
7. $: 25\frac{1}{5}$ ഔൺസ് :: 13ആൾ : 19ആൾ
8. $a : b :: c :$

ഏകാനുപാതം (Simple Proportion).

താണ ക്ലാസ്സുകളിൽ ഐകികരീതി (Unitary Method) ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്ത കണക്കുകളെ ഇപ്പോൾ അതിലും എളുപ്പത്തിൽ ത്രൈരാശികം ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്യാം.

ഉദാ:— (i) 14 വാര തുണിക്കു 35ക. വിലയായാൽ 10 വാരക്കു എന്തു വില?

14 വാരക്കും 10 വാരക്കും തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം തന്നെയാണ് 14 വാരയുടെ വിലക്കും 10 വാരയുടെ വിലക്കും തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം. 10 വാരയുടെ വില xക. എന്നു വിചാരിക്കുക.

$\therefore$ 14വാര : 10 വാര :: 35ക. : xക.

$\therefore 14 : 10 :: 35 : x$

$\therefore 14x = 10 \times 35$

$\therefore x = \dfrac{10 \times 35}{14} = 25.$

$\therefore$ 10 വാരയുടെ വില $= \underline{\underline{25}}$ക.

ഉദാ:—(ii) 8ആളുകൾക്കു ഒരു പണി ചെയ്തീർപ്പാൻ 15 ദിവസം വേണം. 6 ആളുകൾക്കു അതേ പണി ചെയ്തീർപ്പാൻ എത്ര ദിവസം വേണ്ടിവരും?

ഈ രണ്ടുദാഹരണങ്ങളും നമുക്കു സൂക്ഷ്മമായി പരിശോധിക്കാം. ഒന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ വാരയുടെ എണ്ണം കുറയുമ്പോൾ വില കുറയുകയും എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ വില കൂടുകയും ചെയ്യുന്നു. രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ ആളുകളുടെ എണ്ണം കുറയുമ്പോൾ സമയം കൂടുകയും ആളുകളുടെ എണ്ണം കൂടുമ്പോൾ സമയം കുറയുകയും ചെയ്യുന്നു.

അതിനാൽ രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിലുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ സ്വഭാവം ഒന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിലുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ സ്വഭാവത്തിനെതിരാണ്.

അതുകൊണ്ടു ഒന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ എഴുതിയ ക്രമത്തിനു വിപരീതമായിട്ടാണു 1ഉം 2ഉം പദങ്ങളെ രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ എഴുതേണ്ടതു്.

6 ആളുകൾക്കു വേണ്ടി വരുന്ന ദിവസം x എന്നു വിചാരിക്കുക

$\therefore$ 6 ആൾ : 8 ആൾ :: 15 ദിവസം : x ദിവസം $\therefore$ $6 : 8 :: 15 : x$.

$\therefore x = \frac{8 \times 15}{6} = 20.$

$\therefore$ 6 ആളുകൾക്കു വേണ്ടുന്ന സമയം = 20 ദിവസം.

ഒന്നാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ വാരയുടെ എണ്ണവും വിലയും ഒരേക്രമത്തിൽ മാറുന്നു. ഇങ്ങിനെയുള്ള മാറ്റത്തെ ക്രമാനുപാത (Direct proportion) മായ മാറ്റമെന്നു പറയുന്നു.

രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ ആളുകളുടെ എണ്ണത്തിലുള്ള മാറ്റത്തിനെതിരാണ് സമയത്തിലുള്ള മാറ്റം. ഇങ്ങിനെയുള്ള മാറ്റത്തെ പ്രതിക്രമാനുപാത (Inverse proportion) മായ മാറ്റമെന്നു പറയുന്നു.

അതുകൊണ്ടു ത്രൈരാശികം ഉപയോഗിച്ചു കണക്കുകൾ ചെയ്യുമ്പോൾ പദങ്ങളും എഴുതേണ്ടുന്ന ക്രമത്തെ നിശ്ചയിക്കുന്നതു കണക്കിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള മാറ്റം എങ്ങിനെയുള്ളതാണെന്നു പരിശോധിച്ചിട്ടാണ് വേണ്ടതു്.

ദിവസേന ജീവിതത്തിലുള്ള മാറ്റങ്ങളിൽ ഈ രണ്ടുതരം അനുപാതങ്ങൾക്കും അനേകം ദൃഷ്ടാന്തങ്ങളുണ്ടു.

(1) ഒരു തീവണ്ടിയുടെ ശീഘ്രതയും ഒരു നിശ്ചിതദൂരം പോവാൻ അതിന്നു വേണ്ടുന്ന സമയവും പ്രതിക്രമാനുപാതമാണ്.

(2) വേൽ വല്ലുമ്പോൾ ആളുടെ സാമർത്ഥ്യത്തിന്നു ക്രമാനുപാതമാണ് അയാൾ വല്ലുന്ന വലിന്റെ തൂക്കം.

വേറെ ഉദാഹരണങ്ങൾ വിദ്യാർത്ഥി ആലോചിച്ചു കണ്ടുപിടിക്കുകയും ഏതെങ്കിലും മാറ്റം പറയുന്നതായാൽ അതു ഏതുതരം അനുപാതമാണെന്നു പറവാൻ സാധിക്കുകയും വേണം.

അനുപാതത്തെ വിശദീകരിക്കുന്ന ക്ഷേത്രഗണിതത്തിലെ അഭ്യാസങ്ങൾ ഇപ്പോൾ ചെയ്യിക്കുന്നതു നന്നായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 4 (വാങ്മൂലം).

താഴേയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിൽ ഏതിലെല്ലാം സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ അനുപാതമുണ്ടെന്നു പരിശോധിക്കുക. അനുപാതമുണ്ടെങ്കിൽ ഏതു തരമെന്നും പറയുക.

1. 15 മാങ്ങക്ക് 6ണ. വിലയായാൽ 8ണ.ക്കു എത്ര മാങ്ങ കിട്ടും?

2. ഒരു കുട്ടിക്കു 5 വയസ്സുള്ളപ്പോൾ $3\frac{1}{2}$ അടി പൊക്കമുണ്ട്. 10 വയസ്സുള്ളപ്പോൾ എത്ര പൊക്കമുണ്ടാകും?

3. $5\frac{1}{2}$ അടി പൊക്കമുള്ള ഒരാൾക്കു 110 റാത്തൽ തൂക്കമുണ്ടെങ്കിൽ 6 അടി പൊക്കമുള്ള ഒരാളുടെ തൂക്കമെത്ര?

4. $5\frac{1}{2}$ അടി നീളമുള്ള ഒരു ഇരുമ്പുലണ്ടിന്നു 110 റാത്തൽ തൂക്കമുണ്ട്. എന്നാൽ 6 അടി നീളമുള്ള ഒരു ലണ്ടിന്റെ തൂക്കമെത്ര?

5. ഒരു ഭവനത്തിൽ 5 ആൾക്കു 1 ആഴ്ചക്കു വേണ്ടുന്ന ഭക്ഷണമുള്ളപ്പോൾ 2 വിരുന്നുകാർ വന്നാൽ (*a*) ഭക്ഷണം എത്ര ദിവസത്തേക്കു മതിയാകും? (*b*) ഭക്ഷണം ഒരു ആഴ്ച നില്ക്കണമെങ്കിൽ ഓരോ ആളും മുമ്പു നിശ്ചയിച്ചതിന്റെ ഏതൊരു ഭാഗം ഭക്ഷിക്കണം?

ഉദാ:— ഒരു തീവണ്ടി $16\frac{1}{2}$ മണിക്കൂറിൽ 336 നാഴിക പോകുന്നെങ്കിൽ 44 മണിക്കൂറിൽ എത്ര ദൂരം പോകും?

ഒന്നാമതായി, കണക്കിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള വിവരങ്ങൾ താഴേ കാണുംപ്രകാരം എഴുതുക.

മണിക്കൂർ.	നാഴിക.
$16\frac{1}{2}$	336
44	x

രണ്ടാമതായി കണക്കിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ സ്വഭാവം പരിശോധിക്കുക. മാറ്റം ക്രമാനുപാതമാണ്.

$$\therefore 16\tfrac{1}{2} : 44 :: 336 : x$$

$$\therefore x = \frac{44 \times 336}{16\frac{1}{2}} = 896.$$

$\therefore$ ആവശ്യപ്പെട്ട ദൂരം = 896 നാഴിക.

അഭ്യാസം 5.

1. 135 ആളുകൾക്കു 48 ദിവസത്തേക്കുള്ള ഭക്ഷ്യസാധനങ്ങൾ 60 ആളുകൾക്കു എത്ര ദിവസത്തേക്കു മതിയാകും?

2. 126 നാഴികക്കു് 2 ക. 4 ണ. 9 പ. തീവണ്ടിക്കൂലി കൊടുക്കണമെങ്കിൽ 100 നാഴികക്കു എത്ര കൂലി കൊടുക്കണം? 1 ക. 5 ണ. കൂലികൊടുത്താൽ എത്ര ദൂരം സഞ്ചരിക്കാം?

3. 28 ആളുകൾ ഒരു പണി 40 ദിവസംകൊണ്ടു ചെയ്യും. 4 ആളുകൾ കൂടി ചേരുന്നതായാൽ എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു ആ പണി ചെയ്തീരും?

4. ഒരു ആലയിൽ 65 പശുക്കൾക്കു 22 ദിവസത്തേക്കു മതിയാവുന്ന വൈക്കോൽ സൂക്ഷിച്ചിട്ടുണ്ടു്. 10 പശുക്കൾ വിട്ടുപോയാൽ ആ വൈക്കോൽ എത്ര അധികം ദിവസത്തേക്കു മതിയാകും?

5. കുറേ പണിക്കാർ ഒരു പണി 10 ദിവസംകൊണ്ടു ചെയ്യും. ആ പണി 8 ദിവസംകൊണ്ടു തീർക്കുവാൻ മുമ്പുണ്ടായിരുന്ന ആളുകളുടെ എത്ര ഇരട്ടി പണിക്കാർ വേണം?

6. A, B എന്ന രണ്ടു കുട്ടികൾ ഒരു വർഷം വല്ല ശാലയിൽ വരുമെടുക്കുന്നു. വരുമ്പോക്കുന്നതിൽ അവരുടെ വേഗത $4 : 5$ ആണെങ്കിൽ Aക്കു 5 ണ. കൂലികിട്ടുമ്പോൾ Bക്കു എത്ര കൂലികിട്ടും? A $2\frac{1}{2}$ മണിക്കൂറിൽ എടുക്കുന്നത്ര വർഷം കിട്ടുവാൻ B എത്ര മണിക്കൂർ വരുമ്പണം?

7. ദിവസത്തിൽ 2 മണിക്കൂർ നേരം വരുമ്പുന്നതായാൽ ഒരു കുട്ടിക്കു മാസത്തിൽ 20 കഴി വർഷം വരുമ്പും. ദിവസത്തിൽ $1\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ വരുമ്പുന്നതായാൽ മാസത്തിൽ എത്ര കഴി വർഷം വരുമ്പും? ദിവസത്തിൽ 2 മണിക്കൂർ വീതം വാറു 12 കഴി വർഷം എടുത്താൽ എത്ര ദിവസം വാറിരിക്കണം? (1 മാസം = 30 ദിവസം എന്നു കരുതുക).

8. കോഴിക്കോട്ടുനിന്നു പുറപ്പെട്ടുന്ന ഒരു തീവണ്ടി 5 മണിക്കൂർകൊണ്ടു പാലക്കാട്ടെത്തും. ഒരു ദിവസം വണ്ടി 1 മണിക്കൂർ താമസിച്ചു പുറപ്പെട്ടാൽ

കൃത്യസമയത്തു പാലക്കാട്ടെത്തുവാൻ അതിന്റെ വേഗം സാധാരണവേഗത്തിന്റെ എത്ര ഇരട്ടിയായിരിക്കണം?

9. 225 വിരുന്നുകാർക്കു ഒരുക്കിയ ഭക്ഷണത്തിൽ 25 പേർക്കുടി പങ്കുകൊള്ളുന്നതായാൽ ആദ്യം നിശ്ചയിച്ച ഭക്ഷണത്തിന്റെ ഏതൊരാംശം ഇപ്പോൾ ഓരോരുത്തർക്കു കൊടുക്കാം?

10. മുമ്പു 36 പുസ്തകങ്ങൾ വാങ്ങിയ വിലക്കു ഇപ്പോൾ 9 പുസ്തകങ്ങൾ അധികം വാങ്ങാമെങ്കിൽ ഒരു പുസ്തകത്തിന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ വില മുമ്പുണ്ടായിരുന്ന വിലയുടെ ഏതൊരാംശമാണ്? ഇപ്പോൾ ഒരു പുസ്തകത്തിന്നു 1 ക. വിലയുണ്ടെങ്കിൽ അതിന്നു മുമ്പുണ്ടായിരുന്ന വിലയെത്ര?

11. ഒരു കാർ മണിക്കുറിൽ 25 നാഴിക വീതം 2 മണി. 45 മി. ൽ പോകുന്ന ദൂരം 2 മണി. 30 മി. ൽ പോകാൻ മണിക്കുറിൽ എത്ര നാഴിക വീതം ഓടണം?

12. ഒരു തീവണ്ടി മണിക്കുറിൽ 28 നാഴികവീതം ഓടുന്നതായാൽ ഒരു സ്ഥലത്തു എത്തുവാൻ അതിന്നു 7 മണി. 30 മി. വേണ്ടിവരും. മണിക്കുറിൽ 7 നാഴിക വീതം അധികം ഓടുന്നതായാൽ അതേ സ്ഥലത്തു എത്തുവാൻ എത്ര കുറച്ചു സമയം മതിയാകും?

13. 460 പടയാളികൾക്കു 55 ദിവസത്തേക്കു ഭക്ഷണം ശേഖരിച്ചു വെച്ചിരുന്നു. 5 ദിവസം കഴിഞ്ഞാറെ 40 പടയാളികൾ കൂടി വന്നാൽ ഭക്ഷണസാധനങ്ങൾ എത്ര ദിവസത്തേക്കു നില്ക്കും? ആദ്യം നിശ്ചയിച്ച സമയത്തോളം നില്ക്കണമെങ്കിൽ ഓരോ ആളുടെയും ഭക്ഷണം എത്ര കുറക്കണം?

14. $5\frac{1}{2}$ വാര തുണിക്കു 14 ക. 9 ണ. 9 പ. വിലയാണെങ്കിൽ 10 ക. 10 ണ. ക്കു എത്ര തുണി കിട്ടും? $10\frac{1}{2}$ വാര തുണിക്കു എന്തു വില?

15. 4 പ. 10 ക്കി. = 65 ക. 4 ണ ; എന്നാൽ 302 ക. 11 ണ. യുടെ വില കാണുക. 1 പ. 12 ക്കി. ന്റെ വില കാണുക.

16. 8 പുരുഷന്മാർ 5 ദിവസംകൊണ്ടു ചെയ്യുന്ന പണി 10 കുട്ടികൾ 6 ദിവസംകൊണ്ടു ചെയ്തീർക്കും. എന്നാൽ 6 പുരുഷന്മാരും 6 കുട്ടികളും കൂടി ആ പണി എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു ചെയ്തു തീർക്കും?

അദ്ധ്യായം 4.

തോതുഭിന്നിതം (Representative Fraction).

ഭൂമിശാസ്ത്രപാഠത്തിൽ നിങ്ങൾ പടങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുമല്ലോ. പടങ്ങളുടെ വലിപ്പം ഏകദേശം സമമാ

ണെങ്കിലും അവയിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ള രാജ്യങ്ങൾ വലിപ്പത്തിൽ വളരെ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കും. അതുകൊണ്ടു പടങ്ങളിൽ അവ വരക്കപ്പെട്ട തോതു് അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി ഒരു ചെറിയ ഗ്രാമത്തിന്റെ പടത്തിൽ 1 അംഗുലം 100 വാരയെ സൂചിപ്പിക്കാം. ഒരു വൻകരയുടെ പടത്തിൽ 1 അംഗുലം 800 നാഴികക്കു സമമായിരിക്കാം. അതിനാൽ പടത്തിലുള്ള പട്ടണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരമോ നദികളുടെ നീളമോ കാണുവാൻ തോതു് അറിഞ്ഞിരിക്കണം.

വയലുകളുടെ പടം വരക്കുമ്പോൾ ചിലപ്പോൾ 10 അടിയെ 1"കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാറുണ്ടു്. അതായതു് പടത്തിൽ 1", 120 അംഗുലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

∴ പടത്തിലുള്ള ദൂരം = യഥാർത്ഥ ദൂരത്തിന്റെ $\frac{1}{120}$

ഈ ഭിന്നിതത്തെ തോതു ഭിന്നിതം (Representative Fraction; R. F.) എന്നു പറയുന്നു.

1" = 5 നാഴിക എന്ന തോതിൽ വരച്ച ഒരു പടത്തിന്റെ തോതുഭിന്നിതം ഗണിക്കുക.

1" സൂചിപ്പിക്കുന്ന യഥാർത്ഥ ദൂരം = $5 \times 5280 \times 12$ അംഗുലം.

∴ തോതുഭിന്നിതം = $\frac{1}{5 \times 5280 \times 12} = \frac{1}{316800}$.

ചിലപ്പോൾ സൌകര്യത്തിനായി ഭിന്നിതത്തിന്റെ ഛേദകത്തെ അടുത്ത 10000 വരെ കൃത്യമായി എഴുതും. അങ്ങിനെ എഴുതുന്നതായാൽ തോതുഭിന്നിതം = $\frac{1}{320000}$.

ചിലപ്പോൾ തോതു് സംബന്ധരൂപത്തിലാണ് എഴുതുന്നതു്. ഉദാഹരണമായി തോതു്, 1:2400 എന്നെഴുതിയിരിക്കും. അതായത് 1", 2400 അംഗുലത്തെ, അഥവാ, 200 അടിയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

1:600000 എന്ന തോതിൽ വരച്ച ഒരു പടത്തിൽ

ഷൊറണ്ണൂരിൽനിന്നു പാലക്കാട്ടിലേക്കുള്ള ദൂരം 3·2" ആണെങ്കിൽ യഥാർത്ഥ ദൂരം എത്രയായിരിക്കും?

യഥാർത്ഥ ദൂരം = പടത്തിലെ ദൂരം × 600000

$= 3{\cdot}2'' \times 600000 = \frac{3{\cdot}2 \times 600000}{5280 \times 12}$ നാഴിക.

= 30·3 നാഴിക. (നാഴികയുടെ ദശാംശം വരെ കൃത്യം.)

അഭ്യാസം 6.

1. താഴെ പറയുന്ന നദികളുടെ നീളത്തെ കാണിപ്പാൻ 1 സെ.മീ. = 200 നാഴിക എന്ന തോതിൽ സമാന്തരരേഖകൾ വരയ്ക്കുക.

		Miles			Miles
1.	Mississippi	4060.	2.	Nile	3680.
3.	Yangtse	2850.	4.	Indus	1980.
5.	Ganges	1680.	6.	Danube	1720.

2. താഴെ പറയുന്ന പർവ്വതങ്ങളുടെ ഉയരം 1 സെ. മീ. = 2000 അടി എന്ന തോതിൽ ലംബരേഖകൾ വരച്ചു കാണിക്കുക.

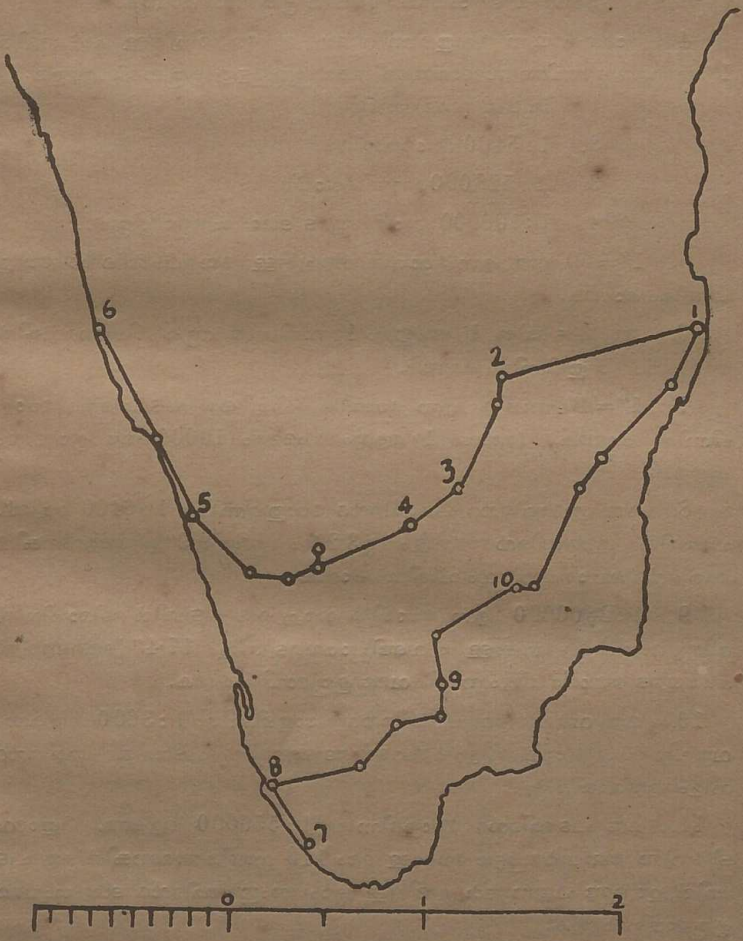
		Feet			Feet
1.	Everest	29000.	2.	Andes	23080.
3.	Rocky Mountains	20460.	4.	Kilimanjaro	19700.
5.	Alps	15780.	6.	Fujiyama	12360.

3. തെക്കേ ഇന്ത്യയിലെ ചില തീവണ്ടിപ്പാതകളെ ഈ പടത്തിൽകാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. തോതു്: 1" = 120 നാഴിക. (*a*) നീളങ്ങൾ അളന്നു തീവണ്ടിമാർഗ്ഗമായി താഴെ പറയുന്ന പട്ടണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാണുക. Railway Guide നോക്കി നിങ്ങളുടെ ഉത്തരങ്ങൾ എത്രകണ്ടു ശരിയാണെന്നു പരിശോധിക്കുക.

1. മംഗലാപുരം — കോഴിക്കോട്ട.
2. ജോലാർപ്പെട്ട — മദിരാശി.
3. തിരുവനന്തപുരം — കൊല്ലം.
4. മധുര — തിരുച്ചിരപ്പള്ളി.
5. തിരുച്ചിരപ്പള്ളി — മദിരാശി.

(*b*) ആകാശവിമാനം നേരെ പറക്കുന്നതായാൽ താഴെയുള്ള പട്ടണങ്ങൾ തമ്മിൽ ആകാശമാർഗ്ഗമായുള്ള ദൂരം കാണുക.

1. മദിരാശി
2. ജോലാർപ്പേട്ട
3. സേലം
4. ഈറോട്
5. കോഴിക്കോട്ട്
6. മംഗലാപുരം
7. തിരുവനന്തപുരം
8. കൊല്ലം
9. മധുര
10. തിരുച്ചിരപ്പള്ളി



തോതു: 1" = 120 നാഴിക.

1. മംഗലാപുരം—മിഥുനരാശി.
2. തിരുച്ചിറപ്പള്ളി—മിഥുനരാശി.
3. തിരുവനന്തപുരം—മിഥുനരാശി

തീവണ്ടിമാർഗ്ഗമായുള്ള ദൂരങ്ങൾ ഈ ദൂരങ്ങളുടെ എത്ര ഇരട്ടിയാണെന്നു ഗണിക്കുക. ഉത്തരം 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

4. താഴെപറയുന്ന തോതുഭിന്നിതങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ള പടങ്ങളിൽ 1" ഏതൊരു ദൂരത്തിനു സമമാണെന്ന് ആവശ്യപ്പെട്ടതു കൃത്യമായി എഴുതുക.

1. 1 : 240 (അടിയായി)
2. 1 : 5400 (വാരയായി)
3. 1 : 528000 (നാഴികയായി)
4. 1 : 100000 (നാഴികയുടെ ദശാംശംവരെ കൃത്യം).

5. 1" = 50 വാര എന്ന തോതിൽ വരച്ചിട്ടുള്ള ഒരു പടത്തിന്റെ തോതുഭിന്നിതം കാണുക.

6. ഒരു പടത്തിൽ 1 അംഗുലം 1 നാഴികയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അതിന്റെ തോതുഭിന്നിതം കാണുക.

7. 1" = 40 നാഴിക എന്ന തോതിൽ വരച്ച ഒരു പടത്തിന്റെ തോതുഭിന്നിതം കാണുക. (അംശം 1 ആയും ഛേദകം 10000വരെ കൃത്യമായും എഴുതുക.

8. ഒരു ഗ്രാമത്തിന്റെ പടത്തിന്റെ തോതുഭിന്നിതം 1 : 6400 ആണ്. പടത്തിൽ ഗ്രാമത്തിന്റെ നീളം 13·2"ഉം വീതി 9·9"ഉം ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ യഥാർത്ഥ നീളവും വീതിയും കാണുക.

9. 1 : 2000000 എന്ന തോതിൽ വരച്ച ഒരു പടത്തിൽ മിഥുനരാശിയിൽ നിന്നു മംഗലാപുരത്തേക്കുള്ള തീവണ്ടിപ്പാതയുടെ നീളം 17·4" ആണെങ്കിൽ പാതയുടെ യഥാർത്ഥ നീളം നാഴികവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

10. ഒരു വയലിന്റെ പടത്തിന്റെ തോതുഭിന്നിതം 1 : 3600 ആകുന്നു. വയലിന്റെ യഥാർത്ഥ നീളം 4 ഫർലോങ്ങാണെങ്കിൽ പടത്തിൽ അതിന്റെ നീളം എത്രയായിരിക്കും?

11. ഒരു പടത്തിന്റെ തോതുഭിന്നിതം 1 : 550000 ആകുന്നു. ഈറോഡിൽനിന്നു ജോലാർപ്പേട്ടയിലേക്കുള്ള ദൂരം 110 നാഴികയാണെങ്കിൽ ആ പടത്തിൽ ഈ രണ്ടു പട്ടണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം അംഗുലത്തിന്റെ ദശാംശംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

അദ്ധ്യായം 5.

മിശ്രാനുപാതം

(Compound Proportion).

24 ആളുകൾ 102ക. സമ്പാദിക്കുന്നുവെങ്കിൽ 20 ആളുകൾ എത്ര സമ്പാദിക്കും? ഈ ചോദ്യത്തിൽ സമ്പാദ്യം ആളുടെ എണ്ണത്തെ മാത്രം ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതിനു പുറമെ പ്രവൃത്തി എടുക്കുന്ന ദിവസത്തിന്റെ എണ്ണവും കൂടി പറയുന്നതായാൽ സമ്പാദ്യം രണ്ടു സംഗതികളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും. അതായതു (1) ആളുകളുടെ എണ്ണം (2) പ്രവൃത്തി എടുക്കുന്ന ദിവസത്തിന്റെ എണ്ണം. ഇങ്ങിനെ ഗണിക്കേണ്ടുന്ന രാശിയുടെ വലിപ്പം ഒന്നിലധികം സംഗതികളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുമ്പോൾ വിവിധരാശികൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതത്തെ **മിശ്രാനുപാതം** (Compound proportion) എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാ:—(1) 24 ആളുകൾ 8 ദിവസത്തിൽ 102ക. സമ്പാദിക്കുന്നുവെങ്കിൽ 20 ആളുകൾ 12 ദിവസത്തിൽ എത്ര സമ്പാദിക്കും?

ഓരോ ഇനംകൊണ്ടും സമ്പാദ്യത്തിലുള്ള മാറ്റത്തെ സ്പഷ്ടമാക്കുവാൻ ചോദ്യത്തിൽ പറഞ്ഞ സംഗതികളെ താഴേ കാണുംപ്രകാരം എഴുതുന്നതു നന്നായിരിക്കും.

ആളുകൾ	ദിവസം	സമ്പാദ്യം.
24	8	102ക.
20	12	xക.

(1) ഇപ്പോഴുള്ള ആളുകളുടെ എണ്ണം മുമ്പുണ്ടായിരുന്ന എണ്ണത്തിന്റെ $\frac{20}{24}$ ആണ്. ആളുകളുടെ എണ്ണത്തിലുള്ള മാറ്റം ക്രമാനുപാതമാണ്.

$\therefore$ 20 ആളുകളുടെ സമ്പാദ്യം $= 102\text{ക.} \times \frac{20}{24}$

(2) ഇപ്പോൾ പ്രവൃത്തി എടുക്കുന്ന സമയം മുമ്പു എടുത്തിരുന്ന സമയത്തിന്റെ $\frac{12}{8}$ ആണ്. ഈ മാറ്റവും ക്രമാനുപാതമാണ്.

$\therefore$ 12 ദിവസത്തെ സമ്പാദ്യം $= 102\text{ക.} \times \frac{12}{8}$

$\therefore$ ഈ രണ്ടു മാറ്റങ്ങളുടെ ഫലമായ സമ്പാദ്യം $= 102\text{ക.} \times \frac{20}{24} \times \frac{12}{8}$

$= 127\text{ക. } 8\text{ണ.}$

കുറിപ്പു:— [ഓരോ മാറ്റംകൊണ്ടും സമ്പാദ്യത്തിലുള്ള മാറ്റം കാണുക.]

ആകെ മാറ്റം ഈ മാറ്റങ്ങളുടെ ഒട്ടാകെയുള്ള ഫലമാണ്. ഓരോ മാറ്റത്തിന്റെയും സ്വഭാവം (ക്രമാനുപാതമോ, പ്രതിക്രമാനുപാതമോ എന്നു) പരിശോധിച്ചു ഏതു ഭിന്നംകൊണ്ടു പെരുക്കണമെന്നു നിശ്ചയിക്കുക. ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ സമ്പാദ്യത്തെ $\frac{20}{24}$, $\frac{12}{8}$ എന്ന ഭിന്നങ്ങൾകൊണ്ടാണ് പെരുക്കിയതു. ഈ ഭിന്നങ്ങളെ **ഗുണനഭിന്നങ്ങൾ** (Multiplying Ratios) എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാ:—(2) ദിവസേന 10 മണിക്കൂർ വീതം പണിയെടുക്കുന്നതായാൽ 12 പേർക്കു 70 ദിവസംകൊണ്ടു ഒരു തോട്ടം വെട്ടുവാൻ കഴിയും. അതേ പണി 8 പേർ 100 ദിവസംകൊണ്ടു ചെയ്യണമെങ്കിൽ ദിവസേന എത്ര മണിക്കൂർ പണിയെടുക്കണം?

ദിവസം	പണിക്കാർ	മണിക്കൂർ
70	12	10
100	8	x

(1) ദിവസം കൂടുമ്പോൾ ദിവസേന പണിയെടുക്കേണ്ടുന്ന മണിക്കൂറിന്റെ എണ്ണം കുറയണം. മാറ്റം പ്രതിക്രമാനുപാതമാണ്.

$\therefore$ ഗുണനഭിന്നം $= \frac{70}{100}$.

(2) പണിക്കാരുടെ എണ്ണം കുറയുമ്പോൾ ദിവസേന പ്രവൃത്തിയെടുക്കേണ്ടുന്ന മണിക്കൂർ കൂടണം. മാറ്റം പ്രതിക്രമാനുപാതമാണ്.

$\therefore$ ഗുണനഭിന്നം $= \frac{12}{8}$.

$\therefore$ ദിവസേന പ്രവൃത്തിയെടുക്കേണ്ടുന്ന മണിക്കൂർ $= 10 \times \frac{70}{100} \times \frac{12}{8} = 10\frac{1}{2}$.

അഭ്യാസം 7.

1. 189 കുതിരകൾക്കു 121 ദിവസത്തിനു $49\frac{1}{2}$ ചാക്കു മുതിര വേണ്ടിവന്നാൽ 15 കുതിരകൾക്കു 231 ദിവസത്തേക്കു എത്ര ചാക്കു മുതിര വേണ്ടിവരും?

2. 37 പേർക്കു 240 നാഴിക ദീവണ്ടിയിൽ സഞ്ചരിപ്പാൻ 231 ക. 4 ണ. ചെലവാകുന്നുവെങ്കിൽ 208 പേർക്കു 222 നാഴിക യാത്ര ചെയ്യുവാൻ എന്തു ചെലവാകും?

3. ഗോതമ്പു ഉരുപ്പടികളെ $1\frac{3}{4}$ ഇടങ്ങഴി വിലയ്ക്കുമ്പോൾ 3 അണ വെച്ചിക്കു 4 ഔൺസ് തൂക്കമുണ്ടെങ്കിൽ ഗോതമ്പു ഉരുപ്പടികളെ $1\frac{1}{3}$ ഇടങ്ങഴി വിലയ്ക്കുമ്പോൾ 4 അണ വെച്ചിക്കു എത്ര തൂക്കമുണ്ടാകും?

4. വൈദ്യുതദീപങ്ങൾ കത്തുമ്പോൾ ചെലവാകുന്ന വിദ്യുച്ഛക്തി അവയുടെ വാട്ടി (Watt)നു ക്രമാനുപാതമാണ്. 60 വാട്ട് 16 വിളക്കുകൾ ഒരേ സമയം കത്തിച്ചതിനു 12 ക. 8 ണ. ചെലവായി. എന്നാൽ അത്രസമയം തന്നെ 40 വാട്ട് 18 വിളക്കുകൾ കത്തിച്ചാൽ എത്ര ചെലവാകും?

5. ആളൊന്നിനു ദിവസം 8 ഔൺസ് അരി വീതം ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ 1000 ആൾക്കു 14 ദിവസത്തേക്കു വേണ്ടുന്ന അരി ഒരു റേഷൻ ക്യാപ്പിൽ ഉണ്ടായിരുന്നു. ഗ്രാമത്തിൽ 50 ആളുകൾ പുതുതായി വന്നതിനാൽ ദിവസത്തെ റേഷൻ $\frac{1}{2}$ ഔൺസ് കുറച്ചാൽ അരി എത്ര ദിവസത്തേക്കു മതിയാകും?

6. 420 ഭാഗമുള്ള ഒരു പുസ്തകത്തിൽ ഓരോ ഭാഗത്തിൽ 42 വരികളും ഓരോ വരിയിൽ ശരാശരി 70 അക്ഷരങ്ങളുമുണ്ട്. ഒരു പുതിയ പതിപ്പിൽ ഓരോ ഭാഗത്തിൽ 64 അക്ഷരങ്ങൾ വീതമുള്ള 45 വരികളുണ്ടെങ്കിൽ പുതിയ പതിപ്പിൽ എത്ര ഭാഗങ്ങളുണ്ടായിരിക്കും?

7. ഒരു സിനിമാകെട്ടിടത്തിന്റെ തറയിൽ പതിപ്പാൻ $8'' \times 7\frac{1}{2}''$ വലിപ്പമുള്ള 9000 ഇഷ്ടിക വേണം. $6''$ വലിപ്പമുള്ള ചതുര ഇഷ്ടികകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതായാൽ എത്ര അധികം എണ്ണം വേണ്ടിവരും?

8. ഒരു മതിൽ കെട്ടുവാൻ $9'' \times 6'' \times 2\frac{1}{2}''$ വലിപ്പമുള്ള ഇഷ്ടികകൾക്കു പകരം അത്ര തന്നെ $7\frac{1}{2}''$ നീളവും $4\frac{1}{2}''$ വീതിയും ഉള്ള ഇഷ്ടികകൾ മതിയാകുമെങ്കിൽ രണ്ടാംതരം ഇഷ്ടികയുടെ കനം കാണുക.

9. ഒരു അടിസ്ഥാന വിദ്യാലയത്തിലെ കുട്ടികൾക്കും സ്റ്റാഫ് ആവശ്യത്തിനുംകൂടി 960 വാര ഖദർ കിട്ടുവാൻ കുട്ടികൾ ദിവസത്തിൽ $\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ വീതം 280 ദിവസം പ്രവർത്തിക്കണം. ഖദർ 40 വാര അധികം വേണ്ടി വരികയും പ്രവൃത്തിദിവസം 30 കുറയുകയും ചെയ്താൽ ഒരു കുട്ടി ദിവസത്തിൽ എത്ര അധികം സമയം പ്രവൃത്തിക്കേണ്ടി വരും?

10. 64 ക. തൂക്കം പട്ടിൽനിന്നു 6 വാര നീളവും $1\frac{1}{2}$ വാര വീതിയുമുള്ള ഒരു പുടവ നെയ്യുണ്ടാക്കാം. 56 ക. തൂക്കം പട്ടിൽനിന്നു 42 അംഗുലം വീതിയുള്ള എത്ര വാര പുടവ നെയ്യാം?

11. ഒരു വ്യവസായശാലയിൽ 200 വൈദ്യുതദീപങ്ങളും 20 പങ്കകളും ഉണ്ട്. അവയെ ദിവസത്തിൽ 8 മണിക്കൂർ ഉപയോഗിച്ചപ്പോൾ മാസത്തിൽ വിദ്യുച്ഛക്തിക്കു 390 ക. ചെലവായി. വേറൊരു മാസത്തിൽ 25 ദീപങ്ങളും 5 പങ്കകളും അധികമുണ്ടായെങ്കിലും അവയെ ദിവസത്തിൽ 7 മണിക്കൂർ മാത്രമേ

ഉപയോഗിച്ചുള്ള. 1 പങ്കുക്കു 2 ദിവസത്തിനു വേണ്ടുന്നതു വിളുച്ചുകരി വേണ്ടി വരുന്നെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെ മാസത്തെ ചെലവു കാണുക.

12. നൂൽ നൂല്പുന്നതിൽ ഒരു സ്ത്രീയിലെ 1ഉം, 2ഉം ഫോറങ്ങളിലെ കുട്ടികളുടെ സാമർത്ഥ്യം 4:5 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണ്. 1-ാം ഫോറത്തിലെ 22 കുട്ടികൾ 15 മണിക്കൂറിൽ നൂല്പുന്നതു നൂൽ കിട്ടുവാൻ 2-ാം ഫോറത്തിലെ 20 കുട്ടികൾ എത്ര മണിക്കൂർ നൂല്പുണം?

1ഉം 2ഉം ഫോറങ്ങളിൽനിന്നു യഥാക്രമം 15ഉം-20ഉം കുട്ടികൾ ചേർന്നു പ്രവർത്തിക്കുന്നതായാൽ ആദ്യം കിട്ടിയതു നൂൽ നൂല്പാൻ അവർ എത്ര മണിക്കൂർ പ്രവർത്തിക്കണം?

13. 40 പുരുഷന്മാർ ഒരു പണി 60 ദിവസത്തിൽ ചെയ്തു തീർക്കും. അവർക്കുപകരം 10 പുരുഷന്മാരെയും 30 കുട്ടികളെയും നിയമിക്കുന്നതിനാൽ ചെലവിലുള്ള വ്യത്യാസം കാണുക. 2 പുരുഷന്മാർ 3 കുട്ടികൾ ചെയ്യുന്നതു പണി ചെയ്യും. ദിവസത്തിൽ 1 പുരുഷന്റെ കൂലി 10ണയും 1 കുട്ടിയുടെ കൂലി 5ണ.യും ആണ്. (1928)

14. ഒരു കോട്ടയിൽ ആളൊന്നിനു ദിവസംപ്രതി 14 ഔൺസ് വീതം 3000 ഭടന്മാർക്കു 9 ആഴ്ചക്കു ഭക്ഷ്യസാധനങ്ങളുണ്ട്. 900 പേർ വിട്ടുപോകയും, ആളൊന്നിനു ദിവസംപ്രതി 15 ഔൺസ് ഭക്ഷണം കൊടുക്കുകയും ചെയ്താൽ ആ ഭക്ഷണസാധനങ്ങൾ എത്ര ആഴ്ചക്കു മതിയാകും?

15. 35,000 ജനങ്ങളുള്ള ഒരു പട്ടണത്തിൽ ആൾ ഒന്നിന് ദിവസംപ്രതി 18 ഗാലൻ വീതം 35 ദിവസത്തേക്കു വെള്ളം ശേഖരിച്ചിരുന്നു. 5 ദിവസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ കുറെ പേർ പട്ടണത്തിൽ വന്നു ചേർന്നതിനാൽ ദിവസംപ്രതി ആൾ ഒന്നിന് 15 ഗാലൻ മാത്രം അനുവദിച്ചുവെങ്കിലും വെള്ളം കരുതിയതിലും 2 ദിവസം മുമ്പു തീർന്നുപോയി. എന്നാൽ പുതുതായി വന്നുചേർന്നവരുടെ എണ്ണം കാണുക.

16. ഒരു കോട്ടയിലെ 7000 ഭടന്മാർക്കു 36 ദിവസത്തേക്കു ഭക്ഷണസാധനങ്ങളിരിക്കേ 1100 പേർ കൂടുതൽ വന്നു ചേരുകയാൽ ദിവസംപ്രതി ആൾ ഒന്നിന് 22 ഔൺസ് വീതം ആ ഭക്ഷണസാധനം 35 ദിവസത്തേക്കു മാത്രമേ മതിയായുള്ളു. എന്നാൽ ആദ്യം ദിവസംപ്രതി ആളൊന്നിനു എത്ര ഭക്ഷണം അനുവദിച്ചിരുന്നു?

17. 1 നാഴിക നീളം നിരത്തു 40 ദിവസംകൊണ്ടു വെട്ടുവാൻ ഒരു കരാറുകാരൻ ഏറ്റു. 225 പണിക്കാരെ പണിക്കു നിയമിച്ചു. 15 ദിവസം കഴിഞ്ഞശേഷം 540 വാര മാത്രം തീർന്നതുകൊണ്ടു കുറെ ആളുകളെക്കൂടി ചേർത്തു പണി നിശ്ചിതസമയത്തു തീർത്തെങ്കിൽ പുതുതായി ചേർത്ത ആളുകളുടെ എണ്ണം കാണുക.

18. 3 പുരുഷന്മാർ ഒരു ദിവസത്തിൽ 5 കട്ടികൾ ചെയ്യുന്നതു പണി ചെയ്യും. 3 കട്ടികൾക്കു 2 പുരുഷന്മാർക്കു കിട്ടുന്നതു കൂലി കിട്ടുന്നു. 40 കട്ടികളും 15 പുരുഷന്മാരും കൂടി 8 ആഴ്ചയിൽ ചെയ്യേ തീർക്കുന്ന ഒരു പണിക്കു ആകെ 350 പവൻ കൂലിയാണ്. എന്നാൽ ആ പണി ചെയ്തുതീർക്കാൻ 20 കട്ടികൾക്കും 20 പുരുഷന്മാർക്കും കൂടി എത്ര ആഴ്ചവേണം? ആകെ കൂലി എത്രയാകും?

(Bom. Mat. 1882)

19. 80 ദിവസംകൊണ്ടു 200 വാര നീളമുള്ള ഒരു മതിൽ കെട്ടുവാൻ ഒരാൾ കരാറെടുത്തു 20 കൂലിക്കാരെ പണിക്കേല്പിച്ചു. 16 ദിവസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 35 വാര മതിൽ മാത്രമേ തീർന്നുള്ളു. അപ്പോൾ മഴനിമിത്തം 4 ദിവസം പണിമുടങ്ങിയതിനു പുറമെ 10 വാര മതിൽ വീണുപോകുകയും ചെയ്തു. എന്നാൽ നിശ്ചിതസമയത്തു പണിചെയ്തു തീർപ്പാൻ ആയാൾ കരഞ്ഞതു എത്ര ആളെ പുതുതായി ചേർക്കണം?

20. 36 നാഴിക നീളമുള്ള ഒരു നിരത്തു 6 മാസംകൊണ്ടു നന്നാക്കുവാൻ ഏറ്റ ഒരാൾ അതിനായി 150 ആളുകളെ നിശ്ചയിച്ചു. 2 മാസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 8 നാഴിക മാത്രം പൂർത്തിയായി കണ്ടുള്ളു. നിശ്ചിതസമയത്തു് പണി പൂർത്തിയാക്കുവാൻ വേണ്ടി അവസാനത്തെ 2 മാസങ്ങളിൽ മാത്രം അയാൾ എത്ര ആളുകളെ കൂടുതലായി നിശ്ചയിക്കേണ്ടിവരും? (March 1950)

അദ്ധ്യായം 6.

സംബന്ധത്തിന്റേയും അനുപാതത്തിന്റേയും പ്രയോഗം. (Application of Ratio and Proportion).

1. കൂട്ടുകച്ചവടം (Partnership).

രണ്ടു സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം കാണാനും ആ സംബന്ധത്തിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു തുകയെ ഭാഗിപ്പാനും നാം പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. രണ്ടോ, അതിലധികമോ ആളുകൾ ചേർന്നു കച്ചവടം ചെയ്യുമ്പോൾ ഉണ്ടാവുന്ന ലാഭം അവർ ഇറക്കിയ മൂതലിന്റെ വലിപ്പമനുസരിച്ചു വീതിക്കുന്നതു ന്യായമാണല്ലോ. ഉദാഹരണമായി ഏ 300ക.യും ബി 500ക.യും കൂടിക്കി ചെയ്ത ഒരു കച്ചവടത്തിൽനിന്നു 72ക. ലാഭം

കിട്ടി എന്നു വിചാരിക്കുക. ഓരോരുത്തക്കും എത്ര ലാഭം എടുക്കാം? ആകെ 800ക. മുതലിന്മേലാണ് 72ക. ലാഭം കിട്ടിയതു.

∴ ഏയുടെ 300ക. മുതലിന്മേൽ ലാഭം $= \frac{72}{800} \times 300$ക.

$= 27$ക.

ബീയുടെ ലാഭം, ആകെ ലാഭത്തിൽനിന്നു ഏയുടെ ലാഭം കിഴിച്ചിട്ടോ അല്ലെങ്കിൽ ഏയുടെ ലാഭം കണ്ട വിധത്തിൽ തന്നെയോ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഈ കണക്കു നമുക്കു വേറൊരു വിധത്തിൽ ചെയ്യാം.

ഏയുടേയും ബീയുടെയേയും ലാഭം തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം അവരുടെ മുതല്യകൾ തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം തന്നെയായിരിക്കണം. അതായതു 300 : 500 അഥവാ 3 : 5.

ഇങ്ങിനെ ആലോചിക്കുന്നതായാൽ നമ്മുടെ കണക്കു ഈ രൂപത്തിൽ എഴുതാം.

300ക.ക്കും 500ക.ക്കും തമ്മിലുള്ള സംബന്ധത്തിൽ 72ക. ഏ., ബി. എന്ന രണ്ടാളുകൾക്കു ഭാഗിച്ചുകൊടുക്കുക.

ഏയുടെ ഓഹരി $= 72$ക.യുടെ $\frac{3}{8}$

$= 27$ക.

ബീയുടെ ഓഹരി $= 72$ക.യുടെ $\frac{5}{8}$

$= 45$ക.

ഉദാ:— (1) എ, ബി, സി എന്ന മൂന്നു കൃഷിക്കാർ ഒരു മേച്ചിൽസ്ഥലം 23ക. 8ണ.ക്കു പാട്ടത്തിനെടുത്തു. എ 15 പശുക്കളെ 40 ദിവസവും ബി 24 പശുക്കളെ 30 ദിവസവും സി 20 പശുക്കളെ 28 ദിവസവും തീറിയായാൽ ഓരോരുത്തൻ എത്ര പാട്ടം കൊടുക്കണം?

തീറിയ പശുക്കളുടെ എണ്ണം മാത്രം നോക്കി പാട്ടസംഖ്യ നിശ്ചയിച്ചുകൂടാ. തീറിയ ദിവസത്തിന്റെ എണ്ണവും നോക്കണം.

(ഒരു പശു ഒരു ദിവസം തിന്നുന്ന പുല്ലു് മൂല അളവായി കരുതുന്നതായാൽ 15 പശുക്കൾ 40 ദിവസംകൊണ്ടു, 1 പശു 1ദിവസം തിന്നുന്നതിന്റെ 15×40 അഥവാ 600 ഇരട്ടി തിന്നും.)

ബീയുടെ 24 പശുക്കൾ 30 ദിവസത്തിൽ തിന്നുന്ന പുല്ലു് നാം സ്വീകരിച്ച മൂല അളവിന്റെ 24×30 അഥവാ 720 ഇരട്ടിയാണ്. സീയുടെ പശുക്കൾ 28 ദിവസം തിന്നുന്ന പുല്ലു് = മൂല അളവിന്റെ 20×28 അഥവാ 560 ഇരട്ടി.

ആകെ പാട്ടസംഖ്യ ഭാഗിക്കേണ്ട സംബന്ധം $= 600 : 720 : 560.$

$= 15 : 18 : 14.$

∴ ഏ അടക്കേണ്ടുന്ന പാട്ടം $=$ ആകെ പാട്ടത്തിന്റെ $\frac{15}{15+18+14}$

$= 23$ക. 8ണ.യുടെ $\frac{15}{47}$

$= 7$ക. 8ണ.

ഇതേപ്രകാരം ബീയുടെയും സീയുടെയും പാട്ടം കാണാം.

മൂന്നു സംഖ്യകളും കൂട്ടി 23ക. 8ണ. കിട്ടുന്നുവോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ഉദാ: — (2) 250 പവൻ മൂലധനത്തോടുകൂടി ഏ ഒരു കച്ചവടം തുടങ്ങി. 4 മാസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ ബി 350 പവൻ മുടക്കി ഏയുടെ കച്ചവടത്തിൽ കൂടി ചേർന്നു. പിന്നെയും രണ്ടുമാസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ സി 550 പവൻ മുതലോടുകൂടി കച്ചവടത്തിൽ പങ്കുകാരനായി ചേർന്നു. കച്ചവടം ആരംഭിച്ചു ഒരു കൊല്ലം പൂർത്തിയായപ്പോൾ ആകെ 182 പവൻ ലാഭം ഉണ്ടായാൽ ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര ലാഭം കിട്ടണം?

100 പവന്നു 12 മാസത്തേക്കുള്ള ആദായം

$= (100 \times 12)$ പവന്നു 1 മാസത്തേക്കുള്ള ആദായം.

ഏ മുടക്കിയതു $= 250$ പവൻ 12 മാസത്തേക്കു. ആദായം മാത്രം കരുതുന്നതായാൽ ഇതു (250×12) പവൻ 1 മാസം മുടക്കുന്നതിന്നു സമമാണ്.

ഇതേപ്രകാരം ബി മുടക്കിയതു $= 350$ പവൻ 8 മാസത്തേക്കു

$= (350 \times 8)$ പ. 1 മാസത്തേക്കു

സി മുടക്കിയതു് $= 550$പ. 6 മാസത്തേക്കു

$= (550 \times 6)$പ. 1 മാസത്തേക്കു

∴ ഏ, ബി, സി മുടക്കിയ തുകകളുടെ സംബന്ധം $= 3000 : 2800 : 3300$

$= 30 : 28 : 33.$

∴ ഏയുടെ ലാഭം $= \frac{30}{91} \times 182$പ.

$= 60$പവൻ.

ഇതേപ്രകാരം ബീയുടെയും സീയുടെയും ലാഭം കാണാം.

ഉദാ: — (3) മൂന്നു പേർ $5 : 4 : 3$ എന്ന സംബന്ധത്തിൽ മുതലുകൾ മുടക്കി ഒരു കച്ചവടം തുടങ്ങി, ഏറ്റവും ചെറിയ മുതലുകാരനെ കച്ചവടം നടത്തുവാൻ ശമ്പളത്തിന്മേൽ നിശ്ചയിച്ചു. ഒരു കൊല്ലത്തിൽ ആ

കെ 2700ക. ലാഭമുണ്ടായിരുന്നതിൽ ശമ്പളവും മുതലിന്റെ ആദായവും കൂടി അയാൾക്കു 900ക. കിട്ടി. എന്നാൽ അയാളുടെ ശമ്പളം എന്തായിരുന്നു? മറ്റു ഓരോരുത്തർക്കും എന്തു കിട്ടി?

മുതലിന്റെ ആദായമായി ആദ്യത്തെ രണ്ടു പേർക്കു കിട്ടിയതു

$= (2700 - 900)$ക.

$= 1800$ക.

അതിൽ ആദ്യത്തെ ആളുടെ ഓഹരി $= 1800$ക.യുടെ $\frac{5}{9}$.

$= 1000$ക.

$\therefore$ രണ്ടാമത്തെ ആളുടെ ഓഹരി $= 800$ക.

$\therefore$ മുതലിന്റെ ആദായമായി ഒന്നാമത്തെ ആളുടെ മൂന്നാമത്തെ ആളുടെ ഓഹരി $=$ ഓഹരിയുടെ $\frac{3}{4}$

$= 600$ക.

$\therefore$ അയാളുടെ ശമ്പളം $= (900 - 600)$ക.

$= 300$ക.

[ഈ അഭ്യായത്തിലെ ചില കണക്കുകൾ ഏകഘാതസമതപം ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്യുന്നതു നന്നായിരിക്കും. പ്രയാസംകൂടിയ കണക്കുകൾ ഉയർന്ന ക്ലാസ്സുകളിൽ ചെയ്യാം.]

അഭ്യാസം 8.

A (വാങ്മൂലം).

a. രണ്ടു സഹോദരന്മാർ യഥാക്രമം 15000ക.യും 25000ക.യും മുടക്കി ചെയ്ത ഒരു കച്ചവടത്തിൽനിന്നു 4800ക. ലാഭം കിട്ടിയാൽ ഓരോ ആളുടേയും ലാഭം കാണുക.

b. എ 500ക.യും ബി 400ക.യും മുടക്കി ഒരു കച്ചവടം ചെയ്തു. ഏകദേശം ബിയേക്കാൾ 25ക. അധികം ലാഭം കിട്ടിയെങ്കിൽ ഓരോരുത്തരുടേയും ലാഭം എത്ര?

c. എ 800ക. 9 മാസത്തോളം മുടക്കി കിട്ടിയ ലാഭം 6 മാസംകൊണ്ടു കിട്ടുവാൻ അയാളുടെ സഹോദരൻ എത്ര മുടക്കേണം?

d. ഒരാൾ 500ക. 8 മാസം മുടക്കി കിട്ടിയ ലാഭത്തിന്റെ ഇരട്ടി കിട്ടുവാൻ അയാളുടെ സഹോദരൻ 1600ക. എത്ര മാസം മുടക്കേണം?

e. ഒരു ബേങ്കിൽ എ 500ക. 8 മാസവും ബി. 600ക. 5 മാസവും നിക്ഷേപിച്ചതിനു ആകെ 35ക. പലിശ കിട്ടിയെങ്കിൽ ഓരോ ആൾക്കും കിട്ടിയ പലിശയെത്ര?

f. 50ക. 1 കൊല്ലം ഒരു ബേങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചതിന്നു 5ക. പലിശ കിട്ടുമെങ്കിൽ ആ ബേങ്കിൽ 60ക. 8 മാസം നിക്ഷേപിച്ചാൽ എത്ര പലിശ കിട്ടും?

1. 640ക., 500ക., 820ക., 250ക. എന്ന ക്രമത്തിൽ മുതലുകൾ മുടക്കി 4 പേർ ഒരു കച്ചവടം ചെയ്തു. ആകെ 552ക. 8ണ. ലാഭം കിട്ടിയാൽ ഓരോരുത്തരുടേയും ലാഭം കാണുക.

2. രണ്ടുപേർ 2500ക.യും 1500ക.യും മുടക്കിയതിന്നു പുറമെ 4 ശ. മാ. പലിശക്കു 1200ക. കടവും വാങ്ങി ഒരു കച്ചവടം ചെയ്തു. ഒരു കൊല്ലത്തിൽ ആകെ മുതലിന്റെ 10 ശ.മാ. ലാഭം കിട്ടി. എന്നാൽ ഓരോ ആൾക്കും തന്റെ മുതലിന്നനുസരിച്ചു എത്ര ലാഭം കിട്ടണം?

3. മൂന്നുപേർ യഥാക്രമം 2250പവൻ, 3375പവൻ, 4500പവൻ മുടക്കി ചെയ്ത ഒരു കച്ചവടത്തിൽ ആകെ 500 പവൻ ലാഭം കിട്ടി. ആകെ ലാഭത്തിന്റെ 19 ശ.മാ. സമമായും, ബാക്കി മുതലിന്റെ തോതിലും ഭാഗിച്ചാൽ ഓരോരുത്തരുടേയും ലാഭം കാണുക.

4. 1800ക., 2300ക., 1000ക. എന്നിപ്രകാരം പണമിറക്കി മൂന്നുപേർ ഒരു വ്യവസായം നടത്തി. ഏറ്റവും ചുരുങ്ങിയ മുതലുകാരനെ മാസത്തിൽ 40ക. ശമ്പളത്തിന്മേൽ മേനേജരായി നിശ്ചയിച്ചു. ഒരു കൊല്ലത്തിൽ 1500ക. ലാഭം കിട്ടി. എന്നാൽ ഓരോരുത്തർക്കും വ്യവസായത്തിൽനിന്നുള്ള വരവു കാണുക.

5. എ, ബി, സി എന്ന മൂന്നുപേർ കൂടി നടത്തിയ ഒരു കച്ചവടത്തിൽ എ 1750ക.യും ബി. 2100ക.യും മുടക്കിയിരുന്നു. ലാഭമായി കിട്ടിയ 422ക. 8ണ.യിൽ സീയുടെ ഓഹരി 172ക. 4ണ.യായിരുന്നു. എന്നാൽ (i) സീയുടെ മുതൽ എത്ര? (ii) ഏയുടേയും, ബീയുടേയും ലാഭമെത്ര?

6. ഏയും, ബീയും, സീയും കൂടി ആകെ 15,248ക. മുടക്കി ചെയ്ത ഒരു കച്ചവടത്തിൽനിന്നുണ്ടായ 1906ക. ലാഭത്തിൽ ഏക്കു, ബീയേക്കാൾ 225ക. അധികവും, സീക്കു ഏയേക്കാൾ 92ക. കുറച്ചും ആണ കിട്ടിയതെങ്കിൽ സീയുടെ മുതൽ എത്ര? (1933)

7. എ, ബി, സി എന്ന മൂന്നുപേർ കൂടി യഥാക്രമം 12000 പവൻ, 8000പവൻ, 5000പവൻ, മുടക്കി ഒരു ബേങ്ക് നടത്തി. ബേങ്കിന്റെ മേനേജരുടെ നിലയിൽ സീക്കു ആകെ ലാഭത്തിന്റെ 15 ശ. മാ.വും, ഏക്കും ബീക്കും, ബേങ്ക് ആവശ്യാർത്ഥം ഹാജരാവുന്ന ഓരോ ദിവസവും ഈരണ്ടു ഗിനിവീതവും കൊടുപ്പാൻ നിശ്ചയിച്ചു. എ 6 ദിവസവും ബി 4 ദിവസവും, ഹാജരുണ്ടായിരുന്നു. എന്നാൽ ലാഭമായി കിട്ടിയ 7650 പവനിൽനിന്നു ഓരോ ആൾക്കും കിട്ടേണ്ടുന്ന സംഖ്യ കാണുക. (1932)

8. എ, ബി, സി എന്ന മൂന്നുപേർ യഥാക്രമം 12000ക. 6000ക. 3000ക. ഒരു കച്ചവടത്തിൽ മുടക്കുന്നു. കാര്യംനോക്കി നടത്തുന്നതിനു ആകെ ലാഭത്തിന്റെ 20 ശ. മാ. ഏക്കും 10 ശ. മാ. ബീക്കും, കൊടുത്തശേഷം ബാക്കിയുള്ളതു മുതലനുസരിച്ചു ഭാഗിക്കുവാൻ തീർച്ചയാക്കുന്നു. ആകെ ലാഭം 5100ക. ആണെങ്കിൽ ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടുന്ന ലാഭമെത്ര? (1937)

9. 4500ക.യും, 7500ക.യും മുടക്കി രണ്ടു പേർ കൂടി കച്ചവടം നടത്തി. ആകെ ലാഭത്തിന്റെ 30 ശ. മാ. സമമായും, ബാക്കിയുള്ളതു മുതലിന്റെ തോതനുസരിച്ചും ഭാഗിപ്പാൻ നിശ്ചയിച്ചു. ഒരാൾക്കു മറ്റെയാളെക്കാൾ 105ക. അധികം ലാഭം കിട്ടിയെങ്കിൽ ആകെ ലാഭം എന്തായിരുന്നു?

10. 5 : 4 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിൽ മുതലുകൾ മുടക്കി എ, ബി, സി എന്ന മൂന്നുപേർ ഒരു കച്ചവടം നടത്തി. സീക്കു മുതലനുസരിച്ചുള്ള ലാഭത്തിനു പുറമെ ഒരു ശമ്പളവും കൊടുക്കാമെന്ന നിശ്ചയത്തിന്മേൽ അയാളെ മേനേജരായി നിശ്ചയിച്ചു. ഒരു കൊല്ലത്തിൽ ആകെ 3050ക. ലാഭം കിട്ടിയതിൽ സീയുടെ ഓഹരി 1025ക. ആയിരുന്നെങ്കിൽ അയാളുടെ ശമ്പളവും ഏയുടെയും ബീയുടെയും ലാഭവും കാണുക.

11. 8 : 5 എന്ന സംബന്ധത്തിൽ മുതലുകൾ മുടക്കി രണ്ടുപേർ കൂടി ഒരു ബേങ്ക് നടത്തി. ചുരുങ്ങിയ മുതലുകാരനു ബേങ്കിന്റെ മേനേജരുടെ നിലയിൽ ആകെ ലാഭത്തിന്റെ 9 ശ. മാ. കൊടുപ്പാനും ബാക്കിയുള്ള ലാഭം മുതലിന്റെ തോതനുസരിച്ചു പങ്കിടുവാനും നിശ്ചയിച്ചു. ഒരാൾക്കു മറ്റെയാളെക്കാൾ 45ക. അധികം വരുമ്പോൾ ആകെ ലാഭമെത്ര?

12. 1 : 2 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിൽ മുതലുകൾ മുടക്കി മൂന്നു പേർ ഒരു കച്ചവടം തുടങ്ങി. ഏറ്റവും ചുരുങ്ങിയ മുതലുകാരനെ മേനേജരായി നിശ്ചയിച്ചു. അയാൾക്കു മുതലനുസരിച്ചുള്ള ലാഭത്തിനു പുറമെ ശമ്പളവും കൊടുത്തു. ഒരു കൊല്ലത്തിലുണ്ടായ 1800ക. ലാഭത്തിൽ മേനേജർക്കു ആകെ 600ക. കിട്ടിയാൽ അയാളുടെ ശമ്പളവും ശേഷമുള്ള ഓരോരുത്തരുടെ ലാഭവും കാണുക.

13. രണ്ടു സഹോദരന്മാർ 2550 പവൻ മുടക്കി കച്ചവടം ചെയ്യുന്നതിൽ 240 പവൻ ലാഭം കിട്ടി. മൂത്ത സഹോദരനു മേനേജരുടെ നിലയിൽ ആകെ ലാഭത്തിന്റെ 15 ശ. മാ. കൊടുപ്പാനും, ബാക്കി ഓരോരുത്തരുടേയും മുതലിന്നനുസരിച്ചു ഭാഗിപ്പാനും നിശ്ചയിച്ചു. ഇളയസഹോദരനു 96 പവൻ ലാഭം കിട്ടിയാൽ ഓരോരുത്തരുടെയും മുതൽ എത്ര?

14. ഏ, ബി, സി എന്ന മൂന്നുപേർ യോജിച്ചു നടത്തിയ ഒരു കച്ചവടത്തിൽ ആകെ 480ക. ലാഭം കിട്ടി. ഏ 750ക. 12 മാസവും ബി 900ക. 9 മാസവും, സി 450ക. 7 മാസവും മുടക്കിയിരുന്നെങ്കിൽ ഓരോ ആൾക്കും കിട്ടിയ ലാഭമെത്ര?

15. രണ്ടു കൃഷിക്കാർ ഒരു മേച്ചിൽ സ്ഥലം 5 ക.ക്കു് പാട്ടത്തിനെടുത്തു. ഒരാൾ 23 പശുക്കളെ 27 ദിവസവും മറ്റെയാൾ 21 പശുക്കളെ 39 ദിവസവും തീറ്റിയാൽ ഓരോരുത്തരും അടയ്ക്കേണ്ടുന്ന പാട്ടമെത്ര?

16. 6000 ക. മുടക്കി ഏ ഒരു കച്ചവടം തുടങ്ങി. 3 മാസം കഴിഞ്ഞാറെ ബി 3000 ക. മുതലോടുകൂടി കച്ചവടത്തിൽ ചേർന്നു. പിന്നേയും 3 മാസം കഴിഞ്ഞശേഷം ഇരുവരും, വീണ്ടും 3000 ക. വീതം മുടക്കി. കച്ചവടത്തിൽ $1\frac{1}{2}$ കൊല്ലത്തേക്കു ആകെ 1875 ക. ആദായം കിട്ടിയാൽ ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര ആദായം കിട്ടി? മുതലിന്മേൽ 100 നു കൊല്ലത്തേക്കു എത്ര പലിശയായി?

17. 2800 ക. മുടക്കി ഏ ഒരു കച്ചവടം തുടങ്ങി. 4 മാസം കഴിഞ്ഞശേഷം ബി 3000 ക. മുതലോടുകൂടി കച്ചവടത്തിൽ ചേർന്നു. പിന്നെ 3 മാസം കഴിഞ്ഞാറെ സി 3500 ക. മുതലോടുകൂടിച്ചേർന്നു. കൊല്ലാവസാനത്തിൽ 938 ക. 12 ണ. ലാഭമുണ്ടായാൽ ഓരോരുത്തരുടേയും ലാഭമെത്ര?

18. ഏ 800 ക. മുതലിറക്കി ഒരു കച്ചവടം തുടങ്ങി 4 മാസം കഴിഞ്ഞശേഷം ബി കച്ചവടത്തിൽ പങ്കുകാരനായിച്ചേർന്നു. കൊല്ലാവസാനത്തിൽ രണ്ടുപേർക്കും ലാഭം സമമാണെങ്കിൽ ബീയുടെ മുതൽ എത്രയായിരുന്നു?

19. 2200 ക. മുടക്കി ഏ ഒരു കച്ചവടം തുടങ്ങി കുറെ കഴിഞ്ഞാറെ ബി 3300 ക. മുതലോടുകൂടി കച്ചവടത്തിൽ പങ്കുകാരനായിച്ചേർന്നു. കൊല്ലാവസാനത്തിൽ ബീക്കു ഏയുടെ $1\frac{1}{4}$ ഇരട്ടി ലാഭം കിട്ടിയാൽ ബി എപ്പോഴാണ് കച്ചവടത്തിൽ ചേർന്നതു?

20. ഏ ഒരു കച്ചവടം തുടങ്ങി 5 മാസം കഴിഞ്ഞശേഷം ഏയുടെ മുതലിന്റെ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടിയോടുകൂടി ബി കച്ചവടത്തിൽ ചേർന്നു. കൊല്ലാവസാനം കച്ചവടത്തിൽനിന്നുള്ള ലാഭത്തിന്റെ ഏതൊരംശം ബീക്കു കിട്ടും?

21. ഏ 35,000 ക.യും ബി 45,000 ക.യും കൊടുത്തു ഒരു കാപ്പിത്തോട്ടം വാങ്ങി. തോട്ടം നോക്കി നടത്തുന്നതിനു ഏയെ ലാഭത്തിന്റെ 20 ശ. മാ. ശമ്പളത്തിന്മേൽ നിശ്ചയിച്ചു. ബാക്കിയുള്ള ലാഭത്തിൽനിന്നു ഓരോരുത്തരുടെ മുതലിന്റെ 9 ശ. മാ. എടുപ്പാനും ശേഷിപ്പുള്ളതു സമമായി ഭാഗിപ്പാനും നിശ്ചയിച്ചു. ബീയുടെ ലാഭം 4950 ക.യാണെങ്കിൽ ഏയുടെ ലാഭം കാണുക.

2. സമയവും പണിയും (Time and Work).

A 6 ദിവസത്തിൽ ഒരു പണി ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ 1 ദിവസത്തിൽ അതിന്റെ $\frac{1}{6}$ ഭാഗം ചെയ്തു തീർക്കും. ഓരാൾ ചെയ്യുന്ന പണി അയാൾ പണി എടുക്കുന്ന സമയത്തിനു ക്രമനുപാതമായിരിക്കും. ഇതിനെ ആസ്പദമാക്കി താഴെ പറയുന്ന കണക്കു ചെയ്യാം.

ഉദാ: — (1) A ഒരു പണി 2 മണിക്കുറിലും B അതേ പണി 6 മണിക്കുറിലും ചെയ്യുമെങ്കിൽ രണ്ടുപേരും കൂടി ആ പണി എത്ര മണിക്കുറിൽ ചെയ്തു തീക്കും?

1 മണിക്കുറിൽ A ചെയ്യുന്നതു = പണിയുടെ $\frac{1}{2}$

1 ,, B ,, = ,, $\frac{1}{6}$

∴ 1 ,, Aഉം Bഉം കൂടി ,, = ,, $(\frac{1}{2}+\frac{1}{6})$

= ,, $\frac{2}{3}$

പണിയുടെ $\frac{2}{3}$ ചെയ്യുവാൻ വേണ്ടുന്ന സമയം = 1 മണിക്കുർ

∴ മുഴുപണി ,, ,, ,, $= \frac{1 \times 3}{2}$,,

$= 1\frac{1}{2}$ മണിക്കുർ.

ഉദാ: — (2) ഒരു കുഴൽ 10 മിനുട്ട്കൊണ്ടു ഒരു വെള്ളത്തൊട്ടിയെ നിറക്കും. വേറൊരു കുഴൽ തൊട്ടിയിലെ വെള്ളത്തെ 15 മിനുട്ട്കൊണ്ടു ഒഴിച്ചുകളയും. രണ്ടു കുഴലുകളും ഒരേ സമയത്തു തുറന്നുവെച്ചാൽ തൊട്ടി എത്ര മിനുട്ട്കൊണ്ടു നിറയും?

1-ാമത്തെ കുഴൽ 1 മിനുട്ടിൽ നിറക്കുന്നതു = തൊട്ടിയുടെ $\frac{1}{10}$

2-ാമത്തെ ,, ,, ഒഴിക്കുന്നതു = ,, $\frac{1}{15}$

∴ 1 മിനുട്ടിൽ യഥാർത്ഥത്തിൽ നിറയുന്നതു = ,, $(\frac{1}{10}-\frac{1}{15})$

= ,, $\frac{1}{30}$

∴ $\frac{1}{30}$ ഭാഗം നിറയുവാൻ വേണ്ടുന്ന സമയം = 1 മിനുട്ട്.

∴ മുഴുതൊട്ടി ,, ,, ,, $= \frac{1 \times 30}{1}$ മിനുട്ട്

= 30 മിനുട്ട്.

അഭ്യാസം 9.

A (വാങ്മൂലം).

a. ഒരാൾ ഒരു പണി 6 ദിവസത്തിൽ ചെയ്യും. അതേപണി ചെയ്യുവാൻ അയാളുടെ മകനു 8 ദിവസം വേണം. രണ്ടാളുംകൂടി ചെയ്യുന്നതായാൽ പണി തീരുവാൻ 4 ദിവസത്തിൽ കുറഞ്ഞും 3 ദിവസത്തിൽ അധികവും സമയം വേണ്ടിവരുമെന്നു ന്യായസഹിതം കാണിക്കുക.

b. Aഉം Bഉം കൂടി ഒരു പണി 9 ദിവസത്തിൽ ചെയ്തു തീക്കും. A തനിയെ അതു 20 ദിവസത്തിൽ ചെയ്യുമെങ്കിൽ ആരാണ് അധികം നല്ല പണിക്കാരൻ?

c. A ഒരു പണി a മണിക്കുറിലും B, b മണിക്കുറിലും ചെയ്യും. ഒരു മണിക്കുറിൽ A എത്ര ചെയ്യും? B എത്ര ചെയ്യും? രണ്ടുപേരും കൂടി 1 മണിക്കുറിൽ എത്ര ചെയ്യും? മുഴുപണി രണ്ടുപേരുംകൂടി എത്ര മണിക്കുറിൽ ചെയ്യും?

d. ഒരു കുഴൽ ഒരു വെള്ളത്തൊട്ടിയെ m മിനുട്ടിൽ നിറക്കുകയും വേറൊരു കുഴൽ അതിലുള്ള വെള്ളത്തെ n മിനുട്ടിൽ ഒഴിക്കുകയും ചെയ്യും. $(n > m)$. രണ്ടു കുഴലുകളും തുറന്നിരുന്നാൽ 1 മിനുട്ടിൽ തൊട്ടിയിൽ എത്ര വെള്ളം ഉണ്ടാകും? എത്രമിനുട്ടിൽ തൊട്ടി നിറയും?

1. ഒരു പ്രവൃത്തി ചെയ്തീർപ്പാൻ Aക്കു $8\frac{1}{4}$ ദിവസവും Bക്കു $5\frac{1}{2}$ ദിവസവും വേണം. രണ്ടുപേരുംകൂടി പ്രവർത്തിക്കുന്നതായാൽ എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു പ്രവൃത്തി തീരും?

2. ഒരാൾക്കു ഒരു പണി 18 ദിവസത്തിൽ ചെയ്തീർപ്പാൻ കഴിയും. അയാളുടെ മകന്റെ സഹായത്തോടുകൂടി അതു $13\frac{1}{2}$ ദിവസത്തിൽ ചെയ്വാൻ കഴിയും. എന്നാൽ മകൻ തനിയെ എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു ആ പണി ചെയ്യും?

3. A 6 ദിവസത്തിലും, B 9 ദിവസത്തിലും, C 12 ദിവസത്തിലും തനിയെ ചെയ്തീർക്കുന്ന ഒരു പ്രവൃത്തി മൂന്നുപേരും കൂടി 5ക. 11ണ. കൂലിക്കു ചെയ്തീർപ്പാൻ ഏറ്റു. എന്നാൽ ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടേണ്ടുന്ന കൂലി കാണുക.

4. Aയും Bയും കൂടി ഒരു പ്രവൃത്തി 15 ദിവസത്തിലും, Bയും Cയും കൂടി 18 ദിവസത്തിലും, Cയും Aയും കൂടി 20 ദിവസത്തിലും ചെയ്യും. അവർ ഓരോരുത്തരും ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തിക്കനുസരിച്ചു അവർക്കു കൂലി കിട്ടുന്നു. Cക്കു ദിവസത്തിൽ 14ണ. കൂലി കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ A, B എന്നിവർ ഓരോരുത്തർക്കും ഒരു ദിവസത്തിൽ കിട്ടുന്ന കൂലി കാണുക. (1927)

5. Aയും Bയും കൂടി ഒരു പ്രവൃത്തി $1\frac{1}{2}$ ദിവസത്തിലും, Aയും Cയും കൂടി 2 ദിവസത്തിലും, Bയും Cയും കൂടി 3 ദിവസത്തിലും ചെയ്യും. ആ പ്രവൃത്തി ചെയ്തീർക്കുന്നതിനു ആകെ 4ക. 8ണ. കൂലി കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ ഓരോരുത്തർക്കും ദിവസത്തിൽ എത്ര കൂലി കിട്ടും?

6. A, B എന്ന രണ്ടുപേർ ഒരു പ്രവൃത്തിയുടെ പകുതിവീതം ചെയ്വാൻ നിശ്ചയിച്ചു. A കാലത്തു 8 മണിക്കും, B 9.30നും പ്രവൃത്തി ആരംഭിച്ചു. 11 മണി ആയപ്പോഴേക്കു രണ്ടുപേരും കൂടി പ്രവൃത്തിയുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം ചെയ്തീർത്തു പ്രവൃത്തി നിർത്തി. വീണ്ടും 2 മണിക്കു പ്രവൃത്തി ആരംഭിച്ചു. A തന്റെ അംശം 5 മണിക്കു ചെയ്തീർത്തുവെങ്കിൽ B തന്റെ അംശം എപ്പോൾ ചെയ്തീർത്തിരിക്കണം?

7. A, B, C എന്നീ മൂന്നുപേർക്കുകൂടി ഒരു കുഴി 1 മണി. 40 മിനുട്ടിൽ കുഴിക്കും. A 5കൊട്ട മണ്ണു കിളച്ചെടുക്കുമ്പോൾ B 6ഉം, C 7ഉം കൊട്ട വീതം

കിളച്ചെടുക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഓരോ ആളും തനിയെ ആ കഴി ഏത്ര മണിക്കുറിൽ കഴിക്കും?

8. ദിവസത്തിൽ 8 മണിക്കുർ വീതം പ്രവൃത്തിച്ചു 15 ദിവസംകൊണ്ടു A ഒരു പ്രവൃത്തി ചെയ്തീക്കുന്നു. അതേ പ്രവൃത്തി B 18 ദിവസത്തിൽ $7\frac{1}{2}$ മണിക്കുർ വീതം പ്രവൃത്തിച്ചു ചെയ്തീക്കും. എന്നാൽ രണ്ടുപേരും കൂടി ദിവസത്തിൽ 9 മണിക്കുർ വീതം പ്രവൃത്തിക്കുന്നതായാൽ എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു പ്രവൃത്തി ചെയ്തീരും?

9. Aയും Bയും കൂടി ഒരു പ്രവൃത്തി 12 ദിവസത്തിലും, Bയും Cയും കൂടി 16 ദിവസത്തിലും ചെയ്യും. A 5 ദിവസവും, B 7 ദിവസവും, C 13 ദിവസവും പ്രവൃത്തിച്ചു ആ പ്രവൃത്തിയാക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഓരോ ആളും തനിയെ ആ പ്രവൃത്തി എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു ചെയ്തീക്കും?

10. A 4 മണിക്കുറിൽ ചെയ്യുന്ന പ്രവൃത്തി B 5 മണിക്കുറിലും C 3 മണിക്കുറിലും ചെയ്യും. A 6 മണിക്കുറും B $6\frac{1}{4}$ മണിക്കുറും പ്രവൃത്തിച്ചു ആകെ പ്രവൃത്തിയുടെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗം തീക്കുന്നുവെങ്കിൽ ബാക്കിയുള്ള ഭാഗം തീപ്പാൻ Cക്കു എത്ര മണിക്കുർ വേണ്ടിവരും?

11. A എന്ന ഒരു കുഴൽ 5 മിനുട്ടിലും, B എന്ന ഒരു കുഴൽ $6\frac{2}{3}$ മിനുട്ടിലും ഒരു വെള്ളത്തൊട്ടി നിറക്കും. A തുറന്നു $1\frac{1}{2}$ മിനുട്ടു കഴിഞ്ഞശേഷം B തുറന്നാൽ പിന്നെ എത്ര മിനുട്ടു കഴിയുമ്പോഴാണ് തൊട്ടി നിറയുന്നതു?

12. ഒരു കുഴൽ $16\frac{2}{3}$ മിനുട്ടിൽ ഒരു വെള്ളത്തൊട്ടി നിറക്കും. തൊട്ടിയുടെ അടിയിൽ ഒരു ചോരമുള്ളതിനാൽ തൊട്ടി നിറയുവാൻ 20 മിനുട്ടു വേണ്ടിവരുന്നു. എന്നാൽ തൊട്ടി നിറയെയുള്ള വെള്ളം ആ ചോരംവഴിയായി ഒഴിഞ്ഞുപോകാൻ എത്ര മിനുട്ടു വേണം?

13. ഒരു വെള്ളത്തൊട്ടിക്കു അതിനെ 35 മിനുട്ടിൽ നിറക്കുന്ന ഒരു കുഴലും 1 മണിക്കുറിൽ ഒഴിക്കുന്ന വേറൊരു കുഴലുമുണ്ടു. നിറക്കുന്ന കുഴൽ തുറന്നു 15 മിനുട്ടു കഴിഞ്ഞശേഷം മറേറ കുഴലും തുറക്കുന്നതായാൽ പിന്നെ എത്ര മിനുട്ടിൽ തൊട്ടി നിറയും?

14. ഒരു വെള്ളത്തൊട്ടിക്കു 3 കുഴലുകളുണ്ടു. ഒന്നു അതിനെ $\frac{1}{2}$ മണിക്കുറിലും, മറെറാന്നു $\frac{3}{4}$ മണിക്കുറിലും, നിറക്കും. മൂന്നാമത്തെ കുഴൽ അതിനെ $\frac{1}{4}$ മണിക്കുറിൽ ഒഴിക്കും. തൊട്ടി നിറയെ വെള്ളമുള്ളപ്പോൾ മൂന്നു കുഴലുകളും തുറന്നാൽ തൊട്ടിയിലെ പാതി വെള്ളം ഒഴിയുവാൻ എത്ര മിനുട്ട് വേണം?

15. ഒരു വെള്ളത്തൊട്ടിക്കു A, B, C എന്നീ മൂന്നു കുഴലുകളുണ്ടു. A അതിനെ 6 മണിക്കുറിലും B 4 മണിക്കുറിലും നിറക്കുയും C 2 മണിക്കുറിൽ ഒഴിക്കു

യും ചെയ്യും. കുഴലുകളെ യഥാക്രമം 1, 3, 5 മണിക്കൂ തുറക്കുന്നതായാൽ തൊട്ടി എപ്പോൾ നിറയും? വീണ്ടും എപ്പോൾ ഒഴിയും?

16. A എന്നൊരു കുഴൽമാത്രമായി ഒരു വെള്ളത്തൊട്ടിയിലേക്കു വെള്ളം ഒഴുകുക്കയും B, C എന്ന കുഴലുകൾ മാത്രമായി വെള്ളം ഒഴിയുകയും ചെയ്യുന്നു. Aയും Bയും തുറന്നിരുന്നാൽ 25 മിനുട്ടിലും Aയും Cയും തുറന്നിരുന്നാൽ 20 മിനുട്ടിലും, 3 കുഴലുകളും തുറന്നിരുന്നാൽ 30 മിനുട്ടിലും തൊട്ടി നിറയും. എന്നാൽ A അടച്ചു Bയും Cയും തുറന്നുവെച്ചാൽ തൊട്ടിയിലെ മുഴ വെള്ളവും എത്ര മിനുട്ടിൽ ഒഴിയും?

17. m പുരുഷന്മാർ ഒരു പ്രവൃത്തിയുടെ $\frac{1}{n}$ ഭാഗം p ദിവസത്തിൽ ചെയ്യുന്നു. എന്നാൽ മുഴപ്രവൃത്തി q ദിവസത്തിൽ ചെയ്തു തീർപ്പാൻ എത്ര പുരുഷന്മാർ വേണം?

$m=15$, $n=4$, $p=12\frac{1}{2}$, $q=20$ ആണെങ്കിൽ പുരുഷന്മാരുടെ എണ്ണം കാണുക. (1920)

18. A, B, C എന്നീ മൂന്നു പേർ കൂടി ഒരു പ്രവൃത്തി ചെയ്തു തീർത്തതിനു അവർക്കു ആകെ 64 ക. 14 ണ. കൂലികിട്ടുന്നു. A, ദിവസത്തിൽ $10\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ വീതം 4 ദിവസവും, B, 7 മണിക്കൂർ വീതം 11 ദിവസവും, C, 9 മണിക്കൂർ വീതം 6 ദിവസവുമാണു പ്രവൃത്തിയെടുത്തതെങ്കിൽ ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടേണ്ടുന്ന സംഖ്യയെത്ര? (1925)

19. ഒരു കുഴൽ ഒരു വെള്ളത്തൊട്ടിയിൽ, 9 മിനുട്ടിൽ പകുതിവെള്ളവും, വേറൊരു കുഴൽ $11\frac{1}{4}$ മിനുട്ടിൽ ചൂടുവെള്ളവും നിറക്കും. ഒരാൾ രണ്ടു കുഴലുകളും ഒരേ സമയത്തു തുറന്നുവെച്ചു കളിമുറി പോയിട്ടുപോകയും തൊട്ടി നിറഞ്ഞിരിക്കേണ്ടുന്ന സമയത്തു തിരിച്ചെത്തുകയും ചെയ്തു. വെള്ളം ഒഴിച്ചുകളയുന്ന കുഴലും തുറന്നിരുന്നതായി കണ്ടു അതിനെ അടച്ചുകളഞ്ഞു. അതിൽ പിന്നെ $3\frac{3}{4}$ മിനുട്ടിൽ തൊട്ടി നിറഞ്ഞുവെങ്കിൽ വെള്ളത്തെ ഒഴിച്ചുകളയുന്ന കുഴൽ എത്ര മിനുട്ടിൽ തൊട്ടിയിലെ മുഴവൻ വെള്ളത്തെ ഒഴിച്ചുകളയും? (1926)

20. 40 പുരുഷന്മാർ ഒരു പ്രവൃത്തി 60 ദിവസത്തിൽ ചെയ്തു തീർക്കും. 3 കുട്ടികൾ 2 പുരുഷന്മാർ ചെയ്യുന്നതു പ്രവൃത്തി ചെയ്യും. ഒരു ദിവസത്തിൽ ഒരു പുരുഷന്റെ കൂലി 10 ണ. യും ഒരു കുട്ടിയുടെ കൂലി 5 ണ. യും ആണ്. എന്നാൽ 40 പുരുഷന്മാരുടെ പകരം 10 പുരുഷന്മാരേയും 30 കുട്ടികളേയും പ്രവൃത്തിക്കു നിശ്ചയിച്ചാൽ കൂലിയിൽ എത്ര വ്യത്യാസമുണ്ടാകും? (1928)

21. A ഒരു പ്രവൃത്തി 60 ദിവസത്തിലും B 40 ദിവസത്തിലും ചെയ്യും. A തനിയെ 26 ദിവസം പ്രവൃത്തിച്ചശേഷം B അയാളെ 4 ദിവസം സഹാ

യിച്ചു. അതിൽപിന്നെ Cയും പ്രവൃത്തിയിൽ ചേർന്നു. മൂന്നു പേരും കൂടി 6 ദിവസത്തിൽ പ്രവൃത്തി പൂർത്തിയാക്കി. എന്നാൽ C തനിയെ മുഴു പണി എതു ദിവസത്തിൽ ചെയ്തു തീർക്കും? (1930)

3. സമയവും ദൂരവും (Time and Distance).

അഭ്യാസം 10.

1. A, B എന്ന രണ്ടു പട്ടണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം 198 നാഴികയാണ്. Aൽനിന്നു Bയിലേക്കു പോകുന്ന ഒരു തീവണ്ടി മണിക്കൂറിൽ $18\frac{1}{2}$ നാഴിക വീതവും, Bൽനിന്നു Aയിലേക്കു പോകുന്ന വേറൊരു തീവണ്ടി മണിക്കൂറിൽ $17\frac{1}{2}$ നാഴിക വീതവും, ഓടുന്നു. ഇവ രണ്ടും ഒരേ സമയത്തു പുറപ്പെടുന്നതായാൽ, എപ്പോൾ, എവിടെവെച്ചു കണ്ടുമുട്ടും?

2. തമ്മിൽ 1 നാഴിക ദൂരമുള്ള രണ്ടു വീടുകളിൽനിന്നു രണ്ടു കുട്ടികൾ ഒരേ സമയത്തു പുറപ്പെട്ടു അഭിമുഖമായി മണിക്കൂറിൽ $5\frac{1}{4}$ഉം, $4\frac{3}{4}$ഉം നാഴിക വേഗത്തിൽ ഓടുന്നതായാൽ അവർ എതു മിനുട്ടിൽ തമ്മിൽ കണ്ടുമുട്ടും? എവിടെവെച്ചു?

3. A, B എന്ന രണ്ടു തീവണ്ടിയാപ്പീസുകൾ തമ്മിൽ 120 നാഴിക ദൂരമുണ്ട്. ഒരു വണ്ടി Aൽനിന്നു രാവിലെ 8മ. 40മി.നു പുറപ്പെട്ടു Bയിലേക്കു മണിക്കൂറിൽ 25 നാഴിക വീതം ഓടുന്നു. രാവിലെ 10മ. 10മി.നു ഒരു വണ്ടി Bൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു Aയിലേക്കു മണിക്കൂറിൽ 30 നാഴിക വീതം ഓടുന്നു. എന്നാൽ രണ്ടു വണ്ടികളും എപ്പോൾ, എവിടെവെച്ചു തമ്മിൽ കണ്ടുമുട്ടും?

4. ഒരു തീവണ്ടി A എന്നൊരു പട്ടണത്തിൽനിന്നു 12 മണിക്കു പുറപ്പെട്ടു അവിടെനിന്നു 58 നാഴിക ദൂരത്തുള്ള B എന്നൊരു പട്ടണത്തിൽ 2മ. 25മി.നു എത്തുന്നു. Bയിൽനിന്നു 12മ. 55മി.നു പുറപ്പെട്ടുന്ന വേറൊരു വണ്ടി ഇതിനെ 1മ. 35മി.നു കണ്ടുമുട്ടുന്നുവെങ്കിൽ ആ വണ്ടി എപ്പോഴാണ് Aയിൽ എത്തുക?

5. താഴെ എഴുതിയ ശീഘ്രതകൾ സെക്കണ്ടിൽ എതു അടിയാണെന്നു കാണുക.

മണിക്കൂറിൽ (*a*) $52\frac{1}{2}$ നാഴിക, (*b*) 36 നാഴിക, (*c*) x നാഴിക.

6. താഴേ എഴുതിയ ശീഘ്രതകൾ മണിക്കൂറിൽ എതു നാഴികയാണെന്നു കാണുക.

സെക്കണ്ടിൽ (*a*) 66 അടി, (*b*) $27\frac{1}{2}$ അടി, (*c*) 30·8 വാര (*d*) y അടി (*e*) മിനുട്ടിൽ 187വാര.

7. ഒരു വണ്ടിയുടെ ശീഘ്രത മണിക്കൂറിൽ v നാഴികയാണെങ്കിൽ സെക്കണ്ടിൽ $\frac{22v}{15}$ അടിയാണെന്നു കാണിക്കുക.

8. മണിക്കൂറിൽ 50 നാഴികയും സെക്കണ്ടിൽ 55 അടിയും ഓടുന്ന രണ്ടു വണ്ടികളുടെ ശീഘ്രതകളുടെ സംബന്ധം കാണുക.

9. തമ്മിൽ 45 നാഴിക ദൂരമുള്ള രണ്ടു പട്ടണങ്ങളിൽനിന്നു രണ്ടുപേർ ഒരേ സമയത്തു പുറപ്പെട്ടു അഭിമുഖമായി മണിക്കൂറിൽ $3\frac{1}{4}$ഉം, 3ഉം നാഴിക വീതം നടക്കുന്നതായാൽ അവർ എപ്പോൾ

(i) 10 നാഴിക അകലെയായിരിക്കും?

(ii) m നാഴിക അകലെയായിരിക്കും?

(iii) തമ്മിൽ കണ്ടുമുട്ടും? എവിടെവച്ചു?

10. മണിക്കൂറിൽ 18 നാഴികവീതം ഓടുന്ന ഒരു ബസ്സ് ഒരു പട്ടണം വിട്ടു 55 മിനുട്ടു കഴിഞ്ഞശേഷം അതിന്റെ പിന്നാലെ ഒരു മോട്ടോർകാർ മണിക്കൂറിൽ $23\frac{1}{2}$ നാഴികവീതം ഓടുന്നതായാൽ കാർ എപ്പോൾ, എവിടെവച്ചു ബസ്സിനോടൊപ്പം എത്തും?

11. ഒരു വീട്ടിൽനിന്നു മോഷ്ടിച്ച മുതലോടുകൂടി മണിക്കൂറിൽ $4\frac{1}{2}$ നാഴിക വീതം ഓടിയിരുന്ന ഒരു കള്ളനെ ഒരു സൈക്കളിന്മേൽ പിന്തുടർന്നിരുന്ന ഒരു പോലീസുകാരൻ, വീട്ടിൽനിന്നു $2\frac{3}{4}$ നാഴിക ദൂരത്തുവെച്ചു പിടിച്ചു. പോലീസുകാരൻ മണിക്കൂറിൽ $7\frac{1}{2}$ നാഴികവീതം സവാരി ചെയ്യുമെങ്കിൽ കള്ളൻ വീട്ടിൽനിന്നു എത്ര ദൂരത്തുള്ളപ്പോഴാണു പോലീസുകാരൻ വീടു വിട്ടതു?

12. മഞ്ഞുനിമിത്തം 200 വാര ദൂരം മാത്രം കാണാൻ കഴിഞ്ഞിരുന്ന ഒരു ദിവസം രാവിലെ ഒരു കുതിരസവാരിക്കാരൻ ഒരു കമ്പിത്തൂൺ $\frac{3}{4}$മിനുട്ടു നേരത്തോളം തന്റെ മുമ്പിലായി കണ്ടു. അതിന്റെ ശേഷം തന്റെ മുമ്പിൽ കണ്ട ഒരു കാളവണ്ടിയോടൊപ്പം എത്താൻ $1\frac{1}{4}$ മിനുട്ടു വേണ്ടിവന്നെങ്കിൽ കാളവണ്ടി മണിക്കൂറിൽ എത്ര നാഴിക വീതം പോയിരുന്നു?

13. തമ്മിൽ d നാഴിക ദൂരമുള്ള A, B എന്ന രണ്ടു പട്ടണങ്ങളിൽനിന്നു രണ്ടുപേർ ഒരേ സമയത്തു പുറപ്പെട്ടു അഭിമുഖമായി മണിക്കൂറിൽ xഉം, yഉം നാഴികവീതം നടക്കുന്നതായാൽ അവർ തമ്മിൽ എവിടെവച്ചു കണ്ടുമുട്ടും?

14. ഒരു കാളവണ്ടിയും ഒരു കുതിരവണ്ടിയും ഒരേ സ്ഥലത്തുനിന്നു പുറപ്പെട്ടു ഒരേ വഴിയായി മണിക്കൂറിൽ mഉം, nഉം നാഴികവീതം ഓടുന്നു. കാളവണ്ടി പുറപ്പെട്ടു hമിനുട്ടു കഴിഞ്ഞാണ് കുതിരവണ്ടി പുറപ്പെട്ടതെങ്കിൽ അതു എവിടെവച്ചാണ് കാളവണ്ടിയോടൊപ്പം എത്തുന്നതു? $(n > m)$

പുഴയും ഒഴുക്കും (Streams and Currents).

ഒരാൾക്കു ഒഴുക്കില്ലാത്ത ഒരു തടാകത്തിൽ ഒരു തോണിയെ മണിക്കൂറിൽ 4 നാഴിക ദൂരം തുഴയാം എന്നു വിചാരിക്കുക. ഒഴുക്കുള്ള ഒരു പുഴയിൽ അയാൾ തുഴയുന്നതായാൽ തോണിയുടെ ശീഘ്രത ഒഴുക്കിന്റെ ഗതിയെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും. ഒഴുക്കിനനുസരിച്ചു തുഴയുന്നതായാൽ തോണിയുടെ ശീഘ്രത = നിശ്ചലമായ വെള്ളത്തിൽ അതിന്റെ ശീഘ്രത + ഒഴുക്കിന്റെ ശീഘ്രത.

ഒഴുക്കിനെതിരായി തുഴയുന്നതായാൽ തോണിയുടെ ശീഘ്രത = നിശ്ചലമായ വെള്ളത്തിൽ അതിന്റെ ശീഘ്രത − ഒഴുക്കിന്റെ ശീഘ്രത. ഒഴുക്കിന്റെ ശീഘ്രത 3 നാഴിക യാണെങ്കിൽ അതിനനുസരിച്ചു തുഴയുന്നതായാൽ തോണിയുടെ ശീഘ്രത (4+3) അഥവാ 7 നാഴികയും, ഒഴുക്കിനെതിരായി തുഴയുന്നതായാൽ തോണിയുടെ ശീഘ്രത (4−3) അഥവാ 1 നാഴികയും ആയിരിക്കും.

അഭ്യാസം 11.

1. ഒരാൾക്കു നിശ്ചലമായ വെള്ളത്തിൽ മണിക്കൂറിൽ $2\frac{1}{2}$ നാഴിക വീതം നീന്താം. മണിക്കൂറിൽ $1\frac{1}{2}$ നാഴികവീതം ഒഴുകുന്ന ഒരു പുഴയിൽ 2 ഫർലോങ്ങ് ദൂരം നീന്തി പുറപ്പെട്ട സ്ഥലത്തു തിരിച്ചെത്തുവാൻ അയാൾക്കു എത്ര സമയം വേണ്ടിവരും?

2. മണിക്കൂറിൽ $2\frac{1}{2}$ നാഴിക വീതം ഒഴുകുന്ന ഒരു പുഴയിൽ ഒരു തോണി ഒഴുക്കിനു എതിരായി മണിക്കൂറിൽ $2\frac{1}{2}$ നാഴിക പോകുന്നുവെങ്കിൽ ഒഴുക്കിനനുസരിച്ചു $2\frac{1}{2}$ നാഴിക പോകുവാൻ അതിനു എത്ര സമയം വേണ്ടിവരും?

3. ഒരു കപ്പൽ ഒരു നദിയിൽ, ഒഴുക്കിനെതിരായി b മണിക്കൂറിൽ a നാഴികയും, ഒഴുക്കിനനുസരിച്ചു d മണിക്കൂറിൽ c നാഴികയും പോകുന്നു. നദി മണിക്കൂറിൽ e നാഴിക ഒഴുകുകയും കപ്പൽ നിശ്ചലമായ വെള്ളത്തിൽ f നാഴിക പോകുകയും ചെയ്യുന്നെങ്കിൽ a, c എന്നിവ ഓരോന്നിന്റെയും വില b, d, e, f ഉപയോഗിച്ചു വ്യക്തമാക്കുക. $a=16$, $b=2$, $c=18$, $d=\frac{3}{2}$ ആണെങ്കിൽ eും fും എത്രയാണ്?

4. ഒരു ആകാശക്കപ്പൽ മണിക്കൂറിൽ v നാഴികവീതം പറക്കും. മണിക്കൂറിൽ u നാഴിക വേഗത്തിൽ കാറടിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുമ്പോൾ കപ്പൽ A യിൽനിന്നു B യിലേക്കും തിരിച്ചു B യിൽനിന്നു A യിലേക്കും പറക്കുന്നതായാൽ അതിന്റെ ശരാശരി ശീഘ്രത എത്രയായിരിക്കും?

$v=60$, $u=5$ ആണെങ്കിൽ ശരാശരി എത്രയായിരിക്കും? (1923)

ഓട്ടപ്പന്തയം (Races).

അഭ്യാസം 12.

1. 1 നാഴിക ഓട്ടപ്പന്തയത്തിൽ A 100 വാരകൊണ്ടു B യേയും, B 528 വാരകൊണ്ടു C യേയും തോല്പിക്കും. എന്നാൽ അരനാഴിക ഓട്ടപ്പന്തയത്തിൽ A എത്ര വാരകൊണ്ടു C യെ തോല്പിക്കും?

2. ഒരു നാഴിക ഓട്ടപ്പന്തയത്തിൽ P 20 വാരകൊണ്ടു Q നേയും, 107 വാരകൊണ്ടു R നേയും തോല്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ പന്തയത്തിൽ Q എത്ര വാരകൊണ്ടു R നെ തോല്പിക്കും?

3. 600 വാര ഓടുവാൻ A ക്കു 66 സെക്കണ്ടും B ക്കു 72 സെക്കണ്ടും വേണം. ഓട്ടം തുടങ്ങുമ്പോൾ B, A യുടെ 60 വാര മുമ്പിലാണെങ്കിൽ ഓട്ടത്തിൽ ആർ ജയിക്കും? എത്ര വാരകൊണ്ടു?

4. 100 വാര ഓട്ടപ്പന്തയത്തിൽ A 20 വാരകൊണ്ടു B യേയും 8 വാര കൊണ്ടു C യേയും തോല്പിക്കുന്നു. അതേ പന്തയത്തിൽ B യും C യും മാത്രം ഓടുന്നതായാൽ ആർ ജയിക്കും? എത്ര വാരകൊണ്ടു?

(പൂർണ്ണസംഖ്യവരെ കൃത്യമായി എഴുതുക.) (1919)

5. വൃത്താകാരമായ ഒരു കളത്തിന്നു ചുറ്റും രണ്ടുപേർ 3 മണിക്കു ഒരേ സ്ഥലത്തുനിന്നു പുറപ്പെട്ടു ഒരേ വശത്തേക്കു സൈക്കളിന്മേൽ സവാരി ചെയ്യുന്നു. ഒരിക്കൽ ചുറ്റുവാൻ അവക്കു 3 മിനുട്ടു 12 സെക്കണ്ടും, 3 മി. 30 സെ.ണ്ടും വേണമെങ്കിൽ പുറപ്പെട്ട സ്ഥലത്തു രണ്ടുപേരും എപ്പോൾ വീണ്ടും ഒരുമിച്ചെത്തും? അപ്പോൾ ഓരോ ആളും കളത്തെ എത്ര പ്രാവശ്യം ചുറ്റിയിരിക്കും? (1923)

6. A, B, C എന്ന മൂന്നുപേർ ഒരുമിച്ചു പുറപ്പെട്ട വൃത്താകാരമായ ഒരു കളത്തിന്നു ചുറ്റും മണിക്കൂറിൽ യഥാക്രമം 8, 9, 10 നാഴിക വീതം സൈക്കിളിന്മേൽ സവാരി ചെയ്യുന്നു. C മറ്റു രണ്ടുപേർക്കും എതിരായി സവാരി ചെയ്കയും B യെ കണ്ടുമുട്ടി 1 മിനുട്ടു കഴിഞ്ഞശേഷം A യെ കണ്ടുമുട്ടുകയും ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ കളത്തിന്റെ ചുറ്റളവെത്ര? (1925)

തീവണ്ടികൾ (Trains).

ഉദാ:—(1) 66 വാര നീളമുള്ള ഒരു തീവണ്ടി മണിക്കൂറിൽ 27 നാഴിക വീതം ഓടുന്നതായാൽ ഒരു കമ്പിക്കാൽ കടന്നുപോകാൻ അതിന്നു എത്ര സമയം വേണ്ടിവരും? 99 വാര നീളമുള്ള ഒരു പാലം കടന്നുപോകാൻ എത്ര സമയം വേണ്ടിവരും?

ഒരു വണ്ടി ഒരു കമ്പിക്കാൽ കടന്നുപോകുമ്പോൾ അതു യാത്ര ചെയ്യുന്ന ദൂരം = അതിന്റെ നീളം. ∴ വേണ്ടിവരുന്ന സമയം = വണ്ടി 66 വാര പോകാൻ വേണ്ടിവരുന്ന സമയം.

$$= \frac{66 \times 60 \times 60}{27 \times 1760} \text{ സെക്കണ്ട്.}$$

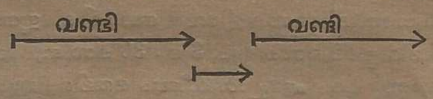
$= 5$ സെക്കണ്ട്

ഒരു വണ്ടി ഒരു പാലം കടന്നുപോകുമ്പോൾ അതു യാത്രചെയ്യുന്ന ദൂരം = അതിന്റെ നീളം + പാലത്തിന്റെ നീളം = $(66+99)$ വാ.

$$\therefore \text{ വേണ്ടിവരുന്ന സമയം} = \frac{165}{27 \times 1760} \times 60 \times 60 \text{ സെക്കണ്ട്.}$$

$$= 12\tfrac{1}{2} \text{ സെക്കണ്ട്.}$$

ഉദാ:—(2) 66 വാര നീളമുള്ള ഒരു തീവണ്ടി മണിക്കൂറിൽ 20 നാഴിക വീതം ഓടുന്നു. തീവണ്ടിപ്പാതക്കു സമാന്തരമായി, വണ്ടി പോകുന്ന അതേ വശത്തേക്കു മണിക്കൂറിൽ 5 നാഴികവീതം നടക്കുന്ന ഒരാളെ കടന്നുപോകാൻ വണ്ടിക്കു എത്ര സമയം വേണം? വണ്ടിക്കെതിരായി അയാൾ നടക്കുന്നതായാൽ എത്ര സമയം വേണ്ടിവരും?



ആളെ കടന്നുപോകാൻ വണ്ടി പോകേണ്ടുന്ന ദൂരം = അയാൾ നടന്ന ദൂരം + വണ്ടിയുടെ നീളം.

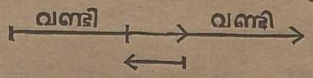
അതായതു വണ്ടി, ആളേക്കാൾ അതിന്റെ നീളം അധികം പോകണം. 1 മണിക്കൂറിൽ വണ്ടി ആളെക്കാൾ 15 നാഴിക അധികം പോകും.

∴ 66 വാര അധികം പോകാൻ വേണ്ടിവരുന്ന

$$\text{സമയം} = \frac{66 \times 60 \times 60}{15 \times 1760} \text{ സെക്കണ്ട്.}$$

$= 9$ സെക്കണ്ട്.

ആളെ കടന്നുപോകാൻ വണ്ടി പോ കേണ്ടുന്ന ദൂരം = വണ്ടിയുടെ നീളം — അ യാൾ നടന്ന ദൂരം, അതായതു വണ്ടിയും ആളുംകൂടി വണ്ടിയുടെ നീളം പോകണം.



വണ്ടിയും ആളും കൂടി 1 മണിക്കൂറിൽ 25 നാഴിക പോകും.

∴ 66 വാര പോകാൻ വേണ്ടിവരുന്ന

$$\text{സമയം} = \frac{66 \times 60 \times 60}{25 \times 1760} \text{ സെക്കണ്ട്.}$$

$$= 5\tfrac{2}{5} \text{ സെക്കണ്ട്.}$$

ഉദാ: — (3) 80ഉം, 140ഉം വാര നീളമുള്ള രണ്ടു വണ്ടികൾ മണിക്കൂറിൽ 45ഉം 15ഉം നാഴികവീതം സമാന്തരമായ പാതകളിന്മേൽ ഓടുന്നു. (1) ഒന്നു മറ്റേതിന്നെതിരായി (2) രണ്ടും ഒരേ വശത്തേക്കു ഓടുകയാണെങ്കിൽ ഒന്നു മറ്റേതിനെ കടന്നുപോകാൻ എത്ര സമയം വേണ്ടിവരും?



(1) ഒരു വണ്ടി മറ്റേതിനെ കടന്നുപോകുമ്പോഴേക്കു രണ്ടുംകൂടി രണ്ടിന്റേയും നീളം ആകെ ഓടിയിരിക്കണം.

1 മണിക്കൂറിൽ രണ്ടുംകൂടി 60 നാഴിക ഓടും.

∴ 220 വാര ഓടുവാൻ വേണ്ടുന്ന സമയം.

$$= \frac{220 \times 60 \times 60}{60 \times 1760} \text{ സെക്കണ്ട്.}$$

$$= 7\tfrac{1}{2} \text{ സെക്കണ്ട്.}$$



(2) ഒരു വണ്ടി മറ്റേതിനെ കടന്നുപോകുമ്പോൾ അധികം വേഗം പോകുന്നതു രണ്ടിന്റെയും നീളവും, മറ്റേവണ്ടി ആ സമയത്തിന്നുള്ളിൽ പോകുന്ന ദൂരവും പോകണം.

അതായതു അധികം വേഗം പോകുന്ന വണ്ടി മറ്റേതിനേക്കാൾ രണ്ടിന്റെയും നീളം അധികം പോകണം.

അധികം വേഗം പോകുന്ന വണ്ടി മറ്റേതിനേക്കാൾ മണിക്കൂറിൽ 30 നാഴിക അധികം പോകും.

$\therefore$ 220 വാര അധികം പോകുവാൻ വേണ്ടുന്ന

$$\text{സമയം} = \frac{220 \times 60 \times 60}{30 \times 1760} \text{ സെക്കണ്ട്.}$$

$$= 15 \text{ സെക്കണ്ട്.}$$

അഭ്യാസം 13.

1. മണിക്കൂറിൽ 30 നാഴികവീതം ഓടുന്ന ഒരു തീവണ്ടി 4 സെക്കണ്ടിൽ ഒരു കമ്പിക്കാൽ കടന്നുപോകുന്നുവെങ്കിൽ വണ്ടിയുടെ നീളമെത്ര? (1934)

2. 154 അടി നീളമുള്ള ഒരു തീവണ്ടി മണിക്കൂറിൽ 35 നാഴികവീതം ഓടുന്നതായാൽ ഒരു നാഴികക്കല്ലു കടന്നുപോകാൻ അതിന്നു എത്ര സമയം വേണ്ടിവരും?

3. മണിക്കൂറിൽ 40 നാഴികവീതം ഓടുന്ന ഒരു തീവണ്ടി 400 അടി നീളമുള്ള ഒരു പാലം 15 സെക്കണ്ടിൽ കടക്കുന്നുവെങ്കിൽ വണ്ടിയുടെ നീളമെത്ര?

4. 132 വാര നീളമുള്ള ഒരു തീവണ്ടിയാപ്പീസിൽ നിന്നിരുന്ന ഒരാൾ, ഒരു വണ്ടി അതിനെ 20 സെക്കണ്ടിലും, തന്നെ 8 സെക്കണ്ടിലും കടന്നുപോയതായി കണ്ടു. എന്നാൽ വണ്ടിയുടെ നീളവും, ശീഘ്രതയും കാണുക.

5. 88വാര നീളമുള്ള ഒരു തീവണ്ടി മണിക്കൂറിൽ 27 നാഴികവീതം ഓടുന്നു. തീവണ്ടിപ്പാതക്കു സമാന്തരമായ ഒരു നിരത്തിന്മേൽ വണ്ടിപോകുന്ന വശത്തേക്കു മണിക്കൂറിൽ 3 നാഴികവീതം നടക്കുന്ന ഒരാളെ വണ്ടി എത്ര സെക്കണ്ടിൽ കടന്നുപോകും? വണ്ടിക്കെതിരായി ഒരാൾ നടക്കുന്നതായാൽ അയാളെ കടന്നുപോകാൻ വണ്ടിക്കു എത്ര സമയം വേണം?

6. മണിക്കൂറിൽ 18 നാഴികവീതം ഓടിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന ഒരു തീവണ്ടിപ്പാതക്കു സമാന്തരമായി, വണ്ടിപോകുന്ന വശത്തേക്കു നടക്കുന്ന ഒരാളെ $7\frac{1}{2}$ സെക്കണ്ടിൽ കടന്നുപോകുന്നു. വണ്ടിയുടെ നീളം 55 വാരയാണെങ്കിൽ അയാളുടെ ശീഘ്രത കാണുക.

7. ഒരു തീവണ്ടി മണിക്കൂറിൽ 50 നാഴികവീതം ഓടുന്നു. തീവണ്ടിപ്പാതക്കു സമാന്തരമായി വണ്ടി ഓടുന്ന അതേവശത്തേക്കു ഒരു സൈക്കിളിന്മേൽ സവാരി ചെയ്യുന്ന ഒരാളെ വണ്ടി 6 സെക്കണ്ടിൽ കടന്നുപോകുന്നു. ഇതിന്നു എതിരായ വശത്തേക്കു സവാരി ചെയ്യുന്നതായാൽ വണ്ടി അയാളെ 4 സെക്കണ്ടിൽ കടന്നുപോകും. എന്നാൽ വണ്ടിയുടെ നീളം കാണുക.

8. 88ഉം, 132ഉം, വാര നീളമുള്ള രണ്ടു തീവണ്ടികൾ മണിക്കൂറിൽ യഥാക്രമം 25ഉം, 20ഉം, നാഴിക വീതം അഭിമുഖമായി ഓടുന്നു. ഒന്നു മറ്റേതിനെ കടന്നുപോകാൻ എത്ര സമയം വേണ്ടിവരും? (1938)

ഘടികാരങ്ങൾ (Clocks).

ഒരു മണിക്കൂറിൽ ഒരു ഘടികാരത്തിന്റെ മിനുട്ടുസൂചി 360 ഡിഗ്രിയും, മണിക്കൂർസൂചി 30 ഡിഗ്രിയും തിരിയുന്നു.

∴ 1 മിനുട്ടിൽ മിനുട്ടുസൂചി 6°യും മണിക്കൂർസൂചി $\frac{1}{2}$° യും തിരിയുന്നു. അഥവാ ഒരു മിനുട്ടിൽ മിനുട്ടുസൂചി മണിക്കൂർ സൂചിയേക്കാൾ $5\frac{1}{2}$° അധികം തിരിയുന്നു.

∴ മണിക്കൂർ സൂചിയേക്കാൾ 1° അധികം തിരിയുവാൻ മിനുട്ടുസൂചിക്കു $\frac{1}{5\frac{1}{2}}$ അഥവാ $\frac{2}{11}$ മിനുട്ടു വേണം. ഇതു് ആസ്പദമാക്കി താഴെ കാണുന്ന കണക്കു ചെയ്യുക.

ഉദാ:—7 മണിക്കും 8 മണിക്കും ഇടയിൽ ഒരു ഘടികാരത്തിന്റെ സൂചികൾ എപ്പോൾ ഒരുമിച്ചായിരിക്കും?

7 മണിക്കു മണിക്കൂർ സൂചിക്കും മിനുട്ടുസൂചിക്കും ഇടയിൽ 210° ഉണ്ടു.

∴ മണിക്കൂർ സൂചിയോടൊപ്പം എത്തുവാൻ മിനുട്ടുസൂചി അതിനെക്കാൾ 210° അധികം ചുറ്റണം.

മണിക്കൂർസൂചിയെക്കാൾ 1° അധികം ചുറ്റുവാൻ മിനുട്ടുസൂചിക്കു വേണ്ടുന്ന സമയം $= \frac{2}{11}$ മി.

∴ ,, ,, 210° ,, $= 210 \times \frac{2}{11}$ മി.

$= 38\frac{2}{11}$ മി.

∴ 7മ. $38\frac{2}{11}$ മി.നു രണ്ടു സൂചികളും ഒരുമിച്ചായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 14.

1. (a) 1 മണിക്കും 2 മണിക്കും,
   (b) 4 മണിക്കും 5 മണിക്കും,
   (c) 8 മണിക്കും 9 മണിക്കും,
   (d) 10 മണിക്കും 11 മണിക്കും, ഇടയിൽ എപ്പോഴാണ് ഒരു ഘടികാരത്തിന്റെ സൂചികൾ
   (i) ഒരുമിച്ചായിരിക്കുക,
   (ii) ഒരേ സരളരേഖയിലായിരിക്കുക,
   (iii) ഒന്നു മറ്റൊന്നിനു ലംബമായിരിക്കുക.

2. 4ഉം 5ഉം മണിക്കിടയിൽ മിന്നുട്ടുസൂചി എപ്പോൾ മണിക്കുർസൂചിക്കു 8 മിന്നുട്ടു മുമ്പിലായിരിക്കും?

3. 8ഉം 9ഉം മണിക്കിടയിൽ മിന്നുട്ടുസൂചി, എപ്പോൾ മണിക്കുർസൂചിക്കു 10 മിന്നുട്ടു പുറകിലായിരിക്കും?

4. ഒരു ഘടികാരത്തിലെ സമയം തിങ്കളാഴ്ച അർദ്ധരാത്രി കൃത്യമാണ്. വ്യാഴാഴ്ച മദ്ധ്യാഹ്നത്തിൽ അതിലെ സമയം 30 മിന്നുട്ടു മുമ്പാണ്. എന്നാൽ ശനിയാഴ്ച ഉച്ചക്കു അതിൽ 2 മണിയാകുമ്പോൾ കൃത്യസമയമെത്ര?

അദ്ധ്യായം 7.

ശതമാനം (Percentages).

ഒരാൾ 320ക. മുടക്കി പുസ്തകക്കച്ചവടം ചെയ്തതിൽ 48ക.യും, 550ക. മുടക്കി തുണിക്കച്ചവടം ചെയ്തതിൽ 77ക. യും ലാഭം കിട്ടി. ഏതു കച്ചവടത്തിൽ പണം മുടക്കുന്നതായിരിക്കും അയാൾക്കു അധികം നല്ലതു?

രണ്ടു കച്ചവടത്തിലും ഒരേ തുക മുടക്കുന്നതായാൽ ഉണ്ടാവുന്ന ആദായം കാണുന്നതിനാൽ ഏതാണ് അധികം നല്ലതെന്നു തീർച്ചപ്പെടുത്താം. സാധാരണമായി ലാഭനഷ്ടങ്ങൾ നൂറിന്നു ഇത്രയെന്നാണ് കണക്കാക്കാറുള്ളതു. 100ക. മുടക്കുന്നതായാൽ പുസ്തകക്കച്ചവടത്തിൽനിന്നുള്ള

$$\text{ലാഭം} = \frac{48}{320} \times 100\text{ക.}$$
$$= 15\text{ക.}$$

$$\text{തുണിക്കച്ചവടത്തിൽനിന്നുള്ള ലാഭം} = \frac{77}{550} \times 100\text{ക.}$$
$$= 14\text{ക.}$$

അതുകൊണ്ടു പുസ്തകക്കച്ചവടമാണ് അധികം ആദായകരം. ജനസംഖ്യ മുതലായവയുടെ സ്ഥിതി വിവരപട്ടികകളിൽ ക്ഷയവർദ്ധനവു സാധാരണമായി നൂറിൽ ഇത്രയെന്നാണ് കണക്കാക്കാറുള്ളതു. ഇങ്ങിനെ ഗണിക്കുന്നതിനു ശതമാനഗണിതം എന്നു പറഞ്ഞുവരുന്നു.

ശതമാനം എന്നതിനെ ചുരുക്കി ശ. മാ. എന്നെഴുതാം. ശതമാനത്തെ "%" എന്ന ചിഹ്നംകൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കാറുണ്ട്.

മേൽപ്പറഞ്ഞ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ പുസ്തകക്കച്ചവടത്തിൽനിന്നു ലാഭം 15%ഉം, തുണിക്കച്ചവടത്തിൽനിന്നു ലാഭം 14%ഉം, ആണ്.

ശതമാനം എന്നതിനു 100ൽ ഇത്രയെന്നു അർത്ഥമുള്ളതുകൊണ്ടു അതിനെ ഒരു ഭിന്നിതമായി കരുതാം. ഭിന്നിതത്തിന്റെ ഛേദമെപ്പോഴും 100 ആയിരിക്കും. അംശം ഇത്രയെന്നു മാത്രമാണ് നാം പറയുന്നതു.

100നോടു താരതമ്യപ്പെടുത്തി പറയുന്നതുകൊണ്ടു ശതമാനത്തെ ഒരു സംബന്ധമായും കരുതാം. രണ്ടാം പദം എപ്പോഴും 100 ആയിരിക്കും. ഇങ്ങിനെ എപ്പോഴും ഒരേ സംഖ്യയോടു, അതായതു 100നോടു താരതമ്യപ്പെടുത്തുന്നതുകൊണ്ടു, താരതമ്യത്തിന്നായി ഒരു സംഖ്യ മാത്രമേ ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരുന്നുള്ളൂ. ഇതു വളരെ സൌകര്യമുള്ള ഒരു സമ്പ്രദായമാണ്.

ഉദാ:—(1) 35 ശ. മാ. ഏതൊരു ഭിന്നിതമാണ്?

35 ശ. മാ. = 100ൽ 35 = $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$.

ദശാംശഭിന്നിതരൂപത്തിൽ, ·35.

(2) $\frac{13}{20}$നെ ശതമാനമാക്കുക.

20ൽ 13

∴ 100ൽ $\frac{13}{20} \times 100$ അഥവാ 65.

∴ $\frac{13}{20}$ = 65 ശ. മാ.

(3) ·3നെ ശതമാനമാക്കുക.

·3 = 10ൽ 3. = 100ൽ 30 = 30 ശ. മാ.

·3 × 100 = 30.

അതുകൊണ്ടു ഒരു ഭിന്നിതത്തെ ശതമാനമാക്കുവാൻ അതിനെ 100കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.

(4) 80ക. യുടെ 45 ശ. മാ. എത്ര?

ആവശ്യപ്പെട്ട തുക $= \frac{80 \times 45}{100}$ ക. $= 36$ക.

അഭ്യാസം 15.

1. താഴെയുള്ള ശതമാനങ്ങളെ ഭിന്നിതങ്ങളാക്കി ചുരുക്കുക:— (കഴിയുന്നത്ര എണ്ണം മനസ്സിൽ ചെയ്യുക).

75%, 80%, 15%, $12\frac{1}{2}\%$, $66\frac{2}{3}\%$, 22%, 37%, $11\frac{1}{9}\%$, $9\frac{1}{11}\%$, $6\frac{2}{3}\%$, $6\frac{1}{4}\%$, 55%, $37\frac{1}{2}\%$, $18\frac{3}{4}\%$, $8\frac{1}{3}\%$.

2. (*a*) താഴെയുള്ള ഭിന്നിതങ്ങളെ ശതമാനങ്ങളാക്കുക:— (കഴിയുന്നത്ര എണ്ണം മനസ്സിൽ ചെയ്യുക).

$\frac{7}{10}$, $\frac{13}{20}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{7}{16}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{3}{11}$, $\frac{23}{100}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{7}{30}$, $\frac{17}{50}$, $\frac{23}{25}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{4}{7}$.

(*b*) താഴെയുള്ള സാധാരണ ഭിന്നിതങ്ങളെ ശ. മാ. ങ്ങളാക്കി അവയെ ആരോഹക്രമത്തിൽ എഴുതുക:—

(i) $\frac{11}{15}$, $\frac{31}{46}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{27}{40}$.

(ii) $\frac{11}{19}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{17}{32}$, $\frac{13}{23}$.

3. താഴെയുള്ള ദശാംശഭിന്നിതങ്ങളെ ശ. മാ. ങ്ങളാക്കുക:— (മനസ്സിൽ ചെയ്യുക).

·35, ·8, ·02, ·017, ·001, ·1, ·3, ·0202.

4. വില കാണുക:—

(i) 37ക. 8ണ. യുടെ $37\frac{1}{2}\%$.

(ii) 3 നാഴികയുടെ $6\frac{1}{4}\%$.

(iii) 5 പവന്റെ $13{\cdot}5\%$.

(iv) 1 ശതവത്സരത്തിന്റെ $14\frac{2}{7}\%$.

(v) 4 മണിക്കൂറിന്റെ $8\frac{1}{3}\%$.

(vi) 5·6 ഔൺസിന്റെ ·5%.

(vii) 6 മണിന്റെ ·02%.

ഉദാ:— (5) ഒരു പരീക്ഷക്കു പോയ 130 പേരിൽ 52 പേർ ജയിച്ചു. എന്നാൽ ജയിച്ചവർ എത്ര ശതമാനം?

ജയിച്ചവർ = പരീക്ഷക്കു പോയവരിൽ $\frac{52}{130}$.

$\therefore$ ശ. മാ. $= \frac{52}{130} \times 100 = \underline{\underline{40}}$.

ഉദാ:—(6) 14ക. ഏതൊരു സംഖ്യയുടെ 35 ശ. മാ.മാണ്?

സംഖ്യയുടെ 35 ശ. മാ. = 14ക.

$\therefore$ സംഖ്യ = $14ക. \times \frac{100}{35} = 40ക.$

ഉദാ:—(7) *a*. ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ ജനസംഖ്യ 12 ശ. മാ. വർദ്ധിച്ചു. എന്നാൽ ഇപ്പോഴുള്ള ജനസംഖ്യ ആദ്യമുണ്ടായിരുന്ന ജനസംഖ്യയുടെ എത്ര ഇരട്ടിയാണ്?

വർദ്ധനവു = ആദ്യമുണ്ടായിരുന്ന സംഖ്യയുടെ 12%.

$\therefore$ ഇപ്പോഴുള്ള ജനസംഖ്യ = ആദ്യമുണ്ടായിരുന്ന സംഖ്യ + അതിന്റെ 12%.

= ആദ്യമുണ്ടായിരുന്ന ജനസംഖ്യയുടെ (100+12) ശ. മാ.

= ആദ്യമുണ്ടായിരുന്ന ജനസംഖ്യയുടെ $\frac{112}{100}$ അഥവാ $\frac{28}{25}$.

b. ഇപ്പോൾ 1148 ജനങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ ആദ്യമുണ്ടായിരുന്ന സംഖ്യ കാണുക.

ആദ്യമുണ്ടായിരുന്ന സംഖ്യയുടെ $\frac{28}{25} = 1148$.

$\therefore$,, സംഖ്യ $= \frac{1148 \times 25}{28}$

$= 1025$.

A (വാങ്മൂലം).

a. ഒരു തീവണ്ടിയിലെ യാത്രക്കാരിൽ 2% ഒന്നാം ക്ലാസ്സിലും, 12% രണ്ടാം ക്ലാസ്സിലും, ശേഷം മൂന്നാം ക്ലാസ്സിലും യാത്ര ചെയ്യുന്നു. ആകെ യാത്രക്കാരുടെ എണ്ണം 350 ആണെങ്കിൽ ഓരോതരം യാത്രക്കാരുടേയും എണ്ണം കാണുക.

b. 75ക. ശമ്പളമുള്ള ഒരാൾ 60ക. ചെലവാക്കുന്നുവെങ്കിൽ അയാളുടെ ചെലവു ശമ്പളത്തിന്റെ എത്ര ശ. മാ. ആണ്? സമ്പാദ്യം എത്ര ശ. മാ. ആണ്?

c. ഒരു പാല്ക്കാരൻ 7 നാഴി പാലിനോടു 1 നാഴി വെള്ളം ചേർത്തു വില്ക്കുന്നുവെങ്കിൽ കലർപ്പിന്റെ എത്ര ശ മാ. വെള്ളമാണ്?

d. ഒരു സ്കൂളിൽ 27 ഹരിജൻ വിദ്യാർത്ഥികളുണ്ട്. ഇവർ ആകെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ 15 ശ. മാ. ആണെങ്കിൽ ആകെ വിദ്യാർത്ഥികൾ എത്ര?

e. പട്ടം പരുത്തിയും നെയ്യുന്ന ഒരു നെയ്ത്തുശാലയിൽ നെയ്ത പട്ടിന്റെ തൂക്കം പരുത്തിയുടെ തൂക്കത്തിന്റെ 25 ശ. മാ. ആണെങ്കിൽ പട്ടു ആകെ തുണിയുടെ എത്ര ശ. മാ. ആണ്?

f. ഒരു ഗ്രാമത്തിലുണ്ടായിരുന്ന കോഴികളുടെ 10% ചത്തുപോയശേഷം

675 ബാക്കിയുണ്ടെങ്കിൽ ആദ്യമുണ്ടായിരുന്ന കോഴികൾ എത്ര? എത്ര എണ്ണം ചത്തു?

5. 425 മാങ്ങ മേടിച്ചതിൽ 24 ശ. മാ. ചീഞ്ഞുപോയി. എന്നാൽ ചീഞ്ഞു പോയ എണ്ണമെത്ര? എത്ര ശ. മാ. ബാക്കിയുണ്ട്?

6. 280 കുട്ടികളുള്ള ഒരു സ്കൂളിൽ $22\frac{1}{2}$ ശ. മാ. പെൺകുട്ടികളാകുന്നു. എന്നാൽ ആൺകുട്ടികളുടെ എണ്ണമെത്ര?

7. ഒരു പ്രവൃത്തിശാലയിലെ 780 പ്രവൃത്തിക്കാരിൽ 55 ശ. മാ. മലയാളികളും, $16\frac{2}{3}$ ശ. മാ. തമിഴരും, 15 ശ. മാ. തെലുങ്കരും, ബാക്കിയുള്ളവർ കണ്ണാടക ക്കാരുമാണ്. എന്നാൽ കണ്ണാടക്കാർ എത്ര ശ. മാ. മാണ്? ഓരോ ഭാഷ ക്കാരുമെത്ര?

8. (*a*) ഏയും, ബീയും സ്ഥാനാർത്ഥികളായി നിന്ന ഒരു തിരഞ്ഞെടുപ്പിൽ ആകെ 240 ആളുകൾ വോട്ടുചെയ്തു. അതിൽ ഏക്ക് $51\frac{1}{4}$ ശ. മാ. വോട്ടുകിട്ടി എന്നാൽ ഏക്ക് ബീയേക്കാൾ എത്ര വോട്ട് അധികം കിട്ടി?

(*b*) സീയും, ഡീയും സ്ഥാനാർത്ഥികളായി നിന്ന ഒരു തിരഞ്ഞെടുപ്പിൽ ആകെ 320 പേർ വോട്ടുചെയ്തു. ഡീക്ക് സീയേക്കാൾ $17\frac{1}{2}$ ശ. മാ. വോട്ട് അ ധികം കിട്ടിയെങ്കിൽ ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടിയ വോട്ടെത്ര?

9. ഒരു തോട്ടത്തിലെ വൃക്ഷങ്ങളുടെ 15 ശ. മാ. മാവും, അതിന്റെ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടി പിലാവും, പിലാവിന്റെ പകുതി കവുങ്ങും, ബാക്കി തെങ്ങും, ആകുന്നു വെങ്കിൽ ഓരോതരം വൃക്ഷങ്ങളും ആകെയുള്ളതിന്റെ എത്ര ശ. മാ. മാണ്?

10. 1760 ജനങ്ങളുള്ള ഒരു ഗ്രാമത്തിൽ 45% പുരുഷന്മാരാണ്. പുരുഷ ന്മാരിൽ $11\frac{1}{9}$ ശ. മാ. വും, സ്ത്രീകളിൽ $9\frac{1}{11}$ ശ. മാ. വും എഴുതുവാനും, വായിപ്പാനും, അറിയുന്നവരാണെങ്കിൽ എഴുതുവാനും, വായിപ്പാനും അറിയാത്തവരുടെ ആകെ എണ്ണമെത്ര?

11. ഒരു പരീക്ഷക്കു ഹാജരായ 2250 വിദ്യാർത്ഥികളിൽ 16 ശ. മാ. വിദ്യാ ർത്ഥികൾക്കു 50 മാർക്കിൽ കൂടുതലും, ബാക്കിയുള്ളവരിൽ $16\frac{2}{3}$ ശ. മാ. വിദ്യാർത്ഥി കൾക്കു 40നും 50നും ഇടയിലും മാർക്കു കിട്ടിയെങ്കിൽ 40 മാർക്കിൽ കുറഞ്ഞു കിട്ടി യവരെത്ര?

12. ഒരു സൈന്യത്തിലെ 5600 പടയാളികളിൽ $17\frac{1}{7}$ ശ. മാ. മുറിവേറ്റു. മുറിവേറ്റവരിൽ $23\frac{1}{3}$ ശ. മാ. മരിച്ചെങ്കിൽ മരിച്ചവരുടെ എണ്ണമെത്ര?

13. ഒരാൾക്കു 6750 പവൻ വിലയുള്ള സ്വത്തുണ്ട്. അതിൽ 64·8 ശ. മാ. ഭൂസ്വത്തും, 26·05 ശ. മാ. വീടുകളും, 4·65 ശ. മാ. റൊക്കം പണവും, ബാക്കി

സ്വർണ്ണാഭരണങ്ങളുമാണ്. എന്നാൽ സ്വർണ്ണാഭരണങ്ങളുടെ വില ആകെ സ്വത്തിന്റെ എത്ര ശ. മാ. ആണ്? ഓരോ ഇനത്തിന്റെയും വില കാണുക.

14. ഒരു പരീക്ഷയിൽ ആകെ മാർക്ക് 80 ആണ്. ഒരു കുട്ടിക്ക് 34 മാർക്ക് കിട്ടിയെങ്കിൽ അവന്ന് എത്ര ശ. മാ. മാർക്ക് കിട്ടി?

15. ഒരു നഗരത്തിൽ കൊല്ലാരംഭത്തിൽ 19,215 ഉം കൊല്ലാവസാനത്തിൽ 20,496ഉം ജനങ്ങളുണ്ടായാൽ ജനസംഖ്യയിൽ വർദ്ധനവു എത്ര ശ. മാ. ആണ്?

16. ഉരുപ്പികയ്ക്ക് 9പൈ വീതമുള്ള ആദായനികുതി ആദായത്തിന്റെ എത്ര ശ. മാ. ആണ്?

17. 8 ഭാഗം അമ്ലജനകവും 1 ഭാഗം അബ്ജനകവും ചേർന്നാണ് വെള്ളം ഉണ്ടാവുന്നതെങ്കിൽ ഇവ ഓരോന്നും വെള്ളത്തിന്റെ എത്ര ശ. മാ. ആണ്?

18. ഒരു പട്ടണത്തിലെ നിവാസികളിൽ 972പേർ ഇറാലിക്കാരും, 7776 പേർ ഫ്രെഞ്ചുകാരും 10692പേർ ജർമ്മൻകാരുമാണ്. ഓരോ രാജ്യക്കാരും ജനസംഖ്യയുടെ എത്ര ശ. മാ. ആണ്?

19. 2,73,429 ജനങ്ങളുള്ള ഒരു ജില്ലയിൽനിന്നു 42,066 ജനങ്ങൾ അന്യ ജില്ലകളിലേക്കു പോയാൽ ജില്ലവിട്ടവർ ആകെ ജനസംഖ്യയുടെ ഏതൊരു ശ. മാ. ആണ്?

20. ഒരു രാജ്യത്തിലെ നികുതി ഒരു കൊല്ലത്തിൽ $172\frac{1}{2}$ ലക്ഷം ഉറുപ്പികയും, പിറെറകൊല്ലത്തിൽ 1,41,45,000 ഉറുപ്പികയും ആയിരുന്നെങ്കിൽ നികുതി എത്ര ശ. മാ. കുറഞ്ഞു?

21. 1,05,120 ജനങ്ങളുള്ള ഒരു പട്ടണത്തിൽ ഒരു കൊല്ലത്തിൽ 1533 ജനനവും, 1460 മരണവും ഉണ്ടായാൽ ജനനം, മരണം, വർദ്ധനവ് ഇവ ഓരോന്നും ജനസംഖ്യയുടെ എത്ര ശ. മാ. ആണ്?

22. 35 കുട്ടികളുള്ള ഒരു ക്ലാസ്സിൽ 80 ശ. മാ.വും, 40 കുട്ടികളുള്ള ഒരു ക്ലാസ്സിൽ 85 ശ. മാ.വും കുട്ടികൾ ഹാജരുണ്ടെങ്കിൽ രണ്ടു ക്ലാസ്സിലും കൂടി എത്ര ശ. മാ. കുട്ടികൾ ഹാജരുണ്ട്?

23. ഒരു പട്ടണത്തിൽ 2400 കുട്ടികൾ ഉണ്ട്. അതിൽ 55% ആൺകുട്ടികളാകുന്നു. ആൺകുട്ടികളിൽ 40 ശ. മാ.വും പെൺകുട്ടികളിൽ $16\frac{2}{3}$ ശ. മാ.വും സ്കൂളുകളിൽ പഠിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, പഠിക്കുന്ന കുട്ടികൾ ആകെ കുട്ടികളുടെ എത്ര ശ. മാ. ആണ്?

24. 155,625 ജനങ്ങളുള്ള ഒരു നഗരത്തിൽ സ്ത്രീപുരുഷന്മാരുടെ എണ്ണത്തിന്റെ സംബന്ധം 1075:1000 ആണ്. പുരുഷന്മാരിൽ 12 ശ. മാ.വും

സ്ത്രീകളിൽ 4ശ. മാ.വും, അക്ഷരപരിജ്ഞാനമുള്ളവരാണ്? എന്നാൽ നഗരത്തിൽ എത്ര ശ. മാ. അക്ഷരപരിജ്ഞാനമുള്ളവരാണ്?

[ഉത്തരം 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.] (1927)

25. ഒരു താലൂക്കിലെ ജനസംഖ്യ 3,55,000ഉം, അതിൽ 28 ശ. മാ. സ്ത്രൂളിൽ പഠിക്കേണ്ടുന്ന പ്രായമുള്ള കുട്ടികളുമാണ്. ഈ പ്രായത്തിലുള്ള പെൺകുട്ടികളുടെയും ആൺകുട്ടികളുടെയും എണ്ണത്തിന്റെ സംബന്ധം 72 : 68 ആണ്. ആൺകുട്ടികളിൽ 55 ശ. മാ.വും, പെൺകുട്ടികളിൽ 35 ശ. മാ.വും സ്ത്രൂളിൽ പഠിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആകെ ജനസംഖ്യയുടെ ഏതൊരു ശതമാനമാണ് സ്ത്രൂളിൽ പഠിക്കുന്ന കുട്ടികൾ?

[ഉത്തരം 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കണക്ക.] (1928)

26. ഒരു സമ്മിശ്രലോഹത്തിൽ 32 ശ. മാ.വും മറ്റൊന്നിൽ $22\frac{1}{2}$ശ. മാ.വും വെള്ളിയുണ്ട്. ഒന്നാമത്തെ ലോഹം 15 റാത്തലും, രണ്ടാമത്തേതു 16 റാത്തലും ഉരുക്കിയുണ്ടാക്കിയ ഒരു ലോഹത്തിൽ എത്ര ശ. മാ. വെള്ളിയുണ്ടാകും?

[ഉത്തരം 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കണക്ക.]

27. 1936ൽ മദിരാശിസംസ്ഥാനത്തിൽനിന്നു കയറ്റി അയച്ച ആട്ടിൻതോലിന്റേയും മാട്ടിൻതോലിന്റേയും വില യഥാക്രമം 180·6ലക്ഷം ഉറുപ്പികയും, 89·4ലക്ഷം ഉറുപ്പികയും ആയിരുന്നു. 1937ൽ ആട്ടിൻതോലിന്റെ ആകെ വില 1936ലെ വിലയിൽ $16\frac{2}{3}$ ശ. മാ. അധികവും, മാട്ടിൻതോലിന്റെ വില 1.5ശ.മാ. കുറവും ആയിരുന്നെങ്കിൽ ഒട്ടാകെ വിലയിൽ വർദ്ധനവോ, കുറവോ? എത്ര ശ. മാ.?

[2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.]

28. ഒരു ഹൈസ്ക്കൂളിൽ ഒരു കൊല്ലത്തിൽ ആകെ പഠനം നടക്കുന്ന ദിവസങ്ങളുടെ 60% ഒന്നാം അംശ (term) ത്തിലും ബാക്കി രണ്ടാം അംശത്തിലും ആണ്. ഓരോ ഹൈസ്ക്കൂൾ വിദ്യാർത്ഥിയും ക്ലാസ്സു കയറ്റത്തിനു അഹ്നാകുവാൻ ആകെ പഠനദിവസങ്ങളുടെ 75% സ്ക്കൂളിൽ ഹാജരാവണം. ഒന്നാം അംശത്തിൽ 60% ഹാജരുള്ള ഒരു വിദ്യാർത്ഥി ക്ലാസ്സുകയറ്റത്തിനു അഹ്നാകുവാൻ രണ്ടാമംശത്തിൽ ചുരുങ്ങിയതു എത്ര ശ. മാ. ഹാജരുണ്ടാവണം?

[ഒരു കൊല്ലത്തിൽ 100 പഠനദിവസങ്ങളുണ്ടെന്നു വിചാരിക്കുക.]

29. ഒരു പട്ടണത്തിന്റെ രണ്ടു അംശങ്ങളിലെ ജനസംഖ്യ 20,160ഉം, 13,440ഉം, ആയിരുന്നു. ഒരു കൊല്ലത്തിൽ ആദ്യത്തെ അംശത്തിലെ ജനസംഖ്യ 15% കുറഞ്ഞെങ്കിലും ആകെ ജനസംഖ്യ 10% വർദ്ധിച്ചു. എന്നാൽ രണ്ടാം അംശത്തിലെ ജനസംഖ്യയിലുള്ള വർദ്ധനവു എത്ര ശതമാനമായിരുന്നു?

(1930)

30. മൂന്നു പട്ടണങ്ങളിലെ ജനസംഖ്യ 18,750ഉം, 19,500ഉം, 15,250ഉം ആയിരുന്നു. ആദ്യത്തെ രണ്ടു പട്ടണങ്ങളിലെ ജനസംഖ്യ 8ഉം 12ഉം ശതമാനം വർദ്ധിക്കയും ആകെ ജനസംഖ്യ 5975 അധികമാകയും ചെയ്യുകിൽ മൂന്നാമത്തെ പട്ടണത്തിലെ ജനസംഖ്യയിൽ വർദ്ധനവോ, കുറവോ? ഏതു ശതമാനം?

31. ഒരു കലയിലെ പഴങ്ങളുടെ $7\frac{1}{2}$ ശ. മാ. കെട്ടുപോയി. കെട്ട എണ്ണം 12 ആണെങ്കിൽ, കലയിൽ ആകെ പഴം എത്ര?

32. $12\frac{1}{4}\%$ ചെമ്പും ബാക്കി പൊന്നും ചേർന്നിട്ടുള്ള ഒരു കൃത്രിമോഹകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയ ഒരു ആഭരണത്തിൽ 11·7 ഉറുപ്പികത്തൂക്കം പൊന്നുണ്ടെങ്കിൽ ആ ഭരണത്തിന്റെ തൂക്കമെത്ര? ചെമ്പിന്റെ തൂക്കമെത്ര?

33. ഒരാൾ ആകെ യാത്രചെയ്ത ദൂരത്തിൽ $47\frac{1}{2}\%$ തീവണ്ടിയിലും $32\frac{1}{2}\%$ മോട്ടോർവണ്ടിയിലും, ബാക്കിയുള്ള 12 നാഴിക കാളവണ്ടിയിലും ആയിരുന്നു സഞ്ചരിച്ചതു. എന്നാൽ ഓരോ വാഹനത്തിലും സഞ്ചരിച്ച ദൂരമെത്ര? നാഴിക ഒന്നിന്നു കൂലി, തീവണ്ടിക്കു 4പ.യും മോട്ടോർ വണ്ടിക്കു 6പ.യും കാളവണ്ടിക്കു 1ണ.യും ആയിരുന്നെങ്കിൽ ആകെ കൂലിയെത്ര?

34. ഏയും, ബീയും സ്ഥാനാർത്ഥികളായിനിന്ന ഒരു മുൻസിപ്പാൽ തിരഞ്ഞെടുപ്പിൽ ഏക്കു $51\frac{1}{8}\%$ വോട്ടുകിട്ടി. ഇതു ബീയുടെ വോട്ടിനെക്കാൾ 18 അധികമാണെങ്കിൽ ഏക്കു കിട്ടിയ വോട്ടെത്ര?

35. ഒരാൾ തന്റെ സ്വത്തിന്റെ 25% തന്റെ മകനും, ബാക്കിയുള്ളതിന്റെ 25% തന്റെ ഭാര്യക്കും കൊടുത്തു. ബാക്കിയുള്ളതു തന്റെ രണ്ടു പെൺമക്കൾക്കു സമമായി കൊടുത്തു. ഓരോ മകൾക്കും മകനേക്കാൾ 625ക. അധികം കിട്ടിയെങ്കിൽ ഭാര്യയുടെ ഓഹരി കാണുക.

36. ഒരു പരീക്ഷക്കു ഹാജരായ വിദ്യാർത്ഥികളിൽ 5% പെൺകുട്ടികളും ആകുന്നു. ആൺകുട്ടികളിൽ 24 ശ. മാ.വും പെൺകുട്ടികളിൽ 36ശ. മാ.വും തോറ്റു. ആകെ ജയിച്ചവരുടെ എണ്ണം 13,195 ആണെങ്കിൽ ആകെ പരീക്ഷക്കു ഹാജരായവരുടെ എണ്ണം കാണുക.

37. 240ക. ശമ്പളമുണ്ടായിരുന്ന ഒരു ഉദ്യോഗസ്ഥന്റെ ശമ്പളം 25% വർദ്ധിച്ചു. എന്നാൽ പുതിയ ശമ്പളമെത്ര? ഈ ശമ്പളം 25% കുറച്ചാൽ ശമ്പളമെത്ര? ഇപ്പോഴത്തെ ശമ്പളം ആദ്യത്തെ ശമ്പളത്തെക്കാൾ അധികമോ കുറവോ? എത്ര ശ. മാ.?

38. ഒരു പരീക്ഷയിൽ ജയിക്കുവാൻ ആകെ മാർക്കിന്റെ 40% കിട്ടണം. 44% കിട്ടിയ ഒരു വിദ്യാർത്ഥിക്കു ജയിക്കുവാൻ വേണ്ടതിനെക്കാൾ 9 മാർക്ക് അധികം കിട്ടിയെങ്കിൽ ആകെ മാർക്കെത്ര?

39. ഒരു പരീക്ഷയിൽ $41\frac{1}{4}\%$ മാക്ക് കിട്ടിയ ഒരു വിദ്യാർത്ഥിയുടെ മാക്ക് ജയിക്കുവാൻ വേണ്ടതിനെക്കാൾ 18 അധികമാണ്. $32\frac{1}{2}\%$ മാക്ക് കിട്ടിയ മറ്റൊരു വിദ്യാർത്ഥിക്കു ജയിക്കുവാൻ 24 മാക്ക് പോരാതെ വരുന്നു. എന്നാൽ ജയിക്കുവാൻ കിട്ടേണ്ടുന്ന മാക്കെത്ര? അതു ആകെ മാക്കിന്റെ എത്ര ശതമാനമാണ്?

40. ഒരു പരീക്ഷയിൽ ആകെ മാക്കിന്റെ $43\frac{1}{2}$ ശ. മാ.വും $46\frac{1}{4}$ ശ. മാ.വും കിട്ടിയ രണ്ടു വിദ്യാർത്ഥികളുടെ മാക്കു ജയിക്കുവാൻ വേണ്ടുന്ന മാക്കിനെക്കാൾ 14ഉം, 25ഉം അധികമാണെങ്കിൽ ആകെ മാക്കെത്ര? ജയിക്കുവാൻ അതിന്റെ എത്ര ശ. മാ. കിട്ടണം?

41. ഒരു കൂട്ടി ഒരു പരീക്ഷക്കടലാസ്സിലുള്ള ചോദ്യങ്ങളുടെ 60% ചെയ്തു. അതിൽ 40% ഉത്തരങ്ങൾക്കു നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട മാക്കിന്റെ 50 ശ. മാ. വും ബാക്കിയുള്ളവയ്ക്കു മുഴു മാക്കും കിട്ടിയാൽ അവന്നു ആകെ മാക്കിന്റെ എത്ര ശ. മാ. കിട്ടി?

42. ഒരു പരീക്ഷയിൽ ജയിക്കുവാൻ ആകെ മാക്കിന്റെ 35% കിട്ടണം. ഒരു കൂട്ടി ചോദ്യങ്ങളുടെ 70 ശ. മാ. ചെയ്തു. അവന്റെ ഉത്തരങ്ങളിൽ 75ശത മാനത്തിന്നു നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ട മാക്കിന്റെ 60 ശ. മാ. വും ബാക്കിയുള്ളവയ്ക്കു 40 ശ. മാ. വും കിട്ടി. അപ്പോൾ അവന്നു ജയിക്കുവാൻ വേണ്ടുന്നതിൽ 14 മാക്കു അധികം കിട്ടിയെങ്കിൽ അവന്നു കിട്ടിയ മാക്കെത്ര?

43. ഒരു പട്ടണത്തിലെ ജനസംഖ്യ 8% വർദ്ധിച്ചു. ഇപ്പോൾ 35,316 ജനങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ ആദ്യം എത്രയുണ്ടായിരുന്നു?

44. ഒരു പാണ്ടികശാലയിലുണ്ടായിരുന്ന അരിയുടെ 7% വിറ്റശേഷം 1767 ചാക്കു അരി ബാക്കിയുണ്ടെങ്കിൽ ആദ്യമുണ്ടായിരുന്നതെത്ര?

45. ഒരു പട്ടാളത്തിലുണ്ടായിരുന്ന ആളുകളിൽ $8\frac{1}{3}\%$ മരിച്ചശേഷം 990 പേർ ബാക്കിയുണ്ടെങ്കിൽ മരിച്ചവരുടെ എണ്ണമെത്ര?

46. ഏകദേശം $2\frac{1}{2}$ ഇരട്ടി ശമ്പളമുണ്ടെങ്കിൽ ബീയുടെ ശമ്പളം ഏയുടേതിന്റെ എത്ര ശതമാനമാണ്?

47. ഒരാളുടെ വീട്ടുവാടക ശമ്പളത്തിന്റെ 9 ശ.മാ. മായിരുന്നു. അയാൾക്കു 75ക. അധികം ശമ്പളം കിട്ടിയപ്പോഴും അതേ വാടക കൊടുത്തു. വാടക അയാളുടെ പുതിയ ശമ്പളത്തിന്റെ 6% ആണെങ്കിൽ അയാളുടെ ആദ്യത്തെ ശമ്പളമെത്ര?

48. വിറകിന്റെ വില 10% വർദ്ധിച്ചതിനാൽ ഒരാളുടെ ചിലവു് വർദ്ധിക്കാതിരിപ്പാൻ അയാൾ വിറകു എത്ര ശ. മാ. കുറച്ചു ഉപയോഗിക്കണം?

(1936)

49. പോസ്റ്റ്കാഡിന്റെ വില 50% വർദ്ധിച്ചെങ്കിലും ഒരു തപ്പാലാപ്പീസിൽ പോസ്റ്റ്കാഡ് വിറ്റിട്ടുള്ള വരവിൽ യാതൊരു മാറ്റവുമില്ലെങ്കിൽ വില്പന എത്ര ശ. മാ. കുറഞ്ഞിരിക്കണം?

50. ഒരു മാസികയുടെ വരിസംഖ്യ 25% വർദ്ധിച്ചെങ്കിലും ആകെ വരിപ്പണം 10% മാത്രമേ വർദ്ധിച്ചുള്ളു. എന്നാൽ വരിക്കാരുടെ എണ്ണം എത്ര ശതമാനം കുറഞ്ഞിരിക്കണം?

51. താഴെ കാണുന്ന പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക.

പട്ടണം	1921 ലെ ജനസംഖ്യ	1931 ലെ ജനസംഖ്യ	ക്ഷയവർദ്ധനവിന്റെ ശ. മാ.
എ ബി ആകെ	 72600	 27588	10% വർദ്ധനവു, 5% ക്ഷയം.

52. 1901, 1911, 1921, എന്നീ കൊല്ലങ്ങളിൽ ഒരു ജില്ലയിലെ ജനസംഖ്യ 115000, 128800, 144256 ഇപ്രകാരമായിരുന്നു. എന്തൊരു ക്രമം അനുസരിച്ചാണ് ജനസംഖ്യ വർദ്ധിച്ചത്? ഈ ക്രമപ്രകാരം 1931ലെ ജനസംഖ്യ കണക്കാക്കുക. (S. S. L. C. മാതൃകാചോദ്യം.)

53. ഒരു സ്കൂളിലെ വിദ്യാർത്ഥികളിൽ 35% മാസംതോറും 5ക. 4ണ.യും, 25% 2ക. 12ണ.യും, ബാക്കിയുള്ളവർ 1ക. 4ണ.യും ഫീസ്സ് അടക്കുന്നു. എന്നാൽ ഒരു മാസത്തിൽ പിരിക്കുന്ന ആകെ ഫീസ്സിന്റെ എത്ര ശ. മാ. ഓരോ തരക്കാരും അടക്കുന്നു?

(ഉത്തരം 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക).

54. (*a*) 100ക.യുടെ x% എത്ര?

(*b*) xക.യുടെ y%എത്ര?

55. (*a*) 100 ചെടികൾ ഉണ്ടായിരുന്ന ഒരു തോട്ടത്തിലെ ചെടികളുടെ എണ്ണം p% വർദ്ധിച്ചാൽ ഇപ്പോൾ എത്രയുണ്ട്? m ചെടികളുണ്ടായിരുന്നെങ്കിൽ ഇപ്പോൾ എത്ര? (*b*) 100 ചെടികളിൽ n% വെട്ടിക്കളഞ്ഞാൽ ബാക്കിയെത്ര? x ചെടികൾ ഉണ്ടായിരുന്നെങ്കിൽ ഇപ്പോൾ എത്ര?

56 ഒരു തീവണ്ടിയിൽ a ആളുകൾ ഒന്നാം ക്ലാസ്സിലും, b ആളുകൾ രണ്ടാം ക്ലാസ്സിലും, c ആളുകൾ മൂന്നാം ക്ലാസ്സിലും യാത്രചെയ്യു. എന്നാൽ ആകെ യാത്രക്കാരുടെ എത്ര ശ. മാ. ഓരോ ക്ലാസ്സിൽ യാത്ര ചെയ്യു?

57. (*a*) 100 കുട്ടികളുള്ള ഒരു സ്കൂളിൽ x ആൺകുട്ടികളുണ്ടെങ്കിൽ ആൺകുട്ടികൾ എത്ര ശതമാനം? പെൺകുട്ടികൾ എത്ര ശതമാനം?

(*b*) m കുട്ടികളുള്ള ഒരു സ്കൂളിൽ n ആൺകുട്ടികളുണ്ടെങ്കിൽ ആൺകുട്ടികൾ എത്ര ശതമാനം? പെൺകുട്ടികൾ എത്ര ശതമാനം?

58. ഒരാൾക്കു xക. വിലയുള്ള സ്വത്തുണ്ട്. അതിൽ $a\%$ ഭൂസ്വത്തും $b\%$ വീടുകളും ബാക്കി റൊക്കം പണവുമാണ്. എന്നാൽ റൊക്കം പണം ആകെ സ്വത്തിന്റെ എത്ര ശ. മാ.മാണ്? ഓരോ തരത്തിന്റെയും വില കാണുക.

59. വെടിമരുന്നിന്റെ $p\%$ ഗന്ധകമാകുന്നു. x റാത്തൽ ഗന്ധകം അടങ്ങിയ വെടിമരുന്നിന്റെ തൂക്കമെത്ര?

60. ഒരാൾ തന്റെ യാത്രയുടെ $x\%$ തീവണ്ടിയിലും, $y\%$ ബസ്സിലും ബാക്കി കാളവണ്ടിയിലും സഞ്ചരിച്ചു. കാളവണ്ടിയിൽ a നാഴികയാണ് സഞ്ചരിച്ചതെങ്കിൽ ആകെ യാത്രചെയ്ത ദൂരമെത്ര? തീവണ്ടിയിലും ബസ്സിലും എത്ര നാഴികവീതം സഞ്ചരിച്ചു?

61. ഏയും ബീയും സ്ഥാനാർത്ഥികളായി നിന്ന ഒരു തിരഞ്ഞെടുപ്പിൽ ഏക്കു ആകെ വോട്ടിന്റെ $m\%$ കിട്ടി. ഏക്കു ബീയെക്കാൾ a വോട്ടു അധികം കിട്ടിയെങ്കിൽ (i) ആക വോട്ട (ii) ഏയുടെ വോട്ട (iii) ബീയുടെ വോട്ട കാണുക.

62. ഒരു തീവണ്ടിപ്പാതയുടെ നീളം $x\%$ വർദ്ധിച്ചപ്പോൾ m നാഴികയായി എന്നാൽ ആദ്യത്തെ നീളമെത്ര?

63. ഒരു സ്കൂളിൽ x ശ. മാ. വും വേറൊരു സ്കൂളിൽ y ശ. മാ.വും പെൺകുട്ടികളാകുന്നു. ഒന്നാമത്തെ സ്കൂളിൽ ആകെ a കുട്ടികളും, രണ്ടാമത്തേതിൽ b കുട്ടികളും ഉണ്ടെങ്കിൽ രണ്ടിലെയും കുട്ടികളിൽ എത്ര ശതമാനം പെൺകുട്ടികളാണ്?

64. ഒരു ജലവിതരണ പദ്ധതിക്കു 2 ലക്ഷം ഉറുപ്പിക ചിലവും അതിന്റെ നിലനിൎത്തിപ്പിന്നുള്ള ചിലവുകൾ കഴിച്ചു $5{\cdot}2\%$ തനിലാഭവും വരുമെന്നു കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നു. നിലനിൎത്തിപ്പിന്നുള്ള ചിലവു ഗണിക്കാതുപക്ഷം $6{\cdot}4\%$ ലാഭംകിട്ടും. നിലനിൎത്തിപ്പിന്നുള്ള ചിലവു ഏക്കറിന്നു 12ണ.യാണെങ്കിൽ (i) ജലവിതരണം ചെയ്യുവാൻ നിശ്ചയിച്ച നിലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണവും (ii) ഏക്കറൊന്നിനു ചുമത്തുവാൻ നിശ്ചയിച്ച ജലനികുതിയും കാണുക. (1912)

അദ്ധ്യായം 8.

ശതമാനത്തിന്റെ പ്രയോഗം:
ലാഭവും നഷ്ടവും കച്ചവടക്കിഴിവും
(Profit and Loss and Discount).

കച്ചവടത്തിൽ ഉണ്ടാവുന്ന ലാഭനഷ്ടങ്ങളെ വാങ്ങിയ വിലയുടെ ഒരു ഭാഗമായിട്ടാണ് കണക്കാക്കാറുള്ളതു.

(1) ഒരാൾ ഒരു പശുവിനെ വാങ്ങി 15% ലാഭത്തിനു വിറ്റു. എന്നാൽ വാങ്ങിയ വിലയും, വിറ്റ വിലയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണുക. [ചുരുക്കമായി വാ. വി. എന്നും വി. വി. എന്നും എഴുതുക.]

വി. വി. = വാ. വി + വാ. വി. യുടെ 15%.

= വാ. വി. യുടെ 115%.

$\therefore$ വി. വി. = വാ. വി. $\times \frac{115}{100}$.

വാ. വി. = വി. വി. $\times \frac{100}{115}$

(2) മേല്പറഞ്ഞ കണക്കിൽ പശുവിനെ വി. വി. 138 ക. ആണെങ്കിൽ വാ. വി. കാണുക.

വാ. വി. = വി. വി. $\times \frac{100}{115}$ = 138 ക. $\times \frac{100}{115}$.

= 120 ക.

(3) ഒരു ഷർട്ടിക്കാരം 81 ക. ക്കു വിറ്റാൽ 8% ലാഭം കിട്ടും. 16% ലാഭം കിട്ടുവാൻ എത്രക്കു വില്ക്കണം?

വാ. വി. കാണാതെ ഈ കണക്കു എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യാം.

വാ. വി. യുടെ 108% = 81 ക.

,, ,, 116% = $\frac{81 \text{ ക.} \times 116}{108}$

= 87 ക.

(4) ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ അരി 3% നഷ്ടത്തിനു വില്ക്കേണ്ടിവന്നു. ഒരു ചാക്കിന്മേൽ 3 ക. 2 ണ. വീതം വില കയറിയപ്പോൾ 5% ലാഭം കിട്ടി. എന്നാൽ ഒരു ചാക്ക് അരിയുടെ വാ. വി. യെത്ര?

ഒന്നാമത്തെ വി. വി. = വാ. വി.യുടെ 97%.

രണ്ടാമത്തെ ,, = ,, ,, 105 %

വ്യത്യാസം = ,, ,, (105 – 97)%.

∴ വാ. വി.യുടെ 8% = 3ക. 2ണ.

∴ വാ. വി. $= \frac{50\text{ണ.} \times 100}{8} = 39\text{ക. } 1\text{ണ.}$

(5) ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ ഒന്നിന്നു 160ക. വീതം സൈക്കിളുകൾ വാങ്ങി റൊക്കത്തിന്നു വില്ക്കുമ്പോൾ നിശ്ചയിച്ച വിലയിൽ 20% ഇളച്ചുകൊടുത്ത ശേഷവും 10 % ലാഭം കിട്ടണമെങ്കിൽ എന്തു വിലക്കു വില്പാനാണ് അയാൾ നിശ്ചയിച്ചിരുന്നതു?

റൊക്കത്തിന്നു വില്ക്കുമ്പോൾ കിഴിവു = നിശ്ചയിച്ച വിലയുടെ 20%.

∴ റൊക്കത്തിന്നു വി. വി. = നിശ്ചയിച്ച വിലയുടെ 80%.

= വാ. വി.യുടെ 110%.

$= 160\text{ക.} \times \frac{11}{10} = 176\text{ക.}$

∴ നിശ്ചയിച്ച വില $= \frac{176 \times 100}{80} = 220\text{ക.}$

(6) 4ണ.ക്കു 5 മാങ്ങ വീതം വാങ്ങി 5ണ.ക്കു 4 വീതം വിറ്റാൽ ലാഭം എത്ര ശ. മാ.?

ഭിന്നിതം കൂടാതെ എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യുവാൻ മാങ്ങയുടെ എണ്ണങ്ങളുടെ അ. സാ. ഗു. കണക്ക്. 20 മാങ്ങ വാങ്ങിയെന്നു വിചാരിക്കുക.

20 മാങ്ങ വാ. വി. $= \frac{20 \times 4}{5}$ പ. $= 16\text{ണ.}$

,, വി. വി. $= \frac{20 \times 5}{4}$ പ. $= 25\text{ണ.}$

∴ 16ണ. മേൽ ലാഭം = 9ണ.

∴ 100ണ. മേൽ ലാഭം $= \frac{9\text{ണ.} \times 100}{16} = 56\frac{1}{4}\text{ണ.}$

∴ ലാഭം $= 56\frac{1}{4}\%$.

(7) നേന്ത്രപ്പഴത്തിന്റെ വില 25% കുറഞ്ഞതിനാൽ 6ണ.ക്കു മുമ്പത്തതിലും ഒരു പഴം അധികം കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ 1ന്നു ഇപ്പോൾ എന്താണ് വില?

ഇപ്പോഴത്തെ വില = മുമ്പുള്ള വിലയുടെ 75% അഥവാ $\frac{3}{4}$

∴ ഇപ്പോൾ കിട്ടുന്ന എണ്ണം = മുമ്പു കിട്ടിയതിന്റെ $\frac{4}{3}$.

∴ അധികം കിട്ടുന്നതു = ,, ,, $\frac{1}{3}$,

= 1പഴം.

∴ ഇപ്പോൾ ,, = 4പഴം

∴ 1പഴത്തിന്നു ഇപ്പോഴുള്ള വില $= 1\frac{1}{2}\text{ണ.}$

പുസ്തകങ്ങളും മറ്റും വാങ്ങുമ്പോൾ വില അവയുടെ മേൽ കുറിച്ചതായി നിങ്ങൾ കണ്ടിരിക്കുമല്ലോ. എന്നാൽ പ്രസാധകന്മാരും, പുസ്തകക്കച്ചവടക്കാരും മൊത്തമായി വാങ്ങുന്നവർക്ക് പുസ്തകത്തിന്മേൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ള വിലയിൽ ഒരു ഭാഗം കുറച്ചു കൊടുക്കുന്നതു പതിവാണ്. ഇങ്ങിനെ കുറച്ചു കൊടുക്കുന്ന സംഖ്യക്ക് 'കച്ചവടക്കിഴിവു' (Trade discount) എന്നു പറയുന്നു. ഇതു സാധാരണമായി ഉറുപ്പികയ്ക്ക് ഇത്ര അണ എന്നോ, ഇത്ര ശതമാനമെന്നോ പറഞ്ഞു കൂലിപ്പെട്ടുത്തുന്നു. 1ക.ക്ക് 1ണ. കിഴിവു $= 6\frac{1}{4}$ ശ.മാ. കിഴിവു. $8\frac{1}{3}$ശ. മാ. $= \frac{1}{12} = 1$ണ.ക്ക് 1 പൈ.

താഴെ പറയുന്ന വഴി ഓർക്കുന്നതു നന്നായിരിക്കും.

7 ക.മേൽ $6\frac{1}{4}\%$ കിഴിവു $= 7$ണ.

$\therefore$ കിഴിവു കഴിച്ചു വില $= 7$ക. $-$ 7ണ. $= 6$ക. 9ണ.

15ണ.യിന്മേൽ $8\frac{1}{3}\%$ കിഴിവു $= 15$പ. $= 1$ണ. 3പ.

$\therefore$ കിഴിവു കഴിച്ചു ബാക്കി $= 15$ണ. $- 1$ണ. 3പ.

$= 13$ണ. 9പ.

അഭ്യാസം 16.

A വാങ്ങ്മൂലം.

a. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ സാധനങ്ങളെ 30ശ. മാ. ലാഭത്തിനു വില്ക്കുന്നു. താഴെ പറയുന്ന വിലക്കു അയാൾ വാങ്ങിയ സാധനങ്ങളെ അയാൾ എത്രക്കു വില്ക്കും? 1. 70ക. 2. 6ക. 4ണ. 3. 5ണ.

15% നഷ്ടത്തിനു വില്ക്കുന്നതായാൽ വിറ്റവില എത്ര?

b. 4ക.ക്കു വാങ്ങിയ ഒരു പുസ്തകത്തെ 5ക.ക്കു വിറ്റാൽ ലാഭം എത്ര ശ. മാ.?

c. 5ക.ക്കു വാങ്ങിയ ഒരു പുസ്തകത്തെ 4ക.ക്കു വിറ്റാൽ നഷ്ടം എത്ര ശ. മാ.?

d. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ സാധനങ്ങളുടെ വിലയിന്മേൽ $6\frac{1}{4}\%$ കിഴിവു കൊടുക്കുന്നു. 10ക., 5ക. 8ണ., 2ക. 4ണ. വിലയുള്ള സാധനങ്ങളെ അയാൾ എന്തുവിലക്കു വില്ക്കുന്നു?

$8\frac{1}{3}\%$ കിഴിവു കൊടുക്കുന്നതായാൽ 6ക., 1ക. 2ണ., 15ണ. വിലയുള്ള സാധനങ്ങളെ എത്രവിലക്കു വില്ക്കും?

e. ഒരു ആട്ടിനെ 44ക.ക്കു വിറ്റപ്പോൾ 10% ലാഭം കിട്ടി. എന്നാൽ അതിന്റെ മുതൽ എത്ര? വേറൊരു ആട്ടിനെ 44ക.ക്കു വിറ്റപ്പോൾ 20% നഷ്ടംവന്നു. എന്നാൽ അതിന്റെ മുതൽ എത്ര?

1. താഴെ വരുന്നവയിൽ വിറ്റ വിലയെ വാങ്ങിയ വിലയുടെ ഭിന്നിതമായി എഴുതുക. (കഴിയുന്നതു എണ്ണം മനസ്സിൽ ചെയ്യുക.)

ലാഭം: 5%, 35%, $12\frac{1}{2}\%$, 87%, $8\frac{1}{3}\%$, 100%, 8%, $14\frac{2}{7}\%$, $11\frac{1}{9}\%$, 29%.

നഷ്ടം: 32%, 70%, 25%, $37\frac{1}{2}\%$, $66\frac{2}{3}\%$, $9\frac{1}{11}\%$, 40% 61%, $41\frac{1}{4}\%$, $22\frac{1}{2}\%$.

2. വിറ്റ വില വാങ്ങിയ വിലയുടെ ഏതൊരു ഭിന്നിതമാണെന്നു താഴെ കാണിക്കുന്നു. ഓരോന്നിലും, ലാഭമോ, നഷ്ടമോ എത്ര ശ. മാ. മെന്നു എഴുതുക. (മനസ്സിൽ ചെയ്യുക.)

$\frac{107}{100}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{91}{100}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$.

3. വാങ്ങിയ വില വിറ്റ വിലയുടെ ഏതൊരു ഭിന്നിതമാണെന്നു താഴെ കാണിക്കുന്നു. ഓരോന്നിലും ലാഭമോ, നഷ്ടമോ, എത്ര ശതമാനമെന്നു എഴുതുക.

$\frac{5}{6}$, $\frac{8}{5}$, $\frac{100}{131}$, $\frac{50}{47}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{11}{9}$, $\frac{9}{11}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$.

4. താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ വിട്ടതു ചേർക്കുക.

	വാങ്ങിയ വില	വിറ്റവില	ലാഭം (+) $\%$ നഷ്ടം (−) $\%$
1	73ക. 8ണ.		$+6\frac{1}{4}$.
2	41പ. 10ക്കി.		$-4\frac{1}{6}$.
3	2320ക.	2059ക.	
4	4പ. 3ക്കി. 4പൈ.	4പ. 11ക്കി. 8പൈ.	
5		10ക. 1ണ. 3പ.	$+7\frac{1}{2}$.
6		1ക. 15ണ. 6പ.	-16.

5. ഒരു പുസ്തകത്തെ 2ക. 14ണ. 6പ.ക്കു വിറ്റപ്പോൾ 3ണ. 6പ. നഷ്ടം വന്നു. എന്നാൽ നഷ്ടം എത്ര ശ. മാ.?

6. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ 12 മന്നു് പഞ്ചസാര 224ക.ക്കു വാങ്ങി. അതു പീശത്തിന്നു 2ക. 10ണ. പ്രകാരം വിറ്റു. എന്നാൽ അയാളുടെ ലാഭം എത്ര ശ. മാ.?

7. ഒരാൾ 100ന്നു 8ണ. വീതം 2250 മാങ്ങ വാങ്ങി. 450 മാങ്ങ ചീഞ്ഞു പോയി. ബാക്കിയുള്ളതു മൂന്നു സമഭാഗങ്ങളാക്കി ഒരു ഭാഗം ഡജന്നു 2ണ.യും വേറൊരു ഭാഗം ഡജന്നു $1\frac{1}{2}$ണ.യും ബാക്കി ഡജന്നു 1ണ.യും വിലയായി വിറ്റു. അയാൾക്കു ലാഭമോ, നഷ്ടമോ, എത്ര ശ. മാ.?

8. ഒരു വാച്ചിന്നു 29ക.യും അതിന്റെ ചങ്ങലക്കു 46ക.യും വിലയുണ്ടു്. വാച്ചു് $12\frac{1}{2}$ നഷ്ടത്തിന്നും, ചങ്ങല $12\frac{1}{2}$ ലാഭത്തിന്നും വിറ്റാൽ ആകെ ലാഭമോ, നഷ്ടമോ? എത്ര ശ. മാ.?

9. ഒരാൾ റാത്തലിന്നു 2ക. 7ണ.യും, 2ക. 13ണ.യും, വീതം വിലക്കു കറെ ചായ വാങ്ങി. മേത്തരം ചായയും താണ ചായയും 4:5 എന്ന സംബന്ധത്തിൽ കലർത്തി, കലപ്പിനെ റാത്തലിന്നു 2ക. 10ണ. വീതം വിറ്റാൽ ലാഭമോ നഷ്ടമോ? എത്ര ശ. മാ.?

10. ഒരു സാധനം 2പൈക്കു 3വീതം വാങ്ങി 3പൈക്കു 2വീതം വിറ്റാൽ എത്ര ശ. മാ. ലാഭം കിട്ടും?

11. 6ക. 9ണ.ക്കു ഒരു പുസ്തകം വിറ്റതിൽ $16\frac{2}{3}$% ലാഭമുള്ളതായി കണ്ടു. എന്നാൽ അതു വാങ്ങിയ വില എത്ര? $17\frac{1}{2}$% ലാഭം കിട്ടുവാൻ എന്തു വിലക്കു വില്ക്കണം?

12. പഞ്ചസാര റാത്തലിന്നു $7\frac{1}{2}$ണ. പ്രകാരം വില്ക്കുന്നതായാൽ 2% നഷ്ടം വരും. എന്നാൽ 5% ലാഭം കിട്ടുവാൻ ഒരു ശതത്തോക്കം എന്തു വിലക്കു വില്ക്കണം? [മുതൽ കാണാതെ ചെയ്യുക.]

13. ഒരാൾ 4140ക.ക്കു ഒരു മോട്ടോർകാർ വിറ്റപ്പോൾ 15% ലാഭമുള്ളതായി കണ്ടു. എന്നാൽ അയാളുടെ മുതൽ എത്ര? 4320ക.ക്കു വിറ്റിരുന്നുവെങ്കിൽ അയാൾക്കു എത്ര ശ. മാ. ലാഭം കിട്ടുമായിരുന്നു?

14. ഒരു കുതിരയെ 405ക.ക്കു വില്ക്കുന്നതായാൽ ഒരു കുതിരക്കച്ചവടക്കാരന്നു 28% നഷ്ടം വരും. 450ക.ക്കു വില്ക്കുന്നതായാൽ ലാഭമോ, നഷ്ടമോ? എത്ര ശ. മാ.? [മുതൽ കാണാതെ ചെയ്യുക.]

15. പെൻസിൽ ഗ്രോസ്സിന്നു 13ക. 8ണ. പ്രകാരം വിറ്റപ്പോൾ 10% നഷ്ടം വന്നു. എന്നാൽ ഡജന്നു 1ക. 5ണ. പ്രകാരം വില്ക്കുന്നതായാൽ ലാഭമോ നഷ്ടമോ? എത്ര ശ. മാ.?

16. ഒരാൾ തന്റെ പറമ്പു 5270ക.ക്കും അതിലുള്ള വീടു 4085ക.ക്കും വിറ്റു. പറമ്പിന്മേൽ 15% നഷ്ടം വരികയും വീട്ടിന്മേൽ $7\frac{1}{2}$% ലാഭം കിട്ടുകയും ചെയ്താൽ ആകെ അയാൾക്കു എത്ര ശ. മാ. നഷ്ടം പറ്റി?

17. ഒരു സ്കൂൾ മേനേജർ തന്റെ സ്കൂൾ എട്ടുപുസ്തകങ്ങളും അതിലുള്ള സാമാനങ്ങളും കൂടി 3728ക.ക്കു വിറ്റതിൽ അയാൾക്കു 6·8% നഷ്ടം വന്നു. എട്ടുപുസ്തകത്തിന്നു

കിട്ടിയ 2720ക. വില മുതലിൽ $6\frac{1}{4}\%$ അധികമാണെങ്കിൽ സാമാനങ്ങളുടെ മുതൽ എത്രയാണ്? മുതലിൽ എത്ര ശ. മാ. കുറച്ചാണ് അവ വിറ്റത്?

18. ഒരു പ്രസാധകൻ ഒരു പുസ്തകകച്ചവടക്കാരനു, പുസ്തകങ്ങളുടെ പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ വിലയിൽ 35% കിഴിവുകൊടുക്കുന്നു. ഇതിനും പുറമെ 1 ഡജൻ പുസ്തകം ഒരുമിച്ചു വാങ്ങുമ്പോൾ 1 പുസ്തകം സൌജന്യമായും കൊടുക്കുന്നു. പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ വിലയ്ക്കു വില്ക്കുന്നതായാൽ കച്ചവടക്കാരനു എത്ര ശ. മാ. ലാഭം കിട്ടും? (1ക. വിലയുള്ള 100ഡജൻ പുസ്തകം വാങ്ങിയെന്നു വിചാരിക്കുക.)

19. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ വാരയ്ക്കു 9ണ. വിലയായി തുണിവാങ്ങി $10\frac{1}{2}$ണ.യ്ക്കു വില്ക്കുന്നു. തുണി വില്ക്കുമ്പോൾ 1 ഇഞ്ച് നീളം കുറഞ്ഞു വാരയ്ക്കോൽ ഉപയോഗിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അയാൾക്കു എത്ര ശ. മാ. ലാഭം കിട്ടും?

20. ഒരു പാൽക്കാരൻ നാഴിക്കു $3\frac{3}{4}$ണ. വീതം പാൽ വാങ്ങുന്നു. 4 നാഴി പാലിൽ 1 നാഴി വീതം വെള്ളം ചേർത്തു നാഴി ഒന്നിനു $5\frac{1}{4}$ണ. വീതം വിറ്റാൽ അവന്റെ ലാഭം എത്ര ശ. മാ. മാണ്?

21. ഒരു മദ്യവ്യാപാരി കുപ്പിക്കു 5ക. 4ണ. വീതം മദ്യം വാങ്ങി വെള്ളം ചേർത്തു കുപ്പിക്കു 4ക. 5ണ. വീതം വിറ്റപ്പോൾ 15% ലാഭം കിട്ടിയെങ്കിൽ അയാൾ വിറ്റ മദ്യത്തിൽ എത്ര ശ. മാ. വെള്ളമാണ്?

(100 കുപ്പി മദ്യം വാങ്ങിയെന്നു വിചാരിക്കുക.)

22. ഒരു തുലാം വെള്ളം 6% ലാഭത്തിനു വില്ക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന വില 2% നഷ്ടത്തിനു വില്ക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന വിലയെക്കാൾ 12ണ. അധികമാണെങ്കിൽ 1 തുലാം വെള്ളം വാങ്ങിയ വിലയെത്ര?

23. രണ്ടു പീടികക്കാർ ഒരേ വിലക്കു ചായ വാങ്ങുന്നു. ഒരാൾ 15 ശ. മാ.വും മറ്റേയാൾ 10 ശ. മാ.വും ലാഭം എടുക്കുന്നു. രണ്ടു പീടികയിലും റാത്തലിന്മേൽ വിലയിൽ 2ണ. 3പ. വ്യത്യാസം ഉണ്ടെങ്കിൽ വലിയ വിലക്കാരൻ 1 റാത്തൽ എത്ര വിലക്കാണ് വില്ക്കുന്നതു?

24. ഒരു നിർമ്മാണശാലയിൽ ഒരു സൈക്കിളിനു 130ക. മുതലുണ്ട്. അവിടെനിന്നു 25% ലാഭംകൊടുത്തു ഒരു ക്ഷാപ്പുകാരൻ വാങ്ങിയ സൈക്കിളിനു ഞാൻ 260ക. കൊടുക്കേണ്ടിവരുന്നുവെങ്കിൽ ക്ഷാപ്പുകാരൻ എത്ര ശ. മാ. ലാഭം എടുത്തു?

25. എ കുറെ ചായ ബീക്കു 10% ലാഭത്തിനു വില്ക്കുന്നു. അതിനെ 151ക. 4ണ.ക്കു വിറ്റാൽ ബീക്കു 10% ലാഭം കിട്ടും. എന്നാൽ എയുടെ മുതൽ കാണുക.

26. 2540ക. ചിലവു ചെയ്തു ഏ ഒരു വീടു പണിചെയ്തു. ഏക്കു 25% ലാഭം കൊടുത്തു ബീ അതു വാങ്ങി സീക്കു വിറ്റു. സി അതിനെ 4191ക.

ക്കു വിറ്റപ്പോൾ അയാൾക്കു 10% ലാഭം കിട്ടിയെങ്കിൽ ബി എത്ര ശ. മാ. ലാഭത്തിനാണ് വിറ്റതു?

27. ഒരു സാധനം മൂന്നു പ്രാവശ്യം വില്പനയ്ക്കു അതിന്റെ വില $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും വില്പനയിൽ $12\frac{1}{2}$% ഉം $4\frac{1}{6}$% ശ. മാ. ലാഭമുണ്ടെങ്കിൽ ഒന്നാമതു വിറ്റ ആൾ എത്ര ശ. മാ. ലാഭം എടുത്തു?

28. ഒരു കമ്പനി ഉടമസ്ഥൻ തന്റെ ചരക്കുകളെ വകുപ്പുടിക്കച്ചവടക്കാർക്കു 20% ലാഭത്തിനും, അവർ ചില്ലറക്കച്ചവടക്കാർക്കു 10% ലാഭത്തിനും, ചില്ലറക്കച്ചവടക്കാർ പൊതുജനങ്ങൾക്കു $12\frac{1}{2}$% ലാഭത്തിനും വില്ക്കുന്നു. എന്നാൽ,

(i) കമ്പനിക്കാരനു $6\frac{1}{4}$ണ. മുതലുള്ള ഒരു സാധനം വകുപ്പുടിക്കച്ചവടക്കാരൻ എത്ര വിലയ്ക്കു വില്ക്കും?

(ii) വകുപ്പുടിക്കച്ചവടക്കാരൻ $6\frac{1}{4}$ക.ക്കു വാങ്ങിയ ഒരു സാധനം പൊതുജനങ്ങൾക്കു എത്ര വിലയ്ക്കു കിട്ടും?

(iii) പൊതുജനങ്ങൾ 18ക. 9ണ.ക്കു വാങ്ങുന്ന ഒരു സാധനത്തിനു കമ്പനിക്കാരനു എത്ര മുതലുണ്ടു?

(iv) പൊതുജനങ്ങൾ വാങ്ങുന്ന വിലയ്ക്കു നേരിട്ടു കമ്പനിക്കാരൻ അവർക്കു വില്ക്കുന്നതായാൽ അയാൾക്കു എത്ര ശ. മാ. ലാഭം കിട്ടും?

29. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ 60 പശുക്കളെ 8% ലാഭത്തിനും 30 പശുക്കളെ 12% ലാഭത്തിനും വിറ്റുകിട്ടിയ ലാഭം എല്ലാറ്റിനേയും 10% ലാഭത്തിനു വിറ്റിരുന്നുവെങ്കിൽ കിട്ടാവുന്ന ലാഭത്തിൽ 90ക. കുറവാണെന്നു കണ്ടു. എന്നാൽ അയാൾക്കു ഒരു പശുവിന്മേൽ എത്ര മുതലുണ്ടു?

30. ഞാൻ കുറെ ആടുകളെ വാങ്ങി; അവയിൽ 20% എണ്ണത്തെ 20% ലാഭത്തിനും, 30% എണ്ണത്തെ 30% ലാഭത്തിനും ബാക്കിയുള്ളവയെ 50% നഷ്ടത്തിനും വിറ്റാൽ ആകെ ലാഭമോ, നഷ്ടമോ? എത്ര ശ. മാ.? (100 ആടുകളെ വാങ്ങിയെന്നു വിചാരിക്കുക.)

31. ഒരാൾ ഒരണക്കു 2 വീതം കുറെ മാങ്ങയും അത്രതന്നെ എണ്ണം ഒരണക്കു 3വീതവും വാങ്ങി മുഴുവൻ 2ണ.ക്കു 5 വീതം വിറ്റാൽ ലാഭമോ, നഷ്ടമോ? എത്ര ശ. മാ.?

32. പഞ്ചസാരയുടെ വില $11\frac{1}{9}$% കുറഞ്ഞതിനാൽ ഒരുറുപ്പികക്കു ഇപ്പോൾ $\frac{1}{4}$ റാത്തൽ അധികം കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ മുമ്പു 1 റാത്തലിനു വില എന്തായിരുന്നു?

33. നെല്ലിന്റെ വില 10% വർദ്ധിച്ചതിനാൽ 25ക.ക്കു 1 പറ കുറച്ചു കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ 1 പറക്കു ഇപ്പോൾ വില എത്ര?

34. ഒരാൾ ഗാലനു 16ക. പ്രകാരം മദ്യം വാങ്ങി. 20% ചോന്നു

പോയി. ബാക്കിയുള്ളതു ഗാലന്നു എത്ര വിലക്കു വിറ്റാൽ ആകെ 20% ലാഭം കിട്ടും?

35. ഒരാൾ കുറെ ചരക്കു വാങ്ങി. കടത്തുകൂലി ചരക്കിന്റെ വിലയുടെ 4% ആയി. ആകെ മുതലിന്മേൽ 5% നഷ്ടത്തിന്നു വില്ക്കേണ്ടിവന്നു. 195 ക. അധികം വിലക്കു വിറ്റിരുന്നുവെങ്കിൽ $2\frac{1}{2}$% ലാഭം കിട്ടുമായിരുന്നു. എന്നാൽ ചരക്കു വാങ്ങിയ വിലയെത്ര?

36. ഒരു വാച്ച് 124 ക.ക്കും, അതിന്റെ ചങ്ങല 52 ക.ക്കും വിറ്റാൽ എനിക്കു ആകെ മുതലിന്മേൽ 10% ലാഭം കിട്ടും. വാച്ച് 126 ക.ക്കും, ചങ്ങല അതിന്റെ മുതലിന്നും വിറ്റാൽ ഒട്ടാകെ 10% നഷ്ടം വരും. എന്നാൽ ഓരോന്നും വാങ്ങിയ വില കാണുക.

37. 1 റാത്തൽ ചായ 2 ക. 7 ണ.ക്കു വിറ്റിരുന്നപ്പോൾ ഒരു കച്ചവടക്കാരന്നു $8\frac{1}{3}$% ലാഭം കിട്ടിയിരുന്നു. ചായയുടെ വില റാത്തലിന്നു $1\frac{1}{3}$ ണ. വീതം വർദ്ധിച്ചപ്പോൾ അയാൾ തന്റെ വിലയും $1\frac{1}{3}$ ണ. കയറ്റി. എന്നാൽ അയാൾക്കു എത്ര ശ. മാ. ലാഭം കിട്ടും?

38. 21 പുസ്തകം വാങ്ങിയ വിലക്കു 18 പുസ്തകം വിറ്റാൽ ലാഭം എത്ര ശ. മാ.? (1936)

39. ഒരു വ്യാപാരി രണ്ടു മോട്ടോർകാറുകൾ 2744 ക. വീതം വിറ്റപ്പോൾ ഒന്നിന്മേൽ അയാൾക്കു 12 % ലാഭവും, മറ്റേതിന്മേൽ 2% നഷ്ടവും ഉണ്ടായി. എന്നാൽ ഒട്ടാകെ എത്ര ശ. മാ. ലാഭം കിട്ടി? (1933)

40. 400 ക. വീതം രണ്ടു കുതിരകളെ വിറ്റപ്പോൾ ഒന്നിന്മേൽ 10% ലാഭവും മറ്റേതിന്മേൽ 10% നഷ്ടവുമുണ്ടായി. എന്നാൽ ഒട്ടാകെ ലാഭമോ, നഷ്ടമോ? എത്ര ശ. മാ.? (1929)

41. ഒരു മോട്ടോർ വ്യാപാരി 3200 ക.ക്കു ഒരു കാർ വാങ്ങി അതിന്നു ഒരു വില നിശ്ചയിച്ചു പരസ്യപ്പെടുത്തി ഈ വിലയിൽ 10% കിഴിവു കൊടുത്ത ശേഷവും തനിക്കു 35% ലാഭം കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ എത്ര വിലക്കു വില്ക്കുമെന്നാണു പരസ്യം ചെയ്തതു്. [S. S. L. C. മാതൃകാചോദ്യം]

42. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ തന്റെ മുതലിന്മേൽ 30% ലാഭം കണക്കാക്കി സാധനങ്ങൾക്കു വില നിശ്ചയിക്കുന്നു ഒരൊക്കം വാങ്ങുന്നവർക്കു ഈ വിലയിൽ 15% കിഴിവു കൊടുക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഒരൊക്കത്തിന്നു വില്ക്കുമ്പോൾ അയാൾക്കു എത്ര ശ. മാ. ലാഭം കിട്ടുന്നു? 69 ക. 1 ണ. ഒരൊക്കം കൊടുത്തു വാങ്ങുന്ന ഒരു ഷാടികാരത്തിന്നു കച്ചവടക്കാരന്നു എത്ര മുതലുണ്ടു്? അതു എത്ര വിലക്കു വില്ക്കുവാനാണു് അയാൾ നിശ്ചയിച്ചതു്?

43. തന്റെ വിലയിൽ 20% കിഴിവു കൊടുത്ത ശേഷവും തനിക്കു 20% ലാഭം കിട്ടണമെങ്കിൽ ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ തന്റെ മുതലിൽ എത്ര ശ. മാ. കയ

റിയാണ് വില നിശ്ചയിക്കേണ്ടത്? 56ക. 4ണ. വിലക്കു വില്പാൻ നിശ്ചയിച്ച ഒരു സൈക്കിൾ അയാൾ എത്ര വിലക്കു വില്ക്കും? അതിന്നു അയാൾക്ക് എത്ര മുതലുണ്ട്?

44. ഒരു കമ്പനിക്കാർ ചരക്കുകളെ പരസ്യവിലയിൽ 20% കുറച്ചു വില്ക്കുകയും, റൊക്കം പണം കൊടുക്കുന്നവർക്കു ഈ വിലയിൽ 5% കിഴിവുകൊടുക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇങ്ങിനെ രണ്ടു കിഴിവുകൾ കൊടുത്തിട്ടും കമ്പനിക്കാർക്കു 14% ലാഭം കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ മുതലിൽ എത്ര ശ. മാ. കൂട്ടിയാണ് വില പരസ്യം ചെയ്തത്? (1923)

45. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ 30% ലാഭം കണക്കാക്കി ചരക്കുകളുടെ വില നിശ്ചയിക്കുന്നു. റൊക്കം പണം കൊടുക്കുന്നവർക്കു ഈ വിലയിൽ 12ശ. മാ.വും കടം വാങ്ങുന്നവർക്കു 5ശ. മാ.വും കിഴിവുകൊടുക്കുന്നു. ചരക്കുകളുടെ $\frac{5}{8}$ ഭാഗം റൊക്കത്തിന്നും ബാക്കി കടത്തിന്നുമാണ് വിറ്റതെങ്കിൽ ആകെ അയാൾക്കു എത്ര ശ. മാ ലാഭം കിട്ടിയിരിക്കും? (1923)

46. ഒരു പ്രസാധകൻ ഒരു പുസ്തകക്കച്ചവടക്കാരനു ഒരു പുസ്തകത്തിന്റെ പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ വിലയിൽ 20% കിഴിവും, റൊക്കം പണം കൊടുക്കുന്നതായാൽ കിഴിവു കഴിച്ചുള്ള വിലയിൽ 5% കിഴിവു വീണ്ടും കൊടുക്കുന്നു. ഇതിനും പുറമെ 1 ഡസൻ പുസ്തകം വാങ്ങുമ്പോൾ 1 പുസ്തകം സൌജന്യമായും കൊടുക്കുന്നു. പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ വിലയിൽ ഉരുപ്പികക്കു 4ണ. വീതം കച്ചവടക്കാരൻ കിഴിവുകൊടുക്കുന്നതായാൽ അയാളുടെ ലാഭം എത്ര ശ. മാ.മാണ്? (1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.) (1913)

47. ഒരു പാല്ക്കാരൻ ഇടങ്ങഴിക്കു 5ണ. വീതം പാൽ വാങ്ങി വെള്ളം ചേർത്തു വില്ക്കുന്നു. ശരിയായ അളവിൽ $\frac{1}{16}$ കുറവുള്ള അളവു ഉപയോഗിച്ചു ആഴക്കിന്നു $\frac{1}{2}$ണ. വീതം വില്ക്കുമ്പോൾ 120% ലാഭം കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ പാലും വെള്ളവും ഏതൊരു സംബന്ധത്തിലാണ് ചേർക്കുന്നതു? (1914)

(8 ആഴക്കു = 1 ഇടങ്ങഴി)

48. ഒരു സാധനം നിർമ്മിക്കുവാനുള്ള ചിലവിന്റെ p% കൂട്ടി ഒരു കൈത്തൊഴിലുകാരൻ അതിനെ ഒരു കച്ചവടക്കാരനു വില്ക്കുന്നു. അതു rക.ക്കു വില്ക്കുമ്പോൾ കച്ചവടക്കാരനു q% ലാഭം കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ അതു നിർമ്മിക്കുവാനുള്ള ചിലവു കാണുക. $p=10$, $q=12\frac{1}{2}$, $r=495$ ആയാൽ ആ സാധനം നിർമ്മിക്കുവാനുള്ള ചിലവു കാണുക. (1914)

49. വീശത്തിനു aക. പ്രകാരം m മണം, വീശത്തിനു bക. പ്രകാരം n മണം കാപ്പിക്കുരു കലർത്തി വില്ക്കുമ്പോൾ ഒരു കച്ചവടക്കാരനു c%ലാഭം കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ ഒരു വീശം വില്ക്കുന്ന വിലയെത്ര?

$m=8$, $n=10$, $a=6\frac{1}{4}$, $b=7\frac{1}{2}$, $c=12\frac{1}{5}$ ആയാൽ ഒരു വീശം വില്ലുന്ന വിലയെത്ര? (1919)

50. റാത്തലിന്നു 15ണ. വിലയുള്ള 80 റാത്തൽ ചായയോടു റാത്തലിന്നു 1ക. 4ണ. വിലയുള്ള കുറെ ചായ ചേർത്തു കലർപ്പിനെ റാത്തലിന്നു 1ക. 3ണ. പ്രകാരം വിറ്റപ്പോൾ ഒരു കച്ചവടക്കാരനു 20% ലാഭം കിട്ടി. എന്നാൽ അയാൾ എത്ര റാത്തൽ മേത്തരം ചായ ചേർത്തിരിക്കണം? (Re-Ex. 1919)

51. വീശത്തിന്നു 2ക.യും, 2ക. 12ണ.യും വീതം വിലയുള്ള രണ്ടു തരം കാപ്പി കലർത്തി വീശത്തിന്നു 3ക. വീതം വിറ്റപ്പോൾ ഒരു കച്ചവടക്കാരനു 20% ലാഭം കിട്ടി. എന്നാൽ രണ്ടു തരത്തേയും ഏതു സംബന്ധത്തിലാണു അയാൾ കലർത്തിയതു്? (1927)

52. ഒരാൾ ഒരു വീടും പറമ്പും വാങ്ങി വീടു 12% ലാഭത്തിന്നും, പറമ്പു 16% നഷ്ടത്തിന്നും വിറ്റപ്പോൾ അയാൾക്കു ആകെ 380ക. ലാഭം കിട്ടി. വീടു 14% ലാഭത്തിന്നും, പറമ്പു 20% നഷ്ടത്തിന്നും വിറ്റിരുന്നെങ്കിൽ അയാൾക്കു 30ക. കൂടി ലാഭം കിട്ടുമായിരുന്നു. എന്നാൽ അയാൾ ഓരോന്നും വാങ്ങിയ വിലയെത്ര? (1932)

അദ്ധ്യായം 9.

സാധാരണ പലിശ

(Simple Interest).

ഒരാളുടെ കൈയിൽനിന്നു പണം കടം വാങ്ങുന്നതായാൽ അയാൾക്കു് അതിന്നു പ്രതിഫലമായി പണം കൊടുക്കണം; കാരണം, ആ പണം മുടക്കി കച്ചവടം ചെയ്യുന്നതായാൽ അയാൾക്കു പണം സമ്പാദിക്കാവുന്നതാണു്. ഇങ്ങിനെ പണം ഉപയോഗിക്കുന്നതിന്നു പ്രതിഫലമായി കൊടുക്കുന്ന സംഖ്യക്കു **പലിശ** (Interest) യെന്നും വാങ്ങുന്ന സംഖ്യക്കു **മുതൽ** (Principal) എന്നും പറയുന്നു. കടം തീർക്കുമ്പോൾ വാങ്ങിയ മുതലും അതിന്മേലുള്ള പലിശയും കൊടുക്കേണ്ടതാണു്. ഇങ്ങിനെ കൊടുക്കുന്ന സംഖ്യക്കു **പലിശയടക്കം മുതൽ** (Amount) എന്നു പറയുന്നു. ഒരു ബേങ്കിൽ

നിന്നോ, ഒരാളിൽനിന്നോ പണം കടം വാങ്ങുമ്പോൾ 100ക.ക്ക 1 കൊല്ലത്തേക്ക എത്ര ഉറുപ്പിക പലിശ കൊടുക്കണമെന്ന നിശ്ചയിക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യക്ക പലിശയുടെ വീതം എന്നോ നിരക്ക് (Rate) എന്നോ പറയുന്നു. ചെറിയ സംഖ്യകൾ കൊണ്ടുള്ള ഇടപാടുകളിൽ പലിശനിരക്ക വേറെയും വിധത്തിൽ ക്ലിപ്തപ്പെടുത്താറുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി 1ക.ക്ക മാസത്തിൽ ഇത്ര പൈയെന്നോ 100ക.ക്ക മാസത്തിൽ ഇത്ര അണയെന്നോ കണക്കാക്കാറുണ്ട്. എങ്കിലും ഏറ്റവും സാധാരണമായി ഉപയോഗിക്കുന്ന നിരക്ക 100ക.ക്ക 1 കൊല്ലത്തേക്കുള്ള പലിശയാണ്. 8 ശ. മാ. പലിശയെന്നോ 8 പലിശയെന്നോ പറഞ്ഞാൽ 100ക.ക്ക 1 കൊല്ലത്തിൽ 8ക. പലിശയെന്നാണർത്ഥം.

മേൽപ്പറഞ്ഞ സംഗതികളിൽനിന്ന കടം സംബന്ധിച്ചുള്ള ഇടപാടുകളിൽ 4 ഇനങ്ങൾ ഉൾപ്പെട്ടതായി കാണാം. അവ മുതൽ, പലിശ, കടം നിലവിലുള്ള കാലം, പലിശനിരക്ക എന്നിവയാണ്. പലിശ സംബന്ധിച്ചുള്ള കണക്കുകളെ ഈ ഇനങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ മറ്റു മൂന്നിൽനിന്ന ഗണിക്കുന്ന പ്രവൃത്തിയായി കരുതാം.

ഉദാ: — (1) 8 ശ. മാ. പലിശ വീതം 325ക.ക്ക 3 കൊല്ലത്തേക്ക പലിശയെത്ര? പലിശയടക്കം മുതലെത്ര?

100ക.ക്ക 1 കൊല്ലത്തേക്ക പലിശ = 8ക.

∴ 325ക.ക്ക 3 ,, ,, $= \frac{8}{100} \times 325 \times 3$ക.

$= 78$ക.

∴ പലിശയടക്കം മുതൽ $= (325 + 78)$ക.

$= 403$ക.

പലിശ കാണാൻ ഒരു സൂത്രം നമുക്ക കണ്ടുപിടിക്കാം

കാലത്തെ കൊല്ലമാക്കി എഴുതുക.

പലിശ, മുതൽ, കൊല്ലം, നിരക്ക ഇവയെ *I. P. n. r* എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ട സൂചിപ്പിക്കുക.

$\therefore$ 100 ക.ക്ക 1 കൊല്ലത്തേക്ക പലിശ $= r$ ക.

$\therefore P$ ക.ക്ക ,, ,, $= \frac{P}{100} \times r$ ക.

P ക.ക്ക n ,, ,, $= \frac{P \times n \times r}{100}$ ക.

$$\therefore I = \frac{Pnr}{100}.$$

(2) ഈ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച 825 ക.ക്ക 2 കൊല്ലം 146 ദിവസത്തേക്ക $7\frac{1}{2}\%$ പലിശ വീതം കിട്ടേണ്ടുന്ന പലിശ കാണുക.

146 ദിവസം $= \frac{1}{3}\frac{46}{65}$ അഥവാ $\frac{2}{5}$ കൊല്ലം.

$$I = \frac{Pnr}{100} = \frac{825 \times 2\frac{2}{5} \times 7\frac{1}{2}}{100} \text{ക.}$$

$= 148$ക. 8ണ.

(3) $6\frac{1}{4}$ ശ. മാ. പലിശ വീതം ഒരു ബേങ്കിൽനിന്നു 1937 ആഗസ്റ്റ് 14-ാംനു- ഞാൻ 730ക. കടം വാങ്ങി. ഡിസെമ്പർ 29-ാംനു- കടം തീർക്കുവാൻ ഞാൻ എത്ര പണം അടക്കണം?

ബേങ്കുകളിൽ നാം അടക്കുന്നതോ, എടുക്കുന്നതോ ആയ സംഖ്യകളിന്മേൽ ഇടപാടു ചെയ്യു ആദ്യത്തെ ദിവസത്തെ പലിശ മാത്രമേ കണക്കാക്കാറുള്ളു.

അതുകൊണ്ടു ഈ കണക്കിൽ ആഗസ്റ്റ് 14-ാംനു-ക്കു പലിശ അടക്കണം; ഡിസെമ്പർ 29-ാംനു-ക്കു പലിശ ഇല്ല.

$\therefore$ ആകെ ദിവസം $= 18 + 30 + 31 + 30 + 28.$

$= 137.$

$$\therefore I = \frac{Pnr}{100} = 730 \times \frac{137}{365} \times \frac{25}{4 \times 100} \text{ക.}$$

17ക. 2ണ.

$\therefore$ അടക്കേണ്ടുന്ന സംഖ്യ $= 730$ക. $+ 17$ക. 2ണ.

$= 747$ക. 2ണ.

കണക്കിൽ പറഞ്ഞ കാല അളവനുസരിച്ചു കൊല്ലത്തെ 365 ദിവസമോ 52 ആഴ്ചയോ, 12 മാസമോ ആയി നാം ഗണിക്കേണ്ടതാണ്. ഫിബ്രുവരിക്കു 29 ദിവസങ്ങളുള്ള കൊല്ലത്തേയും 365 ദിവസം മാത്രം ഉള്ളതായി കരുതണം.

പലിശയടക്കം മുതലിനെ A എന്ന അക്ഷരംകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നതായാൽ

$$A = P + I$$

$$= P + \frac{Pnr}{100} = P(1 + \frac{nr}{100}).$$

ഈ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു താഴേയുള്ള കണക്കു ചെയ്യുക.

(4) $6\frac{1}{2}\%$ പലിശ വീതം ഞാൻ 280ക. കടം വാങ്ങി. 25 ആഴ്ചക്കു ശേഷം കടം വീട്ടുന്നതായാൽ ഞാൻ എത്ര സംഖ്യ കൊടുക്കണം?

$$A = P(1 + \frac{nr}{100})$$

$$= 280(1 + \frac{25}{52} \times \frac{13}{2 \times 100})\text{ക.}$$

$$= 280(1 + \frac{1}{3\,2})\text{ക.}$$

$$= 288\text{ക. } 12\text{ണ.}$$

$I = \frac{Pnr}{100}$; $A = P(1 + \frac{nr}{100})$. ഈ രണ്ടു സൂത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു പലിശ സംബന്ധിച്ചുള്ള കണക്കുകൾ ചെയ്യാം. പ്രത്യേക മാർഗ്ഗങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്യേണ്ടുന്ന കണക്കുകൾ താഴേ ചേർക്കുന്നു.

ഉദാ:—(5) ഒരു സംഖ്യ 3 കൊല്ലംകൊണ്ടു പലിശയടക്കം 65ക.യും, 5 കൊല്ലംകൊണ്ടു 75ക.യും ആയിത്തീരുന്നു. എന്നാൽ മുതലും പലിശയുടെ നിരക്കും കാണുക.

മുതലിന്മേൽ 2 കൊല്ലത്തെ പലിശ $= (75 - 65)$ക. $= 10$ക.

,, 3 ,, ,, $= \frac{10 \times 3}{2}$ക. $= 15$ക.

$\therefore$ മുതൽ $= (65 - 15)$ക. $= 50$ക.

$\therefore$ പലിശയുടെ നിരക്കു $= 15 \times \frac{100}{50} \times \frac{1}{3}\% = 10\%$

(6) ഒരു സൈക്കിളിന്നു റൊക്കം വില 80ക.യാകുന്നു. കടമായി വാങ്ങുന്നതായാൽ വാങ്ങുന്ന ദിവസം 10കയും പിന്നീടു ഓരോ മാസം 10ക. വീതം 8 തവണയും അടക്കണം. എന്നാൽ കടമായി വാങ്ങുന്ന ഒരാൾ എത്ര വീതം പലിശയടക്കുന്നു?

ഇടപാടു 8 മാസത്തിൽ തീരുന്നു.

$\therefore$ ൊക്കം വില്പനയിൽനിന്നുള്ള വരവു $\}$ = 80ക.+80ക.ക്കു 8 മാസത്തേക്കുള്ള പലിശ

കടമായി വില്പ്പന്നതിനാലുള്ള വരവു $\}$ = 90ക.+10ക.ക്കു (8+7+6+5+4+3+2+1) മാസത്തെ പലിശ.

പലിശയുടെ നിരക്കു $x^0/_0$ എന്നു വിചാരിക്കുക.

$\therefore 80+\frac{80}{100}\times\frac{8}{12}\times x=90+\frac{10}{100}\times\frac{36}{12}x$

$\frac{8}{15}x=10+\frac{3}{10}x.$

$\therefore \frac{7}{30}x=10$

$\therefore \quad x=\frac{300}{7}=42\frac{6}{7}.$

$\therefore$ പലിശനിരക്കു $=42\frac{6}{7}{}^0/_0.$

അഭ്യാസം 17.

(ഉത്തരത്തിൽ പൈയുടെ ഭിന്നങ്ങൾ വരുമ്പോൾ അടുത്ത പൈവരെ കൃത്യമായി എഴുതുക).

1. സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു പലിശ കാണുക.
   (*a*) 65ക.ക്കു 7 മാസത്തേക്കു $7\frac{1}{2}{}^0/_0$ പ്രകാരം.
   (*b*) 112ക. 8ണ.ക്കു 146 ദിവസത്തേക്കു $2\frac{1}{2}{}^0/_0$ പ്രകാരം.
   (*c*) 273ക. 12ണ.ക്കു മാർച്ച് 5-ാംനു- മുതൽ അതേകൊല്ലം ആഗസ്റ്റ് 20-ാംനു-വരെ $8\frac{1}{3}{}^0/_0$ പ്രകാരം.
2. പലിശയടക്കം മുതൽ കാണുക.
   (*a*) 72ക. 8ണ.ക്കു 23 ആഴ്ചയിൽ $3\frac{1}{2}{}^0/_0$ പ്രകാരം.
   (*b*) 1ക.ക്കു മാസത്തിൽ കാലണവീതം 17ക. 4ണ.ക്കു $5\frac{1}{2}$ മാസത്തിൽ.
   (*c*) 420ക.ക്കു 9ശ. മാ. പ്രകാരം 1938 മാർച്ച് 13 മുതൽ സപ്തംബർ 4-ാംനു-വരെ.

3. മൂന്നു മാസംതോറും പലിശ വസൂൽ ചെയ്യുന്ന ഒരു ബേങ്കിൽനിന്നു 9ശ. മാ. പലിശവീതം 425ക. കടം വാങ്ങിയ ഒരാൾ ആദ്യത്തെ തവണ എത്ര പലിശ കൊടുക്കണം?

4. ഒരു കൊല്ലത്തേക്കു സ്ഥിരം സൂക്ഷിപ്പായി വെക്കുന്ന സംഖ്യകളിന്മേൽ ഒരു ബെങ്ക് $5^0/_0$ പലിശ കൊടുക്കുന്നു. സ്ഥിരം സൂക്ഷിപ്പുകാർ മുതലിൽനിന്നു കടമായി എടുക്കുന്ന സംഖ്യകളിന്മേൽ $7^0/_0$ പലിശയടക്കണം. ഒരാൾ 1750ക. ഒരു കൊല്ലത്തേക്കു സ്ഥിരം സൂക്ഷിപ്പായി അടച്ചു 4 മാസം കഴിഞ്ഞശേഷം 525ക.

യും, പിന്നെയും, 4 മാസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 375ക.യും കടമായി എടുത്താൽ കൊല്ലാവസാനത്തിൽ അയാൾക്കു മുതലും പലിശയുംകൂടി എത്ര കിട്ടണം?

5. ഒരു സ്ത്രീഫണ്ടിലെ പണത്തിൽനിന്നു മാ൪ച്ച്, ജൂൺ, സെപ്തെമ്പ൪, ഡിസമ്പ൪ 1-ാംതിയ്യതികളിൽ 225ക. വീതം ഒരു ബേങ്കിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. ബേങ്ക് 6% പലിശ കൊടുക്കുന്നുവെങ്കിൽ കൊല്ലാവസാനത്തിൽ ഫണ്ടിന്റെ പേരിൽ ബേങ്കിലുള്ള മൊത്തം സംഖ്യയെത്ര?

6. $7\frac{1}{2}$% പലിശക്കു 1937 മേയി 25-ാംനു വാങ്ങിയ 730ക. മേലുള്ള കടം തീ൪പ്പാൻ ഞാൻ 750ക. 4ണ. കൊടുക്കേണ്ടിവരുന്നുവെങ്കിൽ കടം തീ൪ത്ത തിയ്യതി കാണുക.

7. കടമായി വാങ്ങുന്ന സാധനങ്ങളുടെ വിലയിന്മേൽ ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ 12% പലിശ വസൂലാക്കുന്നു. 75ക. റൊക്കം വിലയുള്ള ഒരു വാച്ചിന്നു 76ക. 14ണ. കൊടുക്കേണ്ടിവന്നാൽ വാങ്ങി എത്ര മാസം കഴിഞ്ഞശേഷമാണു വില കൊടുത്തതു?

8. സ്ഥിരം സൂക്ഷിപ്പായി ചെച്ചിട്ടുള്ള സംഖ്യകളിന്മേൽ ഒരു ബേങ്ക് 6% പലിശകൊടുക്കുന്നു. മാസത്തിൽ $47\frac{1}{2}$ക. വീതം വരവുണ്ടാവാൻ ആ ബേങ്കിൽ ഒരാൾ എത്ര പണം സൂക്ഷിക്കണം?

9. ബി. എ. ഗണിതശാസ്ത്രപരീക്ഷയിൽ ഒന്നാം ക്ലാസ്സിൽ ഒന്നാമനായി ജയിക്കുന്ന ക്രിസ്തീയവിദ്യാ൪ത്ഥിക്കു 90ക. വിലക്കുള്ള ഒരു സ്മാനം കൊല്ലംതോറും കൊടുപ്പാൻ ഒരു ധനികൻ നിശ്ചയിച്ചു. $2\frac{1}{2}$% പലിശ കൊടുക്കുന്ന ഒരു ബേങ്കിൽ ഈ കായ്യത്തിനു അയാൾ എത്ര പണം സൂക്ഷിക്കണം? ഒരു കൊല്ലം ക്രിസ്തീയ വിദ്യാ൪ത്ഥികളിൽ ആരും ഒന്നാം ക്ലാസ്സിൽ ജയിച്ചില്ലെങ്കിൽ പിറെറ കൊല്ലം സമ്മാനത്തിന്റെ വില എത്ര അധികരിപ്പിക്കാം?

10. ഒരു ഹുണ്ടികവ്യാപാരിയോടു 15% പലിശക്കു ഞാൻ കുറെ പണം കടം വാങ്ങി. 9 മാസം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 194ക. 11ണ. കൊടുക്കേണ്ടിവന്നാൽ കടം വാങ്ങിയ സംഖ്യ കാണുക.

11. 3% പലിശ കൊടുക്കുന്ന ഒരു ബേങ്കിൽ എത്ര പണമിട്ടാൽ 5 കൊല്ലത്തിന്നുശേഷം 2070ക. കിട്ടും? പലിശ $2\frac{1}{2}$%മായി കുറച്ചാൽ അതേ സംഖ്യ കിട്ടുവാൻ എത്ര അധികം പണം ഇടണം?

12. ഞാൻ 55ക. വിലയുള്ള തുണി വാങ്ങിയതിലേക്കു 30ക. റൊക്കമായും 25ക. 9ണ. 3 മാസത്തിന്നു ശേഷവും കൊടുക്കേണ്ടിവന്നാൽ കച്ചവടക്കാരൻ വസൂലാക്കിയ പലിശനിരക്കു കാണുക.

13. 3800ക. വിലയുള്ള ഒരു വീടു ഒരാൾ മാസത്തിൽ 15ക. വാടകക്കു കൊടുക്കുന്നു. കൊല്ലത്തിൽ ശരാശരി $2\frac{1}{2}$മാസം വീടു ഒഴിവായിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അയാൾക്കു വീട്ടിന്റെ വിലയിന്മേൽ എത്ര ശ. മു. പലിശ കിട്ടുന്നു?

14. ഞാൻ 3400ക.ക്കു ഒരു വീടും പറമ്പും വാങ്ങി. വീട്ടിന്റെ കേട്പാടുകൾ തീർപ്പാൻ 450ക. ചെലവായി. മാസത്തിൽ 11ക. വാടകക്കു വീടും കൊല്ലത്തിൽ 110ക. പാട്ടത്തിന്നു പറമ്പും കൊടുത്തു. ഒരു മാസത്തെ വാടക മുൻസിപ്പാൽ നികുതിയായി കൊടുക്കേണ്ടിവന്നാൽ മുടക്കിയ പണത്തിന്മേൽ എനിക്കു എത്ര വീതം പലിശ കിട്ടുന്നു?

15. 8കൊല്ലംകൊണ്ടു ഒരു സംഖ്യ ഇരട്ടിക്കണമെങ്കിൽ പലിശനിരക്കെത്ര?

16. 6ശ. മാ. പലിശവീതം ഒരു സംഖ്യ എത്ര കൊല്ലംകൊണ്ടു ഇരട്ടിക്കും?

17. 5 ശ. മാ. പലിശവീതം ഒരു സംഖ്യ മൂന്നു ഇരട്ടിയാവാൻ എത്ര കൊല്ലം വേണം?

18. 30 കൊല്ലംകൊണ്ടു ഒരു മുതൽ 3 ഇരട്ടിയാകണമെങ്കിൽ പലിശനിരക്കെത്ര?

19. ഒരു കൊല്ലത്തെ അവധിക്കു ഞാൻ ഒരു ഹുണ്ടികവ്യാപാരിയോടു 275ക. കടമായി ആവശ്യപ്പെട്ടു. 16ശ. മാ. പലിശ മുൻകൂറായി എടുത്തു ബാക്കി സംഖ്യ അയാൾ എനിക്കു തന്നു. കൊല്ലാവസാനത്തിൽ ഞാൻ 275ക. കൊടുത്തു കടം തീർക്കുന്നതായാൽ ഞാൻ യഥാർത്ഥത്തിൽ എത്ര വീതം പലിശ കൊടുത്തു?

20. 5 കൊല്ലത്തിന്നുശേഷം 10ക. വിലയുള്ള കേക്ക് സട്ടിഫിക്കറിന്നു ഇന്നത്തെ റൊക്കം വില 8ക. 12ണ.യാണെങ്കിൽ പലിശനിരക്കെത്ര?

21. ഒരു കമ്പനിക്കാരുടെ 20ക.യുടെ ഓഹരിക്കു ഇന്നു 17ക. 8ണ. റൊക്കം വിലയുണ്ടു. ഓഹരികളിന്മേൽ കമ്പനി 7 ശ. മാ. പലിശ കൊടുക്കുന്നുവെങ്കിൽ യഥാർത്ഥ പലിശനിരക്കെത്ര?

22. ഒരു മോട്ടോർകമ്പനിയുടെ 500ക.യുടെ ഓഹരിക്കു 875ക. റൊക്കം വിലയുണ്ടു. ഓഹരികളിന്മേൽ കമ്പനി 14 ശ മാ. പലിശ കൊടുക്കുന്നുവെങ്കിൽ യഥാർത്ഥ പലിശനിരക്കെത്ര?

23. ഒരു പണ്ടം പണയംവെച്ചു ഒരാൾ ഒരു ബേങ്കിൽനിന്നു 75ക. കടം വാങ്ങി. $2\frac{1}{2}$ കൊല്ലത്തിന്റെ ശേഷം ബേങ്കുകാർ പണ്ടം ലേലത്തിൽ 120ക.ക്കു വിറ്റു, 16ക. 14ണ. അയാൾക്കു കൊടുത്തു. എന്നാൽ ബേങ്കുകാർ എത്ര ശ. മാ. പലിശയെടുത്തു?

24. ഞാൻ ഒരു ബേങ്കിൽനിന്നു 6ശ. മാ. പലിശക്കു 850ക.യും, വേറൊരു ബേങ്കിൽനിന്നു $7\frac{1}{2}$ശ. മാ. പലിശക്കു 840ക.യും കടം വാങ്ങി. കുറെ മാസങ്ങൾക്കു ശേഷം രണ്ടു ബേങ്കിലും ഒരേ സംഖ്യ കൊടുത്തു കടം തീർത്താൽ കടം തീർത്തതെപ്പോഴാണ്?

25. ഒരു സംഖ്യ 5ശ. മാ. പലിശവീതം 6 കൊല്ലംകൊണ്ടു 1326ക. ആയിത്തീരുന്നുവെങ്കിൽ 1530ക. ആയിത്തീരുവാൻ എന്നിയും എത്രകാലം വേണം?

26. 1440ക. $6\frac{1}{4}$ശ. മാ. പലിശ വീതം 9 മാസംകൊണ്ടു് ആയിത്തീരുന്ന സംഖ്യ കിട്ടണമെങ്കിൽ ഏതൊരു സംഖ്യ 1 മാസത്തേക്കു 6ശ. മാ. പലിശക്കു കൊടുക്കണം?

27. ഒരു സംഖ്യ 3 കൊല്ലംകൊണ്ടു പലിശയടക്കം 414ക. 6ണ.യും, 5 കൊല്ലംകൊണ്ടു 440ക. 10ണ.യും ആയിത്തീരുന്നു. എന്നാൽ പലിശക്കു ഇട്ട സംഖ്യയും, പലിശനിരക്കും കാണുക.

28. 1930 ജൂലായി 1-ാംനു- പലിശക്കു കൊടുത്ത ഒരു സംഖ്യ 1933 ജൂലായി 1-ാംനു- പലിശയടക്കം 386ച. 15ക്കി. ഉം, 1937 ജനുവരി 1-ാംനു- 429ച. 12ക്കി. 6പൈ.ഉം ആയിത്തീരുന്നുവെങ്കിൽ പലിശക്കു കൊടുത്ത സംഖ്യയും, പലിശനിരക്കും കാണുക.

29. 4150ക. കൈവശമുള്ള ഒരാൾ തന്റെ സ്വത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം $3\frac{1}{2}$ശ. മാ. പലിശക്കു 5 കൊല്ലത്തേക്കും ബാക്കിയുള്ള സംഖ്യ 3ശ. മാ. പലിശക്കു 4 കൊല്ലത്തേക്കും കൊടുത്തതിൽ, രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയിൽനിന്നുള്ള പലിശ ആകെ പലിശയുടെ $\frac{1}{5}$ ഭാഗമാണെന്നു കണ്ടു. എന്നാൽ പലിശക്കു കൊടുത്ത സംഖ്യകൾ കാണുക.

30. 600ക. ശമ്പളമുള്ള ഒരു ഉദ്യോഗസ്ഥൻ തന്റെ ശമ്പളത്തിന്റെ കാലോഹരി മാസംതോറും 1-ാംനു- ഒരു സേവിങ്ങ്സ് ബേങ്കിൽ ഇടുന്നു. 1937 ഫെബ്രുവരി 1-ാംനു- ഒന്നാമതായി പണം ഇടുന്നുവെങ്കിൽ 1937 ഡിസമ്പർ 31-ാംനു- അയാൾക്കു പലിശയടക്കം ബേങ്കിൽനിന്നു കിട്ടേണ്ടുന്ന സംഖ്യ കാണുക. ബേങ്കിലെ പലിശനിരക്കു 3% ആണ്. [150ക.ക്കു (11+10+9+.....2+1) മാസത്തെ പലിശ കാണുക.]

31. ഒരു യന്ത്രത്തിന്റെ റൊക്കം വില 180ക.യാണ്. കടമായി വാങ്ങുന്നതായാൽ വാങ്ങുന്ന സമയം 60ക.യും പിന്നീടു മാസംതോറും 20ക. വീതം 7 മാസവും അടക്കണം. എന്നാൽ പണത്തിനു എത്രവീതം പലിശയായി?

32. ഒരു ഹൈസ്കൂളിലെ സ്റ്റൂട്ട്സംഘ്വംവക നടത്തിയ ഒരു സേവിങ്ങ്സ് ബേങ്കിൽ ഒരു സ്റ്റൂട്ടിന്റെ പേരിൽ 1922 ജനുവരി 1-ാംനു- 6ക. ഉണ്ടായിരുന്നു. ഫെബ്രുവരി 1-ാംനു-യും പിന്നീടു ഓരോ മാസം ഇടവിട്ടു 1-ാംനു- അയാൾ 3ക. വീതം ബേങ്കിൽ ഇട്ടു. ഏപ്രിൽമാസത്തിന്റെ മദ്ധ്യത്തിൽ യാത്രച്ചെലവിലേക്കു 5ക. ബേങ്കിൽനിന്നു തിരിച്ചെടുത്തു. $6\frac{1}{4}$ശ. മാ. പലിശവീതം, 1922 ജൂൻമാസാവസാനം അയാളുടെ കണക്കിൽ ചേർത്തിരുന്ന പലിശ കാണുക.

(1മാസം 1കൊല്ലത്തിന്റെ $\frac{1}{12}$ ആയി കരുതണം). (1923)

33. ഒരു പരസ്പരസഹായസംഘത്തിന്റെ പ്രസിദ്ധീകരണശാലയുടെ മൂലധനം 15,000ക.യാണ്. അതിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം ഒരു ബേങ്കിൽനിന്നു 6%

പലിശക്കു വാങ്ങിയതും, ബാക്കി അംഗങ്ങളുടെ ഓഹരികളുമാകുന്നു. ശാലയുടെ നടത്തിപ്പിന്നു കൊല്ലംതോറും വരവിന്റെ 40% ചെലവാകുന്നു. ഓഹരിക്കാർക്കു അവരുടെ മുതലിന്മേൽ 9% പലിശവീതം കൊടുപ്പാൻ കൊല്ലത്തിൽ ആകെ എത്ര വരവുണ്ടായിരിക്കണം? (1924)

34. ഒരു മോട്ടോർവ്യാപാരി ഒരു കാർ 5000ക. റൊക്കം വിലക്കു കൊടുക്കുന്നു. കടമായി വാങ്ങുന്ന ഒരാൾ മാസംതോറും 500ക. വീതം 12 തവണ കൊടുക്കണം. ഒന്നാമത്തെ അടവു വാങ്ങുന്ന അന്നുതന്നെയായിരിക്കണം. 5000ക.മേൽ 11 മാസമുള്ള പലിശയടക്കം മുതൽ തവണകളായി അടക്കുന്ന സംഖ്യകളിന്മേലുള്ള പലിശയടക്കം മുതലിനോടു സമമാണെങ്കിൽ പണത്തിന്മേൽ എത്രവീതം പലിശവരും? (1924)

35. 5ക.യുടെ National Savings Certificate വാങ്ങിയ ഒരാൾക്കു 2, 5, 8, 10, 12 കൊല്ലത്തിന്നുശേഷം കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ യഥാക്രമം 5ക. 2ണ., 5ക 12ണ., 6ക. 8ണ., 7ക., 7ക. 8ണ. ആകുന്നു. ഓരോ അവസരത്തിലും കിട്ടുന്ന പലിശവീതം കാണുക.

ബേങ്കു ഇടപാടുകൾ (Bank transactions).

ബേങ്കുകളിൽ ഓരോ ആളുടേയും പേരിൽ ഇടക്കിടെ പണം അടക്കുകയും എടുക്കുകയും ചെയ്യുന്നതുകൊണ്ടു പലിശ കണക്കാക്കുവാൻ ഒരു പ്രത്യേക ക്രമം ഉപയോഗിച്ചുവരുന്നു. ഒരു ബേങ്കിൽ ഒരാളുടെ പേരിലുള്ള കണക്കു താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

തീയതി	വരവു	ചെലവു	ബാക്കി ഇരിപ്പു
	ക.	ക.	ക.
8- 7-49	3000	—	3000
15- 9-49		500	2500
4-11-49	400	—	2900
9-12-49		300	2600

ഓരോ ഇടപാടിന്റേയും ഫലമായി അയാൾക്കു കിട്ടേണ്ടുന്ന പലിശ കാണുവാൻ ബാക്കി ഇരിപ്പുള്ള സംഖ്യയെ ദിവസത്തിന്റെ എണ്ണംകൊണ്ടു പെരുക്കി താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു. പലിശവീതം : $2\frac{1}{2}$ ശ. മാ.

ഒന്നാമത്തെ കള്ളിയിലുള്ള സംഖ്യകളിന്മേൽ 1 ദിവസത്തേക്കു ചില ശ. മാ. പലിശ താഴയുള്ള പട്ടികയിൽ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

മുതൽ	1½%				2%				2½%				3%			
	ക.	ണ.	പ.		ക.	ണ.	പ.		ക.	ണ.	പ.		ക.	ണ.	പ.	
10				·07				·10				·13				·15
20				15				21				26				31
30				23				31				39				47
40				31				42				52				63
50				39				52				65				78
100				78			1	·05			1	31			1	57
200			1	57			2	10			2	63			3	15
300			2	36			3	15			3	94			4	73
400			3	15			4	20			5	26			6	31
500			3	94			5	26			6	57			7	89
1,000			7	89			10	52		1	1	15		1	3	78
2,000		1	3	78		1	9	·04		2	2	30		2	7	56
3,000		1	11	67		2	7	56		3	3	45		3	11	34
4,000		2	7	56		3	6	·08		4	4	60		5	3	12
5,000		3	3	45		4	4	60		5	5	75		6	6	90
10,000		6	6	90		8	9	20		10	11	50		13	1	80
20,000		13	1	80	1	1	6	41	1	5	11	·01	1	10	3	61
30,000	1	3	8	71	1	10	3	61	2	—	10	52	2	7	5	42
40,000	1	10	3	61	2	3	0	82	2	11	10	·02	3	4	7	23
50,000	2	—	10	52	2	11	10	·02	3	6	9	53	4	1	9	04
1,00,000	4	1	9	·04	5	7	8	.05	6	13	7	·06	8	3	6	08
2,00,000	8	3	6	·08	10	15	4	10	13	11	2	13	16	7	—	16
3,00,000	12	5	3	12	16	7	—	16	20	8	9	20	24	10	6	24
4,00,000	16	7	—	16	21	14	8	21	27	6	4	27	32	14	—	32
5,00,000	20	8	9	20	27	6	4	27	34	3	11	34	41	1	6	41
10,00,000	41	1	6	41	54	12	8	54	68	7	10	68	82	3	—	82

	ദിവസം	ബാക്കിയിരിപ്പു	ഗുണനഫലം
		ക.	
8-7-49 മുതൽ 15-9-49 വരെ	69	3000	207000
15-9-49 ,, 4-11-49 ,,	50	2500	125000
4-11-49 ,, 9-12-49 ,,	35	2900	101500
9-12-49 ,, 31-12-49 ,,	23	2600	59800
			493300

$$\therefore \text{പലിശ} = \frac{Pnr}{100} = 493300 \times \tfrac{1}{365} \times \frac{5}{2 \times 100} \text{ക.}$$

$$= 33\text{ക.}\ 12\text{ണ.}\ 7{\cdot}23\text{പ.}$$

$$= 33\text{ക.}\ 12\text{ണ.}\ 7\text{പ.}\ (\text{പൈവരെ കൃത്യം}).$$

അടുത്തഭാഗത്തിൽ സംഖ്യകളിന്മേൽ $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3 ശ. മാ. 1 ദിവസത്തേക്കുള്ള പലിശ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

ക.	ക.	ണ.	പ.
400,000	27	6	4·27
50,000	3	6	9·53
40,000	2	11	10·02
3,000	0	3	3·45
300	0	0	3·94
493,300	33	12	7·21

33ക. 12ണ. 7പ. (പൈവരെ കൃത്യം).

36. ഒരു ബേങ്കിൽ ഒരാളുടെ പേരിലുള്ള കണക്കു താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു. കൊല്ലത്തിൽ 2% ബേങ്ക് 6 മാസത്തോറും പലിശ കൊടുക്കുന്നതായാൽ 1949 ജൂൺ 30-ാംനു- അയാളുടെ പേരിലുള്ള സംഖ്യ കാണുക.

തീയതി	വരവു	ചെലവു	ബാക്കിയിരിപ്പു
	ക.	ക.	ക.
3-1-49	450	—	450
2-3-49	225	—	675
14-3-49	—	175	500
30-5-49	150	—	650

37. ഒരു ചിട്ടിസംഘത്തിലെ പണം 3% പലിശ കൊടുക്കുന്ന ഒരു ബേങ്കിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. 1949 ജൂലായി 5-ാംനു- 220ക.യും സെപ്തംബർ 10-ാംനു- 310ക.യും ബേങ്കിൽ അടക്കുകയും ആഗസ്റ്റ് 25-ാംനു- 100ക.യും

നവംബർ 13-ാംന- 200ക.യും എടുക്കുകയും ചെയ്തു. എന്നാൽ 1949 ഡിസംബർ 31-ാംന- സംഖ്യത്തിന്റെ പേരിൽ ബേങ്കിലുള്ള സംഖ്യ കാണുക.

38. ഒരു പരസ്പരസഹായ ബേങ്ക് $1\frac{1}{2}\%$ പലിശകൊടുക്കുന്നു. ആ ബേങ്കിൽ ഒരാൾ 1949 ജനുവരി 15-ാംന-, മാർച്ച് 15-ാംന-, മേയി 15-ാംന- 150ക. വീതം അടക്കുകയും ഫെബ്രുവരി 10-ാംന- 75ക.യും ഏപ്രിൽ 8-ാംന- 130ക.യും എടുത്താൽ 1949 ജൂൺ 30-ാംന- അയാൾക്കു കിട്ടേണ്ടുന്ന പലിശ കാണുക.

ചില ബേങ്കുകളിൽ ഓരോ മാസവും ഇടപാടുകാരന്റെ പേരിൽ മുഴമാസവും ഇരിപ്പുണ്ടായ സംഖ്യയിന്മേൽ മാത്രമേ പലിശ കണക്കാക്കാറുള്ളൂ.

ഒരാളുടെ പേരിലുള്ള കണക്കു താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു:

തീയതി	വരവു	ചെലവു.
	ക.	ക.
4-1-48	700	—
2-5-48	300	—
7-7-48	—	200
18-8-48	—	600
25-9-48	100	—

1948-ാം കൊല്ലത്തിൽ 3% പ്രകാരം അയാൾക്കു കിട്ടേണ്ടുന്ന പലിശ കാണുക.

ഓരോ മാസത്തിലും പലിശ അഹിക്കുന്ന സംഖ്യകൾ	ക.	പലിശ.
ജനുവരി	0	0
ഫെബ്രു., മാർച്ച് ഏപ്രിൽ, മേയി.	700	700ക.ക്കു 4 മാസത്തേക്കു.
ജൂൺ	1000	1000 ,, ,, 1 ,,
ജൂലായി	800	800 ,, ,, 1 ,,
ആഗസ്റ്റ്, സപ്തംബർ	200	200 ,, ,, 2 ,,
ഒക്ടോ, നവമ്പർ, ഡിസമ്പർ	300	300 ,, ,, 3 ,,

∴ ആകെ പലിശ = 1 മാസത്തേക്കു (2800 + 1000 + 800 + 400 + 900) ക.ക്കുള്ള പലിശ.

= 1 മാസത്തേക്കു 5900ക.ക്കുള്ള പലിശ.

$= 5900 \times \frac{1}{12} \times \frac{3}{100}$ ക.

= 14ക. 12ണ.

39. ഒരു ഉദ്യോഗസ്ഥൻ 1949 ജനുവരി 15-ാം നു- 1000ക. ഒരു ബേങ്കിൽ നിക്ഷേപിക്കുകയും, പിന്നീടു ഓരോ മാസവും ആദ്യത്തെ 5 ദിവസങ്ങൾക്കുള്ളിൽ 75ക. വീതം അടക്കുകയും ചെയ്തു. ബേങ്കു ഓരോ മാസവും അയാളുടെ പേരിൽ മുഴമാസവും ഉണ്ടായിരുന്ന സംഖ്യയിന്മേൽ മാത്രം 3½% പലിശ കൊടുക്കുന്നെങ്കിൽ ആ കൊല്ലത്തിന്റെ ഒടുവിൽ അയാളുടെ പേരിൽ പലിശയടക്കമുണ്ടായിരുന്ന സംഖ്യ കാണുക.

40. ഓരോ മാസത്തിലുമുള്ള ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യയിന്മേൽ 3% പലിശ അനുവദിക്കുന്ന ഒരു ബേങ്കിൽ ഒരാളുടെ പേരിലുള്ള കണക്കു താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു:—

തീയതി.	വരവു.	ചെലവു.
	ക.	ക.
2 - 7 - 48	225	—
5 - 8 - 48	130	—
15 - 9 - 48	—	150
11 - 11 - 48	250	—
18 - 12 - 48	—	50

1948-ാം കൊല്ലത്തിന്റെ അവസാനത്തിൽ അയാളുടെ പേരിൽ ബേങ്കിലുള്ള സംഖ്യ കാണുക.

41. ഒരാൾ ഒരു ബേങ്കിൽനിന്നു 2500ക. 7½% പലിശപ്രകാരം 1948 ജനുവരി 3-ാംനു- കടം വാങ്ങി. ഫെബ്രുവരിമാസംമുതൽ ഓരോ മാസവും 3-ാംനു- 200ക. വീതം അടക്കുന്നതായാൽ കൊല്ലാവസാനത്തിൽ കടം വീട്ടുവാൻ അയാൾ കൊടുക്കേണ്ടുന്ന സംഖ്യ കാണുക. ഓരോ മാസവും ഉണ്ടായിരുന്ന കടത്തിന്റെ ഏറ്റവും വലിയ സംഖ്യയിന്മേൽ ബേങ്കു പലിശ കണക്കാക്കുന്നു.

തപ്പാലാപ്പീസ് സൈവിങ്ങ്സ് ബേങ്കു്.
(Post Office Savings Bank.)

തപ്പാലാപ്പീസിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്ന സംഖ്യകളിന്മേൽ പലിശ കണക്കാക്കുന്ന ക്രമം താഴെ പറയുംപ്രകാരമാണു്:

1. ഓരോ മാസത്തിലും 4-ാംനു- മുതൽ മാസാവസാനം വരെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മുഴ ഉറുപ്പികക്കു മാത്രം പലിശ കൊടുക്കും.

2. ഒരു കൊല്ലത്തിൽ നിലവിലുള്ള സംഖ്യ 200ക.യിൽ കുറഞ്ഞാൽ $1\frac{1}{2}\%$ഉം, 200ക.യോ അധികമോ ആയാൽ 2%ഉം പലിശ കൊടുക്കും.

ഉദാ:—ഒരു സ്ത്രീയിലെ വായനശാലയകയുള്ള പണം തപ്പാലാപ്പീസിൽ സൂക്ഷിക്കുന്നു. ഒരു കൊല്ലത്തിലെ കണക്കു താഴെ ചേർക്കുന്നു:—

തീയതി			വരവു ക.	ചെലവു ക.
1948	ജൂൺ	6	340	—
,,	ആഗസ്ത്	3	115	—
,,	നവമ്പർ	1	—	87
,,	ഡിസമ്പർ	18	—	15
1949	ജനുവരി	8	110	—
,,	മാച്ച്	15	—	216

1949 മാച്ച് 31-ാംനു പലിശയടക്കം മുതൽ കാണുക.

മാസം.	പലിശ.
ജൂൺ	—
ജൂലായി	340ക.ക്കു 1 മാസം.
ആഗസ്ത്, സപ്തം., ഒക്ടോ.	455 ,, 3 ,,
നവമ്പർ	368 ,, 1 ,,
ഡിസമ്പർ, ജനുവരി	353 ,, 2 ,,
ഫെബ്രുവരി	463 ,, 1 ,,
മാച്ച്	247 ,, 1 ,,

$\therefore$ ആകെ പലിശ $= (340+455\times3+368+353\times2+463+247)$ക.ക്കു $1\frac{1}{2}\%$ 1 മാസത്തെ പലിശ.

$$= \frac{3489\times1\frac{1}{2}\text{ക.}}{100\times12} = 4\text{ക. } 5\text{ണ. } 9\cdot36\text{പ.}$$

മുതൽ $= 565\text{ക.} - 318\text{ക.} = 247\text{ക.}$

$\therefore$ പലിശയടക്കം മുതൽ $= 247\text{ക.} + 4\text{ക. } 5\text{ണ. } 9\text{പ.}$

$= 251\text{ക. } 5\text{ണ. } 9\text{പ.}$ (പൈയരെ കൃത്യം.)

42. ഒരു ഉദ്യോഗസ്ഥൻ 1948 ഏപ്രിൽ മാസംമുതൽ 1949 മാച്ച് മാസം വരെ 4-ാംനു തോറും 50ക. വീതം തപ്പാലാപ്പീസ് സൈവിങ്ങ്സ് ബേങ്കിൽ പണം ഇട്ടുന്നു. എന്നാൽ 1949 മാച്ച് 31-ാംനു അയാൾക്ക് കിട്ടേണ്ടുന്ന സംഖ്യ കാണുക.

43. ഒരു ചില്ലറ കച്ചവടക്കാരന്റെ Post Office Savings Bank Pass Bookലെ വിവരങ്ങൾ താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു:—

തീയതി.	വരവു.	ചെലവു.
	ക.	ക.
1949 ഏപ്രിൽ 2	350	
,, ഡിസമ്പർ 1	500	—
1950 മാർച്ച് 8	—	600

1950 മാർച്ച് 31-ാം൹ അയാൾക്കു കിട്ടേണ്ടുന്ന പലിശ കാണുക. (പലിശ 2% മാണെന്നു വിഭാവന ചെയ്യണം. കാരണമെന്ത്?)

44. തന്റെ മകനെ ഒരു ഹോസ്റ്റലിൽ ചേർത്തപ്പോൾ അവന്റെ പേരിൽ അവന്റെ അച്ഛൻ 1949 ജൂലായി 2-ാം൹ 1000ക. തപ്പാലാപ്പീസിൽ ഇട്ടു. കാരോ മാസവും ചെലവിലേക്കു ആഗസ്റ്റ്മാസം മുതൽ മാർച്ച്മാസം വരെ 10-ാം തിയ്യതിതോറും 100ക. വീതം തിരിച്ചെടുത്താൽ 1950 മാർച്ച് 31-ാം൹ വിഭാവനയുടെ പേരിലുള്ള സംഖ്യ കാണുക. (പലിശവീതം എത്ര ശ. മ.? കാരണമെന്ത്?)

അദ്ധ്യായം 10.

ബീജഗണിതത്തിന്റെ പ്രാരംഭം

(Introduction to Algebra).

നമുക്കു എല്ലാ സംഖ്യകളേയും 1, 2, ... 8, 9, 0 എന്നീ അക്കങ്ങളെക്കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാം. സംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കുവാൻ ഇവകൂ പുറമെ അക്ഷരങ്ങളേയും ഉപയോഗിക്കാറുണ്ടു്. ഉദാഹരണമായി ഒരു കുലയിൽ x പഴം ഉണ്ടെന്നു പറയുമ്പോൾ x ഒരു സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. 1, 2, 3 .... എന്നീ അക്കങ്ങൾക്കു ഓരോന്നിനും നിശ്ചിതമായ ഓരോ വിലയുള്ള പ്രകാരം xന്നു നിശ്ചിതമായ ഒരു വിലയില്ല.

ഒരു തീവണ്ടി 4 മണിക്കൂറിൽ 100 നാഴിക പോകുന്നെങ്കിൽ 1 മണിക്കൂറിൽ എത്ര ദൂരം പോകുന്നു?

1 മണിക്കൂറിൽ പോകുന്ന ദൂരം $=\frac{100}{4}$ നാഴിക. t മണിക്കൂറിൽ 100 നാഴിക പോകുന്നെങ്കിൽ 1 മണിക്കൂറിൽ പോകുന്ന ദൂരം എത്ര? $\frac{100}{t}$ നാഴിക.

ഈ രണ്ടു കണക്കുകളിൽ ഒന്നാമത്തേതിൽ തീവണ്ടി യാത്ര ചെയ്യുന്ന സമയം ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തേതിൽ സമയം ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തീട്ടില്ല. tയുടെ സ്ഥാനത്തു 2, 3, 4, 5 .... എന്നീ സംഖ്യകൾ എഴുതുന്നതായാൽ ഓരോ അവസരത്തിലും വണ്ടിയുടെ ശീഘ്രത എത്രയാണെന്നു കാണാം. 100ന്റ് പകരം s എന്നെഴുതിയാൽ

തീവണ്ടി 1 മണിക്കൂറിൽ പോകുന്ന ദൂരം $=\frac{s}{t}$ നാഴിക.

തീവണ്ടി 1 മണിക്കൂറിൽ പോകുന്ന ദൂരം v നാഴികയാണെങ്കിൽ

$$v=\frac{s}{t}$$ എന്നു വരും.

ഇങ്ങിനെ എഴുതുന്നതിനാൽ ആകെ യാത്രചെയ്ത ദൂരം, യാത്രചെയ്ത സമയം, ശീഘ്രത എന്നിവ തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം വ്യക്തമാകുന്നു. ഇങ്ങിനെ അക്ഷരങ്ങൾമൂലം വിവിധരാശികൾ (quantities) തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം എളുപ്പത്തിൽ വ്യക്തമാക്കുവാൻ സാധിക്കുന്നതിനാൽ അവയേയും അക്കങ്ങൾക്കു പുറമെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇങ്ങിനെ അക്കങ്ങൾക്കു പുറമെ അക്ഷരങ്ങളേയും ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഗണിതത്തിന്റ് ബീജഗണിതം (algebra) എന്നു പറയുന്നു. വെറും അക്കങ്ങൾ മാത്രം ഉപയോഗിച്ചുള്ള ഗണിതത്തിന്റ് അങ്കഗണിതം (arithmetic) എന്നു പറയുന്നു.

മൂലഗണിതക്രിയകളായ കൂട്ടൽ, കിഴിക്കൽ, പെരുക്കൽ, ഹരിക്കൽ എന്നിവയുടെ അടയാളങ്ങളായ $+$, $-$, $\times$, $\div$ എന്നിവയെ അങ്കഗണിതത്തിലെന്നപോലെതന്നെ ബീജ

ഗണിതത്തിലും ഉപയോഗിക്കുന്നു. $p+q-r$ എന്നതിന്നു് p കൂട്ടണം q കിഴിക്കണം r എന്നത്രേ. ഇങ്ങിനെ+,−എന്നീ അടയാളങ്ങളെക്കൊണ്ടു് ചേർക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള രാശികളുടെ കൂട്ടത്തിന്നു് ബീജഗണിതവ്യഞ്ജക (algebraic expression) മെന്നും ഓരോ രാശിക്കു വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ പദ (term)മെന്നും പേർ പറയുന്നു. പദങ്ങളുടെ ക്രമം മാറുന്നതിനാൽ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ വില മാറുന്നതല്ല.

ഉദാഹരണമായി $p+q-r=p-r+q=-r+q+p$.

അങ്കഗണിതത്തിൽ പൊരുക്കങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന രീതിയിൽനിന്നു് വ്യത്യസ്തമായ രീതിയിലാണു് ബീജഗണിതത്തിൽ അവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതു്.

1കി.ഗ്രാ 6 വീതം 5കി.ഗ്രാ എത്ര പുസ്തകം കിട്ടും? 6×5

1കി.ഗ്രാ 6 വീതം xകി.ഗ്രാ എത്ര പുസ്തകം കിട്ടും? $6\times x$

ഇതു് ചുരുക്കി $6x$ എന്നെഴുതുന്നു.

1കി.ഗ്രാ yവീതം x കി.ഗ്രാ എത്ര പുസ്തകം കിട്ടും?

$y\times x=yx$.

$6\times5=5\times6$. ഇതേപ്രകാരം $yx=xy$.

xനു് $1x$ എന്നത്രേമുണ്ടെങ്കിലും x എന്നു മാത്രമാണു് എഴുതുക പതിവു്.

$$zxy=x\times y\times z. \qquad 7mn=7\times m\times n.$$

$ap+ap+ap=3ap$. എത്ര ap ഉണ്ടെന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യയായ 3നെ apയുടെ ഗുണനസംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ ചുരുക്കത്തിൽ ഗുണകം (Coefficient) എന്നു പറയുന്നു.

$3ap=3a\times p$. $3ap$ എന്ന രാശി p എന്ന രാശിയെ $3a$ കൊണ്ടു് ഗുണിച്ചുകിട്ടിയതാകയാൽ $3a$ നെ pയുടെ ഗുണകം എന്നു പറയുന്നു. ഈ ഗുണകത്തിൽ a എന്ന അക്ഷരം പെട്ടതുകൊണ്ടു് അതിനെ **അക്ഷരഗുണനസംഖ്യ** അല്ലെ

ങ്കിൽ ചുരുക്കത്തിൽ അക്ഷരഗുണകം (Literal Coefficient) എന്നു പറയുന്നു. അക്ഷരങ്ങളുടെ വില അവ്യക്തമാകയാൽ അക്ഷരഗുണകത്തെ അവ്യക്തഗുണകം എന്നും പറയാറുണ്ടു്. 3 വെറുംസംഖ്യ ആയതുകൊണ്ടു് അതിനെ *ap*യുടെ സാംഖ്യഗുണകം (Numerical Coefficient) എന്നു തെളിയിച്ചു പറയാറുണ്ടു്.

അക്ഷരങ്ങളുടെ വില പൂർണ്ണസംഖ്യയോ ഭിന്നമോ ആവാം.

$a=\frac{3}{4}, b=5$. എന്നാൽ $8a-b$, $8ab$, $\frac{8a}{b}$ ഇവയുടെ വില കാണുക.

$$8a-b=8\times\frac{3}{4}-5=6-5=1$$
$$8ab=8\times\frac{3}{4}\times5=30$$
$$\frac{8a}{b}=\frac{8\times\frac{3}{4}}{5}=\frac{6}{5}=1\frac{1}{5}.$$

അഭ്യാസം 18 (വാങ്മൂലം).

പ്രയാസമുള്ള കണക്കുകൾ കടലാസ്സിൽ ചെയ്യുക.

1. എ, ബി, സി എന്നീ മൂന്നു പേർക്കു് ആകെ മാർക്കെത്ര?
   (1) ഏക്കു് 9 മാർക്കു്, ബീക്കു് 4 മാർക്കു്, സീക്കു് c മാർക്കു്.
   (2) ഏക്കു് a മാർക്കു, ബീക്കു് 11 മാർക്കു്, സീക്കു് c മാർക്കു്.
   (3) ഏക്കു് a മാർക്കു, ബീക്കു് b മാർക്കു്, സീക്കു് 0 (പൂജ്യം) മാർക്കു്.
   (4) ഏക്കു് x മാർക്കു്, ബീക്കു് y മാർക്കു്, സീക്കു് z മാർക്കു്.

2. മൂന്നുതരം തുണികൾ വാങ്ങി. ഓരോ തരം തുണിയുടെ നീളം താഴെ ചേർക്കുന്നു. ആകെ തുണിയുടെ നീളം എത്ര?
   (*a*) 13 വാര, x വാര, a വാര.
   (*b*) 19 വാര, 20 വാര, m വാര.
   (*c*) m വാര, n വാര, p വാര.

3. താഴെ എഴുതിയ ക്രിയകളെ അടയാളങ്ങൾ മൂലം സൂചിപ്പിക്കുക.
   (*a*) 13 കുട്ടണം x.
   (*b*) y കുട്ടണം m.

(*c*) ab യോട് c കൂട്ടുക, തുകയോട് d കൂട്ടുക.

(*d*) mന്റെയും nന്റെയും തുകയോട് p കൂട്ടുക.

4. ക്രിയകളെ വിവരിക്കുക.

(*a*) $a+12$. (*b*) $x+y$.

(*c*) $p+7+y$. (*d*) $a+b+c+d$.

5. a, b, c എന്നിവയുടെ വില താഴെ എഴുതിയ ക്രമത്തിൽ ആണെങ്കിൽ $a+b+c$ എന്ന വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വില കാണുക.

(1) 13, 14, 15. (2) 1·2, 2·1, 1·1.

(3) $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$, $1\frac{3}{4}$. (4) 0, ·5, ·09.

6. (*a*) x രൂപിരകളിൽ 5 ചത്തുപോയാൽ ബാക്കി എത്ര?

(*b*) m പുസ്തകത്തിൽ n കാണാതെ പോയാൽ ബാക്കി എത്ര?

(*c*) x ഉരുപ്പികയിൽനിന്ന് yക. ചിലവു ചെയ്യാൽ ബാക്കി എത്ര?

7. താഴെ എഴുതിയ ക്രിയകളെ അടയാളങ്ങൾ മൂലം സൂചിപ്പിക്കുക.

(*a*) 21ൽനിന്ന് 13 കിഴിക്കുക.

(*b*) aയിൽനിന്ന 17 കിഴിക്കുക.

(*c*) cയിൽനിന്ന d കിഴിക്കുക.

(*d*) pയുടെയും qയുടെയും തുകയിൽനിന്ന് 20 കിഴിക്കുക.

(*e*) rൽനിന്ന് s കിഴിച്ചുകിട്ടുന്നതിൽനിന്ന് t കിഴിക്കുക.

8. ക്രിയകളെ വിവരിക്കുക.

(*a*) $x-13$. (*b*) $a-b$.

(*c*) $m+n-p$. (*d*) $m-n+p$.

(*e*) $m-n-p$. (*f*) $m-n+p-q$.

9. താഴെ എഴുതിയ വ്യഞ്ജകളുടെ വില കാണുക.

(*a*) $l-m+n-p$. $l=20$; $m=5$; $n=13$; $p=12$.

(*b*) $a+b-c-d$. $a=5\frac{1}{4}$; $b=6\frac{1}{4}$; $c=3$; $d=3\frac{3}{4}$.

(*c*) $x-y-z+a$. $x=·5$; $y=·1$; $z=·2$; $a=1$.

10. ചുരുക്കി എഴുതുക. ഓരോ രാശിയുടേയും സാംഖ്യഗുണകം എത്ര?

(*a*) $a+a+a+a$.

(*b*) $xy+xy+xy+xy+xy$.

(*c*) $pqr+pqr+pqr$.

11. താഴെ എഴുതിയതിൽ അടങ്ങിയ ക്രിയ വിവരിക്കുക.

$7x$; pq; abc; $6xyz$.

12. (*a*) 5 ക. ക്ക് എത്ര അണ?
(*b*) x ക. ക്ക് എത്ര അണ?
(*c*) m ണ. ക്ക് എത്ര പൈ?
(*d*) l പവന്ന് എത്ര ക്ഷില്ലിങ്ങ്?
(*e*) y വാരക്ക് എത്ര അംഗുലം?

13. (*a*) ഒരു പുസ്തകത്തിന്ന് x ണ. വീതം y പുസ്തകത്തിന്റെ വില കാണുക.
(*b*) മണിക്കൂറിൽ m നാഴികവീതം ഒരു തീവണ്ടി n മണിക്കൂറിൽ എത്ര നാഴിക പോകും?
(*c*) 1 പെട്ടിയുടെ തൂക്കം w റാത്തൽ; എന്നാൽ p പെട്ടിയുടെ തൂക്കം കാണുക.
(*d*) l അടി നീളവും b അടി വീതിയുമുള്ള ഒരു മുറിയുടെ ക്ഷേത്രഫലം എത്ര?

14. താഴെ എഴുതിയ വിലകൾ അനുസരിച്ചു $3ab+7cd$ എന്ന വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വില കാണുക.
(*a*) $a=1,\ b=2,\ c=3,\ d=4$.
(*b*) $a=o,\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{4},\ d=2$.
(*c*) $a=16,\ b=0,\ c=0,\ d=27$.
(*d*) $a=\cdot1,\ b=\cdot2,\ c=\cdot5,\ d=\cdot3$.

15. താഴെ എഴുതിയ ക്രിയകളെ അടയാളങ്ങൾ മൂലം സൂചിപ്പിക്കുക.
(*a*) 29 ഹരിക്കണം 34. (*b*) x ഹരിക്കണം 5.
(*c*) 10 ഹരിക്കണം y. (*d*) m ഹരിക്കണം n.
(*e*) $3ab$ ഹരിക്കണം $13k$.
(*f*) $4x$ ന്റെയും $3y$ ന്റെയും തുകയെ $43xy$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുക.
(*g*) p യിൽനിന്ന് q കിഴിച്ചുകിട്ടിയ ഫലത്തെ അവയുടെ തുകകൊണ്ടു ഹരിക്കുക.

$ab-\frac{a}{b}-c+abc$. ഈ വ്യഞ്ജകത്തെ നമുക്കു പരിശോധിക്കാം. $ab, \frac{a}{b}, c, abc$ എന്നീ 4 രാശികൾ ചേർന്നിട്ടാണ് ഈ വ്യഞ്ജകം ഉണ്ടായിട്ടുള്ളത്. ഈ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വില കാണുവാൻ ഓരോ രാശിയുടേയും വില ഒന്നാമതായി അറിഞ്ഞിരിക്കണം. ഒന്നിലധികം അക്ഷരങ്ങളടങ്ങിയ $ab, \frac{a}{b}, abc$ എന്ന രാശികളുടെ വിലകാണ്മാൻ അവയിലടങ്ങിയ ക്രിയകളെ ആദ്യം ചെയ്യണം.

$a=3,\ b=2,\ c=1$ ആണെങ്കിൽ,

$ab=6,\ \frac{a}{b}=\frac{1}{2},\ abc=6.$

$\therefore$ വ്യഞ്ജകം $=6-1\frac{1}{2}-1+6=9\frac{1}{2}$.

16. ക്രിയകളെ വിവരിക്കുക.

(a) $\frac{x}{3}$. (b) $\frac{3}{x}$. (c) $\frac{kl}{m}$.

(d) $\frac{4ab}{3cd}$. (e) $\frac{3k+l}{7}$. (f) $\frac{11a-2b}{11a+2b}$.

17. $24x$യെ എത്ര അണ?
$24x$ണ. എത്ര ഉരുപ്പിക?
$45y$ ക്കില്ലിങ്ങ് എത്ര പവൻ?
$27l$ അംഗുലം എത്ര അടി? എത്ര വാര?

18. (1) 5 പുസ്തകത്തിന്ന് rക. വില. എന്നാൽ 1 പുസ്തകത്തിന്ന് എത്ര വില? 6 പുസ്തകത്തിന്ന് എത്ര വില? x പുസ്തകത്തിന്ന് എത്ര വില?
(2) y വാര തുണിക്കു x ക. വില.
1 വാര, 7 വാര, p വാര തുണിയുടെ വില കാണുക.
1 ക.ക്കു എത്ര വാര കിട്ടും? 13 ക.ക്കു, m ക.ക്കു എത്ര കിട്ടും?

19. താഴെ എഴുതിയ വിലപ്രകാരം $\frac{5mn-3pq}{2m+p}$ യുടെ വില കാണുക.

(1) $m=4,\ n=3,\ p=2,\ q=1.$
(2) $m=\frac{4}{5},\ n=\frac{1}{2},\ p=\frac{1}{3},\ q=\frac{3}{4}.$
(3) $m=\cdot5,\ n=\cdot3,\ p=1,\ q=\cdot1.$

20. അടയാളങ്ങൾ മൂലം സൂചിപ്പിക്കുക.

(1) m ന്റെ പകുതി സമം q.
(2) $3x$ നോട് $5y$ കൂട്ടിയാൽ 17 കിട്ടും.
(3) $7p$ യിൽനിന്ന് $9q$ കിഴിച്ചാൽ 29 ബാക്കി.
(4) 4ന്റെയും 26ന്റെയും തുണിതം $15k$.
(5) $9c$ യിൽനിന്ന് $11d$ കിഴിച്ചു കിട്ടുന്ന ഫലത്തെ 10കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 12 കിട്ടും.

$x+5=8$ എന്ന പ്രസ്താവനയുടെ സാരം xനോട് 5 കൂട്ടിയാൽ 8 എന്നാണല്ലോ. ഇതിൽനിന്ന് xന്റെ വില 3 ആണെന്ന് അനുമാനിക്കാം.

$2x-5=9$. ഇതിന്റെ സാരം $2x$ൽനിന്നു 5 കിഴിച്ചാൽ 9 എന്നാണ്. 5 കിഴിച്ചശേഷം 9 ഉള്ളത് കൊണ്ടു $2x$ തനിയെ $9+5$ന്ന് സമമാകുന്നു.

$\therefore 2x=14.$

$\therefore x=7.$ ഇങ്ങനെ ക്രിയകളുടെ സാരത്തെ പരിവേക്ഷണം ചെയ്തു xന്റെ വില കണ്ടുപിടിക്കാം.

21. താഴേ എഴുതിയവയിൽ അടങ്ങിയ ക്രിയകളുടെ സാരത്തെ പരിവേക്ഷണം ചെയ്തു xന്റെ വില കാണുക.

(1) $x+8=15.$

(2) $x-6=9.$

(3) $3x+5)=17.$

(4) $4x-3=25.$

(5) $7(x+5)=56.$

(6) $11\ (x-5)=11.$

(7) $7x-35=0.$

(8) $\frac{x}{4}+8=13.$

(9) $\frac{x}{9}-4=3.$

(10) $\frac{2x}{3}+7=11.$

(11) $\frac{4x}{9}-17=3.$

(12) $\frac{x+8}{2}=9.$

(13) $\frac{x-5}{9}=3.$

(14) $\frac{2x+1}{5}=7.$

(15) $\frac{3x-4}{2}=13.$

(16) $\frac{14}{x+4}=2.$

(17) $\frac{36}{x-7}=9.$

(18) $5(3x+1)+7=72.$

(19) $6(4x-3)+9=15.$

(20) $\frac{3(2x-3)+4}{7}=7.$

(21) $\frac{25-4(x+1)}{3}=3.$

അദ്ധ്യായം 11.

ധനരാശിയും ഋണരാശിയും

(Positive and negative quantities).

50ക. മുടക്കി കച്ചവടം ചെയ്ത ഒരാൾക്ക് ആദ്യം 10ക. ലാഭം കിട്ടുകയും അതിൽപിന്നെ 10ക. നഷ്ടം വരികയും ചെയ്താൽ അയാളുടെ മുതലിൽ യാതൊരു വ്യത്യാസവും വന്നിട്ടില്ല. ഇതിനു കാരണം 10ക.യുടെ നഷ്ടം 10ക.യുടെ ലാഭത്തെ ഇല്ലാതാക്കുന്നു, 10ക. ലാഭവും 10ക. നഷ്ടവും വലിപ്പത്തിൽ സമമാണെങ്കിലും സ്വഭാവത്തിൽ എതിരാണ്.

ഒരു കുട്ടി 5 അടി വലത്തോട്ടു പോയി. അവിടെനിന്നു 5 അടി ഇടത്തോട്ടു വന്നു എന്നാൽ അവൻ ഇപ്പോൾ ആദ്യം ഉണ്ടായിരുന്ന സ്ഥലത്തു തിരിച്ചെത്തിയിരിക്കുന്നു. വലത്തോട്ടു പോകുന്ന ക്രിയയുടെ എതിരാണ് ഇടത്തോട്ടു പോകുന്ന ക്രിയ.

$9+4-4$ ഇതിൽ അടങ്ങിയ ക്രിയകളെ പരിശോധിക്കുക. 9നോട് 4 കൂട്ടുകയും കൂട്ടിക്കിട്ടിയ തുകയിൽനിന്നു 4 കിഴിക്കുകയും ചെയ്തു. ഒടുവിൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ 9 തന്നെയാണ്.

$\therefore +4, -4$ന്റെ എതിരാണ്.

'+' എന്ന അടയാളം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ക്രിയ '−' എന്ന അടയാളം സൂചിപ്പിക്കുന്ന ക്രിയയുടെ എതിരാണ്. മേൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ ലാഭം എന്ന രാശി നഷ്ടം എന്ന രാശിക്കു എതിരായിരിക്കുന്നതുപോലെയോ, വലത്തോട്ടു പോകുന്ന ക്രിയ ഇടത്തോട്ടു പോകുന്ന ക്രിയക്കു എതിരായിരിക്കുന്നതുപോലെയോ, രാശികളോ, ക്രിയകളോ, സംബന്ധിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഒന്നിനെ '+' എന്ന അടയാളംകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നതായാൽ അതിന്റെ എ

തിരായിട്ടുള്ളതിനെ '—' എന്ന അടയാളംകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നതു ന്യായമായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 19 (വാങ്മൂലം).

1. 13ക. വരവിനെ+13ക. സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ—13ക. എന്തിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു?

2. —17° ഭ്രമദ്ധ്യരേഖയിൽനിന്നു 17° തെക്കാണെങ്കിൽ+23° എന്തിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു?

3. +25 അടി ഭൂവിതാനത്തിൽനിന്നു 25 അടി ഉയരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഭൂവിതാനത്തിൽനിന്നു 6 അടി താഴ്ചയെ എങ്ങിനെ സൂചിപ്പിക്കാം?

4. 100ക. സമ്പാദ്യത്തെ+100ക. സൂചിപ്പിക്കുന്നെങ്കിൽ 50ക. കടത്തെ എങ്ങിനെ സൂചിപ്പിക്കാം?

ഭൂമിശാസ്ത്രത്തിൽ ഭ്രമദ്ധ്യരേഖക്കു വടക്കുള്ള ദൂരങ്ങളെ '+' എന്ന അടയാളംകൊണ്ടും, തെക്കുള്ളവയെ '—' എന്ന അടയാളംകൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കുന്നതായി നിങ്ങൾ അറിഞ്ഞിരിക്കുമല്ലോ. ഒരു പട്ടണം ഗ്രീനിച്ച് ധ്രുവരേഖയിൽനിന്നു +14° അകലെയാണെന്നു പറഞ്ഞാൽ അതു ഗ്രീനിച്ചിനു 14° കിഴക്കാണെന്നും, —20° എന്നു പറഞ്ഞാൽ 20° പടിഞ്ഞാറാണെന്നും ഗ്രഹിക്കാറുണ്ടല്ലോ. ഇതേ പ്രകാരം ജനസംഖ്യയിലുള്ള വർദ്ധനവ്, സമ്പാദ്യം, ലാഭം, ഭൂവിതാനത്തിൽനിന്നുള്ള ഉയരം എന്നീ രാശികളെ '+' എന്ന അടയാളംകൊണ്ടും അവക്കെതിരായ ജനസംഖ്യയിലുള്ള കുറവ്, കടം, നഷ്ടം, ഭൂവിതാനത്തിൽനിന്നുള്ള താഴ്ച എന്നീ രാശികളെ '—' എന്ന അടയാളംകൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കുന്നതു സർവ്വസമ്മതമായിത്തീർന്നിരിക്കുന്നു.

'+' വർദ്ധനവിനേയും '—' കുറവിനേയും സൂചിപ്പിക്കുന്നതുകൊണ്ട് '+'നെ ധനചിഹ്നമെന്നും '—'നെ ഋണചിഹ്നമെന്നും പറയുന്നു.

തലശ്ശേരി കോഴിക്കോട്ടിൽനിന്നു 45 നാഴിക വടക്കു. ഒരു വടിയുടെ നീളം 2 അടി. ഈ രണ്ടു പ്രസ്താവനകളെ

പരിശോധിക്കുക. രണ്ടിലും ഓരോ നീള അളവു് ഉണ്ടു്. ഒന്നാമത്തെ പ്രസ്താവനയിൽ ദൂരം എവിടെനിന്നാണെന്നും ഏതു ഭാഗത്തേക്കാണെന്നും പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടു്. കോഴിക്കോട്ടിന്റെ സ്ഥാനത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയാണു് ദൂരം നിശ്ചയിച്ചിട്ടുള്ളതു്. രണ്ടാമത്തെ പ്രസ്താവനയിൽ നീളം വേറൊന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തെ ആശ്രയിച്ചു നില്ക്കുന്നില്ല. കോഴിക്കോട്ടിന്റെ വടക്കും തെക്കുമായി വേറെയും പട്ടണങ്ങളുണ്ടു്. കോഴിക്കോട്ടിന്റെ സ്ഥാനത്തെ ആസ്പദമാക്കി അവയുടെ സ്ഥാനത്തെ വെളിപ്പെടുത്തുവാൻ അവ ഏതു ഭാഗത്താണെന്നും എത്ര ദൂരത്താണെന്നും പറയേണ്ടിയിരിക്കുന്നു.

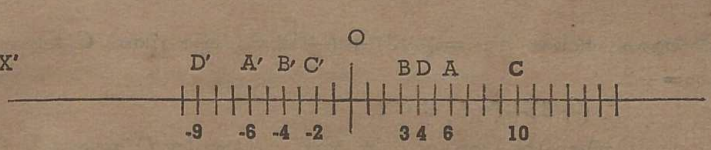
ഇങ്ങിനെ ഏതെങ്കിലും ഒന്നിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വേറൊന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തെ നിശ്ചയിക്കുവാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ **ദിഗ്ഭേദസംഖ്യകൾ** (Directed numbers) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു കിണറിന്റെ ആഴം 30 അടി. ഒരു മരത്തിന്റെ ഉയരം 20 അടി. ഈ രണ്ടു പ്രസ്താവനകളിലും ദിഗ്ഭേദസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. ഭൂവിതാനത്തെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയാണു് ദൂരം നിശ്ചയിച്ചിട്ടുള്ളതു്. ഏതു ഭാഗത്താണെന്നു കാണിക്കുവാൻ 'ആഴം' 'ഉയരം' എന്ന പദങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

അഭ്യാസം 20.

താഴെയുള്ള പ്രസ്താവനകളിൽ ദിഗ്ഭേദസംഖ്യകൾ ഏവയാണു്? ഏതിനെ ആസ്പദമാക്കിയാണു് ഓരോ ദിഗ്ഭേദസംഖ്യയേയും നിശ്ചയിച്ചിട്ടുള്ളതു്?

1. ഒരു പെട്ടിയുടെ തൂക്കം 10 റാത്തൽ.
2. കൃഷ്ണൻ 9 മണിക്കു് ഉറങ്ങി.
3. കൃഷ്ണൻ 9 മണിക്കൂർ ഉറങ്ങി.
4. തീവണ്ടി 15 മിനുട്ടു് വൈകിവന്നു.
5. അലക്സാന്തർ ക്രിസ്തുവിനു മുമ്പു് 327-ാം കൊല്ലത്തിൽ ഇന്ത്യയെ ആക്രമിച്ചു.
6. ഒരു ഉരുപ്പികയ്ക്കു് 16 ണ.



$X'OX$ എന്ന സരളരേഖയിന്മേൽ സമനീളങ്ങളെ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഓരോ അംശത്തിന്റെയും നീളം 1 അംഗുലമാണെന്നു വിചാരിക്കുക. ഈ രേഖയിന്മേൽ ഒരു ഉറുമ്പു സഞ്ചരിക്കുന്നതായാൽ അതു വലത്തോട്ടു പോകുമ്പോൾ അതിന്റെ ഗതിയെ നാം മുമ്പു പറഞ്ഞതുപോലെ $+$ എന്നു കരുതാം. ഇടത്തോട്ടു പോകുന്ന ക്രിയ വലത്തോട്ടു പോകുന്ന ക്രിയയുടെ എതിരായതുകൊണ്ടു ഉറുമ്പു് ഇടത്തോട്ടു പോകുമ്പോൾ അതിന്റെ ഗതിയെ $-$ എന്നും കരുതണം. ഉറുമ്പ് O എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു Aയിലേക്കു പോയാൽ അതു $+6$ അംഗുലം സഞ്ചരിച്ചുവെന്നു പറയാം. Oയിൽനിന്നു A' എന്ന ബിന്ദുവിലേക്കു പോയാൽ -6 അംഗുലം സഞ്ചരിച്ചുവെന്നു പറയാം. B'ൽനിന്നു Bയിലേക്കു പോയാൽ $+7$ അംഗുലം, Bയിൽനിന്നു B'ലേക്കു പോയാൽ -7 അംഗുലം സഞ്ചരിച്ചിരിക്കുന്നു.

1. ഉറുമ്പു് Oയിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു Bയിൽ എത്തി Bയിൽനിന്നു Cയിലേക്കു പോയി.

ആകെ പോയ ദൂരം $=(+3)+(+7)$.

Oയിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു Cയിൽ എത്തിയതുകൊണ്ടു് ആകെ പോയ ദൂരം $=O$യിൽനിന്നു Cയിലേക്കുള്ള ദൂരം $=+10$.

$\therefore (+3)+(+7) = +10.$

2. Oയിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു Cയിൽ എത്തിയശേഷം തിരിഞ്ഞു Dയിലേക്കു പോയി.

ആകെ പോയ ദൂരം $=(+10)+(-6)=O$യിൽനിന്നു Dയിലേക്കുള്ള ദൂരം $=+4$.

$\therefore (+10)+(-6)=+4.$

3. Oയിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു Bയിൽ എത്തിയശേഷം തിരിഞ്ഞു C'ലേക്കു പോയി.

ആകെ പോയ ദൂരം $= (+3)+(-5) =$ Oയിൽനിന്നു C'ലേക്കുള്ള ദൂരം $= -2$.

$\therefore (+3)+(-5) = -2$.

4. Oയിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ട B'ൽ എത്തി. B'ൽനിന്നു D'ലേക്കു പോയി. ആകെ പോയ ദൂരം $= (-4)+(-5) =$ Oയിൽനിന്നു D'ലേക്കുള്ള ദൂരം $= -9$.

$\therefore (-4)+(-5) = -9$.

5. Oയിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ട A'ൽ എത്തിയശേഷം തിരിഞ്ഞു Oയിലേക്കു പോയി.

ആകെ പോയ ദൂരം $= (-6)+(+6)$.

ഇപ്പോൾ ഉരുപ്പു Oയിൽ തന്നെ ഇരിക്കുന്നതുകൊണ്ടു Oയിൽനിന്നു അതിന്റെ ദൂരം $= 0$.

$\therefore (-6)+(+6) = 0$.

5-ാം ഉദാഹരണത്തിൽനിന്നു $(+6)$ന്റെ നേരെ എതിരാണ് (-6) എന്നു തെളിയുന്നു.

അതുകൊണ്ടു ഒരു രാശിയുടെ മുമ്പിൽ $-$ അടയാളം അതിന്റെ വിലയുടെ നേരെ എതിരായിട്ടുള്ള വിലയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$\therefore -(+6) = -6$. അതേപ്രകാരം $-(-6) = +6$.

സാധാരണമായി സംഖ്യകളുടെ മുമ്പിൽ $+$ അടയാളം ഇടാറില്ല; കാരണം $+$ അടയാളം ഒരു രാശിയുടെ വിലയിൽ യാതൊരു മാറ്റവും വരുത്തുന്നില്ല.

$+(+6) = +6$. $\qquad +(-6) = -6$.

(1) $+$ അടയാളം ഒരു രാശിയുടെ വില മാറ്റാതുകൊണ്ട് $+7+(-5)$ എന്നതു ചുരുക്കി $7-5$ എന്നെഴുതാം. $7+5$ എന്നതിനു 7 അടി വലത്തും പിന്നും 5 അടി വലത്തും അതായതു 12 അടി വലത്തു് എന്നു് അർത്ഥം കല്പിക്കാം.

$\therefore 7+5 = 12$.

(2) $-8-6$ എന്നതിനു 8 അടി ഇടത്തും പിന്നും 6 അടി ഇടത്തും, അതായതു് 14 അടി ഇടത്തു് എന്നു് അർത്ഥം കല്പിക്കാം.

$\therefore -8-6 = -14$.

പ്രമാണം: — ഒരേ അടയാളമുള്ള രണ്ടു രാശികളെ കൂട്ടുമ്പോൾ അവയുടെ തുക കണ്ടു അവയുടെ അടയാളം തുകക്കു മുമ്പിൽ ഇടുക.

(3) $-9+13$ എന്നതിനു 9 അടി ഇടത്തും പിന്നീടു 13 അടി വലത്തും അതായതു് 4 അടി വലത്തു് എന്നു് അർത്ഥം കല്പിക്കാം.

$$\therefore -9+13=-9+(9+4)=(-9+9)+4$$
$$=0+4=+4.$$

(4) $-12+5$ എന്നതിനു 12 അടി ഇടത്തും പിന്നീടു 5 അടി വലത്തും അതായതു 7 അടി ഇടത്തു് എന്നു അർത്ഥം കല്പിക്കാം.

$$\therefore -12+5=(-7-5)+5=-7+(-5+5)$$
$$=-7+0=-7.$$

പ്രമാണം:— വിപരീതമായ അടയാളങ്ങളുള്ള രാശികളെ കൂട്ടുമ്പോൾ വലിയ രാശിയിൽനിന്നു് ചെറിയതു് കിഴിച്ച വലിയ രാശിയുടെ അടയാളം വ്യത്യാസത്തിന്റെ മുമ്പിൽ ഇടുക.

അഭ്യാസം 21.

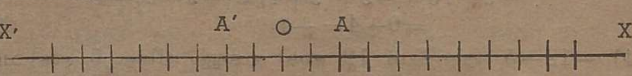
മേൽ കാണിച്ച വിധത്തിൽ ഒരു സരളരേഖയിന്മേൽ സമനീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തി താഴെ എഴുതിയവയെ തെളിയിക്കുക.

1. $(+7)+(+5)=+12.$
2. $(-13)+(-2)=-15.$
3. $(-7)+(+2)=-5.$
4. $(+13)+(-6)=+7.$
5. $(-8)+(+8)=0.$
6. $-5-6=-11.$
7. $-14+10=-4.$
8. $-9+15=+6.$
9. $-4+4=0.$

വില കാണുക:— (വാങ്മൂലം.)

10. $(+5)+(+9).$
11. $(-8)+(+3).$
12. $(-8)+(-3).$
13. $(-13)+(+16).$
14. $+7+14.$
15. $+13-9.$
16. $-18-5.$
17. $-16+11.$
18. $-14+20.$
19. $-17+17.$
20. $+(+5)+(+7).$
21. $+(+8)+(-9).$
22. $+(+13)-(+17).$
23. $+(-20)-(-4).$
24. $-(+11)+(-9).$
25. $-(-15)-(-6).$
26. $-(+10)+(+10).$
27. $4-(+20).$
28. $19-(-5).$
29. $-5-(+12).$
30. $-16-(-16).$

മുമ്പിലേപ്പോലെ $X'OX'$ എന്ന സരളരേഖയിന്മേൽ സമനീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. ഓരോ അംശത്തിന്റെയും നീളം x അംഗുലം ആണെന്നു വിചാരിക്കുക.



$OA = +2x$ അംഗുലം. $OA' = -2x$ അംഗുലം. $AO = -2x$ അംഗുലം.

ഒരു ഉറുമ്പു Oയിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു A'ൽ എത്തി അവിടെനിന്നു തിരിച്ചു Oയിലേക്കു പോയി.

ആകെ പോയ ദൂരം $= (-2x)+(2x)$.

ഇപ്പോൾ ഉറുമ്പ് Oയിൽതന്നേ ഇരിക്കുന്നതുകൊണ്ടു Oയിൽനിന്നു അതിന്റെ ദൂരം $= 0$.

$\therefore (-2x)+(+2x)=0.$

അഭ്യാസം 22.

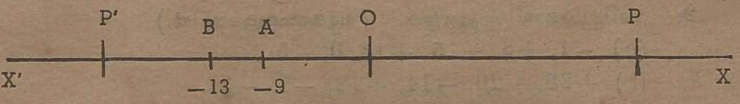
മേൽ തെളിയിച്ച വിധത്തിൽ ഒരു സരളരേഖയിന്മേൽ സമനീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തി താഴെ പറയുന്നവയെ തെളിയിക്കുക.

1. $(+8m)+(-8m)=0.$
2. $(+m)+(+3m)=+4m.$
3. $(-5m)+(-7m)=-12m.$
4. $(+9m)+(-2m)=+7m.$
5. $(+9m)+(-12m)=-3m.$

അഭ്യാസം 23 (വാങ്മൂലം).

വില കാണുക:—

1. $(+8x)+(+x).$
2. $(+13a)+(-4a).$
3. $(+14x)+(-18x).$
4. $(-5y)+(-12y).$
5. $(+6p)+(-6p).$
6. $5k+7k.$
7. $13c-10c.$
8. $-14d+12d.$
9. $-7q-10q.$
10. $-21r+21r.$
11. $+(+16p)-(+4p).$
12. $-(-5l)-(3l).$
13. $-(+13x)+(-20x).$
14. $17a-(-8a).$
15. $-(+4g)+g.$



$X'OX$ എന്ന സരളരേഖയിന്മേൽ O എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിനെ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Oയുടെ വലത്തുവശത്ത് P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിനെയും അടയാളപ്പെടുത്തുക.

1. P എന്ന ബിന്ദു Oയുടെ വലത്തുവശത്തായതുകൊണ്ട് OP ഒരു ധനസംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. Oയിൽനിന്നു Pയിലേക്കുള്ള ദൂരത്തെ ആവശ്യംപോലെ വർദ്ധിപ്പിക്കാവുന്നതുകൊണ്ട് ഏതു ധനസംഖ്യയേയും OX എന്ന അംശത്തിന്മേൽ സൂചിപ്പിക്കാം.

2. ഇതേപ്രകാരം O എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ഇടത്തു OX' എന്ന അംശത്തിന്മേൽ നമുക്കു ഏതു ഋണസംഖ്യയേയും സൂചിപ്പിക്കാം.

3. Oയുടെ വലത്തു Oയിൽനിന്നു എത്ര അകന്ന് P സ്ഥിതിചെയ്യുന്നുവോ അത്രതന്നെ Oയിൽനിന്ന് അകന്ന് അതിന്റെ ഇടത്ത് P' എന്ന ഒരു ബിന്ദു സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതുകൊണ്ട് ഏതു ധനരാശിക്കും സംഗതമായ (ഒത്ത) ഒരു ഋണരാശി ഉണ്ടെന്നു തെളിയുന്നു.

$+k$ എന്ന ധനരാശിക്കു സംഗതമായ ഋണരാശി $-k$ ആകുന്നു. ഇവയുടെ തുക $=(+k)+(-k)=0$.

4. വലത്തോട്ടു പോകുന്തോറും ബിന്ദുക്കൾ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വില വർദ്ധിക്കുന്നുവെന്നും ഇടത്തോട്ടു പോകുന്തോറും വില കുറയുന്നെന്നും കണ്ടുവല്ലോ. ഇതു നിമിത്തം.

(*a*) ഏതു ധനസംഖ്യയും പൂജ്യത്തേക്കാൾ വലുതാകുന്നു.

(*b*) ഏതു ഋണസംഖ്യയും പൂജ്യത്തേക്കാൾ ചെറുതാകുന്നു.

(*c*) -13നെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന B എന്ന ബിന്ദു -9നെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന A എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ഇടത്തായതുകൊണ്ട് -13, -9നെക്കാൾ ചെറുതാകുന്നു.

(*d*) Bയിൽനിന്നു Aയിൽ എത്തുവാൻ 4 അംശങ്ങളുടെ നീളം വലത്തോട്ടു വെക്കേണ്ടതുകൊണ്ട് -9, -13നെക്കാൾ $+4$ വലുതാകുന്നു.

അഭ്യാസം 24.

1. താഴെ കാണുന്നവയിൽ ഏറ്റവും ചെറിയതു ഏത്? ഏറ്റവും വലിയതു ഏതു?

(*a*) -12, -37, $+21$, 0, -3, $+18$.

(*b*) $+25$, $+100$, -43, $+125$, -8, 0, -48.

2. വലിപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതുക. (ആരോഹക്രമത്തിൽ.)
   (*a*) $-1, +8, -15, +13, 0, -5.$
   (*b*) $+20, -20, -14, +12, -7, -32.$

3. ഒരു സരളരേഖയിന്മേൽ സമീപങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തി ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (*a*) $-4, +8$നെക്കാൾ എത്ര ചെറുതാണ്?
   (*b*) $+7, -2$നെക്കാൾ എത്ര വലുതാണ്?
   (*c*) $+21, +3$നെക്കാൾ എത്ര വലുതാണ്?
   (*d*) $-14, -5$നെക്കാൾ എത്ര ചെറുതാണ്?
   (*e*) -7, പൂജ്യത്തെക്കാൾ എത്ര ചെറുതാണ്?

4. (1) $+2$ മുതൽ താഴോട്ട് 8 ക്രമാഗതസംഖ്യകൾ (Consecutive numbers) എഴുതുക.
   (2) -5 മുതൽ മേലോട്ട് 10 ക്രമാഗതസംഖ്യകൾ എഴുതുക.
   (3) (*a*) 0 (*b*) $+2$ (*c*) -3 ഇവ മദ്ധ്യത്തിൽ വരുന്ന 7 ക്രമാഗതസംഖ്യകൾ എഴുതുക.
   (4) n (*a*) ഏറ്റവും ചെറുതായ (*b*) ഏറ്റവും വലുതായ (*c*) മദ്ധ്യത്തിൽ വരുന്ന 7 ക്രമാഗതസംഖ്യകൾ എഴുതുക.
   (5) (*a*) $+10$ (*b*) -10 തൊട്ടു താഴോട്ടു 5 ഇരട്ട (even) സംഖ്യകളെ ക്രമത്തിൽ എഴുതുക.
   (6) (*a*) $+9$ (*b*) -9 തൊട്ടു താഴോട്ടു 5 ഒറ്റ (odd) സംഖ്യകളെ ക്രമത്തിൽ എഴുതുക.
   (7) n (*a*) ഏറ്റവും ചെറുതായ (*b*) ഏറ്റവും വലുതായ (*c*) മദ്ധ്യത്തിൽ വരുന്ന 5 ഒറ്റസംഖ്യകളെ ക്രമത്തിലെഴുതുക.
   (8) താഴെയുള്ള സംഖ്യാശ്രേണികളിൽ ഓരോന്നിലും 3 സംഖ്യകൾ വീതം ചേർക്കുക.
   (*a*) $+20, +15, +10$.....
   (*b*) $0, -3, -6$.....
   (*c*) $+9, +5, +1$.....
   (*d*) $-30, -20, -10$.....

അദ്ധ്യായം 12.

നാലു മൌലികക്രിയകൾ
(The Four Fundamental Operations).

കൂട്ടൽ (Addition).

ഒരേ തരത്തിലുള്ള രണ്ടു രാശികളെ തമ്മിൽ കൂട്ടുന്ന വഴി നാം പഠിച്ചുവല്ലോ. രണ്ടിലധികം രാശികളുടെ തുക കാണുവാൻ ഇപ്പോൾ പഠിക്കാം.

ഉദാ:—

(1) $+7x$, $+4x$, $+5x$ ഇവ മൂന്നും ധനരാശികളായതു കൊണ്ട് അവയുടെ തുകയും ഒരു ധനരാശിയായിരിക്കും.

$$+7x+4x+5x=+16x.$$

(2) $-3x$, $-8x$, $-6x$ ഇവ മൂന്നും ഋണരാശികളായതു കൊണ്ടു ഇവയുടെ തുകയും ഒരു ഋണരാശിയായിരിക്കും.

$$-3x,\ -8x,\ -6x=-17x.$$

(3) $-4x$, $+15x$, $-9x$ ഇതിലുള്ള ഋണരാശികളുടെ തുക $=-4x-9x=-13x$.

$\therefore$ ആകെ $=+15x-13x=+2x$.

ഇവയെ എഴുതിയ ക്രമത്തിൽ തന്നെ എടുത്തു തുക കാണണമെന്നതായാൽ വഴി താഴെ കാണുംപ്രകാരമായിരിക്കും.

$$-4x+15x=+11x.$$

$\therefore$ ആകെ $=+11x-9x=+2x$.

ഇതിൽനിന്നു രാശികളുടെ ചിഹ്നങ്ങളെ മാറാതെ നാം അവയെ ഏതു ക്രമത്തിലെടുത്താലും അവ കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന തുകയിൽ മാറ്റമുണ്ടാകുന്നതല്ല എന്നു വ്യക്തമാകുന്നു.

(4) $-x$, $+11x$, $-15x$, $+2x$.

ധനരാശികളുടെ തുക $=+11x+2x=+13x$

ഋണരാശികളുടെ തുക $=-x-15x=-16x$.

$\therefore$ ആകെ $=+13x-16x=-3x$.

കുറിപ്പ്:—രാശികളെ എഴുതിയ ക്രമത്തിൽ തന്നെ നാം അവയെ എടുക്കുന്നതാണെങ്കിൽ നമ്മുടെ വഴി താഴേ എഴുതിയ വിധത്തിലായിരിക്കും.

$-x+11x=+10x$; $+10x-15x=-5x$.

$-5x+2x=-3x$.

ഇതു് ദീഘ്രമായ വഴിയായതുകൊണ്ടു് എളുപ്പത്തിനു വേണ്ടി താഴെ പറയുന്ന ക്രമം ഉപയോഗിക്കാം.

ധനരാശികളുടേയും ഋണരാശികളുടേയും തുകകൾ പ്രത്യേകം കാണുക. പിന്നീടു് അവയുടെ തുകകളുടെ തുക കാണുക.

അഭ്യാസം 25.

തുക കാണുക:—

1. $+x$, $+15x$, $+7x$.
2. $-2a$, $-19a$, $-12a$.
3. $+36$, -15, $+13$, -22.
4. -23, -147, -21, $+100$.
5. $+14y$, $-27y$, $-13y$, $+2y$.
6. p, $2p$, $-3p$.
7. $-23c$, $-10c$, $-14c$, $-31c$.
8. $67q$, $-4q$, $-5q$, $19q$.
9. $\frac{3}{4}d$, $-\frac{5}{6}d$, $-\frac{4}{9}d$, $-d$.
10. $1{\cdot}2b$, $-2{\cdot}1b$, $-1{\cdot}2b$, $2{\cdot}1b$.

ചുരുക്കുക:—

11. $7+17+32-150$.
12. $-15x-18x-33x-66x$.
13. $+9n-21n-32n-4n-8n$.
14. $102-101+100-103$.
15. $m-m-m+m-m$.
16. ഒരാൾക്ക് കച്ചവടത്തിൽ ആദ്യത്തെ 3 കൊല്ലങ്ങളിൽ യഥാക്രമം 1270ക., 1400ക., 1350ക., ലാഭം കിട്ടുകയും പിന്നത്തെ 2 കൊല്ലങ്ങളിൽ 2200ക.യും, 1770ക.യും നഷ്ടം വരികയും ചെയ്യാൽ അയാൾക്കു ആകെ ലാഭമോ, നഷ്ടമോ എത്ര?

17. ഒരു കപ്പൽ ഒരു തുറമുഖത്തിൽനിന്ന് നേരെ തെക്കോട്ട് 107 നാഴിക പോയശേഷം നേരെ വടക്കോട്ട് 50 നാഴികയും അവിടെനിന്ന് വീണ്ടും 126 നാഴികയും പോയി. പിന്നെ തെക്കോട്ട 150 നാഴിക പോയാൽ ഒട്ടു വിൽ എത്തിയ സ്ഥലം തുറമുഖത്തിന്റെ ഏതു വശത്താണ്? എത്ര ദൂരത്തി ലാണ്?

18. 1937 ജനുവരി 1-ാംന- ഒരാളുടെ പേരിൽ ഒരു ബേങ്കിൽ 467ക. 8ണ. 11പ. ഉണ്ടായിരുന്നു. ഫിബ്രുവരി 1-ാംന- അയാൾ 121ക. 12ണ. എടു ക്കുകയും മാച്ച് 15-ാംന- 155ക. ഇടുകയും, ഏപ്രിൽ 10-ാംന-യും മെയി 4-ാംന-യും 87ക. 4ണ. വീതം എടുക്കുകയും ചെയ്യാൽ ജൂലായി 1-ാംന- അയാളു ടെ പേരിൽ ബേങ്കിൽ എത്ര പണം ഉണ്ടായിരുന്നു?

19. ഒരു വിമാനം ഭൂമിയിൽനിന്നു 750 അടി ഉയരം പൊങ്ങിയ ശേഷം 420 അടി താഴോട്ടിറങ്ങി. വീണ്ടും 350 അടി പൊങ്ങി. ഇപ്പോൾ അതു എത്ര അടി ഉയരത്തിലാണ്?

കിഴിക്കൽ (Subtraction).

കിഴിക്കൽ കൂട്ടലിന്റെ നേരെ എതിർക്രിയയാണ്.

(1) $+8$ൽനിന്ന് $+5$ കിഴിക്കുക.

ഈ ക്രിയയെ $+8-(+5)$ എന്നു എഴുതാം.

$-(+5)=-5$

$\therefore 8-(+5)=+8-5=+3.$

$+(-5)=-5$

$\therefore -(+5)=+(-5)$

$\therefore +5$ കിഴിക്കുന്നതിന്റെ ഫലവും -5 കൂട്ടുന്നതിന്റെ ഫലവും ഒന്നുതന്നെയാണ്.

(2) $+8$ൽനിന്ന് -5 കിഴിക്കുക.

ഇതിനെ $+8-(-5)$ എന്ന് എഴുതാം

$-(-5)=+5$

$\therefore +8-(-5)=+8+5=+13$

$+(+5)=+5$

$\therefore -(-5)=+(+5)$

$\therefore -5$ കിഴിക്കുന്നതിന്റെ ഫലവും $+5$ കൂട്ടുന്നതിന്റെ ഫലവും ഒന്നുതന്നെയാണ്.

(3) $-6x$ൽനിന്ന് $+3x$ കിഴിക്കുക.

$-6x-(+3x)=-6x-3x=-9x.$

(4) 10ക. കടമുള്ള ഒരാൾക്കു 15ക. സമ്പാദ്യം ഉണ്ടായാൽ എത്ര പണം കിട്ടണം?

10ക. കടം തീർപ്പാൻ 10ക. കിട്ടണം. അതുകൊണ്ടു ആകെ $(10+15)$ക. കിട്ടണം.

$15-(-10)=25.$

(5) $-7x$ നോടു എന്തു കൂട്ടിയാൽ $+9x$ കിട്ടും?

കൂട്ടേണ്ടുന്ന രാശി $=+9x-(-7x)=+16x.$

അഭ്യാസം 26 (വാങ്മൂലം).

താഴേ കാണുന്ന രാശികളിൽ ഒന്നാമത്തേതിൽനിന്ന് രണ്ടാമത്തേതു കിഴിക്കുക.

1. $+24, +6$	2. $-21, +7$
3. $-12, -9$	4. $+6, -13$
5. $17a, 3a$	6. $21a, 36a$
7. $5a, -a$	8. $-13x, +8x$
9. $-22y, -17y$	10. $-8p, -13p$
11. $-4x, 0$	12. $0, +4x$
13. $0, -4x$	14. $+4x, 0$

താഴേ കാണുന്ന രാശികളിൽ ഒന്നാമത്തേതിനോടു എന്തു കൂട്ടിയാൽ രണ്ടാമത്തേതു കിട്ടും?

15. 12, 21	16. 12, 27
17. 12, -13	18. $-9, -21$
19. $-67, -67$	20. $-67, +67$
21. $-5y, +5y$	22. $+5y, -5y$
23. $+5y, +5y$	24. $0, +7m$

25. ഒരു തൂണിൽനിന്നു 12 അടി ഇടത്തുനില്ക്കുന്ന ഒരു കുട്ടി അതിന്റെ 7 അടി വലത്തെത്തുവാൻ എത്ര അടി വലത്തോട്ടു നടക്കണം?

26. ഒരു സംഭവം ക്രിസ്തുവിനു മുമ്പു 305ലും മറ്റൊരു സംഭവം ക്രിസ്തുവിനു ശേഷം 261ലും ആണ് ഉണ്ടായതെങ്കിൽ രണ്ടു സംഭവങ്ങൾക്കിടയിലും ഉള്ള കൊല്ലം എത്ര?

27. എ, ബി എന്ന 2 പട്ടണങ്ങൾ ഒരു തുറമുഖത്തിൽനിന്നു യഥാക്രമം

23 നാഴികയും 55 നാഴികയും പടിഞ്ഞാറാണെങ്കിൽ എ, ബീയുടെ ഏതു ഭാഗത്താണ്? എത്ര ദൂരത്താണ്? സി എന്ന പട്ടണം തുറമുഖത്തിൽനിന്ന 81 നാഴിക കിഴക്കാണെങ്കിൽ ഏയിൽനിന്നും, ബീയിൽനിന്നും സീയിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക.

28. 123ക. സമ്പാദ്യമുള്ള ഒരാൾ എന്തു ചിലവു ചെയ്യാൽ അയാൾക്കു 39ക. കടം വരും?

29. 43ക. കടം ഉള്ള ഒരാൾക്കു 55ക. സമ്പാദ്യമുണ്ടാവാൻ എത്ര ഉറുപ്പിക കിട്ടണം?

താഴേ പറയുന്ന സംഖ്യാശ്രേണികളിൽ ഓരോന്നിലും 4 ക്രമാഗതസംഖ്യകൾ വീതം ചേർക്കുക. ഓരോ ശ്രേണിയിലുമുള്ള പദങ്ങളുടെ തുക കാണുക.

30. $+15, +10, +5$.....

31. $-22, -18, -14$.....

പെരുക്കൽ (Multiplication).

$3\times2=3+3=6.$

അല്ലെങ്കിൽ $3\times2=2+2+2=6.$

$\therefore (-3)\times2=(-3)+(-3)=-6.$

$(-2)\times3=(-2)+(-2)+(-2)=-6.$

$(-3)\times(-2)$ എന്നതിനു മേൽ കാണിച്ച വിധത്തിൽ ഒരു അർത്ഥം കല്പിക്കുവാൻ നിവൃത്തിയില്ല.

എന്നാൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ദിഗ്ഭേദ സംഖ്യകളുടെ ഗുണിതം കാണാൻ ഒരു ന്യായം താഴേ പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്നു അനുമാനിക്കാമോ എന്നു നോക്കുക.

കോഴിക്കോട്ടിനു തെക്കുവടക്കായി കിടക്കുന്ന ഒരു തീവണ്ടിപ്പാതമേൽ ഓടുന്ന ഒരു തീവണ്ടിയുടെ ശീഘ്രത അതു വടക്കോട്ടോടുമ്പോൾ $+$ ആയും തെക്കോട്ടോടുമ്പോൾ $-$ ആയും കരുതുക. മദ്ധ്യാഹ്നത്തിനു പിമ്പുള്ള സമയത്തെ $+$ ആയും മുമ്പുള്ള സമയത്തെ $-$ ആയും കരുതുക.

മണിക്കൂറിൽ v നാഴിക ഓടുന്ന ഒരു തീവണ്ടി t മണിക്കൂറിൽ പോകുന്ന ദൂരം s നാഴികയാണെങ്കിൽ $s=vt$ ആണെന്നു നാം ഒന്നാം ഭാഗത്തിൽ കണ്ടുവല്ലോ.

(1) കോഴിക്കോട്ടുനിന്നു മദ്ധ്യാഹ്നത്തിൽ പുറപ്പെട്ട വട

കോഴിക്കോട്ട മണിക്കൂറിൽ 20 നാഴിക വീതം ഓടുന്ന ഒരു തീവണ്ടി ഉച്ചതിരിഞ്ഞു 3 മണിക്കു എവിടെയായിരിക്കും?

വണ്ടി വടക്കോട്ട പോകുന്നതുകൊണ്ടു അതിന്റെ ശീഘ്രത, $v = +20$ നാഴിക. മദ്ധ്യാഹ്നത്തിനു പിമ്പുള്ള സമയം + ആയതുകൊണ്ടു സമയം, $t = +3$ മണിക്കൂർ.

∴ ഉച്ചതിരിഞ്ഞു 3 മണിക്കു കോഴിക്കോട്ടുനിന്നു വണ്ടിയുടെ ദൂരം, $s = (+20) \times (+3)$ നാഴിക.

വണ്ടി കോഴിക്കോട്ടിനു വടക്കായതുകൊണ്ടു അതിന്റെ ദൂരം + ആകുന്നു.

∴ $s = +60$ നാഴിക.

∴ $(+20) \times (+3) = +60$ എന്നു തെളിയുന്നു.

(2) അതേ വണ്ടി മദ്ധ്യാഹ്നത്തിൽ കോഴിക്കോട്ടുനിന്നു പുറപ്പെട്ടു തെക്കോട്ടു പോകുന്നെങ്കിൽ ഉച്ചതിരിഞ്ഞു 3 മണിക്കു എവിടെയായിരിക്കും?

വണ്ടി തെക്കോട്ടു പോകുന്നതുകൊണ്ടു ശീഘ്രത, $v = -20$ നാഴിക മദ്ധ്യാഹ്നത്തിനു പിമ്പുള്ള സമയം + ആയതുകൊണ്ടു സമയം, $t = +3$ മ.

∴ ഉച്ചതിരിഞ്ഞു 3 മണിക്കു കോഴിക്കോട്ടുനിന്നു വണ്ടിയുടെ ദൂരം, $s = (-20) \times (+3)$ നാഴിക.

വണ്ടി കോഴിക്കോട്ടിനു തെക്കായതുകൊണ്ടു അതിന്റെ ദൂരം — ആകുന്നു.

∴ $s = -60$ നാഴിക.

∴ $(-20) \times (+3) = -60$ എന്നു തെളിയുന്നു.

(3) ആ വണ്ടി വടക്കോട്ടു ഓടി മദ്ധ്യാഹ്നത്തിൽ കോഴിക്കോട്ടു എത്തുന്നെങ്കിൽ മദ്ധ്യാഹ്നത്തിനു 3 മണിക്കൂർ മുമ്പു അതു എവിടെയായിരിക്കും?

വണ്ടി വടക്കോട്ടു പോകുന്നതുകൊണ്ടു ശീഘ്രത, $v = +20$ നാഴിക.

മദ്ധ്യാഹ്നത്തിനു മുമ്പുള്ള സമയം — ആയതുകൊണ്ടു സമയം, $t = -3$ മ.

∴ മദ്ധ്യാഹ്നത്തിനു 3 മണിക്കൂർ മുമ്പു കോഴിക്കോട്ടുനിന്നു വണ്ടിയുടെ ദൂരം, $s = (+20) \times (-3)$ നാഴിക.

വണ്ടി കോഴിക്കോട്ടിനു തെക്കായതുകൊണ്ടു അതിന്റെ ദൂരം — ആകുന്നു.

∴ $s = -60$ നാഴിക.

∴ $(+20) \times (-3) = -60$ എന്നു തെളിയുന്നു.

(4) ആ വണ്ടി തെക്കോട്ടു ഓടി മദ്ധ്യാഹ്നത്തിൽ കോഴി

കോട്ട എത്തുന്നെങ്കിൽ മദ്ധ്യാഹ്നത്തിനു 3 മണിക്കൂർ മുമ്പു അതു എവിടെയായിരിക്കും?

വണ്ടി തെക്കോട്ട പോകുന്നതുകൊണ്ടു ശീഘ്രത, $v = -20$ നാഴിക. മദ്ധ്യാഹ്നത്തിനു മുമ്പുള്ള സമയം— ആയതുകൊണ്ടു സമയം, $t = -3$മ.

$\therefore$ മദ്ധ്യാഹ്നത്തിനു 3 മണിക്കൂർ മുമ്പു കോഴിക്കോട്ടുനിന്നു വണ്ടിയുടെ ദൂരം, $s = (-20) \times (-3)$ നാഴിക.

വണ്ടി കോഴിക്കോട്ടിനു വടക്കായതുകൊണ്ടു അതിന്റെ ദൂരം $+$ ആകുന്നു.

$\therefore s = +60$ നാഴിക.

$\therefore (-20) \times (-3) = +60$ എന്നു തെളിയുന്നു.

20, 3 എന്നീ സംഖ്യകൾക്കു പകരം ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സംഖ്യകളായ a, b എന്നിവയെ എടുക്കുക.

എന്നാൽ $(+a) \times (+b) = +ab$
$(-a) \times (+b) = -ab$
$(+a) \times (-b) = -ab$
$(-a) \times (-b) = +ab$

ഇതിനെ ചിഹ്നനിയമം (Law of Signs) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരേ ചിഹ്നമുള്ള രണ്ടു രാശികളുടെ ഗുണനഫലം ഒരു ധനരാശിയായിരിക്കും. ഭിന്നചിഹ്നങ്ങളുള്ള രണ്ടു രാശികളുടെ ഗുണനഫലം ഒരു ഋണരാശിയായിരിക്കും.

$$2 \times 3 = 3 \times 2$$
$$2 \times 3 \times 4 = 2 \times 4 \times 3 = 3 \times 2 \times 4.$$

ഈ ഘടകങ്ങളെ വേറെ എത്രവിധത്തിൽ എഴുതാം? ഇവയെ കഴിയുന്നത്ര വിധത്തിൽ എഴുതി ഗുണനഫലം 24 തന്നെയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്നു രണ്ടോ രണ്ടിലധികമോ സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം കാണ്മാൻ അവയെ ഏതു ക്രമത്തിലെങ്കിലും പെരുക്കാം എന്നു തെളിയുന്നു.

$$a \times b = b \times a \qquad \therefore ab = ba$$
$$a \times b \times c = abc = bac.$$

ഈ ഗുണനഫലത്തെ ആകെ 6 വിധത്തിൽ എഴുതാം.

അവ ഏവ?

ഉദാ: —

(1) $-7x \times 3 = -7 \times 3 \times x = -21x.$

(2) $-4a \times -3b = -4 \times -3 \times a \times b = 12ab.$

(3) $-m \times -2n \times -3p$
$= -1 \times -2 \times -3 \times m \times n \times p = -6mnp.$

രണ്ടിലധികം സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തെ അവയുടെ അവിരാമഗുണനഫലം (Continued product) എന്നു പറയുന്നു.

അഭ്യാസം 27 (വാങ്മൂലം).

ഗുണനഫലം കാണുക:—

1. $5x \times 4$.
2. $-7y \times 3$.
3. $8a \times -5$.
4. $-10b \times -2$.
5. $\frac{3}{4}p \times 16$.
6. $2\frac{1}{2}k \times 10$.
7. $1\frac{1}{3}l \times -15$.
8. $-\frac{2}{5}m \times -10$.
9. $3a \times 2b$.
10. $-4x \times 5y$.
11. $7q \times -4r$.
12. $-9x \times -6y$.
13. $\cdot 1a \times \cdot 2b$.
14. $-2 \cdot 2c \times \cdot 3d$.
15. $\frac{a}{3} \times -6x$.
16. $-\frac{b}{24} \times -16y$.

അവിരാമഗുണനഫലം കാണുക:—

17. $a, 5b, 7c$.
18. $-3x, 4y, -5z$.
19. $-8p, -q, -2r$.
20. $4l, -3m, n$.
21. $\frac{2}{3}a, \frac{5}{6}b, \frac{9}{10}c$.

ഹരിക്കൽ (Division).

$(+a) \times (+b) = +ab \quad \therefore \frac{+ab}{+a} = +b.$

$(+a) \times (-b) = -ab \quad \therefore \frac{-ab}{+a} = -b.$

$(-a) \times (+b) = -ab \quad \therefore \frac{-ab}{-a} = +b.$

$(-a) \times (-b) = +ab \quad \therefore \frac{+ab}{-a} = -b.$

(1) ഹാര്യം, ഹാരകം ഇവ രണ്ടും ധനരാശികളോ, രണ്ടും ഋണരാശികളോ ആയാൽ ഹരിതഫലം ഒരു ധനരാശിയായിരിക്കും.

(2) ഛായ്യം, ഛാരകം ഇവയിൽ ഒന്ന് ധനരാശിയും മറേറത്ത് ഋണരാശിയും ആയാൽ ഹരിതഫലം ഒരു ഋണ രാശിയായിരിക്കും.

ഉദാ:—

(1) $+10x \div +5 = \frac{+10 \times x}{+5} = +2x.$

(2) $-27m \div +9m = \frac{-27 \times m}{+9 \times m} = -3.$

(3) $-28ab \div -7b = \frac{-28 \times a \times b}{-7 \times b} = +4a.$

(4) $+18pqr \div -3q = \frac{+18 \times p \times q \times r}{-3 \times q} = -6pr.$

(5) $-30x \div +60xy = \frac{-30 \times x}{+60 \times x \times y} = \frac{-1}{2y}.$

അഭ്യാസം 28 (വാങ്മൂലം).

ഹരിതഫലം കാണുക:—

1. $\frac{+35}{+7}.$
2. $\frac{-44}{4}.$
3. $\frac{+42}{-3}.$
4. $\frac{-36}{-12}.$
5. $\frac{+28ab}{+7a}.$
6. $\frac{-32xy}{4y}.$
7. $\frac{+22lm}{-2lm}.$
8. $\frac{-56ax}{-8}.$
9. $\frac{+27abc}{-3b}.$
10. $\frac{-14xyz}{xyz}.$
11. $\frac{18klm}{-2lm}.$
12. $\frac{-21pq}{-7p}.$

$9a-3b+5ab-2a+7b$ എന്ന ബീജഗണിതവ്യഞ്ജകത്തെ പരിശോധിക്കുക.

$9a, -2a$ എന്ന രാശികൾ a എന്ന രാശിയുടെ ഗുണിതങ്ങളാകുന്നു. അവയുടെ സാംഖ്യഗുണകങ്ങൾ മാത്രമെ

വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുള്ളൂ. ഇതേപ്രകാരം $-3b$, $+7b$ എന്ന രാശികളും bയുടെ ഗുണിതങ്ങളാണ്; സാംഖ്യഗുണകങ്ങൾ മാത്രമേ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുള്ളൂ. രണ്ടോ രണ്ടിലധികമോ രാശികളുടെ സാംഖ്യഗുണകങ്ങൾ മാത്രം വ്യത്യസ്തങ്ങളായാൽ അവയെ **സജാതീയരാശികൾ** (Like Quantities) എന്നു പറയുന്നു. $9a, -2a$ ഇവ സജാതീയരാശികളാകുന്നു. $-3b$, $+7b$ ഇവയും സജാതീയരാശികളാകുന്നു. $9a$, $-3b$ ഇവ സജാതീയരാശികളല്ല. ഇവയെ **വിജാതീയരാശികൾ** (Unlike Quantities) എന്നു പറയുന്നു.

സജാതീയരാശികൾ ഒരു വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ പദങ്ങൾ ആകുമ്പോൾ അവയെ **സജാതീയപദങ്ങൾ** (Like Terms) എന്നു പറയുന്നു. വിജാതീയരാശികളെ **വിജാതീയപദങ്ങൾ** (Unlike Terms) എന്നു പറയുന്നു. മേൽ എഴുതിയ വ്യഞ്ജകത്തിൽ 3 തരം പദങ്ങൾ ഉണ്ട്. aയുടെ, bയുടെ; abയുടെ പദങ്ങൾ.

a പദങ്ങളുടെ തുക $= 9a-2a=7a.$
b " " $= -3b+7b=4b.$
ab " " $=5ab.$

അതുകൊണ്ട് 5 പദങ്ങളുള്ള ഈ വ്യഞ്ജകത്തെ ചുരുക്കി $7a+4b+5ab$ എന്നെഴുതാം.

എന്നാൽ വിജാതീയപദങ്ങൾ മാത്രം അടങ്ങിയിട്ടുള്ള ഒരു വ്യഞ്ജകത്തിലെ പദങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ കുറക്കുവാൻ കഴിയാത്തതുകൊണ്ട് അങ്ങിനെയുള്ള വ്യഞ്ജകത്തെ ചുരുക്കുവാൻ കഴിയുന്നതല്ല.

ഉദാ: —

$3x-4a+2ax-7ax-a+5a$ എന്ന വ്യഞ്ജകത്തെ ചുരുക്കുക.

ഇതിൽ 3 തരം വ്യഞ്ജകങ്ങൾ ഉണ്ട്. x, a, ax

x പദങ്ങളുടെ തുക $=3x$
a " " $= -4a-a+5a=0$
ax " " $=2ax-7ax=-5ax.$

$3x-5ax$ എന്നതാണ് വ്യഞ്ജകത്തെ ചുരുക്കിയ രൂപം.

അഭ്യാസം 29.

താഴേ എഴുതിയ വ്യഞ്ജകങ്ങളെ ചുരുക്കുക: —

1. $a-3b+6-8b-10+7a.$
2. $5xy-18xy-21xy+26xy-100.$
3. $7x+3y-21z-4z+14x-3y+25z.$
4. $ab-bc+ca-ba-bc+ac-ca-ab-cb.$
5. $-5p+4q-20-81-8p+14q-r.$
6. $abc-acb-bca+bac-cab+cba.$
7. $-48ap+67bp-cp-42cp-42bp-42ap.$
8. $1\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b-\frac{1}{4}c+1\frac{1}{4}b-3\frac{1}{4}a-b+a-c.$
9. $1{\cdot}1l-2m-{\cdot}2n+2{\cdot}3l-{\cdot}2m-2n.$
10. $8abcd-64abcd-27abcd+47abcd-abcd.$

അദ്ധ്യായം 13.

ഘാതം (Power).

3 അംഗുലം നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $=3\times3$ ചതുരശ്ര അംഗുലം. ഇതേപ്രകാരം a'' നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $=a\times a$ ച. അം. ഇതു ചുരുക്കി a^2 ച. അം. എന്നു എഴുതുന്നു. a എന്ന ഘടകം a^2ൽ 2 പ്രാവശ്യം ഉണ്ടെന്നു കാണിക്കുവാൻ അതിനെ aക്കു മീതെ വലത്തുവശത്തു ചേർക്കുന്നു. a^2നെ aയുടെ വർഗ്ഗം (Square) എന്നു പറയുന്നു. $3''$ നീളമുള്ള ഒരു സമഘനികയുടെ ആയതനം (Volume) $=3\times3\times3$ ഘന അംഗുലം.

a'' നീളമുള്ള ഒരു സമഘനികയുടെ ആയതനം $=a\times a\times a$ ഘ. അം. ഇതു ചുരുക്കി a^3 എന്നു എഴുതുന്നു. ഇങ്ങിനെ ഒരു സംഖ്യയെ അതിനെക്കൊണ്ടു തന്നേ ഒന്നോ ഒന്നിലധികമോ പ്രാവശ്യം പെരുക്കിക്കിട്ടുന്ന ഗുണനഫലത്തെ

അതിന്റെ ഘാതം (Power) എന്നും അതിൽ ഘടകം എത്ര പ്രാവശ്യം ഉണ്ടെന്നു കാണിക്കുന്ന സംഖ്യയെ ഘാതസംജ്ഞ (Index) എന്നും പറയുന്നു. a^3ൽ a 3 പ്രാവശ്യം ഘടകമായിട്ടുള്ളതുകൊണ്ടു a^3നെ aയുടെ ത്രിഘാതം (Cube) എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാ:— $(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. $(\frac{1}{2})^3=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$.

$(1\frac{1}{4})^2=\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}=\frac{25}{16}=1\frac{9}{16}$. $(1\frac{1}{4})^3=\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}\times\frac{5}{4}=\frac{125}{64}=1\frac{61}{64}$.

$\cdot1^2=\cdot1\times\cdot1=\cdot01$. $\cdot1^3=\cdot1\times\cdot1\times\cdot1=\cdot001$.

$(2x)^2=2^2\cdot x^2=4x^2$. $(2x)^3=2^3x^3=8x^3$.

അഭ്യാസം 30.

വർഗ്ഗവും ത്രിഘാതവും കാണുക:—

1. $5, 11, 17, 3x, 4y$.
2. $\frac{1}{5}, \frac{6}{7}, \frac{3}{11}, \frac{1}{2}a, \frac{2}{3}b$.
3. $1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 3\frac{1}{4}, 1\frac{1}{4}m, 1\frac{2}{3}n$.
4. $\cdot2, \cdot4, 1\cdot3, \cdot3c, 1\cdot5d$.

5. $1\frac{1}{2}a''$ നീളമുള്ള (a) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം (b) ഒരു സമഘനികയുടെ ആയതനം കാണുക.

താഴെ പറയുന്ന ഹരിതങ്ങൾ എളുപ്പത്തിൽ അനുമാനിക്കാം:—

$$\frac{a^2}{a}=\frac{a\times a}{a}=a. \quad \frac{a^3}{a}=\frac{a\times a\times a}{a}=a^2. \quad \frac{a^3}{a^2}=a.$$

ഉദാ:— $\frac{4m^3}{2m^2}=2m$. $\frac{8m^3}{15m}=\frac{8}{15}m^2$.

അഭ്യാസം 31 (വാങ്മൂലം).

ഹരിതം കാണുക:—

1. $\frac{l^3}{l^2}$ 2. $\frac{l^3}{l}$ 3. $\frac{\pi r^2}{2\pi r}$ 4 $\frac{PR^2}{P}$ 5. $\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2}$.

അദ്ധ്യായം 14.

അക്ഷരത്തിന്നു പകരം സംഖ്യ ചേക്കൽ.

(Numerical Substitution).

ഒരു മുറിയുടെ ക്ഷേത്രഫലം അതിന്റെ നീളത്തിന്റെയും വീതിയുടെയും പെരുക്കമാണെന്നുള്ള വസ്തുത അക്ഷരങ്ങൾമൂലം താഴേ പറയുംപ്രകാരം സംക്ഷിപ്തമായി സൂചിപ്പിക്കാം.

$A=lb$. ഇതിൽ A = മുറിയുടെ ക്ഷേത്രഫലം. l = നീളം, b = വീതി. ഏതു മുറിയുടേയും ക്ഷേത്രഫലം കാണാൻ ഈ സൂത്രം (Formula) ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, 20 അടി നീളവും 15 അടി വീതിയുമുള്ള ഒരു മുറിയുടെ ക്ഷേത്രഫലം $=20\times15$ ചതുരശ്ര അടി
$=300$ ച. അടി.

ഉദാ:-1. $I=\frac{Pnr}{100}$ എന്നതു പലിശ കാണാനുള്ള സൂത്രമാകുന്നു.

ഇതിൽ I = പലിശ, P = മുതൽ, n = കൊല്ലങ്ങളുടെ എണ്ണം. r = പലിശയുടെ വീതം.

P, n, r, എന്നിവക്കു പ്രത്യേക വിലകൾ കല്പിക്കുന്നതിനാൽ അവക്കനുസരിച്ച പലിശ കാണാം.

$P=225$ക., $n=3\frac{1}{2}$, $r=4$. എന്നു വിചാരിക്കുക. എന്നാൽ,

$$\text{പലിശ}=I=\frac{225\times3\frac{1}{2}\times4\text{ക.}}{100}$$
$$=31\tfrac{1}{2}\text{ക.}$$

2. $a=1$; $x=2$, എന്നാൽ $3a^2x^3$ന്റെ വില കാണുക.
$3a^2x^3=3\times1^2\times2^3=24$.

3. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ പരിമാണം,

$$V=\frac{4}{3}\pi r^3.\ \pi=3\frac{1}{7},\ r=1\frac{1}{2}$$ എന്നാൽ

V കാണുക.

$$V=\frac{4}{3}\times\frac{22}{7}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}=14\frac{1}{7}.$$

അഭ്യാസം 32.

1. $s=\frac{1}{2}gt^2.$ $g=32,$ $t=5$ എന്നാൽ sന്റെ വില കാണുക.
2. $c=\pi d.$ $\pi=3\frac{1}{7},$ $d=14$ എന്നാൽ c കാണുക.
3. $c=2\pi r.$ $\pi=3\cdot14,$ $r=50.$ എന്നാൽ c കാണുക.
4. $A=\pi r^2.$ $\pi=3\frac{1}{7},$ $r=10\frac{1}{2}.$ എന്നാൽ Aയുടെ വില കാണുക.
5. $v=u+at.$ (1) $u=6,\ a=2,\ t=9.$
   (2) $u=0,\ a=4,\ t=13.$
   (3) $u=0,\ a=-1,\ t=7.$

മേൽപറഞ്ഞ വിലകൾക്കനുസരിച്ചു vയുടെ വില കാണുക.

6. $A=2h(l+b).$ ഇതു് ഒരു മുറിയുടെ നാലു ചുവരുകളുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണാനുള്ള സൂത്രമാണെന്നു് നിങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കിയിരിക്കുമല്ലോ.

$l,\ b,\ h$ എന്നിവക്കു യഥാക്രമം താഴെ പറയുന്ന വിലയായാൽ ചുവരുകളുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

(1) 33, 17, 15. (2) $37\frac{1}{2},\ 22\frac{1}{2},\ 18\frac{1}{4}.$

7. 1, 2, 3 എന്നീ n വരെയുള്ള ക്രമാഗതങ്ങളായ സംഖ്യകളുടെ തുക കാണാനുള്ള സൂത്രം താഴെ ചേർക്കുന്നു.

$$s=\frac{n(n+1)}{2}$$ $s=$ തുക. $n=1$ മുതലുള്ള സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം.

ഈ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു (1) 1 മുതൽ 50 വരെയുള്ള. (2) 1 മുതൽ 100 വരെയുള്ള. (3) 40 മുതൽ 80 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ തുക കാണുക.

8. $y=2x-7.$ xന്നു് 10, $5\frac{1}{2},$ 0, $-4,$ $-3\frac{1}{2}$ എന്നീ വിലകൾ ഉള്ളപ്പോൾ yയുടെ വില എത്രയായിരിക്കും?

9. $b=\frac{1}{6}a-1.$ aക്കു് $12\frac{1}{2},$ 5, 0, $-1,$ $-5,$ $-2\frac{1}{2}$ എന്നീ വിലകൾ ഉള്ളപ്പോൾ bയുടെ വില എത്രയായിരിക്കും?

10. $m=\frac{3n-5}{4}.$ nന്നു് 4, 3, 0, $-2,$ $-1,$ $-\frac{1}{2}$ എന്നീ വിലകൾ ഉള്ളപ്പോൾ mന്റെ വില എത്രയായിരിക്കും?

11. $y = mx + c$.

m	x	c
8	·4	·5
-6	·3	-1
7	$-1\frac{1}{4}$	$2\frac{3}{4}$

ഈ പട്ടികയിലുള്ള വില അനുസരിച്ചു yയുടെ വില കാണുക.

12. $y = x^2 - 2x + 3$. xന് 3, $1\frac{1}{2}$, 0, എന്നീ വിലകൾ ഉള്ളപ്പോൾ yയുടെ വില കാണുക.

ഒരു വ്യഞ്ജകത്തിൽ പെട്ടിട്ടുള്ള അക്ഷരങ്ങളുടെ വില അറിയുന്നതായാൽ ആ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വില കാണുവാൻ ആദ്യം അതിനെ ചുരുക്കുന്നതു നന്നായിരിക്കും.

ഉദാ: $x = 3$, $y = 2$ ആയാൽ $5x^2 - 3xy + 4y^2 - 7xy - 2y^2 + 3x^2$ന്റെ വില കാണുക :—

x^2ന്റെ ഗുണകം $= 5 + 3 = 8$

xy ,, ,, $= -3 - 7 = -10$

y^2 ,, ,, $= 4 - 2 = 2$

$\therefore$ വ്യഞ്ജകം $= 8x^2 - 10xy + 2y^2$

$= 8.3^2 - 10.3.2. + 2.2^2$

$= 72 - 60 + 8 = 20$

സമകോണചതുരങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലം മേല്പറഞ്ഞ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ രൂപത്തിലായാകുന്നതുകൊണ്ടു താഴെ കാണുന്ന വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ വില കാണുന്നതു ഉപയോഗപ്രദമായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 33.

താഴെ പറയുന്ന വ്യഞ്ജകങ്ങളെ ചുരുക്കി അവയുടെ വില കാണുക: —

$a = 1$, $b = 2$, $x = 1\frac{1}{2}$, $y = \frac{2}{3}$.

1. $3a^2 - 2a + 7 - 8a - 13 + 14a^2$.
2. $12a^2 - 3ab - b^2 + 5b^2 - 4a^2 + 4ab$.

3. $x^2-3x-6+8x-7+4x^2$.
4. $14y^2-4y-8-14y+13y^2+15$.
5. $-13xy+4y^2+50x^2+13x^2-13xy-4y^2$.

അദ്ധ്യായം 15.

ആവരണചിഹ്നങ്ങൾ

(Brackets).

(1) $7+4\times2$. (2) $(7+4)2$.

(1) ന്റെ അർത്ഥം 7നോട് 4ന്റെയും 2ന്റെയും ഗുണനഫലം കൂട്ടുക എന്നാകുന്നു.

(2) ന്റെ അർത്ഥം 7നെയും 4നെയും കൂട്ടിക്കിട്ടിയ തുകയെ 2കൊണ്ടു പെരുക്കുക എന്നാകുന്നു.

7നെയും 4നെയും ഒരുമിച്ച് എടുക്കണമെന്നു സൂചിപ്പിക്കുവാൻ അവയെ ആവരണചിഹ്നങ്ങൾക്കുള്ളിൽ ചേർക്കുന്നു. ഒരുമിച്ച് എടുക്കേണ്ടുന്ന രാശികളെ ആവരണ ചിഹ്നങ്ങൾക്കുള്ളിൽ എഴുതുന്നു.

$$(a+b)c=ac+bc$$

$$7+\frac{4}{2};\ \frac{7+4}{2}.$$

$7+\frac{4}{2}$ എന്നതിന്റെ അർത്ഥം 7നോട്, 4നെ 2കൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന ഹരിതത്തെ കൂട്ടുക എന്നാകുന്നു.

$\therefore\ 7+\frac{4}{2}=7+2=9$.

$\frac{7+4}{2}$ എന്നതിന്റെ അർത്ഥം 7ന്റെയും 4ന്റെയും തുകയെ രണ്ടുകൊണ്ട് ഹരിക്കുക എന്നാകുന്നു.

$\therefore\ \frac{7+4}{2}=\frac{11}{2}=5\frac{1}{2}$.

7നെയും 4നെയും ഒരുമിച്ച് എടുക്കണം എന്നു സൂചിപ്പിക്കുവാൻ അവയുടെ മുകളിൽ ഒരു വര വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഇങ്ങിനെ കുറേ രാശികളെ ഒരുമിച്ച് എടുക്കണമെന്നു സൂചിപ്പിക്കുവാൻ അവക്കു മീതെ വരക്കുന്ന വരക്കു മേൽവര (Vinculum) എന്നു പറയുന്നു.

— അടയാളം ഒരു രാശിയുടെ മുമ്പിൽ ഇട്ടാൽ ആ രാശിയുടെ വിലയുടെ എതിരായ ഒരു വില കിട്ടുമെന്നും, + അടയാളം ഒരു രാശിയുടെ വിലയിൽ യാതൊരു മാറ്റവും വരുത്തുന്നില്ലെന്നും നാം മുമ്പ് പഠിച്ചുവല്ലോ.

$+(+a)=+a;\quad +(-a)=-a;\quad -(+a)=-a;\quad -(-a)=+a.$

$\therefore +(a-b)=a-b.$

$\therefore -(a-b)=-a+b.$

അതുകൊണ്ട് + അടയാളം മുമ്പിലുള്ള ആവരണചിഹ്നങ്ങളെ നീക്കംചെയ്യുമ്പോൾ അവക്കകത്തുള്ള യാതൊരു രാശിയുടെയും അടയാളം മാറേണ്ടതില്ല. — അടയാളം മുമ്പിലുള്ള ആവരണചിഹ്നങ്ങളെ നീക്കം ചെയ്യുമ്പോൾ അവക്കകത്തുള്ള ഓരോ രാശിയുടേയും അടയാളം മാറണം.

ആവരണ ചിഹ്നങ്ങളെ നീക്കം ചെയ്തു ചുരുക്കുക:—

ഉദാ: — 1. $7-(9-5)=7-9+5=12-9=3.$

2. $(x+a+7)-(x-a-4)+(-x+a+3)-(x+a+14)=x+a+7-x+a+4-x+a+3-x-a-14=-2x+2a.$

ഈ ഉത്തരത്തെത്തന്നെ ആവരണചിഹ്നങ്ങൾക്കുള്ളിൽ അടക്കം ചെയ്യാം.

$-(2x-2a);\quad +(-2x+2a);\quad +(2a-2x).$

2 എന്ന സംഖ്യ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ രണ്ടു പദങ്ങളുടേയും ഘടകമായതുകൊണ്ട് ഇങ്ങിനെയും എഴുതാം.

$-2(x-a);\quad +2(a-x)$

ആവരണ ചിഹ്നങ്ങൾക്കകത്തുള്ള രാശികളെ ഒരു രാശി എന്നപോലെ കരുതേണ്ടതുകൊണ്ടു $3(x-2a+7)$ എന്നതിന്റെ വില കാണുവാൻ ഓരോ രാശിയേയും 3 കൊണ്ടു പെരുക്കണം.

$$\therefore\ 3(x-2a+7)=3x-6a+21$$

ഇതേപ്രകാരം $-4(2x-a-3)=-8x+4a+12.$

ഉദാ: 3. ആവരണചിഹ്നങ്ങൾ നീക്കി ചുരുക്കുക:—

$$(2+a)-5(3-4a)-7(5+3a)+3(1-2a)$$

$a=2$ ആണെങ്കിൽ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

$$2+a-15+20a-35-21a+3-6a$$
$$=-45-6a$$
$$=-45-12=-57$$

ആവരണചിഹ്നങ്ങൾക്കകത്തുള്ള രാശികളുടെ വില നേരിട്ടു കാണുന്നതായാൽ:

വ്യഞ്ജകം $=4-5(-5)-7\times11+3(-3)$
$=4+25-77-9=-57.$

ആവരണചിഹ്നങ്ങളെ നീക്കംചെയ്യുന്ന പ്രകാരം തന്നെ പദങ്ങളെ ആവരണചിഹ്നങ്ങൾക്കകത്തടക്കം ചെയ്യുന്നതും ആവശ്യമാണ്.

ഉദാഹരണമായി ഒരു വ്യഞ്ജകത്തിലെ ഒരക്ഷരത്തിന്റെ ഒരേ ഘാതസംജ്ഞയുള്ള പദങ്ങളെ ചിലപ്പോൾ ആവരണചിഹ്നങ്ങളിൽ അടക്കം ചെയ്യേണ്ടിവരും.

$4x^3-3x-5x^2+8x-7x^3-2x^2$ എന്ന വ്യഞ്ജകത്തിലെ xന്റെ ഒരേ ഘാതസംജ്ഞയുള്ള പദങ്ങളെ ആവരണചിഹ്നങ്ങളിൽ അടക്കം ചെയ്യുക. ആവരണചിഹ്നങ്ങളുടെ മുമ്പിൽ (1) +അടയാളം ഇടുക. (2) −അടയാളം ഇടുക.

(1) $(4x^3-7x^3)+(-5x^2-2x^2)+(-3x+8x).$

(2) $-(-4x^3+7x^3)-(5x^2+2x^2)-(3x-8x).$

അഭ്യാസം 34.

ആവരണചിഹ്നങ്ങൾ നീക്കംചെയ്തു ചുരുക്കുക: —

1. (1) $13-(7-6)$. (2) $13-(7+6)$.
   (3) $-13-(7-6)$. (4) $-1-(1-1)$.
   (5) $-(10-10)-10$. (6) $20x-(30x-23x)$.
   (7) $-(15a+9a)-14a$.
   (8) $(4a-5b)-(5a-4b)$.
   (9) $(2l-5m-3n)-(-5n+7l-8m)$.
   (10) $(3a-2b-c)-(a-b-c)+(-a-b+c)$.
   (11) $(7p-9q)-(15r-17q)-(p-r)$.
   (12) $-(x^2-ax)+(a^2-x^2)-(x^2+ax)$.
   (13) $20-(4k-3l)-(3m-7k)+(10l-3m)$.
   (14) $-(14x-13y-12)+(18-15y-17x)-(11y-9+10)$.

2. (1) $(x-1)-2(x-2)-3(x-4)$.
   (2) $5(a-b+c)-3(-2a+3b-c)-4(-3a-b+4c)$.
   (3) $-2(x-3y)+7(5y-2z)-6(-3z+x)-11(2x-3y-4z)$.
   (4) $-4(-x^2-2x+1)+5(-7+8x-21x^2)-(10x-11-12x^2)$.
   (5) $13(a^2-5ab)-9(ab-14b^2)-10(-2b^2+3a^2)$.

3. $-3(-x-y-z)+7(-x+3y-z)-2(-2x+12y-2z)$.

ഇങ്ങിനെ ചുരുക്കി ഇതിന്റെ വില 0 ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

4. (1) $5(3x^2-2x+4)-4(-x^2-4x-7)-3(2-x^2+5x)$.
   (2) $-(x-y)+(-2x-2y)-(5x-3y)+(4y-3x)$.
   (3) $(x^2-y^2)-(xy-y^2)-(y^2-xy)-(-x^2-xy+y^2)$.

ഇവ ഓരോന്നിനേയും ഒന്നാമതു ആവരണചിഹ്നങ്ങൾ മാറി ചുരുക്കുക. ചുരുക്കിയശേഷം $x=1$, $y=2$ എന്ന കണക്കി അവയുടെ വില കാണുക.

രണ്ടാമതു ആവരണചിഹ്നങ്ങൾക്കകത്തുള്ള രാശികളുടെ വില കണ്ടതിന്നു ശേഷം ആകെ വില കാണുക. രണ്ടു വിലകളും സമമോ എന്നു ഒത്തുനോക്കുക.

5. താഴേ കാണുന്ന വ്യഞ്ജകങ്ങളിലെ പദങ്ങളെ എഴുതിയ ക്രമത്തിൽ (*a*) ഈരണ്ടായി (*b*) മൂന്നായി ആവരണചിഹ്നങ്ങൾക്കകത്തു അടക്കം ചെയ്യുക. ആവരണചിഹ്നങ്ങളുടെ മുമ്പിൽ (1) + അടയാളം (2) — അടയാളം ഇടുക.

(1) $x-a-y+b-z-c$.

(2) $-x^2+3x-1-5x+4x^2-7$.

(3) $14a^2-3ab-7a^2+5b^2-7ab+2b^2$.

6. xന്റെ ഒരേ ഘാതസംജ്ഞ പദങ്ങളെ ആവരണചിഹ്നങ്ങൾക്കകത്തു അടക്കം ചെയ്യുക. ആവരണചിഹ്നങ്ങളുടെ മുമ്പിൽ (1) + അടയാളം (2) − അടയാളം ഇടുക.

(1) $6x^4+5x^3-4x^2-3x^3+10x^5-x^4-x^2+7x^5$.

(2) $14x-x^2-2x^2+3x^3-4x^2-8x-x^3+x$.

7. രണ്ടാമത്തെ പദം മുതല്ലുള്ള എല്ലാ പദങ്ങളേയും ആവരണചിഹ്നങ്ങൾക്കകത്തു അടക്കം ചെയ്യുക. ആവരണചിഹ്നങ്ങളുടെ മുമ്പിൽ (1) + അടയാളം (2) − അടയാളം ഇടുക.

(1) $1-a+b-c-14x+15y-16z$.

(2) $5x-3y-4a+1+9b-7c-22k$.

ഒരു ആവരണചിഹ്നത്തിന്നകത്തുള്ള രാശികളിൽ ചിലതിനെ ഒരു പ്രത്യേകം കൂട്ടമായി കരുതേണ്ടിവരുമ്പോൾ അവയെ ആവരണചിഹ്നത്തിന്നകത്തുള്ള മറെറാരു ആവരണചിഹ്നത്തിൽ അടക്കം ചെയ്യുന്നു. താഴെയുള്ള വ്യഞ്ജകങ്ങളെ പരിശോധിക്കുക.

(1) $18x-\{4x-(3y+2)-(7x+5)\}$

(2) $2a-\{3v-(a-\overline{b+c})\}$

(3) $(14x-5)-[2-\{8-(5-2x)-(3x-1)\}]$

ഒടുവിലത്തെ വ്യഞ്ജകത്തെ നമുക്കു ചുരുക്കാം.

ഏറെറവും ഉള്ളിലുള്ള ആവരണചിഹ്നങ്ങളെ ആദ്യം നീക്കം ചെയ്യുക.

$(14x-5)-[2-\{8-5+2x-3x+1\}]$

$=(14x-5)-[2-8+5-2x+3x-1]$.

$=14x-5-2+8-5+2x-3x+1$.

$=13x-3$.

ആവരണ ചിഹ്നങ്ങളുടെ പേരുകൾ താഴെ ചേർക്കുന്നു.

( ) ചെറിയ ആവരണചിഹ്നം (Simple Brackets)

{ } വലിയ ആവരണചിഹ്നം (Double Brackets)

[ ] ചതുര ആവരണചിഹ്നം (Spuare Brackets)

അഭ്യാസം 35.

ആവരണചിഹ്നങ്ങൾ നീക്കംചെയ്തു ചുരുക്കുക:—

1. $a-\{2-(3-4a)+5\}$.
2. $10x-\{5y-(2+3x)+(y-x-6)\}$.
3. $6m-[2m-\{3m-(2+7m)\}]$.
4. $1-[1-\{1-(1-1+1)\}]$.
5. $[a-\{b+(c+d)\}]-[a+\{b-(c-d)\}]+[a-\{b-(c+d)\}]-[a-\{-b-(c-d)\}]$.
6. $\{4x-3y-(y-x)-2y\}-5y-\{6x-(2y-3x)\}$.
7. $(9a-2b)-[-3c-\{-2a-(3b-c-a)\}]$.
8. $\{(p+q+r)-(p-q-r)\}-\{(p-q-r)-(p+q-r)\}+\{(p-2q-r)-(2p-q-r)\}$.
9. താഴെ പറയുന്നവയെ ചുരുക്കിയാൽ a, b, c, d എന്നിവയുടെ ചിഹ്നം എന്തായിരിക്കുമെന്ന് ആവരണചിഹ്നങ്ങൾ നീക്കം ചെയ്യാതെ കണ്ടുപിടിക്കുക.
   (a) $3-[5-\{a-(b-c)-d\}]$.
   (b) $x-[(y-a)-\{b-(c-d)\}]$.
   (c) $l-[-m-\{-(a-c-d)\}]$.

ചുരുക്കുക:—

10. $\frac{2x-6}{2}-\frac{6x-3}{3}-\frac{12x-8}{4}$.
11. $\frac{15a-6b-9c}{3}-\frac{12a-4b+8c}{4}-\frac{-10a-15b+5c}{5}$
12. $\frac{a-b-c}{2}-\frac{2a-3b}{3}-\frac{-2b-3c}{4}$.

അദ്ധ്യായം 16.

നാലു മൌലിക ക്രിയകൾ (തുടർച്ച)

The Four Fundamental Operations (Continued).

കൂട്ടൽ.

വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ തുക കാണുവാൻ അവയിലുള്ള സജാതീയരാശികളെ താഴെ പറയുന്ന വിധത്തിൽ എഴുതിക്കൂട്ടുന്നതു നന്നായിരിക്കും.

ഉദാ:— $3x-2y+4$, $-8-4x$, $y-7$, $2x-5y$ ഇവയുടെ തുക കാണുക:—

$$\begin{array}{r} 3x-2y+4 \\ -4x \quad -8 \\ +y \quad -7 \\ 2x-5y \\ \hline +x-6y-11 \end{array}$$

അഭ്യാസം 36.

തുക കാണുക:—

1. $7a-5b+12$, $-2+6b-18a$, $-4+7a$, $b-a$.
2. $4x^2-3x+2$, $-2x+7x^2-15$, $15x^2-14x+1$.
3. $5x^3-x-1$, $8x^2-7$, $10-3x+2x^3$, $9x^3-10$.
4. $p^2-4pq-q^2$, $-3p^2-4pq-6q^2$, $-8p^2+8pq-11q^2$.
5. $-a^2-b^2+c^2$, $+a^2-b^2-c^2$, $-b^2-c^2+a^2$, $-c^2-a^2+b^2$.
6. $x^3-2x^2y-y^3$, $-7x^2y+4xy^2-5y^3$, $4y^3-2x^3$, $5x^3-9xy^2+10x^3y$.
7. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b+5$, $\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}b-2$, $\frac{1}{4}a-\frac{2}{3}b-2$, $\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b+1$.
8. $\frac{1}{5}(a+b+c)$, $\frac{1}{4}(a-b-c)$, $\frac{3}{10}(-a-b+c)$, $\frac{7}{30}(-a+b-c)$.
9. $4(x-2y+z)$, $-5(-z+2y-x)$, $-(y-5x+z)$, $-8x-7y-13z$.
10. $5x^2-10x^2-11$, $21x^3-11x-9$, $-7x^4+5x-3$, $-x^4+x^3-x^2+x-1$.

കിഴിക്കൽ.

ഒരു വ്യഞ്ജകത്തെ വേറൊരു വ്യഞ്ജകത്തിൽനിന്നു കിഴിക്കുവാൻ ആവരണചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നതു സൌകര്യമായിരിക്കും.

ഉദാ:—1. $3a-4b+c$യെ $2a-3b+5c$യിൽനിന്നു കിഴിക്കുക. കിഴിക്കേണ്ടുന്ന വ്യഞ്ജകത്തെ ആവരണചിഹ്നത്തിനകത്തെഴുതി മുമ്പിൽ — അടയാളം ഇടുക. ക്രിയ താഴെ കാണുംപ്രകാരം ആയിരിക്കും.

$$\begin{aligned} &2a-3b+5c-(3a-4b+c) \\ &=2a-3b+5c-3a+4b-c \\ &=-a+b+4c. \end{aligned}$$

2. $2x^2-7$ന്റെയും $6-x$ന്റെയും തുകയിൽനിന്നു x^3-3xന്റെയും $8x-12$ന്റെയും തുക കിഴിക്കുക.

$$2x^2-7+6-x-(x^2-3x+8x-12)$$
$$=2x^2-7+6-x-x^2+3x-8x+12$$
$$=x^2-6x+11.$$

3. a^3-b^3ൽനിന്നു $-2b^2+ab$ കിഴിക്കുക. കിഴിച്ചു കിട്ടിയ ഫലം $3a^2-5ab-2b^2$ൽനിന്നു കിഴിക്കുക.

$$3a^2-5ab-2b^2-\{(a^2-b^2)-(-2b^2+ab)\}$$
$$=3a^2-5ab-2b^2-\{a^2-b^2+2b^2-ab\}$$
$$=3a^2-5ab-2b^2-a^2+b^2-2b^2+ab$$
$$=2a^2-4ab-3b^2.$$

അഭ്യാസം 37.

ഓരോ ചോദ്യത്തിലുമുള്ള ഒന്നാമത്തെ വ്യഞ്ജകത്തിൽനിന്നു് രണ്ടാമത്തേതു കിഴിക്കുക.

1. $3x-4y+1;\ 5x+y-2.$
2. $a-b+c;\ 4a-5b+6c.$
3. $-p^2-3pq+q^2;\ 2p^2-3pq-q^2.$
4. $2-x^2-3xy;\ x^2-2x^2+3xy.$
5. $m^2-7+mn;\ 2m-5mn+3m^2.$
6. $4(x-y);\ 5(2x-3y).$
7. $\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b;\ a-2b.$
8. $\frac{1}{3}(a-b);\ \frac{1}{4}(a+b).$
9. $x^2-3ax-a^2$ന്റെയും $3ax-a^2-4x^2$ന്റെയും തുകയിൽനിന്നു $4x^2-2a^2$ കിഴിക്കുക.
10. $p-3q+2r$ന്റെയും $q-r-3p$ന്റെയും തുകയിൽനിന്നു് $3p-2r$ന്റെയും $q-5p$ന്റെയും തുക കിഴിക്കുക.
11. x^3-2x+7ൽനിന്നു് $5x^2-2$ കിഴിക്കുക. കിഴിച്ചുകിട്ടിയ വ്യഞ്ജകത്തെ $-2x-13$ൽനിന്നു് കിഴിക്കുക.
12. a^2-3abയിൽനിന്നു് എന്തു കിഴിച്ചാൽ b^2-5ab കിട്ടും?
13. $4a-3b+c$യെക്കാൾ $3b-5c$ എത്ര വലിയതാണു്?
14. $l^2-2m^2-5n^2$ൽനിന്നു് ഒരു വ്യഞ്ജകം കിഴിച്ചപ്പോൾ $3l^2-n^2$ കിട്ടി. എന്നാൽ ആ വ്യഞ്ജകം കാണുക.

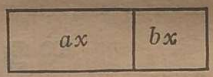
15. $5m-3n$ന്റെയും $2n-p$ന്റെയും തുകയെക്കാൾ $2m-5n+3p$ എത്ര കുറവാണ്?
16. $2x^2+3x-7$നോട് എന്തു കൂട്ടിയാൽ x^2-5x+2 കിട്ടും?
17. $x-y$ കിട്ടുവാൻ $x+y$യോട് എന്തു ചേർക്കണം?
18. pയുടെ വഴ്ത്തോട് എന്തു ചേർത്താൽ pയുടെ ത്രിഘാതം കിട്ടും?

ഗുണകൽ.

$(a+b)$ അടി നീളവും x അടി വീതിയുമുള്ള ഒരു മുറിയുടെ ക്ഷേത്രഫലം $=(a+b)x$ ചതുരശ്ര അടി. ഇത് $(ax+bx)$ ച. അടിയാണെന്നും 1-ാം രൂപത്തിൽനിന്നു തെളിയുന്നു.

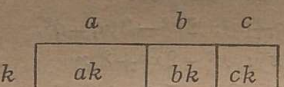
$\therefore (a+b)x=ax+bx$

(1)



$k(a+b+c)=ak+bk+ck$ എന്നു രണ്ടാമത്തെ രൂപത്തിൽനിന്ന് തെളിയുന്നു.

(2)



ഇതേപ്രകാരം

(1) $x(2x^2-3x-1)=2x^3-3x^2-x.$
(2) $-3a(a-b-c)=-3a^2+3ab+3ac.$
(3) $-2a(b+c)+3b(c-a)-4c(a-b)=-2ab-2ac+3bc-3ba-4ca+4cb=-5ab-6ac+7bc.$

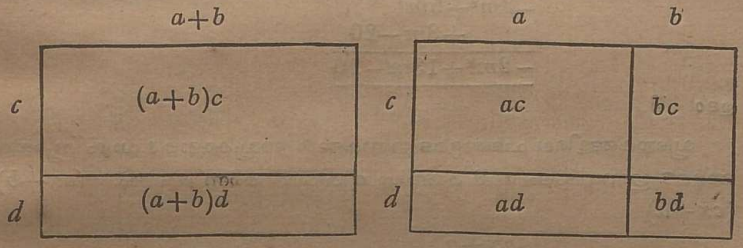
അഭ്യാസം 38.

ആവരണചിഹ്നങ്ങൾ നീക്കം ചെയ്യു ചുരുക്കുക:—

1. $x(y-2z)-2y\ (3z-x)-z(4x-5y).$
2. $a(a-b)-2b\ (a-b)-3(a^2-b^2).$
3. $2ab(c-a)-3bc(a-2b)-3ca(-2b+3c)-4(a^2b-2b^2c-3c^2a).$

4. $-3p(p-q)+5q(2q-3p)-5(p^2-q^2)$.
5. $x(-3x+1)-4x(1-5x)-6(2x-5x^2)$.
6. $3a^2(a-1)-5a(a^2-2a)-2(4a^2-3a^3)$.

$(a+b)$ അടി നീളവും $(c+d)$ അടി വീതിയുമുള്ള ഒരു മുറിയുടെ പടങ്ങളാണ് താഴേ കാണുന്നത്.



1-ാം പടത്തിൽ കാണുംപ്രകാരം അതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $=\{(a+b)c+(a+b)d\}$ ച. അടി.

2-ാം പടത്തിൽ കാണുംപ്രകാരം അതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $=(ac+bc+ad+bd)$ ച. അടി.

$\therefore (a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$
$=ac+bc+ad+bd.$

ഉദാ: — 1. $(x+3)(x+7)=(x+3)x+(x+3)7$
$=x^2+3x+7x+21$
$=x^2+10x+21.$

സൌകര്യത്തിന്നായി താഴെ കാണുംപ്രകാരമാണ് ഈ ക്രിയ സാധാരണമായി ചെയ്യുന്നത്.

$$\begin{array}{r} x+3 \\ x+7 \\ \hline x^2+3x \\ \quad +7x+21 \\ \hline x^2+10x+21. \end{array}$$

ഉദാ: — 2.

$5-2m$നെ $m-4$കൊണ്ട് പെരുക്കുക.

ഗുണ്യത്തേയും ഗുണകാരനേയും അവയിലുള്ള അക്ഷരങ്ങളുടെ ഘാതസംജ്ഞകളുടെ വലിപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതുന്നതു് സൌകര്യമായിരിക്കും. ഇങ്ങിനെ എഴുതുന്നതായാൽ ഗുണ്യം $-2m+5$ഉം, ഗുണകാരൻ $m-4$ഉം ആയിരിക്കും. ഗുണനസമ്പ്രദായം മുമ്പ് കാണിച്ചപ്രകാരം തന്നെയായിരിക്കും.

$$\begin{array}{r} -2m+5 \\ m-4 \\ \hline -2m^2+5m \\ \quad +8m-20 \\ \hline -2m^2+13m-20 \end{array}$$

ഉദാ: -3.

വ്യഞ്ജകങ്ങളിലെ പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങൾ അവ്യക്തമാകുമ്പോഴും വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം മേൽ കാണിച്ച രീതിയിൽ തന്നെ കാണാം. $(ax+b)(cx+d)$

$$\begin{array}{r} ax+b \\ cx+d \\ \hline acx^2+bcx \\ \quad +adx+bd \\ \hline acx^2+(bc+ad)x+bd \end{array}$$

അഭ്യാസം 39.

1. പടം വരച്ചു തെളിയിക്കുക:—
   (1) $a(a+b)=a^2+ab$
   (2) $(a+b)(x+y)=a(x+y)+b(x+y)$
   (3) $(a+b)(x+y)=x(a+b)+y(a+b)$
   (4) $(a+b)(x+y)=ax+ay+bx+by$
   (5) $(a+b)(a+c)=(a+b)a+(a+b)c$
   (6) $(a+b)(a+c)=a^2+ab+ac+bc$
   (7) $(a+b)(x+y+z)=x(a+b)+y(a+b)+z(a+b)$
   (8) $(a+b)(x+y+z)=ax+ay+az+bx+by+bz$

2. ഓരോ ചോദ്യത്തിലുമുള്ള ഒന്നാമത്തെ വ്യഞ്ജകത്തെ രണ്ടാമത്തേതു കൊണ്ടു് പെരുക്കുക:—
   (1) $3x+2y$; $5x+4y$

(2) $x-4$; $2x-5$

(3) $7x-2$; $3x+1$

(4) $1-3a$; $2-5a$

(5) $-4+m$; $m-4$

(6) $-3-n$; $-n+2$

(7) $5y^2-7$; $-4y^2+3$

(8) $x+\frac{1}{2}$; $x-\frac{1}{3}$

(9) $\frac{2}{3}x-4$; $\frac{1}{2}x-3$.

3. വർഗ്ഗം കാണുക:—

(1) $a+b$ (2) $a-b$

(3) $4x-3$ (4) $x-2y$

ഉദാ:— ചുരുക്കുക:—

$(x-1)(x+2)-3(2x+1)(2x-1)+5(x-3)(2x+1)$

$(x-1)(x+2)=x^2+x-2$

$(2x+1)(2x-1)=4x^2-1$

$(x-3)(2x+1)=2x^2-5x-3$

വ്യഞ്ജകം $=x^2+x-2-3(4x^2-1)+5(2x^2-5x-3)$

$=x^2+x-2-12x^2+3+10x^2-25x-15$

$=-x^2-24x-14.$

അഭ്യാസം 40.

ചുരുക്കുക:—

1. $5(x+1)(x+1)-4(x+2)(x-3)-3(2x-1)(x+7)$
2. $2(5-3x)(-2+3x)-(11x-2)(1-9x)+6(1-x)(x-1)$
3. $3(a-7)(2a-1)-2(5a-1)(1-8a)-(4-5a)(3-2a)$
4. $-(2x-7)(1-3x)-4(x-1)(1-x)$
5. $5(a-2b)(2a-b)-3(2a+b)(2a-b)-(3a-2b)(a-b)$
6. $x(1-3x)-2x(3x-7)-5(2x-3)(4-3x)$
7. $(4x-5)(5x-4)-(4-5x)(-5x-4)-(5-4x)(4-5x)$.

ഹരിക്കൽ.

$(a+b)$യെ xകൊണ്ടു് പെരുക്കുവാൻ ആവരണചിഹ്നത്തിനകത്തുള്ള ഓരോ രാശിയേയും പെരുക്കിയ പ്രകാരം തന്നേ $(a+b)$യെ xകൊണ്ടു് ഹരിക്കുവാൻ ആവരണചിഹ്നത്തിനകത്തുള്ള ഓരോ രാശിയേയും xകൊണ്ടു് ഹരിക്കണം.

$$\therefore \frac{a+b}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x}$$

ഉദാ: — 1. $\dfrac{12a^3b^2 - 16ab^2c - 4a^2b^2c}{4ab^2}$

$$= 3a^2 - 4c - ac.$$

2. $\dfrac{35x^2yz - 63xy^2z + 21xyz^2}{-7xyz}$

$$= -5x + 9y - 3z.$$

അഭ്യാസം 41.

നോക്കി ഹരിതം എഴുതുക:—

1. $\dfrac{3p - 10p^2 - p^3}{p}$
2. $\dfrac{ay + by - cy}{-y}$
3. $\dfrac{4x^2y - 10xy^2 - 6xy}{-2xy}$
4. $\dfrac{-ax^2 - bx^3 + cx^4 - dx^5}{x^2}$
5. $\dfrac{ap^5q^3 - bp^4q^3 - cp^3q^4}{-p^3q^3}$
6. $\dfrac{a^5b - a^4b^2 + a^3b^3 - a^2b^4 + ab^5}{-ab}$

ദീർഘഹരണം (Long Division).

അങ്കഗണിതത്തിലെ ഹരണസമ്പ്രദായം പരിശോധിക്കുക. ഉദാഹരണ

മായി 384നെ 32കൊണ്ടു ഹരിക്കുന്ന കണക്കിൽ ഓരോ അക്കത്തിന്റേയും സ്ഥാനവില ചേർക്കുന്നതായാൽ ക്രിയ താഴെ കാണുംപ്രകാരം ആയിരിക്കും.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 10+2 \\
\hline
3\cdot10+2 & 3\cdot10^2+8\cdot10+4 \\
 & 3\cdot10^2+2\cdot10 \\
\hline
 & \quad +6\cdot10+4 \\
 & \quad +6\cdot10+4 \\
\hline
\end{array}
\qquad \text{ഹരിതം} = 10+2 = 12
$$

10നു പകരം x എന്നു എഴുതുന്നതായാൽ x അടങ്ങിയ ഒരു വ്യഞ്ജകത്തെ x അടങ്ങിയ വേറൊരു വ്യഞ്ജകംകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്ന വഴി മനസ്സിലാക്കാം.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x+2 \\
\hline
3x+2 & 3x^2+8x+4 \\
 & 3x^2+2x \\
\hline
 & \quad +6x+4 \\
 & \quad +6x+4 \\
\hline
\end{array}
\qquad \text{ഹരിതം} = x+2
$$

അങ്കഗണിതത്തിലുള്ള ഹരണം ബീജഗണിതത്തിലുള്ള ഹരണത്തിൽനിന്നു രണ്ടു മുഖ്യസംഗതികളിൽ വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

(1) അങ്കഗണിതത്തിലെ ഹരണത്തിൽ ഗുണസംഖ്യകൾ ഇല്ല. ബീജവ്യഞ്ജകങ്ങളായ ഹാര്യത്തിലും ഹാരകത്തിലും ഗുണരാശികൾ ഉണ്ടായിരിക്കാം.

(2) ബീജവ്യഞ്ജകങ്ങളെ അവയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരക്ഷരത്തിന്റെ ഘാതത്തിന്റെ വലിപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതണം; അങ്കഗണിതത്തിൽ അക്കങ്ങൾ സ്ഥാനവലിപ്പത്തിലാണുള്ളതു്.

$5-5x^2-14x+6x^3$നെ $3x-1$കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ഹാര്യത്തേയും ഹാരകത്തേയും xന്റെ ഘാതത്തിന്റെ വലിപ്പക്രമത്തിൽ എഴുതുക.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2-x-5 \\
\hline
3x-1 & 6x^3-5x^2-14x+5 \\
 & 6x^3-2x^2 \\
\hline
 & \quad -3x^2-14x+5 \\
 & \quad -3x^2+x \\
\hline
 & \qquad -15x+5 \\
 & \qquad -15x+5 \\
\hline
\end{array}
$$

വിവരണം:$-\frac{6x^3}{3x}=2x^2$. അതുകൊണ്ട് ഹരിതത്തിലെ ഒന്നാമത്തെ പദം $=2x^2$. ഇതുകൊണ്ട് ഹാരകത്തെ പെരുക്കിക്കിട്ടുന്ന വ്യഞ്ജകമായ $6x^3-2x^2$നെ ഹാര്യത്തിൽനിന്നു കിഴിക്കണം.

$$-5x^2-(-2x^2)=-5x^2+2x^2=-3x^2.$$

ഹാര്യത്തിലുള്ള ശേഷം പദങ്ങളെ കിട്ടുവാൻ ഈ ക്രിയ ആവർത്തിക്കുക.

ഒരു ബീജവ്യഞ്ജകം വേറൊരു ബീജവ്യഞ്ജകത്തിൽ കൃത്യമായി അടങ്ങണമെന്നില്ല. ശിക്ഷ നിശ്ചയിക്കുന്നവിധം താഴെ കാണുന്ന ഉദാഹരണത്തിൽനിന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

$$\begin{array}{r|l} & 5x^2-x-2 \\ \hline 3x-1 & 15x^3-8x^2-5x-3 \\ & 15x^3-5x^2 \\ \hline & -3x^2-5x \\ & -3x^2+x \\ \hline & -6x-3 \\ & -6x+2 \\ \hline & -5 \\ \hline \end{array}$$

ഹരിതഫലം:
അഭിന്നഭാഗം: $5x^2-x-2$

ശിക്ഷ: -5

അഭ്യാസം 42.

താഴെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളിലുള്ള ഒന്നാമത്തെ വ്യഞ്ജകത്തെ രണ്ടാമത്തേതുകൊണ്ട് ഹരിക്കുക.

1. $15x^2+41x+14$; $3x+7$.
2. $24y^2-26y+5$; $4y-1$.
3. $77a^2-67a-24$; $11a+3$.
4. $117m^2+23m-4$; $9m-1$.
5. $x^2-xy-182y^2$; $x-14y$.
6. $100a^2-240ab+143b^2$; $10a-11b$.
7. $3m^2+mn-4n^2$; $m-n$.
8. $63x^4-82x^2y^2+24y^4$; $7x^2-6y^2$.
9. $20-18a^2b^2-9ab$; $5-6ab$.
10. $96a^2+7a^3-28a$; $-2+7a$.

ഹരിതവും ശിക്ഷയും കാണുക.

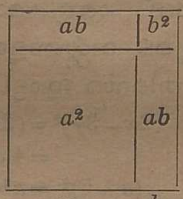
11. $(6x^2+x-11)\div(2x+3)$.

12. $(25a^2-40xy+17y^2)\div(5x-6y)$.
13. $(p^2-8pq-9q^2)\div(p-3q)$.
14. $(4a^3-2a^2+3a-1)\div(a+2)$.

മൂന്നു മുഖ്യ സൂത്രങ്ങൾ
(THREE IMPORTANT FORMULAE).

രണ്ടു പദങ്ങളുള്ള $a+b$ എന്ന വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വർഗ്ഗം കണ്ടുപിടിച്ച മാർഗ്ഗം ഒന്ന് പരിശോധിക്കുക.

$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$



വർഗ്ഗത്തിൽ a, b എന്ന രണ്ടു പദങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളും അവയുടെ ഗുണനഫലം 2 പ്രാവശ്യവും അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ടു രണ്ടു രാശികളുടെ തുകയുടെ വർഗ്ഗം അവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയും അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ ഇരട്ടിയും കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന തുകക്കു സമമാകുന്നു.

ഈ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു 2 പദങ്ങളുള്ള ഏതു വ്യഞ്ജകത്തിന്റെയും വർഗ്ഗം എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഈ തുല്യത മേല്പറഞ്ഞ പടത്തിൽനിന്നു വളരെ വ്യക്തമായി കാണാം.

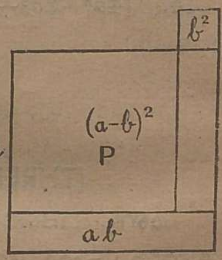
ഉദാ:— (1) $(3a+4b)^2=(3a)^2+2.3a.4b+(4b)^2$
$=9a^2+24ab+16b^2$

(2) $(x+1)^2=x^2+2.x.1+1^2$
$=x^2+2x+1$

(3) ഈ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് ചില സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗം എളുപ്പത്തിൽ കാണാം.

$51^2=(50+1)^2=50^2+2.50.1+1^2.$
$=2500+100+1=2601.$

$(a-b)$യുടെ വശ്ലം കാണുക.
$(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2$
$=a^3-2ab+b^2.$



ചിത്രം നോക്കുക. ചിത്രത്തിൽ $(a-b)^2=P.$
$P=a^2+b^2-ab-ab=a^2+b^2-2ab.$
$\therefore (a-b)^2=a^2+b^2-2ab.$

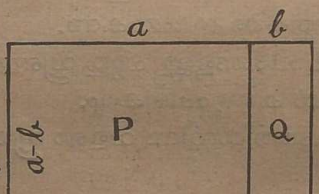
അതുകൊണ്ട് രണ്ടു രാശികളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വശ്ലം അവയുടെ വശ്ലങ്ങളുടെ തുകയിൽനിന്നു അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ ഇരട്ടി കിഴിച്ചതിനു സമമാകുന്നു.

ഉദാ:— (1) $(2x-3y)^2=(2x)^2+(3y)^2-2.2x.3y$
$=4x^2+9y^2-12xy.$

(2) $(a-5)^2=a^2+25-2.a\,5$
$=a^2+25-10a.$

(3) $67^2=(70-3)^2=70^2+3^2-2.70.3$
$=4900+9-420$
$=4489.$

$(a+b)\,(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2.$



ചിത്രം നോക്കുക.
ചിത്രത്തിൽ $(a+b)(a-b)=P+Q$
$Q=b(a-b)=Q'$
$\therefore (a+b)(a-b)=P+Q'$
$=a^2-b^2$

അതുകൊണ്ട് രണ്ടു രാശികളുടെ തുകയുടേയും വ്യത്യാസത്തിന്റേയും ഗുണനഫലം അവയുടെ വശ്ലങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തിനു സമമാകുന്നു.

$(4x-3a)\ (4x+3a)=(4x)^2-(3a)^2=16x^2-9a^2$

$91\times89=(90+1)\ (90-1)=90^2-1=8100-1=8099.$

ഈ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു ചില സംഖ്യകളുടെ ഘടകങ്ങളെ എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാ:—

4899ന്റെ ഘടകങ്ങൾ കാണുക.

$4899=4900-1=70^2-1^2=(70+1)\ (70-1)$

$=71\times69=71\times23\times3.$

രണ്ടു വലിയ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം ഈ മാർഗ്ഗം ഉപയോഗിച്ചു വളരെ എളുപ്പത്തിൽ കാണാം.

$87^2-77^2=(87+77)\ (87-77)$

$=164\times10=1640.$

അഭ്യാസം 43.

സൂത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു ഉത്തരം കാണുക:—

1. $(c+d)^2$.
2. $(k-l)^2$.
3. $(x+y)\ (x-y)$.
4. $(a+2b)^2$.
5. $(3k-1)^2$.
6. $(a+7)\ (a-7)$.
7. $(3a+b)^2$.
8. $(7x-2y)^2$.
9. $(5x-1)\ (5x+1)$.
10. $(x+4)^2$.
11. $(1-8a)^2$.
12. $(10b+3c)\ (10b-3c)$.
13. $(10n+1)^2$.
14. $(\frac{1}{2}a+1)^2$.
15. $(15y-4x)^2$.
16. $(\frac{1}{2}a-3b)^2$.
17. $(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y)^2$.
18. $(\frac{1}{2}m-1)\ (\frac{1}{2}m+1)$.
19. $(\frac{1}{3}k-\frac{1}{2}l)\ (\frac{1}{3}k+\frac{1}{2}l)$.
20. $(-p+q)\ q-p)$.
21. $(-x-y)\ (x-y)$.
22. $(-x-y)\ (y+x)$.
23. $(ax+b)\ (ax-b)$.
24. $(\frac{\pi}{10}m^2+10)^2$.
25. $(\frac{1}{4}p-\frac{1}{3}q)^2$.
26. 41^2.
27. 52^2.
28. 78^2.
29. $3\cdot1^2$.
30. 103×97.
31. $5\cdot3^2$.
32. $5\cdot5\times6\cdot5$.
33. $14\cdot1\times13\cdot9$.
34. 99^2.

35. $20{\cdot}2 \times 19{\cdot}8$.
36. $19\frac{5}{8} \times 20\frac{3}{8}$.
37. $455^2 - 445^2$.
38. $197^2 - 195^2$.
39. $109^2 - 81$.
40. $20{\cdot}02 \times 19{\cdot}98$.
41. ഘടകങ്ങൾ കാണുക:—

3599, 8091, 9991, 14396, 25584.

ഒരു കണക്കിലുള്ള സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള പ്രത്യേകബന്ധം മനസ്സിലാക്കുന്നതായാൽ ചിലപ്പോൾ ഉത്തരം വളരെ എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.

$$13{\cdot}1 \times 47 + 6{\cdot}9 \times 47 = 47(13{\cdot}1 + 6{\cdot}9)$$
$$= 47 \times 20 = 940$$

ഈ കണക്കിൽ 47 പൊതുവെ ഒരു ഘടകമായതുകൊണ്ടാണ് മുന്നുന്നത് എളുപ്പമായത്. എല്ലാ കണക്കിലും ഉപയോഗിക്കത്തക്ക ഒരു മാർഗ്ഗമില്ല. ഓരോ കണക്കിനും പറ്റിയ വഴി വിദ്യാർത്ഥി ആലോചിച്ചു കണ്ടുപിടിക്കണം.

അഭ്യാസം 44.

എളുപ്പവഴിയിൽ ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുക:—

1. $129 \times 43 + 28 \times 43 + 43 \times 43$.
2. $2{\cdot}7 \times 89 + 3{\cdot}9 \times 89 + 3{\cdot}4 \times 89$.
3. $52 \times 189 + 24 \times 378$
4. $4{\cdot}9 \times 26{\cdot}9 + 9{\cdot}8 \times 53{\cdot}8 - {\cdot}45 \times 269$.
5. $16{\cdot}3 \times 16{\cdot}3 + 2 \times 16{\cdot}3 \times 12{\cdot}7 + 12{\cdot}7 \times 12{\cdot}7$.

———

അദ്ധ്യായം 17.

സൂത്രങ്ങളുടെ വിഷയം മാറ്റൽ

(Transformation of Formulae: Changing the Subject).

$s = vt$. ഈ സൂത്രത്തിലുള്ള ഓരോ അക്ഷരവും ഏതൊരു രാശിയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെന്നും ഈ സൂത്രം എന്തി

ന്നായി ഉപയോഗിക്കുന്നുവെന്നും പഠിച്ചുവല്ലോ. ഈ സൂത്രത്തെ വേറെ രൂപങ്ങളിലും എഴുതാം.

ഉദാഹരണമായി $v = \frac{s}{t}$.

ഒരു നിശ്ചിതസമയത്തിൽ ഒരു വസ്തു പോകുന്ന ദൂരം അറിയുന്നെങ്കിൽ അതിന്റെ ശീഘ്രത കണക്കാക്കുവാൻ $v = \frac{s}{t}$ എന്ന രൂപമാണ് അധികം സൌകര്യപ്പെടുന്നത്.

സമയമാണ് കാണേണ്ടതെങ്കിൽ $t = \frac{s}{v}$ എന്ന രൂപം ഉപകരിക്കുന്നു. ഇതേപ്രകാരം ഓരോ സൂത്രത്തെയും നമ്മുടെ ആവശ്യപ്രകാരം രൂപം മാറ്റി എഴുതാം.

ഉദാ. 1. $I = \frac{Pnr}{100}$ (1) പലിശ കണക്കാക്കുവാൻ ഈ രൂപം ഉപയോഗിക്കുന്നു. കാലം കണക്കാക്കുവാൻ ഈ രൂപത്തെ മാറ്റണം.

$100\ \ I = Pnr$

$\therefore\ n = \frac{100\ I}{Pr}$ (2)

പലിശയുടെ വീതം കാണുവാൻ.

$r = \frac{100\ I}{Pn}$ (3)

എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതണം.

മുതൽ കാണുവാൻ താഴേ കാണുന്ന രൂപം ഉപകരിക്കുന്നു.

$P = \frac{100\ I}{nr}$ (4)

2. $A = \pi r^2$

ഇതിൽ r = ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം.

A = വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം.

$\pi = 3\frac{1}{7}$. (വൃത്തത്തെപ്പറ്റി പഠിക്കുമ്പോൾ ഇതിന്റെ സാരം പൂർണ്ണമായി മനസ്സിലാകുന്നതാണ്).

$r = 7$ അംഗുലം ആകുമ്പോൾ വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം,

$A = \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ ച. അംഗുലം.

$= 154$ ച. അം.

$\pi r^2 = A$

$\therefore r^2 = \frac{A}{\pi} = \frac{7A}{22}$.

$\therefore r = \sqrt{\frac{7A}{22}}$.

616 ച. അടി ക്ഷേത്രഫലമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക.

$r = \sqrt{\frac{7A}{22}}$ അടി

$= \sqrt{\frac{7 \times 616}{22}}$,,

$= \sqrt{196}$,,

$= 14$ അടി.

3. $A = 2h(l+b)$. h, l, b എന്നിവയെ സൂത്രത്തിന്റെ വിഷയമാക്കുക.

$\therefore 2h(l+b) = A$ $\qquad \therefore h = \frac{A}{2(l+b)}$

$l+b = \frac{A}{2h}$ $\qquad \therefore l = \frac{A}{2h} - b$.

ഇതേപ്രകാരം $b = \frac{A}{2h} - l$.

അഭ്യാസം 45.

1. $A = lb$ l, b എന്നിവയെ സൂത്രത്തിന്റെ വിഷയമാക്കുക.
   $A = 200$; $l = 22\frac{1}{2}$. b കാണുക.

2. $\sqrt{} = lbh$. l, b, h എന്നിവയെ സൂത്രത്തിന്റെ വിഷയമാക്കുക.
   $\sqrt{} = 1728$ (1) $l = 24$; $b = 18$. h കാണുക.
   (2) $l = 36$; $h = 9$. b കാണുക.

3. $A = \frac{1}{2}bh$. (A = ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം.
   b = ആധാരം. h = ഉന്നതി.)

(a) A, h ഉപയോഗിച്ചു bയുടെ വില വ്യക്തമാക്കുക.
   $A = 28$. $h = 7$. b കാണുക.

(*b*) A, b ഉപയോഗിച്ച് hന്റെ വില വ്യക്തമാക്കുക.
$A=33$; $b=11$; h കാണുക.

4. $y=mx+c$. ശേഷമുള്ള അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച്,
(*a*) c (*b*) mx (*c*) x ഇവയുടെ വില വ്യക്തമാക്കുക.
(1) $y=36$; $m=13$; $x=6$ ആയാൽ cയുടെ വില കാണുക.
(2) $y=21$; $c=5$; $m=2$ ആയാൽ xന്റെ വില കാണുക.

5. $v=u+ft$. ശേഷമുള്ള അക്ഷരങ്ങളുപയോഗിച്ച്,
(1) u (2) f (3) t ഇവയുടെ വില കാണുക.
(*a*) $v=43$, $f=5$, $t=7$, u കാണുക.
(*b*) $v=26$, $u=48$, $t=2$, f കാണുക.
(*c*) $v=85$, $u=49$, $f=12$, tകാണുക.

6. $S=\frac{1}{2}gt^2$.
(1) S, t ഉപയോഗിച്ച് gയുടെ വില വ്യക്തമാക്കുക.
$S=144$, $t=3$. g കാണുക.
(2) S, g ഉപയോഗിച്ച tയുടെ വില വ്യക്തമാക്കുക.
$S=400$, $g=32$. t കാണുക.

7. $C=2\pi r$.
$C=$ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ്.
$r=$ വ്യാസാർദ്ധം.
(1) C, π ഉപയോഗിച്ച് rന്റെ വില വ്യക്തമാക്കുക.
$\pi=3\frac{1}{7}$.
88 അടി ചുറ്റളവുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക.
(2) C, r ഉപയോഗിച്ച് π യുടെ വില വ്യക്തമാക്കുക.
10 അംഗുലം വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് 31·4 അംഗുലമെങ്കിൽ π യുടെ വില കാണുക.

അദ്ധ്യായം 18.

ചിഹ്നീയസൂചനം

(Symbolic Representation).

ഉദാ. 1. മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ തുക 100. രണ്ടു സംഖ്യകൾ xഉം yഉം ആണെങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ കാണുക.
മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ $=100-x-y=100-(x+y)$.

ഉദാ. 2. xക. yണ. zപ. ഇതിനെ (1) പൈ (2) അണ (3) ഉറുപ്പിക ആക്കുക.

xക. yണ. zപ. $=(192x+12y+z)$ പ.

$$=\left(16x+y+\frac{z}{12}\right) \text{ണ.}$$

$$=\left(x+\frac{y}{16}+\frac{z}{192}\right) \text{ക.}$$

ഉദാ. 3. m ആളുകൾക്കു ഒരു പണി ചെയ്യുവാൻ 10 ദിവസം വേണം. (1) 1 ആൾക്കു എത്ര ദിവസം വേണം? (2) n ആളുകൾക്കു എത്ര ദിവസം വേണം?

(1) 1 ആൾക്കു വേണ്ടുന്ന ദിവസം $=10m$

(2) $\therefore n$ ... ... $\frac{10m}{n}$.

ഉദാ. 4. എല്ലാ ഇരട്ടസംഖ്യ (even numbers) കളും 2ന്റെ പെരുക്കങ്ങളായതുകൊണ്ടു അവയുടെ സാമാന്യരൂപം (General form) $2n$ ആകുന്നു. $n=1$ ആയാൽ ഇരട്ട സംഖ്യ $=2\times1=2$. nന്നു, 2, 3, 4 ... എന്നീ വിലകൾ ഉള്ളപ്പോൾ $2n$ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഇരട്ടസംഖ്യകൾ 4, 6 8 ... എന്നിവയാകുന്നു.

ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയോടു 1 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ ഒരു ഒറ്റസംഖ്യ (odd number) ആയിരിക്കും. അതു കൊണ്ടു എല്ലാ ഒറ്റസംഖ്യകളുടേയും സാമാന്യരൂപം $2n+1$ ആകുന്നു. ഇപ്രകാരം ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയിൽ നിന്നു 1 കിഴിക്കുന്നതായാലും ഒരു ഒറ്റസംഖ്യതന്നെ കിട്ടുന്നതാകകൊണ്ടു ഒറ്റസംഖ്യകളുടെസാമാന്യരൂപം $2n-1$ഉം ആവാം.

ഉദാ. 5. ഒരു കുട്ടിയുടെ വയസ്സു 5. (*a*) x കൊല്ലങ്കൾക്കു ശേഷം അവന്റെ വയസ്സെത്ര? (*b*) y കൊല്ലങ്കൾക്കു മുമ്പു എത്രയായിരുന്നു? (*c*) z വയസ്സാകാൻ എത്ര കൊല്ലം കഴിയണം?

x കൊല്ലങ്ങൾക്കു ശേഷം വയസ്സു $=(5+x)$ കൊല്ലം
y " മുമ്പു " $=(5-y)$ "
z വയസ്സാകാൻ കഴിയേണ്ട കൊല്ലം $=z-5$.

അഭ്യാസം 46.

1. രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക (a) 37. (b) s. ഒന്നു x. മറ്റേസംഖ്യ കാണുക.

2. മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ തുക $(a)53$. (b) s. രണ്ടു സംഖ്യകൾ aയും, bയും ആണെങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യ കാണുക.

3. 15നോടു എത്ര കൂട്ടിയാൽ 20 കിട്ടും? 15നോടു എത്ര കൂട്ടിയാൽ x കിട്ടും? yനോടു എത്ര കൂട്ടിയാൽ x കിട്ടും?

4. 16ൽനിന്നു എത്ര കിഴിച്ചാൽ 12 കിട്ടും? 16ൽനിന്നു എത്ര കിഴിച്ചാൽ x കിട്ടും? yയിൽനിന്നു എത്ര കിഴിച്ചാൽ x കിട്ടും?

5. രണ്ടു സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 5. ചെറിയ സംഖ്യ x. എന്നാൽ വലിയ സംഖ്യ കാണുക. രണ്ടു സംഖ്യകളുടേയും തുക കാണുക.

6. രണ്ടു സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം d; വലിയ സംഖ്യ a; ചെറിയ സംഖ്യയും, സംഖ്യകളുടെ തുകയും കാണുക.

7. 14 എന്ന സംഖ്യ xനെക്കാൾ 6 വലുതാണെങ്കിൽ x എത്ര?

8. 7നെ എത്രകൊണ്ടു പെരുക്കിയാൽ 21 കിട്ടും? 7നെ എത്രകൊണ്ടു പെരുക്കിയാൽ x കിട്ടും? yനെ എത്രകൊണ്ടു പെരുക്കിയാൽ x കിട്ടും?

9. 15നെ എത്രകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 3 കിട്ടും? xനെ എത്രകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 3 കിട്ടും? 15നെ എത്രകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ x കിട്ടും?

10. 42ൽ x, 6 പ്രാവശ്യം അടങ്ങുമെങ്കിൽ x എത്ര?

11. ഒരാളുടെ വയസ്സു p. (1) m കൊല്ലങ്ങൾക്കു ശേഷം അയാളുടെ വയസ്സെത്ര? (2) n കൊല്ലങ്ങൾക്കു മുമ്പു് എത്രയായിരുന്നു? (3) q വയസ്സാകുവാൻ എത്ര കൊല്ലം കഴിയണം?

12. l വാര m അടി n അംഗുലം ഇതിനെ (1) അംഗുലം; (2) അടി. (3) വാരയാക്കുക.

13. ഒരു സഞ്ചിയിൽ x പവൻ yക്കി. വിലകുള്ള നാണ്യങ്ങൾ ഉണ്ടു്; അതിൽനിന്നു് (1) 1പവൻ (2) 45ക്കി. (3) x ക്കി. (4) y പവൻ വിലകുള്ള നാണ്യങ്ങൾ എടുത്താൽ ബാക്കിയുള്ളതിന്റെ വില (1) ക്കില്ലിങ്ങ് (2) പവൻ ആയി എഴുതുക.

14. p രാത്തൽ പഞ്ചസാരയിൽനിന്ന് q ഔൺസ് എടുത്താൽ ഏത്ര ഔൺസ് ബാക്കിയുണ്ട്?

15. b പുസ്തകത്തിന്റെ rക. വിലയായാൽ,

(1) ഒരു പുസ്തകത്തിന്റെ എത്ര അണ വില?

(2) c പുസ്തകത്തിന്റെ എത്ര ഉറുപ്പിക വില?

(3) 1ക.ക്ക് എത്ര പുസ്തകം കിട്ടും?

(4) n അണക്ക് എത്ര പുസ്തകം കിട്ടും?

16. ഒരു വണ്ടി h മണിക്കൂറിൽ m നാഴിക പോകുന്നു. എന്നാൽ (1) 1 മണിക്കൂറിൽ (2) x മിനുട്ടിൽ എത്ര നാഴിക പോകും? (3) y നാഴിക (4) 1 ഫർലോങ്ങ് പോവാൻ എത്ര മിനുട്ട വേണം?

17. x അടി നീളവും 13 അടി വീതിയുമുള്ള ഒരു മുറിയുടെ ക്ഷേത്രഫലം എത്ര? ചുറ്റളവു എത്ര? അതേ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള വേറൊരു മുറിക്കു 20 അടി വീതിയുണ്ടെങ്കിൽ അതിന്റെ നീളം എത്ര?

18. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നീളം x അടി. ചുറ്റളവു എത്ര വാര? ക്ഷേത്രഫലം എത്ര ചതുരശ്രവാര?

19. ഒരു മുറ്റത്തിന്റെ നീളം x അടി. വിസ്തീർണ്ണം y ച.വാര. എന്നാൽ വീതി എത്ര വാര?

20. 3 കൊല്ലം മുമ്പു ഒരു കുട്ടിയുടെ വയസ്സ് y; എന്നാൽ ഇപ്പോൾ അവന്റെ വയസ്സെത്ര? xകൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ വയസ്സെത്ര? അവന്നു z വയസ്സാകുവാൻ എത്ര കൊല്ലം കഴിയേണം?

21. തമ്മിൽ മൂന്നു വയസ്സു വ്യത്യാസമുള്ള 3 സഹോദരന്മാർ ഉണ്ട്. ഏറ്റവും ഇളയവന്നു n വയസ്സുണ്ടെങ്കിൽ ഏറ്റവും മൂത്തവന്നു എത്ര വയസ്സുണ്ടു? 3 പേരുടെയും ആകെ വയസ്സെത്ര? മൂത്തവന്നു y വയസ്സും അവർക്കു തമ്മിൽ x വയസ്സുവീതം വ്യത്യാസവും ഉണ്ടെങ്കിൽ മൂന്നു പേരുടേയും ആകെ വയസ്സെത്ര?

22. ഒരു കുട്ടിയുടെ വയസ്സ് x. അവന്റെ അച്ഛന് അവന്റെ 4 ഇരട്ടി പ്രായമുണ്ട്. 10 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ രണ്ടുപേരുടേയും കൂടി വയസ്സ് എത്രയായിരിക്കും? ഇപ്പോൾ അവരുടെ വയസ്സിലുള്ള വ്യത്യാസം എത്ര? 10 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാലുള്ള വ്യത്യാസം എന്തായിരിക്കും?

23. രണ്ടു സഹോദരന്മാരിൽ മൂത്തവന്ന് mഉം ഇളയവന്ന് nഉം വയസ്സ് പ്രായമുണ്ട്. ഇളയവന്നു മൂത്തവന്നു ഇപ്പോഴുള്ളത്ര പ്രായമാകുമ്പോൾ മൂത്തവന്നു എത്ര വയസ്സുണ്ടായിരിക്കും?

24. ഒരാൾ ഒരു പുസ്തകം cക.ക്കു വാങ്ങി sക.ക്കു വിറ്റാൽ, ലാഭം എത്ര? gക. ലാഭം കിട്ടുവാൻ എത്ര ക.ക്കു വില്ക്കണം?

25. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ ഒന്നിന് 3പൈ വീതം x മാങ്ങ വാങ്ങി പകുതി ഒന്നിന്നു 4പൈവീതവും ബാക്കി ഒന്നിന്നു 5പൈവീതവും വിറ്റാൽ, ലാഭം എത്ര?

26. ഒരാൾ ഒരു രൂപയിന്നു 2കു. 12ണ. വീതം x രൂപയും ഒരു രൂപയിന്നു 2കു. 13ണ. വീതം y രൂപയും ചായ വാങ്ങി, രണ്ടുതരവും കലർത്തി ഒരു രൂപയിന്നു 2കു. $12\frac{1}{2}$ണ. വീതം വിറ്റാൽ ലാഭം എത്ര?

27. ഉരുപ്പടിക്കു ഒരു ഡസൻ വീതം n സേർ വാങ്ങി; ഉരുപ്പടിക്കു 10 വീതം വിറ്റാൽ ആകെ ലാഭം എത്ര?

28. 100കു.ക്കു ഒരു കൊല്ലത്തേക്കു 7കു. പലിശയുണ്ടെങ്കിൽ (1) 1കു.ക്കു 1 കൊല്ലത്തേക്കു (2) pകു.ക്കു n കൊല്ലത്തേക്കു പലിശയെത്ര?

29. 100കു.ക്കു ഒരു കൊല്ലത്തേക്കു rകു. പലിശയുണ്ടെങ്കിൽ pകു.ക്കു nകൊല്ലത്തേക്കു പലിശയെത്ര?

30. ഒരു സഞ്ചിയിലെ പണം x കുട്ടികൾക്കു വീതിച്ചു കൊടുത്തപ്പോൾ ഓരോ കുട്ടിക്കു yണ. വീതം കിട്ടി. ഒരു കുട്ടിക്കുടെ അധികമുണ്ടായിരുന്നെങ്കിൽ ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര കിട്ടുമായിരുന്നു?

31. b ഭിക്ഷക്കാർക്കു pപൈ വീതം കൊടുത്തശേഷം എന്റെ കൈവശം aണ. ബാക്കിയുണ്ടെങ്കിൽ എന്റെ കൈയിൽ ആദ്യം എത്ര അണ ഉണ്ടായിരുന്നു? ഭിക്ഷക്കാർക്കു കൊടുക്കുവാൻ nപൈ ചേരാതെ ഒന്നിരുന്നെങ്കിൽ എന്റെ കൈയിൽ ഉണ്ടായിരുന്ന സംഖ്യയെത്ര?

32. ക്രമഗതങ്ങളായ 5 ഇരട്ട സംഖ്യകളിൽ $2n$ (1) ഏറ്റവും ചെറുത് (2) ഏറ്റവും വലുത് (3) മദ്ധ്യത്തിൽ ഉള്ളത് ആണെങ്കിൽ മറ്റു സംഖ്യകൾ കാണുക. ഓരോ പ്രമേയവും കിട്ടുന്ന 5 സംഖ്യകളുടെ തുക വെവ്വേറെ കാണുക.

33. ക്രമഗതങ്ങളായ 5 ഒറ്റസംഖ്യകളിൽ $2n+1$ (1) ഏറ്റവും ചെറുത് (2) ഏറ്റവും വലുത് (3) മദ്ധ്യത്തിലുള്ളത് ആണെങ്കിൽ മറ്റു സംഖ്യകൾ കാണുക. ഓരോ പ്രമേയവും കിട്ടുന്ന 5 സംഖ്യകളുടെ തുക വെവ്വേറെ കാണുക.

34. ഒരാൾ ഒരു പണി 15 ദിവസത്തിൽ ചെയ്തീർക്കുമെങ്കിൽ (1) 1 ദിവസത്തിൽ (2) n ദിവസത്തിൽ എത്ര ചെയ്യും? d ദിവസത്തിൽ ചെയ്തീർക്കുമെങ്കിൽ (3) 1 ദിവസത്തിൽ (4) m ദിവസത്തിൽ എത്ര ചെയ്യും?

35. ഒരു ക്ലാസ്സിൽ x ആൺകുട്ടികളും y പെൺകുട്ടികളും ഉണ്ട്. ആൺകുട്ടികളുടെയും പെൺകുട്ടികളുടെയും ശരാശരി വയസ്സ യഥാക്രമം aയും bയും കൊല്ലങ്ങളാണെങ്കിൽ ആ ക്ലാസ്സിലെ കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സ കാണുക.

36. x കുട്ടികളുടെ ശരാശരി തൂക്കം l റാത്തലാണ്. അവരിൽ y കുട്ടികളുടെ ശരാശരി തൂക്കം a റാത്തലാണെങ്കിൽ ബാക്കിയുള്ളവരുടെ ശരാശരി തൂക്കം കാണുക.

37. ഒരു പ്രവൃത്തിശാലയിൽ m പുരുഷന്മാരും അവരുടെ ഇരട്ടി സ്ത്രീകളും 3 ഇരട്ടി കുട്ടികളും ഉണ്ട്. ഒരു കുട്ടിക്കു ഒരു ദിവസത്തിൽ aണ. കൂലികിട്ടുന്നു. ഒരു സ്ത്രീക്കു ഒരു കുട്ടിയുടെ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടിയും, ഒരു പുരുഷന്നു 1 സ്ത്രീയുടെ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടിയും കൂലി കിട്ടുന്നെങ്കിൽ ഒരു ദിവസത്തിൽ പ്രവൃത്തിക്കാക്കു ആകെ എത്ര കൂലി കിട്ടും?

38. ഒരാൾ ഡജന്നു aണ. പ്രകാരം m മാങ്ങ വാങ്ങി കാലണക്കു 2 വീതം വിറ്റാൽ അയാളുടെ ലാഭം കാണുക.

39. Pക. n കൊല്ലംകൊണ്ടു പലിശയടക്കം Aക. ആകുന്നുവെങ്കിൽ 100ന്നു കൊല്ലത്തിൽ എത്ര പലിശ?

40. ഒരു സാധനം xക.ക്കു വാങ്ങി yക.ക്കു വിറ്റാൽ ലാഭം എത്ര ശതമാനം?

അദ്ധ്യായം 19.

ഏകഘാതസമതച്ഛങ്ങൾ (Simple Equations).

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

(2) $x+5=12$.

രണ്ടു വ്യഞ്ജകങ്ങൾം സമമാണെന്നുള്ള ഇത്തരം പ്രസ്താവനക്കു ബീജഗണിതത്തിൽ സമതച്ഛം (Equation) എന്നു പേർ.

മേലെഴുതിയ സമതച്ഛങ്ങളെ പരിശോധിക്കുക:—

(1) ഒന്നാമത്തെതിൽ a, b എന്നിവക്കു ഏതെങ്കിലും ഒരു വില കല്പിക്കുക. ഉദാഹരണമായി $a=2$, $b=3$.

$(a+b)^2=(2+3)^2=5^2=25$

$a^2+2ab+b^2=2^2+2\cdot2\cdot3+3^2=25$.

a, b എന്നിവക്കു ഏതു വില കല്പിക്കുന്നതായാലും ഇടത്തും വലത്തുമുള്ള വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ വില സമമായിരിക്കുമെന്നു കാണാം.

(2) രണ്ടാമത്തെതിൽ $x=7$ ആകുമ്പോൾ മാത്രമേ ഇട

ത്തുവശത്തുള്ള വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വില 12 ആകയുള്ളുവെന്നു വ്യക്തമാകുന്നു.

രണ്ടാമത്തെ സമത്വം $x=7$ ആകുമ്പോൾ മാത്രം ശരിയാകുന്നതുകൊണ്ടു അതിനെ ഒരു ഔപാധികസമത്വം (Conditional Equation) എന്നു പറയുന്നു. ഇങ്ങിനെ ഒരു സമത്വത്തിലുള്ള അക്ഷരത്തിനോ അക്ഷരങ്ങൾക്കോ നിശ്ചിതവിലകൾ ഉള്ളപ്പോൾ മാത്രം ശരിയാകുന്ന സമത്വങ്ങളെ ഔപാധികസമത്വങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു സമത്വത്തിലുള്ള അക്ഷരത്തിനോ അക്ഷരങ്ങൾക്കോ ഏതു വില കല്പിക്കുന്നതായാലും രണ്ടു പക്ഷങ്ങളുടേയും വില സമമായി വരുന്ന സമത്വത്തെ **അനൌപാധികസമത്വമെന്നോ** (Unconditional Equation) **സ്വയംസമത്വമെന്നോ** (Indentical Equation) പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി മേൽക്കാണിച്ച ഒന്നാം സമത്വം $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ ഒരു അനൌപാധികസമത്വമാണ്.

താഴേ പറയുന്ന സമത്വങ്ങൾ ശരിയാകുവാൻ വല്ല ഉപാധിയും ഉണ്ടോ എന്നും ഉണ്ടെങ്കിൽ എന്തെന്നും സമത്വങ്ങളെ പരിശോധിച്ചു കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $x+3=7$. $x=4$ ആകുമ്പോൾ ഈ സമത്വം ശരിയായിരിക്കും. അതുകൊണ്ടു ഈ സമത്വം ശരിയാകുവാനുള്ള ഉപാധി $x=4$ ആകുന്നു.

2. $x+1+4x-3=2x+5+3x-7$.

ഓരോ വശത്തുമുള്ള വ്യഞ്ജകത്തെ ചുരുക്കിയാൽ സമത്വം ഈ രൂപത്തിലായിരിക്കും.

$5x-2=5x-2$.

xനു ഏതു വില കല്പിക്കുന്നതായാലും ഈ സമത്വം ശരിയായിരിക്കും. അതുകൊണ്ടു ഈ സമത്വം ശരിയാകുവാൻ ഒരു ഉപാധിയും ആവശ്യമില്ല.

3. $x+y=10$.

xന് ഏതെങ്കിലും ഒരു വില കല്പിക്കുന്നതോടുകൂടി yയുടെ വില ക്ലിപ്തപ്പെടുന്നു. അതുകൊണ്ടു xനും yക്കും ഏതെങ്കിലും വിലകൾ കല്പിക്കുന്നതായാൽ സമത്വം ശരിയാകുന്നതല്ല. അതിനാൽ $x+y=10$ എന്നതു് ഒരു ഔപാധികസമത്വമാകുന്നു. എങ്കിലും ഇതു $x+3=7$ എന്ന സമത്വത്തിൽനിന്നു് വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. കാരണം xന് ഏതെങ്കിലും വില കല്പിക്കാവുന്നതാണ്.

$x+3=7$ എന്ന സമത്വം ശരിയാകുവാൻ ഒരു ഉപാധി മാത്രം വേണ്ടതുകൊണ്ടു് അതിനെ **ഏകഘാതസമത്വം** (Simple Equation) എന്നു പറയുന്നു. ഈ ഉപാധി നിർണ്ണയിക്കുന്ന ക്രിയക്കു് **സമത്വഫലനിർണ്ണയം** (Solution of an Equation) എന്നു പേർ. $x=4$. 4നെ **ലബ്ധഫലം അഥവാ സമത്വമൂലം** (Root of an Equation) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ഏകഘാതസമത്വത്തിലടങ്ങിയ ക്രിയകളുടെ സാരം പര്യവേക്ഷണം ചെയ്തു അതിന്റെ മൂലം കണ്ടുപിടിക്കുവാൻ നാം മുമ്പു് പഠിച്ചുവല്ലോ. ഏതു ഏകഘാത സമത്വത്തിന്റെയും മൂലം കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള മാർഗ്ഗം നമുക്കിപ്പോൾ പഠിക്കാം. ഈ മാർഗ്ഗത്തിനു് ആസ്പദമായ ചില മൌലികതത്വങ്ങളെ ഇവിടെ നിർദ്ദേശിക്കാം.

ഒരു സമത്വത്തിന്റെ പക്ഷങ്ങളെ ഒരു തുലാസ്സിന്റെ തട്ടുകളോടുപമിക്കാം. തുലാസ്സിന്റെ ഇടത്തേത്തട്ടിൽ കുറെ ചായയുണ്ടെന്നു വിചാരിക്കുക. അതിന്റെ തൂക്കത്തിനു സമമായ റാത്തൽക്കൂട്ടി വലത്തെത്തട്ടിൽ ഉണ്ടായിരിക്കണം.

(1) ഇടത്തെത്തട്ടിൽ 2 റാത്തൽ ചായകൂടി ഇടുന്നതായാൽ വലത്തെത്തട്ടിലും 2 റാത്തൽക്കൂട്ടി കൂടി ഇടണം. അതായതു് ഒരു തട്ടിൽ ചേർക്കുന്നതു തൂക്കംതന്നെ മറേറത്തട്ടിലും ചേർക്കണം.

(2) ഇടത്തെത്തട്ടിൽനിന്നു് 1 റാത്തൽ ചായ എടുക്കുന്ന

തായാൽ വലത്തെത്തട്ടിൽനിന്നും 1 റാത്തൽകൂട്ടി എടുക്കണം.

ഒരു തട്ടിൽനിന്ന് എടുക്കുന്നതു തുക്കം തന്നെ മറേറ തട്ടിൽനിന്നും എടുക്കണം.

(3) ഇടത്തെത്തട്ടിലെ ചായയുടെ തുക്കം ഇരട്ടിക്കുന്നതായാൽ വലത്തെത്തട്ടിലെ റാത്തൽകൂട്ടിയുടെ തുക്കവും ഇരട്ടിക്കണം.

ഒരു തട്ടിലെ തുക്കത്തെ എത്ര ഇരട്ടിക്കുന്നുവോ അത്രതന്നെ മറെറത്തട്ടിലെ തുക്കവും ഇരട്ടിക്കണം.

(4) ഇടത്തെത്തട്ടിലെ ചായയുടെ തുക്കം കാലോഹരിയാക്കിക്കുറച്ചാൽ വലത്തെത്തട്ടിലെ റാത്തൽകൂട്ടിയുടെ തുക്കവും കാലോഹരിയാക്കിക്കുറക്കണം.

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽനിന്ന് താഴേ പറയുന്ന മൌലികതത്വങ്ങൾ എളുപ്പത്തിൽ അനുമാനിക്കാം.

1. രണ്ടു സമരാശികളോടു സമരാശികൾ കൂട്ടുന്നതായാൽ അവയുടെ തുകകൾ സമമായിരിക്കും.

2. രണ്ടു സമരാശികളിൽനിന്നു സമരാശികൾ കിഴിക്കുന്നതായാൽ അവയുടെ ശിഷ്ടങ്ങൾ സമമായിരിക്കും.

3. രണ്ടു സമരാശികളെ സമരാശികൾകൊണ്ടു പെരുക്കുന്നതായാൽ അവയുടെ ഗുണനഫലങ്ങൾ സമമായിരിക്കും.

(4) രണ്ടു സമരാശികളെ സമരാശികൾകൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതായാൽ അവയുടെ ഹരിതങ്ങൾ സമമായിരിക്കും.

ഈ മൌലികതത്വങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ച് താഴെയുള്ള സമതങ്ങളുടെ മൂലം കാണുക:—

1. $x-8=5$

ഇരുപക്ഷങ്ങളിലും 8 ചേർക്കുക.

$x-8+8=5+8$

$\therefore x=13.$

2. $x+5=11$

ഇരുപക്ഷങ്ങളിൽ നിന്നും 5 കിഴിക്കുക.

$x+5-5=11-5$

$\therefore x=6.$

3. $\frac{x}{3}=7$

ഇരുപക്ഷങ്ങളെയും 3 കൊണ്ടു പെരുക്കുക.

$\frac{x}{3}\times 3=7\times 3$

$\therefore x=21.$

4. $4x=20$

ഇരുപക്ഷങ്ങളെയും 4കൊണ്ടു ഹരിക്കുക.

$$\frac{4x}{4}=\frac{20}{4}$$

$\therefore x=5.$

1-ാം കണക്കിലെ $x-8=5$ എന്ന സമതപത്തിന്റെ രൂപം മാറി $x=5+8$ എന്നായിത്തീർന്നു. അതായതു് -8 ഇടത്തുപക്ഷത്തിൽനിന്നു മാറി വലത്തുപക്ഷത്തിൽ വന്നപ്പോൾ $+8$ ആയിത്തീർന്നു.

2-ാം കണക്കിൽ $+5$ ഇടത്തുപക്ഷത്തുനിന്നു് മാറി വലത്തുപക്ഷത്തു് -5 ആയിത്തീർന്നു.

ഈ രണ്ടു ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്നു സമതപങ്ങളിലെ രാശികളുടെ ചിഹ്നത്തെപ്പറ്റി ഒരു തത്വം അനുമാനിക്കാം.

ഒരു രാശി ഒരു പക്ഷത്തുനിന്നു് മറേറ പക്ഷത്തേക്കു് മാറുന്നതായാൽ അതിന്റെ ചിഹ്നം മാറും.

സമതപഫലം നിർണ്ണയിക്കുക :—

1. $3x+2=26$

$3x=26-2$

$\therefore\ 3x=24$

$\therefore\ x=8.$

2. $\frac{x}{5}-3=4$

$\frac{x}{5}=4+3=7$

$\therefore x=7\times 5$

$=35.$

അഭ്യാസം 47.

സമത്വഫലം നിഷ്കർഷിക്കുക:—

1. $x-12=8$.
2. $x+14=15$.
3. $x+8=0$
4. $x-11=0$.
5. $\frac{x}{7}=3$.
6. $\frac{x}{6}=-5$.
7. $\frac{x}{4}=0$.
8. $\frac{x}{-2}=1$.
9. $\frac{x}{-3}=-3$.
10. $6x=42$.
11. $5x=-20$.
12. $7x=-56$.
13. $-4x=44$.
14. $-6x=-30$.
15. $8x=-22$.
16. $-9x=-24$
17. $-7x=4$.
18. $9x=-5$.
19. $5x-8=22$.
20. $3x+7=22$.
21. $-5x+2=-13$.
22. $-4x-1=17$.
23. $7x-3=14$.
24. $9x-4=0$.
25. $-11x+2=0$.
26. $7x-7=-7$.
27. $\frac{1}{2}x-5=7$.
28. $\frac{3}{4}x+8=19$.
29. $\frac{1}{3}x-5=1$.
30. $3x=a$.
31. $ax=5$.
32. $x+a=a$.
33. $x-2a=0$.
34. $2x+a=3a$.
35. $5x-3p=2p$.
36. $ax+8=12$.
37. $ax-5=4$.
38. $\frac{x}{a}=6$.
39. $\frac{x}{p}=q$.
40. $\frac{x}{a}+b=0$.

ഉദാ:—1. $7+3x=2-5x$.

x രണ്ടു പക്ഷത്തിലും ഉണ്ടു്. xനെ ഒരു പക്ഷത്തും മറ്റു സംഖ്യകളെ മറ്റേ പക്ഷത്തും എഴുതുന്നതു ഫലനിഷ്കർഷം ചെയ്യുന്നതിനു് സൌകര്യമായിരിക്കും.

$$3x+5x=2-7$$
$$8x=-5$$
$$\therefore x=\frac{-5}{8}.$$

ഉദാ: — 2. $2(2x-1)-3(x+3)=9(5x-11)$

ആവരണചിഹ്നങ്ങളെ നീക്കം ചെയ്യുമ്പോൾ,

$4x-2-3x-9=45x-99$

$4x-3x-45x=-99+9+2$

$-44x=-88$

$\therefore x=\frac{-88}{-44}=2.$

$x=2$ ആകുമ്പോൾ സമത്വം ശരിയോ എന്ന് ഒത്തുനോക്കുന്നതിനാൽ ഉത്തരം ശരിയോ എന്ന മനസ്സിലാക്കാം. സമത്വത്തിൽ xന്നു പകരം 2 എഴുതുക. അപ്പോൾ ഇടത്തുപക്ഷം $=2\times3-3\times5=6-15=-9.$

വലത്തുപക്ഷം $=9\times(-1)=-9.$

ഇങ്ങിനെ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു ഒത്തുനോക്കുന്ന ക്രിയക്കു സത്യാപനം (Verification) എന്നു പേർ.

ഉദാ: — 3. താഴെ എഴുതിയ സമത്വം ഒരു സർവ്വസമത്വമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. $a=2.$ $b=1.$ ആയാൽ സമത്വം ശരിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

$(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$ $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab.$

$\therefore (a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2=2(a^2+b^2)$

$\therefore$ രണ്ടു പക്ഷങ്ങളും സമമാകുന്നു.

$a=2.$ $b=1$ ആയാൽ $(a+b)^2+(a-b)^2=(2+1)^2+(2-1)^2$

$=3^2+1^2=9+1$

$\therefore$ ഇടത്തുപക്ഷം $=10$

$2(a^2+b^2)=2(2^2+1^2)=2(4+1)=10$

$\therefore$ രണ്ടു പക്ഷങ്ങളും സമമാകുന്നു.

'$=$' എന്ന അടയാളത്തിനു പകരം '$\equiv$' എന്ന അടയാളം ഉപയോഗിച്ചാണ് സർവ്വസമത്വങ്ങളിലെ പക്ഷങ്ങളുടെ തുല്യതയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത്.

ഉദാഹരണമായി $(x-y)^2\equiv x^2-2xy+y^2.$

അഭ്യാസം 48.

താഴെ പറയുന്ന സമത്വങ്ങളുടെ മൂലം കാണുക. ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

1. $x=10-x.$
2. $3x-4=5+2x.$
3. $4-5x=-6x.$

4. $7x+13=9x-5$.
5. $2x-3-7x=1-2x-4$.
6. $5x-12+8x-7=0$.
7. $4x-3x+2x=4$.
8. $18x+14x-17x=33-5+8$.
9. $2(x+2)-3(2-x)=8$.
10. $4(2x+5)-2(x+1)=0$.
11. $15(x-1)+4(x+3)=2(7+x)$.
12. $8(x-1)+17(x-3)=4(4x-9)+4$.
13. $7(25-x)-2x=2(3x-25)$.
14. $2(x+3)=7(x-2)+6(x-3)-3(x-4)$.
15. $3(5+x)+6(x-3)-7(x-2)+8(x+4)=0$.
16. $4x-7=2x-(3-5x)+2$.
17. $-2(3x-1)+3(5-4x)=0$.
18. $6-\{2x-(3x-4)-1\}=0$.
19. $3[5-6\{7-8(9-x)\}]=0$.
20. $ax+b=cx+d$.

താഴേ എഴുതിയ സമതപങ്ങൾ സർവ്വസമതപങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക. $a=3$, $b=2$ ആയാൽ സത്യാപനം ചെയ്യുക:—

21. $(a+b)^2-(a-b)^2\equiv 4ab$.
22. $(a^2-ab+b^2)\,(a+b)\equiv a^3+b^3$.
23. $(a^2+ab+b^2)\,(a-b)\equiv a^3-b^3$.

ഒരു സമതപത്തിൽ ഭിന്നങ്ങളായ പദങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ ഭിന്നങ്ങളെ നീക്കുന്നതു സൌകര്യമായിരിക്കും.

ഉദാ: -1. ഫലം നിർണ്ണയിക്കുക:—

$$\frac{2x}{5}+3\tfrac{1}{3}=\frac{x}{2}+\tfrac{5}{6}$$

ഛേദകങ്ങളുടെ അ. സാ. ഗുണിതം $=30$

എല്ലാ പദങ്ങളെയും 30കൊണ്ട് പെരുക്കിയാൽ $12x+100=15x+25$

$\therefore\ 12x-15x=25-100$

$\therefore\ -3x=-75$

$\therefore\ x=25$.

സത്യാപനം:—

സമതപത്തിൽ xന്ന് പകരം 25 എഴുതുക.

ഇടത്തുപക്ഷം $=\frac{2\times25}{5}+3\frac{1}{3}=10+3\frac{1}{3}=13\frac{1}{3}$

വലത്തുപക്ഷം $=\frac{25}{2}+\frac{5}{6}=12\frac{1}{2}+\frac{5}{6}=13\frac{1}{3}$

$\therefore$ രണ്ടു പക്ഷങ്ങളും സമമാകുന്നു.

ഉദാ: — 2. $4x-\frac{3x-5}{7}=7\frac{1}{7}-\frac{5(1-5x)}{3}$

ഛേദകങ്ങളുടെ അ. സാ. ഗുണിതം $=21$.

എല്ലാ പദങ്ങളെയും 21കൊണ്ടു പെരുക്കുക.

$$84x-3(3x-5)=150-35(1-5x)$$
$$84x-9x+15=150-35+175x$$
$$84x-9x-175x=150-35-15$$
$$-100x=100$$
$$\therefore x=-1.$$

ഈ ഉത്തരത്തെ സത്യാപനം ചെയ്യുക.

അഭ്യാസം 49.

ഫലം നിർണ്ണയിക്കുക: —

1. $\frac{4x}{3}-\frac{8}{9}=0.$
2. $x-10=\frac{2x}{3}-\frac{3x}{5}.$
3. $\frac{x}{3}-\frac{3x}{4}=\frac{x}{2}-11.$
4. $\frac{x-1}{8}=1+\frac{x+1}{18}.$
5. $\frac{x+20}{9}=6-\frac{3x}{7}.$
6. $\frac{x}{3}-\frac{4x}{15}=\frac{x}{5}-\frac{x-10}{5}.$
7. $7-\frac{x}{2}=\frac{5x}{6}-\frac{3x}{4}-3.$
8. $1=\frac{3x+1}{4}+\frac{1-4x}{5}.$
9. $18-2\frac{1}{2}x+1\frac{1}{5}x=11-\frac{3}{4}x+\frac{3}{20}x.$

10. $\frac{2x-1}{22}-2=\frac{3+2x}{11}-\frac{3+x}{6}$.

11. $\frac{3x-16}{32}+1=3+\frac{x+8}{24}$.

12. $\frac{3(7-x)}{7}-6=\frac{-2(x+2)}{3}$.

13. $\frac{5(x+5)}{4}-\frac{4(x-3)}{7}=11\frac{5}{14}$.

14. $\frac{23-x}{5}-7+\frac{1}{5}(8-x)=\frac{1-x}{7}-\frac{4+x}{4}$.

15. $\frac{5(2x-2\frac{2}{5})}{9}=1+\frac{8(x+\frac{1}{2})}{15}$.

16. $\frac{6-x}{2}-\frac{2x-7}{9}=x-5-\frac{1+3x}{5}$.

17. $\frac{1}{2}(x-2)=\frac{1}{3}(3x-2)-1\frac{1}{3}$.

18. $\frac{x+4\frac{1}{6}}{11}-\frac{x+2\frac{1}{2}}{3}=\frac{x+3\frac{1}{3}}{5}$.

19. $x-\frac{1}{16}(7x+9)=\frac{1}{4}(5-3x)-11$.

20. $2\cdot4x=6\cdot8-x$.

21. $\cdot1x-\cdot5=4-\cdot2x$.

22. $\cdot6x+\cdot75=\cdot45x-\cdot025$.

23. $\frac{\cdot5+\cdot15x}{2}=\frac{\cdot12-\cdot25x}{3}$.

24. $\frac{x}{\cdot5}-\frac{1}{\cdot05}+\frac{x}{\cdot005}-\frac{1}{\cdot0005}=0$.

ഉദാ:— ഫലം നിഷ്കർഷിക്കുക:— $(x-2)\ (x+3)=(x+6)\ (x-3)$

$x^2+x-6=x^2+3x-18$.

രണ്ടുപക്ഷത്തിലുമുള്ള x^2ന്റെ എണ്ണം സമമായതുകൊണ്ട് അതു നീക്കിക്കളയാം.

$\therefore x-3x=-18+6$

$\therefore -2x=-12$

$\therefore x=6$.

സത്യാപനം: — ഇടത്തുപക്ഷം $= 4 \times 9 = 36$

വലത്തുപക്ഷം $= 12 \times 3 = 36$

$\therefore$ രണ്ടു പക്ഷങ്ങളും സമമാകുന്നു.

അഭ്യാസം 50.

സമവാക്യഫലം നിർണ്ണയിക്കുക. 1 മുതൽ 8 വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളുടെ ഉത്തരം സത്യാപനം ചെയ്യുക.

1. $2x\ (x-2) = 3(x^2-2) - (x^2-5)$.
2. $(x-5)\ (x+14) = (x+15)(x-1)$.
3. $(x+6)\ (6x+1) = (2x+3)\ (3x-2) + 12$.
4. $203 - 5(x+3)^2 = 29 - 5\ (x-4)\ (x+8)$.
5. $\frac{3}{5} - \frac{3x^2-2x+1}{15} + \frac{(2-7x)\ (2-x)}{35} = 0$.
6. $\frac{3x}{4} - \frac{(2x-3)\ (x+4)}{3} - 2\frac{5}{12} + \frac{2(x-1)^2}{3} = 0$.
7. $3x\ (3x-11) - x(x^2-5) + (x-5)(x-3)\ (x-1) = 0$.
8. $(5x-2)\ (2x+8) - 5(3+10x) = (5x+2)\ (2x-5)$.
9. $x^3 + 2x^2 + 17\frac{1}{2} - (x-1)\ (x+1)\ (x+2) = 10$.

താഴെയുള്ളവയിൽ സമവാക്യമൂലം പൂർണ്ണസംഖ്യയല്ലെങ്കിൽ അതു് 2 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യമാക്കിയെഴുതുക.

10. $\frac{14(5y+6)}{9} = \frac{2}{3}(y-4) - \frac{1}{3}(2y+3)$.
11. $(m-4)^2 + 3m - \frac{(m-2)\ (2m-3)}{2} + 8\frac{1}{2} = 0$.
12. $\frac{2k+3}{7} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1+3k}{2}\right) = \frac{3-k}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{3-2k}{4}\right)$.

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ഈ രണ്ടു സമഭിന്നങ്ങളേയും bd യെക്കൊണ്ടു പെരുക്കിയാൽ നാം മുമ്പു പഠിച്ച ഒരു മൌലിക തത്വപ്രകാരം അവയുടെ ഗുണനഫലങ്ങൾ സമമായിരിക്കും.

$$\therefore ad = bc.$$

അതായതു രണ്ടു ഭിന്നങ്ങൾ സമമാണെങ്കിൽ ഒന്നിന്റെ അംശത്തേയും ഛേദകത്തേയും മറ്റേതിന്റെ ഛേദകംകൊണ്ടും അംശംകൊണ്ടും യഥാക്രമം പെരുക്കു

ന്നതായാൽ കിട്ടുന്ന ഗുണന ഫലങ്ങൾ സമമായിരിക്കും. ഇങ്ങിനെ പെരുക്കുന്നതിനു തിയ്യുക ഗുണനം (വിലങ്ങനെ പെരുക്കൽ Cross-multiplication) എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാ:— $\frac{x}{x+12}=\frac{x-3}{x+3}$

വിലങ്ങനെ പെരുക്കുന്നതായാൽ

$x(x+3)=(x-3)(x+12)$

$\therefore x^2+3x=x^2+9x-36$

$\therefore -6x=-36$

$\therefore x=6.$

അഭ്യാസം 51.

വിലങ്ങനെ പെരുക്കി സമതാഫലം നിർണ്ണയിക്കുക:—

1. $\frac{4}{13}=\frac{6}{x}$.
2. $\frac{5}{-2x}=7\frac{1}{2}$.
3. $\frac{ax}{b}=\frac{c}{d}$.
4. $\frac{m}{x}=\frac{1}{n}$.
5. $\frac{2}{5x}=5$.
6. $\frac{a}{b}=\frac{b}{x}$.
7. $\frac{2x+5}{2x-1}=\frac{4x-3}{4x-1}$.
8. $\frac{6-x}{x+12}=\frac{8-x}{x+1}$.

താഴേ പറയുന്നവയെ സമതാത്രുപത്തിലെഴുതുക.

ഉദാ:— (1) xനോട് 7 കൂട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ aയിൽ നിന്ന് 11 കിഴിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയോട് സമമാണ്.

$x+7=a-11.$

(2) cക.ക്കു വാങ്ങിയ ഒരു പശുവിനെ sക.ക്ക് വിറ്റാൽ gക. ലാഭം കിട്ടും.

$s-c=g.$ അല്ലെങ്കിൽ $c+g=s.$

(3) ഒരാൾക്കു തന്റെ മകന്റെ 5 ഇരട്ടി വയസ്സു

ണ്ട്. y കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ അയാളുടെ വയസ്സ് മകന്റെ വയസ്സിന്റെ 3 ഇരട്ടിയാകും. മകന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ വയസ്സ് x ആണ്.

$$5x+y=3(x+y).$$

(4) l വാര നീളവും b അടി വീതിയുമുള്ള ഒരു മുറിയുടെ

(1) ക്ഷേത്രഫലം A ച. അടിയാകുന്നു.

(2) ചുറ്റളവ് c അടിയാകുന്നു.

(1) $3lb=A$ (2) $2(3l+b)=c$.

അഭ്യാസം 52.

താഴെ പറയുന്നവയെ സമതലശ്രേഢിയിലെഴുതുക.

1. രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ ചെറുത് x. അവയുടെ വ്യത്യാസം d. തുക s.

2. ക്രമാഗതങ്ങളായ 3 ഇരട്ടസംഖ്യകളിൽ ഏറ്റവും വലത് m. അവയുടെ തുക t.

3. ഓരോന്നിന്നും bണ. വീതം 11 പുസ്തകം വാങ്ങി. ആകെ sക.ക്കു വിറ്റപ്പോൾ lണ. നഷ്ടം വന്നു.

4. ഓരോന്നിന് 3പ. വീതം x നാരങ്ങയും 5പ. വീതം y നാരങ്ങയും വാങ്ങിയപ്പോൾ ശരാശരി വില z പൈ.

5. cക.ക്കു വാങ്ങിയ ഒരു മോട്ടോർകാർ sക.ക്ക് വിറ്റപ്പോൾ 10ശ. മാ. ലാഭം കിട്ടി.

6. sക.ക്ക് വാങ്ങിയ ഒരു മോട്ടോർകാർ cക.ക്ക് വിറ്റപ്പോൾ 15ശ. മാ. നഷ്ടം വന്നു.

7. x വയസ്സു പ്രായമുള്ള ഒരാൾക്ക് y വയസ്സു പ്രായമുള്ള ഒരു മകനുണ്ട്;

(a) 3 കൊല്ലം മുമ്പ് അയാൾക്ക് മകന്റെ 7 ഇരട്ടി വയസ്സുണ്ടായിരുന്നു.

(b) 9 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ മകന്റെ 3 ഇരട്ടി വയസ്സുണ്ടാകും.

8. x അടി നീളവും $1\frac{1}{2}y$ അടി വീതിയുമുള്ള ഒരു മുറിയുടെ

(a) ക്ഷേത്രഫലം A ച. വാര.

(b) ചുറ്റളവ് p വാര.

9. mക.യിൽനിന്നു nണ. എടുത്താൽ pണ. ശേഷിക്കുന്നു.

10. ഒരു സഞ്ചിയിൽ xപ. yക്കി. zപൈ. ഉണ്ട്. ഈ സംഖ്യ d പെൻസിന്ന് സമമാകുന്നു.

11. ഒരു മണിക്കൂറിൽ ഒരു തീവണ്ടി m നാഴികയും ഒരു മോട്ടോർകാർ n നാഴികയും ഓടുന്നു. തീവണ്ടി h മണിക്കൂറിൽ ഓടുന്ന ദൂരം കാർ r മണിക്കൂറിൽ ഓടുന്നു.

12. രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ വലുത് x. അവയുടെ വ്യത്യാസം d. ചെറുതിനോട് a ചേർത്താൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ വലുതിന്റെ പകുതിയാകുന്നു.

13. ക്രമഗതങ്ങളായ 3 സംഖ്യകളിൽ മദ്ധ്യത്തിലെ സംഖ്യ n ആകുന്നു. അവയുടെ ഗുണനഫലം p ആണ്.

14. D എന്ന സംഖ്യയെ d കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഹരിതം q ഉം ശിഷ്ടം r ഉം ആണ്.

15. ഏക്കർ ഒരു പണി ചെയ്യുവാൻ m ദിവസവും ബീക്ക് n ദിവസവും വേണം. രണ്ടുപേരും കൂടി ചെയ്യുന്നതായാൽ d ദിവസംകൊണ്ട് പണി തീരും.

16. മൂന്നു സഹോദരന്മാരിൽ മൂത്തവന് p ഉം രണ്ടാമന് q ഉം മൂന്നാമന് r ഉം വയസ്സു പ്രായമുണ്ട്. മൂത്തവർ തമ്മിൽ വയസ്സിലുള്ള വ്യത്യാസവും ഇളയവർ തമ്മിൽ വയസ്സിലുള്ള വ്യത്യാസവും സമമാണ്.

17. രണ്ടക്കങ്ങളുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തിലുള്ള അക്കം x ഉം മറ്റേത് y ഉം ആണ്.

(1) അക്കങ്ങളുടെ തുകയുടെ 4 ഇരട്ടിയാണ് സംഖ്യ.

(2) അക്കങ്ങൾ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ സംഖ്യയുടെ വില 36 കുറയും.

18. എന്റെ കൈയിലുള്ള സംഖ്യകൊണ്ട് n കുട്ടികൾക്ക് aണ. വീതം കൊടുക്കാം.

(1) 3 കുട്ടികൾക്കു കൂടി വീതിച്ചുകൊടുക്കുന്നതായാൽ ഓരോ കുട്ടിക്കും bണ. കിട്ടും.

(2) 2 കുട്ടികൾ കുറഞ്ഞിരുന്നെങ്കിൽ ഓരോ കുട്ടിക്കും cണ. കിട്ടും.

(3) n കുട്ടികൾക്കു dണ. വീതം കൊടുത്തിരുന്നെങ്കിൽ cണ. ശേഷിക്കുമായിരുന്നു.

(4) n കുട്ടികൾക്ക് fണ. വീതം കൊടുക്കുന്നതായാൽ gണ. പോരാതെ വരും.

19. m വിദ്യാർത്ഥികളുള്ള ഒരു ക്ലാസ്സിൽ x വിദ്യാർത്ഥികൾ aക. വീതവും y വിദ്യാർത്ഥികൾ bക. വീതവും ശേഷം പേർ cക. വീതവും ഫീസ്സ് കൊടുക്കുന്നു. കുട്ടികളിൽനിന്ന് ശരാശരി dക. ഫീസ്സ് കിട്ടുന്നു.

20. ഒരു തീവണ്ടിക്ക് മണിക്കൂറിൽ a നാഴികവീതം b നാഴികയും

മണിക്കൂറിൽ c നാഴികവീതം d നാഴികയും പോകുവാൻ ആകെ h മണിക്കൂർ വേണ്ടിവരുന്നു.

21. p അടി നീളവും q അടി വീതിയുമുള്ള ഒരു മുറിയിൽ വിരിപ്പാൻ 27 അംഗുലം വീതിയുള്ള l വാ. പരവതാനി വേണം?

22. ഉരുപ്പടികളെ 20 വീതം വാങ്ങുന്നതായാൽ nക. രൂ. ഡിജനു് 10ണ. വീതം വാങ്ങുന്നതിനെക്കാൾ m നാരങ്ങ അധികം കിട്ടും?

23. ചെമ്പും സ്വർണ്ണവും ചേർന്നിട്ടുള്ള ഒരു സമ്മിശ്രലോഹത്തിൽ അവയുടെ തൂക്കത്തിന്റെ സംബന്ധം $p : q$ ആണു്. m റാത്തൽ സമ്മിശ്രലോഹത്തിൽ l റാത്തൽ സ്വർണ്ണമുണ്ടു്.

24. m ആളുകൾ d ദിവസത്തിൽ ചെയ്തീർക്കുന്ന പണി n ആളുകൾക്കു് ചെയ്യാൻ 5 ദിവസം കൊള്ളുമതി.

അദ്ധ്യായം 20.

ഏകഘാതസമതാപം ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്യാവുന്ന കണക്കുകൾ

(Problems leading to Simple Equations).

അങ്കഗണിതത്തിലുള്ള പല കണക്കുകളെയും സമതാപങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു് എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യാവുന്നതാണെന്നു് താഴെ പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്നു് വ്യക്തമാകും.

ഉദാ:— (1) ഒരു കൂട്ടി ഒരു സംഖ്യ വിചാരിച്ചു. അതിനെ 5കൊണ്ടു പെരുക്കി 3 കൂട്ടി 8കൊണ്ടു് ഹരിച്ചപ്പോൾ 6 കിട്ടി. എന്നാൽ അവൻ വിചാരിച്ച സംഖ്യ ഏതു്?

കാണേണ്ടുന്ന രാശിയെ x എന്ന അക്ഷരംകൊണ്ടാണു് സാധാരണ സൂചിപ്പിക്കുന്നതു്.

അതുകൊണ്ടു കൂട്ടി വിചാരിച്ച സംഖ്യ x എന്നു കരുതുക.

$\therefore \frac{5x+3}{8} = 6$ ഈ സമതാപത്തിന്റെ ഫലം നിർണ്ണയിച്ചാൽ

$x = 9$. ഈ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(2) ഏക്ക് ബീയേക്കാൾ 70ക. അധികവും ബിക്ക് സീയേക്കാൾ 40ക. കുറച്ചും കിട്ടത്തക്കവണ്ണം 500ക. ഭാഗിക്കുക.

ഏയുടേയും സീയുടേയും ഓഹരികൾക്കു ബീയുടെ ഓഹരിയോടുള്ള ബന്ധം അറിയുന്നതുകൊണ്ട് ബീയുടെ ഓഹരി xക. എന്നു കരുതുന്നതു് സൌകര്യമായിരിക്കും.

$\therefore$ ഏയുടെ ഓഹരി $=(x+70)$ക.

$\therefore$ സീയുടെ ഓഹരി $=(x+40)$ക.

$\therefore\ x+x+70+x+40=500.$

ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ ഫലം നിർണ്ണയിച്ചാൽ, $x=130$ എന്നു് കിട്ടും.

$\therefore$ ബീയുടെ ഓഹരി $=130$ക.

$\therefore$ ഏയുടെ ഓഹരി $=(130+70)$ക. $=200$ക.

$\therefore$ സീയുടെ ഓഹരി $=(130+40)$ക. $=170$ക.

(3) രണ്ടു സഹോദരന്മാർ തമ്മിൽ 16 വയസ്സ് വ്യത്യാസമുണ്ട്. 18 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ ഒരാൾക്ക് മറ്റെയാളുടെ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടി പ്രായമുണ്ടാകും. എന്നാൽ അവരുടെ വയസ്സു കാണുക.

ഇളയസഹോദരന്റെ വയസ്സു x എന്നു വിചാരിക്കുക.

$\therefore$ മൂത്ത ,, ,, $=x+16$

$\therefore\ x+16+18=1\frac{1}{2}(x+18).$

ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ ഫലം നിർണ്ണയിച്ചാൽ $x=14$ എന്നു കിട്ടും.

$\therefore$ സഹോദരന്മാരുടെ വയസ്സ് 14ഉം 30ഉം ആണ്.

സത്യാപനം:— 18 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ വയസ്സ് 32ഉം 48ഉം ആകുന്നു.

$48=32$ന്റെ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടി.

(4) രണ്ടക്കങ്ങളുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തിലെ അക്കം പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തിലുള്ള അക്കത്തേക്കാൾ 5 അധികമാണ്. സംഖ്യ അക്കങ്ങളുടെ തുകയുടെ 3 ഇരട്ടിയാണെങ്കിൽ സംഖ്യ കാണുക.

കൂട്ടുന്ന ക്രിയ കിഴിക്കുന്ന ക്രിയയേക്കാൾ എളുപ്പമായതുകൊണ്ട് ചെറിയ അക്കം x എന്നു വിചാരിക്കുക.

വലിയ അക്കമായ ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തിലെ അക്കം $=x+5$

$\therefore$ അക്കങ്ങളുടെ തുക $=x+x+5=2x+5$

സംഖ്യ $=10x+x+5=11x+5$

$11x+5=3(2x+5).$

ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ ഫലം നിർണ്ണയിച്ചാൽ $x=2$ എന്നു കിട്ടും.

$\therefore$ ആവശ്യപ്പെട്ട സംഖ്യ $=27$.

ഈ ഉത്തരം ശരിയോ എന്ന് എഴുപ്പത്തിൽ പരിശോധിക്കാം.

(5) ഒരാൾ ബസ്സിലും തീവണ്ടിയിലും കൂടി ആകെ 100 നാഴിക യാത്ര ചെയ്തു. നാഴിക ഒന്നിന് തീവണ്ടിക്കു $3\frac{1}{2}$ പൈയും ബസ്സിന് 6 പൈയും വീതം ആകെ 2 ക. 3 ണ. കൂലി കൊടുത്തെങ്കിൽ ഓരോ വാഹനത്തിലും അയാൾ എത്ര ദൂരം യാത്ര ചെയ്തു?

ബസ്സിൽ യാത്ര ചെയ്ത ദൂരം x നാഴികയാണെന്ന് വിചാരിക്കുക.

$\therefore$ തീവണ്ടിയിൽ യാത്ര ചെയ്ത ദൂരം $=(100-x)$ നാ.

ആകെ കൂലി $=\{6x+3\frac{1}{2}(100-x)\}$ പൈ $=2$ ക. 3 ണ.

$=420$ പൈ. $\therefore 6x+3\frac{1}{2}(100-x)=420$.

ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ ഫലം നിർണ്ണയിച്ചാൽ $x=28$ എന്ന് കിട്ടും.

$\therefore$ ബസ്സിൽ പോയ ദൂരം $=28$ നാ.

$\therefore$ തീവണ്ടിയിൽ പോയ ദൂരം $=(100-28)$ നാ. $=72$ നാ.

(1) ഉത്തരം ശരിയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

(2) തീവണ്ടിയിൽ യാത്ര ചെയ്ത ദൂരം x നാഴിക എന്നു വിചാരിച്ചാലും കണക്കു ചെയ്യാം. അപ്പോൾ $x=72$ എന്ന് കിട്ടും.

(6) ഒരു മുറിയുടെ നീളം വീതിയേക്കാൾ 9 അടി അധികമാണ്. നീളം 5 അടി അധികമാക്കുകയും വീതി 2 അടി കുറയുകയും ചെയ്താൽ മുറിയുടെ ക്ഷേത്രഫലം 20 ച. അടി അധികമാകും. എന്നാൽ മുറിയുടെ നീളവും വീതിയും കാണുക.

വീതി x അടി എന്നു വിചാരിക്കുക.

$\therefore$ നീളം $=(x+9)$ അടി.

$\therefore$ ക്ഷേത്രഫലം $=x(x+9)$ ച. അടി.

മാറ്റം വരുത്തിയപ്പോൾ ക്ഷേത്രഫലം $=(x+9+5)\ (x-2)$ ച. അടി.

$=(x+14)\ (x-2)$ ച. അടി.

$\therefore x(x+9)+20=(x+14)\ (x-2)$

ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ ഫലം നിർണ്ണയിച്ചാൽ $x=16$ എന്നു കിട്ടും.

$\therefore$ വീതി $=16$ അടി. നീളം $=25$ അടി.

ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു വിദ്യാർത്ഥി പരിശോധിക്കണം.

അഭ്യാസം 53.

ഈ അഭ്യാസത്തിലെ കണക്കുകൾ ചെയ്യുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥി താഴെ പറയുന്ന സംഗതികൾ ഓർക്കണം.

1. കണക്കിൽ നിർദ്ദേശിച്ചിട്ടുള്ള സംഗതികളെ ആസ്പദമാക്കി ഒരു സമതലം നിർമ്മിക്കുക. (ഈ ക്രിയയാണ് ഏറ്റവും മുഖ്യമായിട്ടുള്ളത്. അല്പം ആലോചിക്കുന്നതായാൽ ഏതു രാശിയെയാണ് x എന്നു കരുതേണ്ടതെന്നു മനസ്സിലാകും).

2. തെറ്റുകൂടാതെ സമതലഫലത്തെനിർണ്ണയിക്കുക.

3. സമതലമൂലത്തിന്ന് ശരിയായ അർത്ഥം കല്പിക്കുക.

4. ഉത്തരം സത്യാപനം ചെയ്യുക.

1. ഒരു കുട്ടിയോടു ഇപ്രകാരം ചെയ്യാൻ ആവശ്യപ്പെട്ടു. ഒരു സംഖ്യ വിചാരിക്കുക. അതിനെ ഇരട്ടിച്ചു 11 കൂട്ടുക. തുകയെ 3കൊണ്ടു പെരുക്കി 12 കിഴിക്കുക. ബാക്കിയെ 3കൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന ഉത്തരം എത്ര? കുട്ടിയുടെ ഉത്തരത്തിൽനിന്നു അവൻ വിചാരിച്ച സംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കാനുള്ള ഒരു സൂത്രം കണ്ടുപിടിക്കുക.

2. ഒരു ക്ലാസ്സിലെ കുട്ടികളോടു ഇപ്രകാരം ചെയ്യാൻ ആവശ്യപ്പെട്ടു. ഒരു സംഖ്യ വിചാരിക്കുക. അതിന്റെ 4 ഇരട്ടിയോടു 24 കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ 4കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ഫലത്തിൽനിന്നു വിചാരിച്ച സംഖ്യ കിഴിക്കുക. എല്ലാ കുട്ടികൾക്കും ഒരുത്തരം തന്നെ കിട്ടുമെന്നു തെളിയിക്കുക. ആ ഉത്തരം എന്താണ്?

3. 108നെ 3 ഭാഗങ്ങളായി ഭാഗിക്കുക. ഒന്നാമത്തേതിന്റെ പകുതിയും രണ്ടാമത്തേതിന്റെ $\frac{1}{3}$ഉം മൂന്നാമത്തേതിന്റെ $\frac{1}{4}$ഉം സമമായിരിക്കണം. (സമമായിട്ടുള്ള ഭാഗം x എന്നു വിചാരിക്കുക.)

4. 112നെ 4 ഭാഗങ്ങളായി ഭാഗിക്കുക. ഒന്നാമത്തേതിനോടു 3 കൂട്ടിയാലും രണ്ടാമത്തേതിൽനിന്നു 3 കിഴിച്ചാലും മൂന്നാമത്തേതിനെ 3കൊണ്ടു പെരുക്കിയാലും നാലാമത്തേതിനെ 3കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും കിട്ടുന്ന സംഖ്യകൾ സമമായിരിക്കണം.

5. എക്കു് ബീയേക്കാൾ 37ക. അധികവും സീയേക്കാൾ 38ക. കുറച്ചും കിട്ടത്തക്കവണ്ണം 400ക. അവക്കു ഭാഗിച്ചുകൊടുത്താൽ ഓരോരുത്തക്കും കിട്ടുന്ന ഓഹരി എന്തായിരിക്കും?

6. 367ക. എ, ബീ, സീ എന്നീ മൂന്നു പേക്കു് ഭാഗിച്ചു കൊടുത്തപ്പോൾ എക്കു് സീയുടെ ഓഹരിയുടെ ഇരട്ടിയിൽ 70ക. കുറവും ബീക്കു സീയുടെ ഓഹരിയുടെ $\frac{1}{5}$നേക്കാൾ 5ക. അധികവും കിട്ടി. എന്നാൽ ഓരോരുത്തരുടേയും ഓഹരി കാണുക.

7. ഒരാൾക്ക് അയാളുടെ മകന്റെ 4 ഇരട്ടി വയസ്സുണ്ട്. 5 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ അയാളുടെ വയസ്സ് മകന്റെ വയസ്സിന്റെ 3 ഇരട്ടിയാകും. എന്നാൽ ഇരുവരുടെയും വയസ്സ് കാണുക.

8. രണ്ട് സഹോദരന്മാർ തമ്മിൽ 15 വയസ്സു വ്യത്യാസമുണ്ട്. 20 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ ഒരാൾക്കു മറ്റേയാളുടെ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടി വയസ്സുണ്ടാകും. എന്നാൽ ഓരോ ആളുടെയും വയസ്സു കാണുക.

9. രണ്ടു സഹോദരന്മാർക്കു 11ഉം 35ഉം വയസ്സു പ്രായമുണ്ട്.

(*a*) എത്ര കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ ഒരാൾക്കു മറ്റേ ആളുടെ ഇരട്ടി വയസ്സുണ്ടാകും?

(*b*) എത്ര കൊല്ലങ്ങൾക്കു മുമ്പു ഒരാൾക്കു മറ്റേ ആളുടെ 4 ഇരട്ടി പ്രായം ഉണ്ടായിരുന്നു?

10. രണ്ടക്കങ്ങളുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തിലെ അക്കം 7 ആണ്. സംഖ്യ അക്കങ്ങളുടെ തുകയുടെ $5\frac{1}{2}$ ഇരട്ടിയാണ്. എന്നാൽ പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തിലെ അക്കം കാണുക.

11. 10നും 100നും ഇടയിലുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 11. അക്കങ്ങളെ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ സംഖ്യ 45 അധികമാകുമെങ്കിൽ സംഖ്യ കാണുക.

12. രണ്ട് സ്ഥാനങ്ങളുള്ള ഒരു സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം 5. അക്കങ്ങളെ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ സംഖ്യകളുടെ വില $2\frac{2}{7}$ ഇരട്ടിക്കുന്നു. എന്നാൽ സംഖ്യ കാണുക.

13. രണ്ടക്കങ്ങളുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തിലെ അക്കം പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തിലെ അക്കത്തിന്റെ 3 ഇരട്ടിയാകുന്നു. സംഖ്യയെ അക്കങ്ങളുടെ തുകകൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ ഹരിതം 3ഉം ശിഷ്ടം 3ഉം കിട്ടുമെങ്കിൽ സംഖ്യ കാണുക.

14. ഇംഗ്ലീഷു പുസ്തകത്തിന്നു $10\frac{1}{2}$ണ. വീതവും കണക്കു പുസ്തകത്തിന്നു 6ണ. വീതവും 75 പുസ്തകത്തിന്നു ആകെ 36ക. 9ണ. വിലയായാൽ ഓരോ തരം പുസ്തകമെത്ര?

15. ഒരാൾക്ക് 32 നാഴിക യാത്ര ചെയ്വാൻ $3\frac{1}{4}$ മണിക്കൂർ വേണ്ടിവന്നു. കുറേ സമയം മണിക്കൂറിൽ 8 നാഴിക വീതവും ബാക്കി സമയം മണിക്കൂറിൽ 12 നാഴിക വീതവും യാത്ര ചെയ്താൽ മണിക്കൂറിൽ 12 നാഴിക വീതം എത്ര ദൂരം യാത്ര ചെയ്യും?

16. 25 സ്ലേറ്റിന്നും 40 പുസ്തകത്തിന്നും കൂടി 17ക. 1ണ. 9പ. വില. ഒരു സ്ലേറ്റിന്നും ഒരു പുസ്തകത്തിന്നും കൂടി 8ണ. 3പ. വിലയായാൽ ഓരോന്നിന്റെ വിലയെത്ര?

17. ഒരു സഞ്ചിയിൽ 143 നാണ്യങ്ങളുണ്ട്. ഇതിൽ കുറേ ഒരണ നാണ്യങ്ങളും അതിന്റെ ഇരട്ടി കാലണയും ബാക്കി പൈയും ആകുന്നു. സഞ്ചിയിലുള്ള ആകെ സംഖ്യ 1ക. 14ണ. 8പ. ആണെങ്കിൽ ഓരോതരം നാണ്യങ്ങൾ എത്ര?

18. കുറേ ഉരുപ്പികയും കാലുറുപ്പികയും കൂടി ഒരു സഞ്ചിയിൽ ആകെ 85 നാണ്യങ്ങളുണ്ട്. ഈ രണ്ടുതരം നാണ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം തമ്മിൽ മാറ്റം ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ സഞ്ചിയിലെ ആകെ സംഖ്യ 15ക. 12ണ. കുറയും. എന്നാൽ സഞ്ചിയിൽ ഇപ്പോഴുള്ള സംഖ്യയെത്ര?

19. അണക്ക് 7 പ്രകാരം കുറേ മാങ്ങയും അതിന്റെ ഒന്നര ഇരട്ടി എണ്ണം അണക്ക് 5 പ്രകാരവും വാങ്ങി. അണക്ക് 6 പ്രകാരവും വിറ്റപ്പോൾ 11ണ. നഷ്ടം വന്നാൽ ആകെ വാങ്ങിയ മാങ്ങയെത്ര?

20. ഒരാൾ രാത്തലിന്നു 1ക. 15ണ. 6പ.യും, 2ക. 2ണ. 6പ.യും വീതം 164ക. 4ണ.ക്കു കുറേ ചായ വാങ്ങി. രാത്തലിന്ന് 2ക. 1ണ. പ്രകാരം വിറ്റപ്പോൾ 12ണ. ലാഭം കിട്ടി. എന്നാൽ ഓരോതരം എത്ര രാത്തൽ വാങ്ങി?

21. വീശത്തിന്ന് 4ക. 14ണ.യും 5ക. 10ണ.യും വിലക്കു കുറേ നെയ്യ് വാങ്ങി, കലത്തി വീശത്തിന്ന് 5ക. 4ണ. പ്രകാരം വിറ്റപ്പോൾ 5ശ. മാ. ലാഭം കിട്ടിയാൽ അവയെ കലത്തിയതോതു് കാണുക.

22. വാരക്കു 10ണ. 3പ. വിലയുള്ള കുറെ തുണി വാങ്ങിയശേഷം എന്റെ കൈവശം 1ക. 9ണ. ബാക്കിയായി. വാരക്ക് 11ണ. 6പ. വിലയുള്ള അത്രതന്നെ തുണി വാങ്ങുവാൻ 3ക. 2ണ. പോരാതെവന്നു. എന്നാൽ വാങ്ങിയ തുണിയെത്ര? എന്റെ കൈവശം ഉണ്ടായിരുന്ന പണമെത്ര?

23. ഹാജരാവുന്ന ദിവസമെല്ലാം 1ക. 8ണ. വീതം കൂലി കൊടുക്കാമെന്നും മുടങ്ങുന്ന ഓരോ ദിവസത്തിന്നും $2\frac{1}{2}$ണ. വീതം പിഴ വസൂൽ ചെയ്യുമെന്നും ഉള്ള കരാറിന്മേൽ ഒരു കൂലിക്കാരനെ 30 ദിവസത്തേക്ക് നിശ്ചയിച്ചു. അവന്നു് കൂലിവകയിൽ 35ക. 1ണ. മാത്രം കിട്ടിയാൽ അവൻ ഹാജരായ ദിവസമെത്ര?

24. കൊല്ലത്തിൽ 117ക.യും കുറെ വസ്ത്രവും കൊടുക്കാമെന്ന കരാറിന്മേൽ ഒരു വെപ്പുകാരനെ ഞാൻ നിശ്ചയിച്ചു. 7 മാസത്തിന്നുശേഷം അവൻ പിരിഞ്ഞുപോയപ്പോൾ വസ്ത്രം മുഴുവനും 57ക.യും കൊടുത്തു കണക്കു തീർത്തു. എന്നാൽ വസ്ത്രത്തിന്നു് എത്ര വില കണക്കാക്കിയിരുന്നു?

25. ഒരാൾ രണ്ടു മോട്ടോർകാർ വാങ്ങി. ഒന്നിന്നു മറ്റേതിനേക്കാൾ 750ക. അധികം വില കൊടുത്തു. വില അധികമുള്ളതിനെ 15ശ. മാ. ലാഭത്തിന്നും വില കുറഞ്ഞതിനെ 6ശ. മാ. നഷ്ടത്തിന്നും വിറ്റപ്പോൾ അയാൾക്ക് 585ക. ലാഭം കിട്ടിയെങ്കിൽ ഓരോ കാറിന്റെയും വില കാണുക.

26. ഒരു കന്നുകാലിക്കച്ചവടക്കാരൻ 76 ആടുകളെ വാങ്ങി. 2 ആടുകൾ ചത്തുപോയി. 20നെ 15% ലാഭത്തിന്നും 40നെ 19% ലാഭത്തിന്നും

ബാക്കിയുള്ളവയെ 25% ലാഭത്തിന്നും വിറ്റപ്പോൾ അയാൾക്ക് 484 ക. ലാഭം കിട്ടി. എന്നാൽ ഒരു ആട്ടിനെ വാങ്ങിയ വിലയെന്തു?

27. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും 5 അംഗുലം അധികമായപ്പോൾ അതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം 165 ച. അംഗുലം വർദ്ധിച്ചുവെങ്കിൽ ചതുരത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

28. ഒരു മുറിയുടെ നീളം വീതിയെക്കാൾ 1 അടി അധികമാണ്. നീളം 2 അടി അധികമാക്കുകയും വീതി 3 അടി കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്താൽ ക്ഷേത്രഫലം 25 ച. അടി കുറയും. എന്നാൽ മുറിയുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

29. സമകോണചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കളിസ്ഥലത്തിന്റെ നീളം 10 അടി കുറയ്ക്കുകയും വീതി 5 അടി അധികമാക്കുകയും ചെയ്താൽ അതു ഒരു സമചതുരമായിത്തീരുകയും ക്ഷേത്രഫലം 210 ച. അടി കുറയുകയും ചെയ്യും. എന്നാൽ കളിസ്ഥലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

30. ഒരു മുനിസിപ്പാൽ തിരഞ്ഞെടുപ്പിൽ ഒരു സ്ഥാനാർത്ഥിക്കു തന്റെ എതിരാളിയെക്കാൾ 81 വോട്ട് അധികം കിട്ടി. വോട്ടുചെയ്തവരിൽ 23 പേർക്കുകൂടി അയാൾക്ക് തങ്ങളുടെ വോട്ട് കൊടുത്തിരുന്നുവെങ്കിൽ അയാൾക്ക് തോറ്റ ആളുടെ ഇരട്ടി വോട്ടുണ്ടാകുമായിരുന്നു. എന്നാൽ ആകെ എത്ര പേർ വോട്ടുചെയ്തു?

31. മദിരാശിയിൽനിന്ന് ഊട്ടക്കമണ്ടിലേക്ക് റെയിൽവഴിയായി 358 നാഴിക ദൂരമുണ്ട്. ഇതിൽ ഒരു ഭാഗം സാധാരണവഴിയും ബാക്കി മലവഴിയും ആകുന്നു. സാധാരണവഴി ഒരു നാഴികക്ക് രണ്ടാം ക്ലാസ്സ് വണ്ടിക്കൂലി 9പ.യും മലവഴി ഒരു നാഴികക്ക് 1ണ. 9പ.യും ആകുന്നു. ആകെ കൂലി 18ക. 10ണ. 6പ. ആണെങ്കിൽ മലവഴിയുടെ നീളം കാണുക. (1918)

32. ഒരു ലീറ്റർ വെള്ളത്തിന്റെ തൂക്കം 1 കിലോഗ്രാമും 1 ലീറ്റർ തനി പ്പാലിന്റെ തൂക്കം 1·032 കിലോഗ്രാമും ആണ്. ഒരാൾ വാങ്ങിയ 12 ലീറ്റർ പാലിന്റെ തൂക്കം 12·288 കി. ഗ്രാം ആണെങ്കിൽ അതിൽ എത്ര ഘനസെന്റിമീറ്റർ വെള്ളമുണ്ടെന്നു കാണുക. (1 ലീറ്റർ = 1 ഘനഡസിമീറ്റർ).
(1920)

33. ഒരു ഘന അടി ചെമ്പിന്റെ തൂക്കം 537 ഉം തകരത്തിന്റെ തൂക്കം 455 ഉം റാത്തലാണ്. ഈ രണ്ടു ലോഹങ്ങളും ചേർത്തുണ്ടാക്കിയ ഒരു സമ്മിശ്രലോഹം 1 ഘ. അടി 502 റാത്തൽ തൂങ്ങുന്നുവെങ്കിൽ 4 ഘ. അടി സമ്മിശ്രലോഹത്തിൽ ഈ ലോഹങ്ങൾ ഓരോന്നും എത്ര ഔൺസുണ്ടെന്നു (ഔൺസ് വരെ) കൃത്യമായി കാണുക. (1936)

(സാധാരണ പലിശ).

34. ഒരു ഹുണ്ടികവ്യാപാരി 3990 ക. കടം കൊടുത്തതിൽ ഒരു ഭാഗം കൊല്ലത്തിൽ 3½% പലിശക്കും ബാക്കി 5% പലിശക്കും ആയിരുന്നു. 2½ കൊ

ല്ലും കഴിഞ്ഞശേഷം പലിശവകയായി 451 ക. 14 ണ. കിട്ടിയെങ്കിൽ 5°/₀ പലിശക്കു കൊടുത്ത സംഖ്യ കാണുക.

35. ഒരാൾ ഒരു സംഖ്യ കൊല്ലത്തിൽ 4°/₀ പലിശകൊടുക്കുന്ന ഒരു ബേങ്കിൽ ഇട്ടു. 4 മാസം കഴിഞ്ഞശേഷം ആദ്യത്തെ സംഖ്യയേക്കാൾ 350 ക. വലിയതായ ഒരു സംഖ്യ കിട്ടുകയാൽ അതു 5°/₀ പലിശ കൊടുക്കുന്ന വേറൊരു ബേങ്കിൽ ഇട്ടു. ആദ്യത്തെ സംഖ്യ പലിശക്കിട്ട ഒരു കൊല്ലം കഴിഞ്ഞശേഷം രണ്ടുസംഖ്യകളും കൂടി 30 ക. പലിശകിട്ടിയെങ്കിൽ ഓരോ ബേങ്കിലും ഇട്ട സംഖ്യ കാണുക.

36. രണ്ടു സഹോദരന്മാർ യഥാക്രമം 1440 ക.യും 2250 ക.യും രണ്ടു ബേങ്കിലിട്ടു. വലിയ സംഖ്യയിന്മേലുള്ള പലിശനിരക്കു ചെറിയതിന്മേലുള്ള നിരക്കിനേക്കാൾ 1°/₀ അധികമായിരുന്നു. രണ്ടാൾക്കുംകൂടി 9 മാസത്തിൽ 155 ക. 4 ണ. പലിശ കിട്ടിയെങ്കിൽ വലിയ പലിശനിരക്കെത്രയായിരുന്നു?

6-ാം അദ്ധ്യായത്തിൽ കൊടുത്ത ചില കണക്കുകൾ ഇപ്പോൾ ഏകഘാതസമതാനുപാതം ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്യാം.

സമയവും പണിയും.

37. കുറെ കൂലിക്കാർ ഒരു പണി $37\frac{1}{2}$ ദിവസത്തിൽചെയ്യും. 8 കൂലിക്കാർ അധികമുണ്ടായിരുന്നാൽ പണി തീരുവാൻ 15 ദിവസം കുറച്ചുമതി. എന്നാൽ ആദ്യം എത്ര കൂലിക്കാർ ഉണ്ടായിരുന്നു?

38. 25 ആളുകൾ ഒരു പ്രവൃത്തി ചെയ്യുവാൻ ഏറ്റു. 3 ആളുകൾ വിട്ടുപോയതിനാൽ പ്രവൃത്തി തീരുവാൻ 6 ദിവസം അധികം വേണ്ടിവരുന്നുവെങ്കിൽ എത്ര ദിവസംകൊണ്ടാണ് ഇപ്പോൾ പ്രവൃത്തി ചെയ്തുതീരുന്നതു?

39. ഒരാൾ ഒരു ദിവസത്തിൽ അയാളുടെ മകൻ ചെയ്യുന്നതിന്റെ $1\frac{1}{4}$ മടങ്ങ് പണിചെയ്യും. ഒരു പണിചെയ്യുവാൻ മകനു അച്ഛനേക്കാൾ $3\frac{1}{3}$ ദിവസം അധികം വേണ്ടിവരുന്നെങ്കിൽ ഓരോ ആളും തനിയെ ആ പണി എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു ചെയ്യും?

40. കുറെ പുരുഷന്മാരും അത്രതന്നെ കുട്ടികളുംകൂടി ഒരു പണി 36 ദിവസത്തിൽ ചെയ്യും. 2 മടങ്ങ് കുട്ടികൾ അധികം ഉണ്ടായിരുന്നെങ്കിൽ പണി 20 ദിവസത്തിൽ ചെയ്തുതീരും. എന്നാൽ കുട്ടികൾ തനിയെ എത്ര ദിവസത്തിൽ ആ പണിചെയ്യും?

സമയവും ദൂരവും.

41. ഒരു മോട്ടോർവണ്ടിക്കാരൻ കാലത്തു 6 മണിക്കു വീട്ടിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു 100 നാഴിക ദൂരെയുള്ള ഒരു സ്ഥലത്തേക്കു മണിക്കൂറിൽ 30 നാഴിക വീതം യാത്രചെയ്തു. കുറെദൂരം പോയശേഷം എഞ്ചിനു കേടുപറ്റുകയാൽ ശീ

ശ്രുത ആദ്യത്തേതിന്റെ പകുതിയാക്കി ഉടിക്കുസ്ഥാനത്ത് പകൽ 10മ. 10മി. ന്നു എത്തിയെങ്കിൽ വീട്ടിൽനിന്നു എത്രദൂരത്തു വെച്ചാണ്, ഏതുസമയത്താണ് അയാൾ ശീഘ്രത കേടപ്പെടുത്തിയതു? (oct. 1949)

42. ഒരു തീവണ്ടി ആക്കോണത്തുനിന്നു മദിരാശിയിലേക്കു മണിക്കൂറിൽ 30 നാഴികവീതം ഓടുന്നു. ഒരു ദിവസം വഴിയിൽ 10 മിനുട്ട് നിൽക്കേണ്ടി വന്നു. ശേഷമുള്ള ദൂരം മണിക്കൂറിൽ 40 നാഴികവീതം ഓടിയതിനാൽ മദിരാശിയിൽ ക്രമസമയത്തെത്തി. ആക്കോണത്തുനിന്നു മദിരാശിയിലേക്കുള്ള ദൂരം 45 നാഴികയാണെങ്കിൽ എവിടെയാണ് വണ്ടിനിന്നതു?

(European School Final, 1927)

43. ഒരു തീവണ്ടി ദിവസംതോറും ഒരു നിശ്ചിതദൂരം പോകുന്നു. അതു മണിക്കൂറിൽ 15 നാഴികവീതം ഓടുന്നതായാൽ എന്നേടുന്ന സ്ഥലത്തു 1 മണിക്കൂർ വൈകിച്ചെല്ലും. മണിക്കൂറിൽ 18 നാഴികവീതം ഓടുന്നതായാൽ 1 മണിക്കൂർ കാലത്തെച്ചെല്ലും. എന്നാൽ അതു ദിവസംതോറും ഓടുന്ന ദൂരം കാണുക.

(European School Final, 1926)

44. മദ്ധ്യാഹ്നം 12 മണിക്കു A ഒരു മോട്ടോർ വണ്ടിയിൽ Pയിൽനിന്നു 120 നാഴിക ദൂരെയുള്ള Qയിലേക്കു പുറപ്പെട്ടു Qയിൽ 4 മണിക്കൂർകൊണ്ടു എത്തുന്നു. ഉച്ചതിരിഞ്ഞു 1 മണിക്കു B, Qയിൽനിന്നു പുറപ്പെടുകയും 3മ. 40മി. ന്നു Pയിൽ എത്തുകയും ചെയ്യുന്നു. Aയും Bയും എപ്പോൾ, എവിടെവെച്ചു, കണ്ടുമുട്ടുമെന്നു കാണുക. (1945)

45. A എന്നൊരാൾ Pയിൽനിന്നു Qയിലേക്കു ഒരു മണിക്കൂറിൽ 28 നാഴികവീതം മോട്ടോർ ഓടിച്ചുപോയി മണിക്കൂറിൽ 20 നാഴികവീതം തിരിച്ചു പോകുന്നു. B എന്ന വേറൊരാൾ രണ്ടു പ്രാവശ്യം മണിക്കൂറിൽ 24 നാഴികവീതം മോട്ടോർ ഓടിച്ചതുകൊണ്ടു അയാൾക്കു ആകെ യാത്രക്കു Aയിനേക്കാൾ 12 മിനുട്ട് കുറച്ചുമതിയായി. എന്നാൽ Pയിൽനിന്നു Qയിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക. (April 1947)

46. ഒരു ബസ്സ് ഒരു പട്ടണത്തിൽനിന്നു 7മണിക്കു പുറപ്പെട്ടു മണിക്കൂറിൽ 18 നാഴികവീതം ഓടുന്നു. 7മ. 45മി.ന്നു ഒരു കാർ അവിടെനിന്നു പുറപ്പെട്ടു ബസ്സ് പോയവഴിയായി മണിക്കൂറിൽ 21 നാഴികവീതം ഓടുന്നതായാൽ പട്ടണത്തിൽനിന്നു എത്ര ദൂരത്തുവെച്ചു അതു ബസ്സിനോടൊപ്പമെത്തും?

47. ഒഴുക്കില്ലാത്ത വെള്ളത്തിൽ മണിക്കൂറിൽ $5\frac{1}{2}$ നാഴികവീതം പോകുന്ന ഒരു തോണിയിൽ മണിക്കൂറിൽ $2\frac{1}{2}$ നാഴികവീതം ഒഴുകുന്ന ഒരു പുഴയിൽ ഒരു സ്ഥലത്തുനിന്നു ഒരാൾ പുറപ്പെട്ടു എത്ര ദൂരത്തോളം പോയാൽ $2\frac{3}{4}$ മണിക്കൂറിൽ അതേസ്ഥലത്തു തിരിച്ചെത്താം?

ശരാശരി.

48. നിശ്ചലമായ വെള്ളത്തിൽ മണിക്കൂറിൽ 6 നാഴിക പോകുന്ന ഒരു തോണി ഒരു പുഴയിൽ കുറെദൂരം ഒഴുക്കിനനുസരിച്ചു പോയശേഷം പുറപ്പെട്ട സ്ഥലത്തേക്കു തിരിച്ചുപോകുന്നു. പുഴയുടെ ഒഴുക്കു മണിക്കൂറിൽ 2 നാഴികയാണെങ്കിൽ തോണി മണിക്കൂറിൽ ശരാശരി എത്ര നാഴികപോയി? (1934)

49. ഒരു തൊഴിൽപരിശീലനക്ലാസ്സിലെ 57 കുട്ടികൾ ശരാശരി $2\frac{1}{2}$ വാര തുണി നെയ്യുന്നു. അവരുടെ രണ്ടു ഗുരുനാഥന്മാർ നെയ്യുന്നതുകൂടിയും ചേർക്കുന്നതായാൽ ശരാശരി $2\frac{3}{4}$ വാരയാകും. എന്നാൽ ഗുരുനാഥന്മാർ ശരാശരി എത്ര വാര തുണി നെയ്യു?

50. ഒരു തോട്ടപ്പണിക്കാരിൽ 1-ാം ഫോറത്തിലെ കുട്ടികൾ ശരാശരി 15ണ. വിലയുള്ള ഭക്ഷ്യസാധനങ്ങൾ ഉല്പാദിപ്പിക്കുന്നു. 2-ാം ഫോറത്തിലെ തോട്ടത്തിൽനിന്നു 35 കുട്ടികളുടെ ശരാശരിവരവു 1ക. 2ണ. 9പ. ആണ്. ആകെ കുട്ടികളുടെ ശരാശരിവരവു 1ക. 9പ. ആണെങ്കിൽ 1-ാം ഫോറത്തിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം കാണുക.

51. ഒരു പ്രദേശത്തിലെ 1940-ാം കൊല്ലത്തിന്റെ മാസശരാശരി മഴയളവ് ആ കൊല്ലത്തിലെ ആദ്യത്തെ 7 മാസത്തെ ശരാശരി മഴയളവിനേക്കാൾ 0·8 അംഗുലം കൂടുതലാകുന്നു. ആ കൊല്ലത്തിലെ ഒടുവിലത്തെ 5 മാസത്തെ ആകെയുള്ള മഴയളവ് 34·6 അംഗുലമാകുന്നു. കൊല്ലത്തിലെ മാസശരാശരി മഴയളവ് കാണുക. (March 1948.)

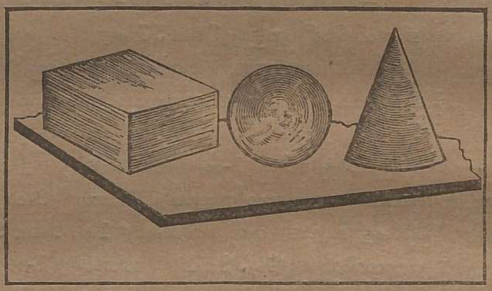
സൌകര്യത്തിനായി ഈ പുസ്തകത്തിൽ താഴെ പറയുന്ന സംക്ഷിപ്തസംജ്ഞകൾ (abbreviations) ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു:

$=$ സമം.	$\neq$ സമമല്ല.
$a > b$	a, b യേക്കാൾ വലുതാകുന്നു.
$a \not> b$	a, b യേക്കാൾ വലുതല്ല.
$a < b$	a, b യേക്കാൾ ചെറുതാകുന്നു.
$a \not< b$	a, b യേക്കാൾ ചെറുതല്ല.
$\because$ ഇതുകാരണം	$\therefore$ ആയതുകൊണ്ട്.
$\parallel$ സമാന്തരം	$\perp$ ലംബം $\equiv$ സർവ്വസമം

$\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ABC, DEF എന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വാംഗതുല്യങ്ങളാണ്.

അദ്ധ്യായം 21.

ഘനവസ്തു, തലം, രേഖ, ബിന്ദു
(Solid, Surface, Line, Point).



ഒരു മേശമേൽ ഒരു പെട്ടിയും, ഒരു പന്തും, ഒരു കൂമ്പാര (Cone)വും വെച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവ ഓരോന്നും ഒരു **ഘനവസ്തു** (Solid)വാണ്. ഇവക്കു വേണ്ടിവരുന്ന **സ്ഥല**(Space)ത്തിനു ഇവയുടെ **ആയതനം** (Volume) എന്നു പറയുന്നു. നമുക്കു ചുറ്റുമുള്ള ഘനവസ്തുക്കളുടെ **തല**(Surface)ങ്ങളെ പരിശോധിക്കുന്നതായാൽ രണ്ടു തരം തലങ്ങളുണ്ടെന്നു കാണാം. 1. **സമതലം** (Plane Surface). 2. **വക്രതലം** (Curved Surface). മേശമേൽ വെച്ച വസ്തുക്കളുടെ തലങ്ങളെ പരിശോധിക്കുക. പെട്ടിയുടെ തലങ്ങളും സമതലങ്ങളും പന്തിന്റെ തലം വക്രതലവും ആണ്. കൂമ്പാരത്തിന്റെ തലങ്ങളിൽ മേശയെ തൊടുന്ന തലം സമതലവും ബാക്കിയുള്ള തലം വക്രതലവും ആണ്.

നിശ്ചലമായ ജലത്തിന്റെ **ബാഹ്യതല**(External Surface)ത്തെ **അനുപ്രസ്ഥതലം** (Horizontal plane) എന്നു പറയുന്നു. അതിന്മേൽ തടസ്ഥം കൂടാതെ പതിക്കുന്ന ഒരു കല്ലിന്റെ ചലനമാർഗ്ഗം ജലത്തിന്റെ ബാഹ്യതലത്തിനു **ലംബ**(Perpendicular)മാകുന്നു. അനുപ്രസ്ഥതലങ്ങൾക്കു

ലംബമായ തലങ്ങളെ **ഊർദ്ധ്വാധരതലങ്ങൾ** (Vertical Planes) എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി ഒരു മുറിയുടെ തറയും തട്ടും അനുപ്രസ്ഥതലങ്ങളും അതിന്റെ ചുമരുകൾ ഊർദ്ധ്വാധരതലങ്ങളും ആണ്. അനുപ്രസ്ഥമോ ഊർദ്ധ്വാധരമോ അല്ലാത്ത തലങ്ങളെ **ചരിഞ്ഞ തലങ്ങൾ** (Oblique Planes) എന്നു പറയുന്നു.

അനുപ്രസ്ഥ തലങ്ങളിന്മേൽ വരക്കാവുന്ന എല്ലാ **സരളരേഖ** (Straight Lines)കളും **അനുപ്രസ്ഥരേഖ** (Horizontal Lines)കളും അനുപ്രസ്ഥതലങ്ങൾക്കു ലംബമായ എല്ലാ രേഖകളും **ഊർദ്ധ്വാധരരേഖ** (Vertical Lines)കളും ഈ രണ്ടു തരത്തിലും പെടാത്ത രേഖകൾ **ചരിഞ്ഞരേഖ** (Oblique Lines)കളും ആണ്. ഒരു പെട്ടിയുടെ തലങ്ങളിന്മേൽ രേഖകൾ വരച്ചു ഇവക്കു ഉദാഹരണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഒരു പെട്ടിക്കു 6 പരപ്പുകൾ (Faces) ഉണ്ടു്. മേശമേലുള്ള പെട്ടിയുടെ 4 പരപ്പുകൾ മേശയുടെ ബാഹ്യതലത്തിനു ലംബവും ഒരു പരപ്പു മേശയുടെ ബാഹ്യതലത്തെ തൊടുന്നതും ബാക്കിയുള്ള പരപ്പു അതിനു **സമാന്തരവും** (Parallel) ആകുന്നു. പെട്ടിയുടെ തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്ന ഈ രണ്ടു പരപ്പുകളിൽ ഓരോന്നും മറേതിനു ലംബമാകുന്നു. കൂട്ടിമുട്ടാത്ത പരപ്പുകൾ **സമാന്തരതലങ്ങളാണ്**.

ഒരു പെട്ടിക്കു നീളവും വീതിയും ഉയരവും ഉണ്ടു്. അതിന്റെ ഓരോ തലത്തിനും നീളം, വീതി ഇവ മാത്രമേയുള്ളു. ഒരു തലത്തിൽ അടങ്ങിയ സ്ഥലവലിപ്പത്തെ അതിന്റെ **ക്ഷേത്രഫലം** (area) എന്നു പറയുന്നു.

തലങ്ങൾ ഘനവസ്തുക്കളുടെ അതിരുകളായിരിക്കുന്നതുപോലെ രേഖകൾ തലങ്ങളുടെ അതിരുകളാണ്. രേഖകൾ രണ്ടു തരമുണ്ട്. 1. **സരളരേഖ** (Straight line) 2. **വക്രരേഖ** (Curved line). രണ്ടു തലങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ട

മ്പോൾ അവക്കു പൊതുവെയുള്ള അതിർ ഒരു രേഖയാണ്. പെട്ടിയുടെ തലങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതു സരളരേഖകളിലാണ്. അതായതു പെട്ടിയുടെ വക്കുകൾ (edges) സരളരേഖകളാണ്.

കുമ്പാരത്തിന്റെ വക്രതലവും സമതലവും ചേരുന്നതു ഒരു വക്രരേഖയിലാണ്.

ഒരു രേഖക്ക് നീളം മാത്രമേയുള്ളൂ. വീതിയോ ഉയരമോ ഇല്ല. രണ്ടു രേഖകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതു ഒരു ബിന്ദു (Point) വിലാണ്. പെട്ടിയുടെ വക്കുകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതു പെട്ടിയുടെ മൂലകളിലാണ്. ഈ മൂലകൾ ബിന്ദുക്കളാണ്; ഇവക്കു നീളമോ, വീതിയോ, ഉയരമോ ഇല്ല; സ്ഥാനം മാത്രമേ ഉള്ളൂ.

അഭ്യാസം 54 (വാങ്മൂലം).

1. നിങ്ങളുടെ ക്ലാസ്സുമുറിയിൽ കാണുന്ന 6 ഘനവസ്തുക്കളുടെ പേരുകൾ പറയുക. ഇവയിൽ (1) സമതലങ്ങൾ മാത്രം (2) വക്രതലങ്ങൾ മാത്രം (3) സമതലങ്ങളും വക്രതലങ്ങളും ഉള്ള വസ്തുക്കൾ ഏവ?

2. അനുപ്രസ്ഥതലത്തിനും ഉല്ലംബാർദ്ധതലത്തിനും മൂന്നു ഉദാഹരണങ്ങൾ പറയുക.

3. സമാന്തരങ്ങളായ തലങ്ങൾക്കു 3 ഉദാഹരണങ്ങൾ പറയുക. ഇവ (1) അനുപ്രസ്ഥതലങ്ങളോ (2) ലംബതലങ്ങളോ (3) ചരിഞ്ഞതലങ്ങളോ എന്നു വേർതിരിച്ചു പറയുക.

4. ഒരു ഇഷ്ടികക്കു എത്ര (*a*) പരപ്പുകൾ (*b*) വക്കുകൾ (*c*) മൂലകൾ (*d*) സമവിസ്തീർണ്ണമുള്ള പരപ്പുകൾ (*e*) സമനീളമുള്ള വക്കുകൾ ഉണ്ട്? ഓരോ മൂലയിലും (1) എത്ര പരപ്പുകൾ കൂടിച്ചേരുന്നു? (2) എത്ര വക്കുകൾ കൂട്ടിമുട്ടുന്നു?

തലങ്ങൾക്കു (1) ലംബമായും (2) സമാന്തരമായും ഉള്ള രേഖകൾക്കു 3 ഉദാഹരണങ്ങൾ വീതം പറയുക.

5. (1) ഒരു പെട്ടിയുടെ ബാഹ്യതലത്തിന്മേൽ (2) ഒരു പന്തിന്റെ ബാഹ്യതലത്തിന്മേൽ (3) ഒരു കുമ്പാരത്തിന്റെ വക്രതലത്തിന്മേൽ എത്ര തരം രേഖകൾ വരക്കാം?

കല്ല്, കായ്കനികൾ, മരങ്ങൾ മുതലായ നമുടെ ചുറ്റുമുള്ള മിക്കവസ്തുക്കൾക്കും

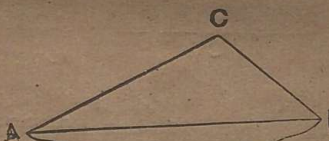
ക്രിപൂമായ ആകൃതിയില്ലെന്ന് നിങ്ങൾ കണ്ട മനസ്സിലാക്കിയിരിക്കുമല്ലോ. ചില വസ്തുക്കളെ അവയുടെ ആകൃതിയിലുള്ള സാമ്യത്തെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി തരംതിരിക്കാം. അവയിൽ ചിലതിന്റെ ചിത്രമാണ് താഴെ കാണുന്നത്.



(1) സമഘനിക (Cube). (2) ഗോളം (Sphere).
(3) പിരമിഡ് (Pyramid). (4) വൃത്തസ്തംഭം (Cylinder).
(5) ത്രിപാർശ്വം (Prism).

ആകൃതിയെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി വസ്തുക്കളെ തരം തിരിക്കുന്നതിൽ അവയുടെ മറ്റു ഗുണങ്ങളെ കരുതാറില്ല.

ഒരു സരളരേഖയെ നിർവ്വചിക്കുന്നതു പ്രയാസമാണെങ്കിലും ദിവസേനയുള്ള പരിചയത്തിൽനിന്നും അതെന്താണെന്നു വിദ്യാർത്ഥി ഗ്രഹിച്ചിട്ടുണ്ടായിരിക്കും. രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിൽ ഒരു സരളരേഖ മാത്രമേ വരക്കുവാൻ കഴിയുമെന്നും അതുനിമിത്തം രണ്ടു സരളരേഖകൾക്കു ഒരു സ്ഥലത്തെ അടക്കം ചെയ്യുവാൻ (Enclose a Space) സാധിക്കയില്ലെന്നും വ്യക്തമാണ്. ഇതേപ്രകാരം രണ്ടു സരളരേഖകൾ ഒന്നിലധികം ബിന്ദുക്കളിൽ പരസ്പരം ചേരുകയില്ലെന്നും അനുമാനിക്കാം. (ചേരുകയുണ്ടായാൽ അവ ഒരു സ്ഥലത്തെ അടക്കം ചെയ്യും.)



A, B എന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന അനേകം രേഖകൾ വരക്കാവുന്നതാണ്. ഇവയെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന സരളരേഖ വരക്കുക. ഈ സരളരേഖയെ AB എന്ന സരളരേഖയെന്നു വിളിക്കുന്നു.

A B എന്ന സരളരേഖക്കു പുറമെ C എന്നൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. C എവിടെയായാലും AC, CB എന്ന സരളരേഖകളുടെ നീളത്തിന്റെ തുക AB എന്ന സരളരേഖയുടെ നീളത്തേക്കാൾ അധികമായിരിക്കും.

A, B എന്നിവയെ ഒരു വക്രരേഖകൊണ്ടു കൂട്ടിച്ചേർക്കുക. ഈ വക്രരേഖയെ എങ്ങിനെ വരക്കുന്നതായാലും അതിന്റെ നീളം AB എന്ന സരളരേഖയുടെ നീളത്തെക്കാൾ അധികമായിരിക്കും. അതിനാൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ത

മ്മിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം അവയെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന സരളരേഖയുടെ നീളമാകുന്നു.

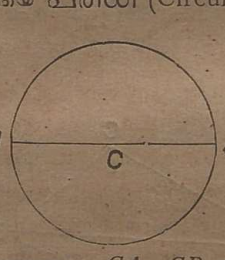
രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന സരളരേഖയുടെ നീളത്തെ അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരം എന്നു പറയുന്നു.

അദ്ധ്യായം 22.

വൃത്തം (The Circle).

വണ്ടിയുടെ ചക്രം, നാണയം, ഘടികാരത്തിന്റെ മുഖം എന്നിവയുടെ ആകൃതിക്കു വൃത്തം എന്നു പറയുന്നു. നിങ്ങളുടെ വൃത്തലേഖകം (Compasses) ഉപയോഗിച്ചു 3 വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

നിങ്ങൾ വൃത്തലേഖകം ഉപയോഗിച്ചു ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ ഒരു ഭുജത്തിന്റെ അഗ്രം നിശ്ചലമായിരിക്കുകയും മറ്റേ ഭുജത്തിന്റെ അഗ്രമായ പെൻസിൽമുന അതിനെ ചുറ്റുകയുമാണല്ലോ ചെയ്യുന്നതു. നിശ്ചലമായ അഗ്രം കടലാസ്സിനെ ഏതു ബിന്ദുവിൽ തോടിക്കുന്നുവോ ആ ബിന്ദുവിനെ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (Centre) എന്നും പെൻസിൽകൊണ്ടു വരയുന്ന വക്രരേഖയെ പരിധി (Circumference) എന്നും പറയുന്നു.

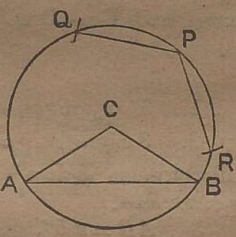


C എന്നൊരു ബിന്ദു കേന്ദ്രമാക്കി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചപ്രകാരം Cയിൽകൂടി ACB എന്നൊരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക. ACBയെപ്പോലെ തന്നെ Cയിൽകൂടി അനേകം സരളരേഖകൾ വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കാമെന്നതു സ്പഷ്ടമാണ്. ഈ സരളരേഖകൾ ഓരോന്നിനേയും വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം (Diameter) എന്നു പറയുന്നു. CA, CB, ഇവ ഓരോന്നും ACB(വ്യാസം)യുടെ പകുതിയായതുകൊണ്ടു ഇവയെ വ്യാസാർദ്ധം (Radius) എന്നു പറയുന്നു.

C എന്നൊരു ബിന്ദു കേന്ദ്രമായും 4 സെ. മീ. വ്യാസാർദ്ധമായും ഉള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിന്മേൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ഓരോ ബിന്ദുവും അതിന്റെ കേന്ദ്രമായ Cയിൽനിന്നു 4 സെ. മീ. അകലെയാണല്ലോ. Cയിൽനിന്നു 4 സെ. മീ. അകലെയുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഈ വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിന്മേൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

ഒരു കടലാസ്സിൽ ഒരു വൃത്തം വരക്കുക. അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടി കടലാസ്സ് മടക്കുക. വൃത്തത്തിന്റെ ഒരംശത്തിന്റെ അതിർ മറേറ അംശത്തിന്റെ അതിരിന്മേൽ കിടക്കുന്നതായി കാണാം. അതുനിമിത്തം രണ്ടംശങ്ങളും സമമാണെന്ന് ഊഹിക്കാം. വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഓരോ സരളരേഖയും വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമായതുകൊണ്ട് വ്യാസം വൃത്തത്തെ രണ്ട് സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നെന്ന് തെളിയുന്നു. ഈ ഓരോ അംശത്തേയും അർദ്ധവൃത്തം (Semi-circle) എന്നു പറയുന്നു. വ്യാസം പരിധിയേയും രണ്ട് സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു.

C എന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമാക്കി ഒരു വൃത്തം വരക്കുക. അതിന്റെ പരിധിയിന്മേൽ A, B എന്ന രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവയെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന സരളരേഖ വരക്കുക. പരിധിയുടെ ഒരു ഭാഗമായ AB എന്ന വക്രരേഖയെ ചാപരേഖ (Arc) എന്നും AB എന്ന സരളരേഖയെ ജ്യാവ് (Chord) എന്നും പറയുന്നു.



AB എന്ന ജ്യാവ് വൃത്തത്തെ രണ്ട് ഖണ്ഡങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു. ഓരോ ഖണ്ഡത്തെയും വൃത്തഖണ്ഡം (Segment) എന്നു പറയുന്നു. കേന്ദ്രം അടങ്ങിയ ഖണ്ഡം മറേറ ഖണ്ഡത്തെക്കാൾ വലിയതാണെന്ന സ്പഷ്ടമാണല്ലോ. ആ ഖണ്ഡത്തെ ഗുരുവൃത്തഖണ്ഡ (Major segment)മെന്നും മറേറ ഖണ്ഡത്തെ ലഘുവൃത്തഖണ്ഡ (Minor segment)മെന്നും പറയുന്നു.

ഒരു വൃത്തത്തിൽ ഒരു നിശ്ചിതനീളമുള്ള ജ്യാവുവരക്കാവുന്നതാണ്.

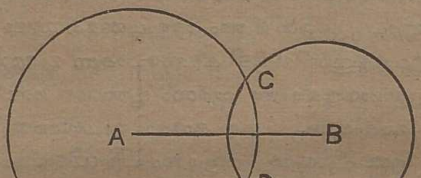
നിർമ്മാണം:— (Construction) വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിന്മേലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു, P, കേന്ദ്രവും, നിശ്ചിതനീളം വ്യാസാർദ്ധവുമായി ഒരു ചാപരേഖ വരക്കുക. ഈ ചാപരേഖ പരിധിയെ Q, R എന്ന രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നതായാൽ PQഉം, PRഉം ആവശ്യപ്പെട്ട ജ്യാവുകളായിരിക്കും.

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിന്മേലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി രണ്ട് സമജ്യാവുകൾ വരക്കാമെന്ന ഇതിൽനിന്നു സ്പഷ്ടമാകുന്നു.

ഒരു നിശ്ചിതനീളം വ്യാസാർദ്ധമായി അനേകം ചാപരേഖകൾ വരക്കാവുന്നതുകൊണ്ട് ഒരു നിശ്ചിതനീളമുള്ള അനേകം ജ്യാവുകൾ ഒരു വൃത്തത്തിൽ വരക്കാമെന്നു തെളിയുന്നു.

AC, BC എന്നീ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ വരക്കുക. ഈ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളാലും AB എന്ന ചാപരേഖയാലും ചുറ്റപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ഓരോ അംശത്തേയും വൃത്തകോണാംശം (Sector) എന്നു പറയുന്നു. ചിത്രത്തിൽ ACB ഒരു വൃത്തകോണാംശമാകുന്നു.

6സെ. മീ. നീളത്തിൽ AB എന്നൊരു സരളരേഖ വരക്കുക. A കേന്ദ്രവും 4സെ. മീ. വ്യാസാർദ്ധവുമായി ഒരു വൃത്തം വരക്കുക. Aയിൽനിന്നു 4സെ. മീ. അകലെയുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഈ വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിന്മേൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതാണ്. B കേന്ദ്രവും 3സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധവുമായി ഒരു വൃത്തം വരക്കുക. Bയിൽനിന്നു 3സെ.മീ. അകലെയുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഈ വൃത്തത്തിന്മേൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതാണ്. ഈ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ C, D എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കട്ടെ. Aയിൽനിന്നു 4സെ.മീ.ഉം Bയിൽനിന്നു 3സെ.മീഉം അകലെയുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ മാത്രമേയുള്ളു. അവ Cയും Dയും ആണ്.



അഭ്യാസം 55.

1. 3″ വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ 2·5″ നീളമുള്ള ഒരു ജ്യാവു വരക്കുക.

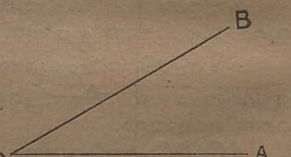
2. 3 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരക്കുക. അതിന്റെ പരിധിയിന്മേലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി 5 സെ.മീ. നീളമുള്ള 2 ജ്യാവുകൾ വരക്കുക.

3. $AB = 2{\cdot}5''$. Aയിൽനിന്നു 2″ഉം Bയിൽനിന്നു 1·5″ഉം ദൂരത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

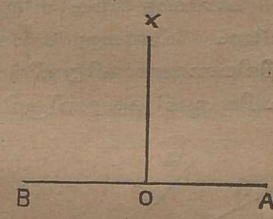
അദ്ധ്യായം 23.

കോണുകൾ (Angles).

OB എന്ന സരളരേഖ OA എന്ന സരളരേഖയോടു ചേർന്നിരിക്കുന്നു. ഈ ചേരിവിനെ ക്ഷേത്രഗണിതത്തിൽ OA, OB എന്ന സരളരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ (Angle) എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ AOB അല്ലെങ്കിൽ BOA എന്ന കോൺ എന്നു പറയുന്നു. O എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഒരു കോൺ മാത്രം ഉള്ളതുകൊണ്ടു ഇതിനെ O എന്ന ബിന്ദുവിലെ കോണെന്നും പറയാം. AOB എന്ന കോണിനെ $\angle AOB$ എന്നു ചുരുക്കി എഴുതുന്നു. OA,

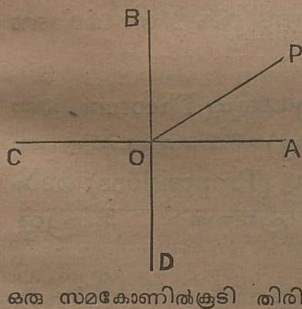


OB എന്ന സരളരേഖകൾ $\angle AOB$ന്റെ (AOB എന്ന കോണിന്റെ, എന്നു വായിക്കുക) ഭുജങ്ങളും (Arms) O അതിന്റെ അഗ്രവും (Vertex) ആകുന്നു.



AOX, BOX എന്ന കോണുകൾ സമമാകത്തക്കവണ്ണം OX എന്ന സരളരേഖ വരച്ചുവെന്നു വിചാരിക്കുക. എന്നാൽ AOX, BOX എന്ന കോണുകൾ ഓരോന്നും ഒരു സമകോൺ (Right angle) ആകുന്നു. അപ്പോൾ OX എന്ന സരളരേഖ AOB എന്ന സരളരേഖക്കു ലംബമാകുന്നു. തടസ്ഥം കൂടാതെ ഒരു ജലാശയത്തിൽ പതിക്കുന്ന ഒരു കല്ലിന്റെ ചലനമാർഗ്ഗം ജലത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിനു ലംബമാകുന്നുവെന്നു നാം മുമ്പു പ്രസ്താവിച്ചുവല്ലോ. കല്ലിന്റെ ചലനമാർഗ്ഗത്തിനും ജലത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോണുകൾ സമകോണുകളാണ്. നീളത്തെ അളക്കുവാൻ വാരക്കോൽ ഉപയോഗിക്കുന്നതുപോലെ കോണുകളെ അളക്കുവാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന മാതൃ ഒരു സമകോൺ ആകുന്നു. നിങ്ങളുടെ കോണമാപകം (Protractor) പരിശോധിക്കുക. ഒരു സമകോണിനെ 90 സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിച്ചതായി കാണാം. ഈ ഓരോ അംശത്തേയും ഒരു ഡിഗ്രി (Degree)യെന്നു പറയുന്നു. ഡിഗ്രിയെ '°' എന്ന ചിഹ്നംകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. നിങ്ങളുടെ ചതുരമട്ട (Set-square)ത്തിന്റെ രണ്ടു വക്കുകളിൽ ഓരോന്നും മറ്റേതിനു ലംബമാകുന്നു. അതിനാൽ ലംബരേഖകൾ വരക്കുവാനും ഒരു സരളരേഖ മറ്റൊരു സരളരേഖക്കു ലംബമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുവാനും ചതുരമട്ടം ഉപയോഗിക്കാം.

ചതുരമട്ടം ഉപയോഗിച്ചു OA എന്ന ഒരു സരളരേഖയും അതിനു ലംബമായി OB എന്നൊരു സരളരേഖയും വരക്കുക. AO എന്ന സരളരേഖയെ Cവരെയും BOയെ D വരെയും നീട്ടുക.

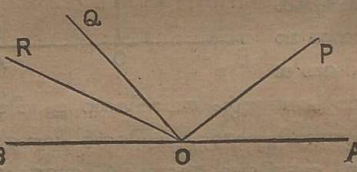


ചിത്രത്തിലുള്ള AOB, BOC, COD, DOA എന്ന കോണുകൾ ഓരോന്നും ഒരു സമകോണാകുന്നു.

OA എന്ന സ്ഥാനത്തിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ട O എന്ന ബിന്ദുവിനെ ചുറ്റിക്കൊണ്ടു OP എന്നൊരു സരളരേഖ തിരിയുന്നുവെന്നു വിചാരിക്കുക. അതു തിരിയുന്നതോടുകൂടി AOP എന്ന കോണിന്റെ വലിപ്പം വർദ്ധിക്കുന്നു. OB എന്ന സ്ഥാനത്തിലെത്തുമ്പോൾ അതു ഒരു സമകോണിൽക്കൂടി തിരിഞ്ഞിരിക്കുന്നു. OCയിൽ എത്തുമ്പോൾ OP

തിരിഞ്ഞ കോണിന്റെ വലിപ്പം 2 സമകോണും, ODയിൽ എത്തുമ്പോൾ 3 സമകോണും, OAയിൽ തിരിച്ചെത്തുമ്പോൾ 4 സമകോണും ആയിരിക്കും.

കിഴക്കോട്ട നോക്കി നില്ക്കുന്ന ഒരാൾ നില്ക്കുന്ന സ്ഥലത്തുനിന്നു തന്നെ ചുറ്റി വീണ്ടും കിഴക്കോട്ട നോക്കണമെങ്കിൽ അയാൾ 4 സമകോണിൽക്കൂടി തിരിയണമെന്നു ചിത്രത്തിൽനിന്നു സ്പഷ്ടമാകുന്നു. ഒരു ഘടികാരത്തിന്റെ വലിയ സൂചി ഒരു മണിക്കൂറിൽ 4 സമകോണിൽക്കൂടി തിരിയുന്നു.



OP എന്ന സരളരേഖ OAയിൽ നിന്നു പുറപ്പെട്ട് OBയിൽ എത്തുമ്പോഴേക്കു 2 സമകോണിൽക്കൂടി തിരിയുന്നതുകൊണ്ട് താഴെ പറയുന്ന സംഗതികൾ അനുമാനിക്കാവുന്നതാണ്.

$\angle AOP + \angle POB = 2$ സമകോൺ.

$\angle AOP + \angle POQ + \angle QOB = 2$ സമകോൺ.

$\angle AOP + \angle POQ + \angle QOR + \angle ROB = 2$ സമകോൺ.

AOP, POQ എന്ന കോണുകൾ AOQ എന്ന കോണിന്റെ ഭാഗങ്ങളാണ്. AOP, POQ എന്ന കോണുകൾക്കു പൊതുവിൽ O എന്ന അഗ്രവും OP എന്ന ഭുജവുമുണ്ട്. അവ പൊതുവിലുള്ള ഭുജത്തിന്റെ ഇരുവശത്തുമാണ്. ഇങ്ങനെയുള്ള കോണുകളെ **സമീപകോണുകൾ** (Adjacent angles) എന്നു പറയുന്നു.

OP എന്ന സരളരേഖ AOBയുടെ മേൽ എവിടെ നില്ക്കുന്നതായാലും AOP, POB എന്ന കോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളാകയാൽ താഴെ പറയുന്ന സത്യം അനുമാനിക്കാം.

ഒരു സരളരേഖ വേറൊരു സരളരേഖമേൽ നില്ക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന രണ്ടു സമീപകോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളാകുന്നു.

ഇങ്ങിനെയുള്ള ഒരു പ്രസ്താവത്തെ ഒരു **പ്രമേയം** (Theorem) എന്നു പറയുന്നു. ക്ഷേത്രഗണിത (Geometry)ത്തിൽ നമ്മുടെ നിരൂപണത്തിനു വിഷയമാകുന്ന സംഗതികളെ **സാദ്ധ്യ** (Propositions) ങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. അവ രണ്ടു തരമാണ്. 1. പ്രമേയങ്ങൾ. 2. **പ്രശ്ന** (Problems) ങ്ങൾ.

ഒരു പ്രമേയത്തിൽ തെളിയിക്കേണ്ടതായ ഒരു സത്യത്തെ പ്രസ്താവിക്കുന്നു.

മേല്പറഞ്ഞ പ്രമേയത്തിൽ രണ്ടു പ്രത്യേക സമീപകോണുകളുടെ തുക 2 സമ കോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു.

ഒരു പ്രശ്നം ഒരു പ്രത്യേകരേഖ വരക്കുന്നതോ ഒരു പ്രത്യേകരൂപം നിർമ്മിക്കു ന്നതോ ആയിരിക്കും. ഉദാഹരണമായി ഒരു സരളരേഖയെ 2 സമഭാഗങ്ങളാ ക്കുന്നതു ഒരു പ്രശ്നമാണ്. ഓരോ സാദ്ധ്യത്തിനും താഴെ പറയുന്ന ഭാഗങ്ങളുണ്ട്.

1. സാദ്ധ്യത്തിന്റെ ഉദ്ദേശ്യത്തെ സാമാന്യമായി പ്രസ്താവിക്കുന്നതിനു **സാമാന്യപ്രസ്താവം** (General enunciation) എന്നു പറയുന്നു.

2. സാമാന്യ പ്രസ്താവത്തിൽ അടങ്ങിയ രേഖകളുടെയോ രൂപങ്ങളുടെ യോ പേർ പറഞ്ഞു പ്രസ്താവത്തെ വിശദമാക്കുന്നതിനു **പ്രത്യേക പ്രസ്താ വം** (Particular enunciation) എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി AB എന്നൊരു സരളരേഖയെ 2 സമഭാഗങ്ങളാക്കുക എന്നു പറയുന്നതു ഒരു പ്രത്യേക പ്രസ്താവമാണ്.

3. പ്രമേയത്തിൽ പ്രസ്താവിച്ച സത്യത്തെ തെളിയിപ്പാനോ പ്രശ്നത്തിൽ പ്രസ്താവിച്ച ഉദ്ദേശ്യത്തെ സാദ്ധ്യമാക്കുവാനോ രേഖകളെയോ വൃത്തങ്ങളെയോ വരക്കുന്നതിനു **നിർമ്മാണം** (Construction) എന്നു പറയുന്നു.

4. പ്രമേയത്തിന്റെ സത്യത്തെയോ പ്രശ്നത്തിന്റെ ഉദ്ദേശ്യ സാദ്ധ്യത്തെ യോ തെളിയിക്കുന്ന ഭാഗത്തെ **ഉപപത്തി** (Proof) എന്നു പറയുന്നു.

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ യുക്തിവാദങ്ങൾക്കു ആസ്പദമായ ചില തത്വങ്ങൾ തെളിവുകൂടാതെ ശരിയാണെന്നു സ്വീകരിക്കുകയാണ്. ഇവയെ **പ്രത്യ ക്ഷതത്വങ്ങൾ** (Axioms: self-evident truths) എന്നു പറയുന്നു.

അവയിൽ മുഖ്യമായ ചിലതിനെ ഇവിടെ ഉദ്ധരിക്കുന്നു:

1. ഒരേ രാശിയോടു തുല്യമായ രാശികൾ പരസ്പരം തുല്യങ്ങളാണ്. ഉദാ ഹരണമായി $a=p$ഉം $b=p$ഉം ആണെങ്കിൽ $a=b$.

2. തുല്യങ്ങളോടു തുല്യങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ തുകകൾ തുല്യങ്ങളായിരിക്കും.

$a=b$ഉം $p=q$ഉം ആണെങ്കിൽ $a+p=b+q$. ഇതിൽനിന്നു തുല്യങ്ങ ളുടെ ഒരേ പെരുക്കം തുല്യങ്ങളായിരിക്കുമെന്നു അനുമാനിക്കാം.

$a=b$ ആണെങ്കിൽ $ma=mb$.

3. തുല്യങ്ങളിൽനിന്നു തുല്യങ്ങൾ കിഴിച്ചാൽ ശിഷ്ടങ്ങൾ തുല്യങ്ങളായി രിക്കും.

$a=p$ഉം, $b=q$ഉം ആണെങ്കിൽ $a-p=b-q$. ഇതിൽനിന്നു തുല്യങ്ങ ളുടെ ഒരേ അംശം തുല്യങ്ങളായിരിക്കുമെന്നു അനുമാനിക്കാം.

$a=b$ ആണെങ്കിൽ $\frac{a}{m}=\frac{b}{m}$.

4. ഒരു രാശി അതിന്റെ അംശത്തേക്കാൾ വലുതാകുന്നു.

5. അതുല്യങ്ങളോടു തുല്യങ്ങൾ ചേർത്താൽ തുകകൾ അതുല്യങ്ങളായിരിക്കും.

6. അതുല്യങ്ങളിൽനിന്നു തുല്യങ്ങൾ കിഴിച്ചാൽ ശിഷ്ടങ്ങൾ അതുല്യങ്ങളായിരിക്കും.

രൂപങ്ങളെ വരയ്ക്കുവാൻ ചില നിർമ്മാണങ്ങൾ സാദ്ധ്യമാണെന്നു സ്വീകരിക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ഇങ്ങിനെ സ്വീകരിക്കുന്ന സത്യങ്ങളെ സ്വീകൃത (Postulates)ങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ചില മുഖ്യ സ്വീകൃതങ്ങളെ താഴെ ഉദ്ധരിക്കുന്നു.

1. ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു വേറെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിലേക്കു ഒരു സരളരേഖ വരയ്ക്കാവുന്നതാണ്.

2. ഒരു പരിമിത (finite) സരളരേഖയെ ആവശ്യമുള്ളത്ര നീളത്തിൽ ഇരുവശത്തേക്കും അതേ സരളരേഖയിൽ നീട്ടാം.

3. ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു കേന്ദ്രവും ഏതെങ്കിലും ഒരു നീളം വ്യാസാർദ്ധവുമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാം.

താഴെ പറയുന്ന സ്വീകൃതങ്ങളെ സങ്കല്പനിർമ്മാണ (Hypothetical Constructions)ങ്ങൾ എന്നും പറയാറുണ്ട്.

4. ഒരു സരളരേഖയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു ആ സരളരേഖയ്ക്കു ഒരു ലംബം വരയ്ക്കാം.

5. ഒരു പരിമിത സരളരേഖയെ രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കാം.

6. ഒരു കോണിനെ ഒരു സരളരേഖകൊണ്ടു രണ്ടു സമഭാഗങ്ങളാക്കാം.

വേറെയും സ്വീകൃതങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിലും അവ വളരെ എളുപ്പവും പ്രത്യക്ഷത്തിൽ സത്യവും ആയതുകൊണ്ടു അവയെ ഇവിടെ ചേർക്കുന്നില്ല.

ഉപരിവിന്യാസം (Superposition).

രേഖകൾ, കോണുകൾ, രൂപങ്ങൾ, എന്നിവയെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുവാൻ ഒന്നിനെ മറ്റൊന്നിന്മേൽ വിന്യസി (Apply)ക്കാം. ഇങ്ങിനെ ഉപരിവിന്യസി (Superpose) ക്കുമ്പോൾ ഒന്നു മറ്റേതിന്മേൽ കൃത്യമായി പതിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവ സന്നിപതി (Coincide) ക്കുന്നുവെന്നു പറയുന്നു. സന്നിപതിക്കുന്ന രണ്ടു രേഖകളോ, കോണുകളോ, രൂപങ്ങളോ സമമായിരിക്കുമെന്നതു ഒരു പ്രത്യക്ഷതത്വമാണ്. ഉദാഹരണമായി രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ സന്നിപതിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവ സർവ്വാംഗതുല്യ (Congruent) മാണെ

ന്നതു വ്യക്തമാണ്. കോണുകളെ സംബന്ധിച്ചേടത്തോളം ഒന്നിന്റെ ഭുജങ്ങൾ മറ്റൊന്നിന്റെ ഭുജങ്ങളിന്മേൽ കൂടി പതി (fall along) ച്ചാൽ മതി.

ഒരു പ്രമേയത്തിന്റെ സാമാന്യ പ്രസ്താവത്തിന്നു രണ്ടു ഭാഗങ്ങളുണ്ടു— 1. സങ്കല്പം. (Hypothesis) നാം സ്വീകരിച്ച സംഗതിയെ സങ്കല്പമെന്നു പറയുന്നു. മേൽപ്രസ്താവിച്ച പ്രമേയത്തിൽ ഒരു സരളരേഖ വേറൊരു സരളരേഖമേൽ നില്ക്കുന്നു എന്നു നാം സ്വീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതാണ് ഈ പ്രമേയത്തിന്റെ സങ്കല്പം. 2. പരിണാമം. (Conclusion) നാം തെളിയിക്കേണ്ടുന്ന സംഗതിയെ പരിണാമം എന്നു പറയുന്നു. ഈ പ്രമേയത്തിൽ രണ്ടു പ്രത്യേക സമീപകോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കേണം. ഇതാണ് ഈ പ്രമേയത്തിന്റെ പരിണാമം. രണ്ടു പ്രമേയങ്ങളിൽ ഒന്നിന്റെ സങ്കല്പവും പരിണാമവും യഥാക്രമം മറ്റതിന്റെ പരിണാമവും സങ്കല്പവും ആണെങ്കിൽ ഒന്നു മറ്റതിന്റെ വിലോമം (Converse) ആണെന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ വിശദമാക്കുവാൻ മേൽപ്രസ്താവിച്ച പ്രമേയത്തെ ഉദാഹരണമായി എടുക്കാം.

പ്രമേയത്തിന്റെ സങ്കല്പം:

ഒരു സരളരേഖ വേറൊരു സരളരേഖമേൽ നില്ക്കുന്നു.

പരിണാമം: രണ്ടു സമീപകോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളാകുന്നു.

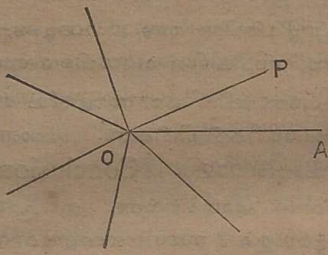
ഇതിന്റെ പരിണാമത്തെ സങ്കല്പവും സങ്കല്പത്തെ പരിണാമവുമാക്കി ഒരു പ്രമേയത്തെ പ്രസ്താവിക്കുന്നതായാൽ അതു ഇപ്രകാരം ആയിരിക്കും:

ഒരു സരളരേഖയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി അതിന്റെ ഇരുവശത്തായി രണ്ടു സരളരേഖകൾ വരക്കുന്നതിനാലുണ്ടാവുന്ന രണ്ടു സമീപകോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളാണെങ്കിൽ ആ രണ്ടു സരളരേഖകൾ ഒരേ സരളരേഖയിലായിരിക്കും.

ഒരു പ്രമേയത്തിന്റെ വിലോമം എപ്പോഴും സത്യമാകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി $a = b$ ആണെങ്കിൽ $a^2 = b^2$ ആയിരിക്കും.

ഇതിൽ സങ്കല്പം: $a = b$; പരിണാമം: $a^2 = b^2$ ഇതിന്റെ വിലോമപ്രമേയത്തെ ഇപ്രകാരം പ്രസ്താവിക്കാം: $a^2 = b^2$ ആണെങ്കിൽ $a = b$ ആയിരിക്കും. ഈ പ്രമേയം സത്യമല്ല; കാരണം $a^2 = b^2$ ആണെങ്കിൽ $a = -b$ ആയാലും മതി. $a = b$ ആവണമെന്നില്ല.

ഇങ്ങിനെ പ്രമേയങ്ങളുടെ വിലോമങ്ങൾ എഴുതുന്നതു ഒരു നല്ല അഭ്യാസമാണ്.



OP എന്ന സരളരേഖ OA യിൽ നിന്നു പുറപ്പെട്ടു OA യിൽ തിരിച്ചെത്തുമ്പോഴേക്കു 4 സമകോണിൽ കൂടിത്തിരിയുന്നതുകൊണ്ടു താഴെപറയുന്ന സത്യം അനുമാനിക്കാം.

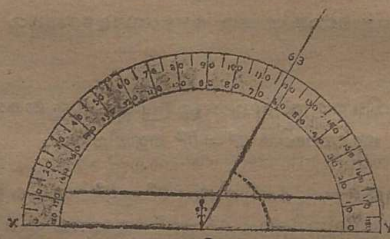
ഒരു ബിന്ദുവിൽകൂടി അനേകം സരളരേഖകളെ വരക്കുന്നതിനാലുണ്ടാവുന്ന സമീപകോണുകളുടെ തുക 4 സമകോണുകളാകുന്നു.

ഒരു സമകോണിനേക്കാൾ ചെറിയ കോണിനെ **അല്പകോൺ** (Acute angle) എന്നും സമകോണിനേക്കാൾ വലിയ കോണിനെ **അധികകോൺ** (Obtuse angle) എന്നും പറയുന്നു.

രണ്ടു കോണുകളുടെ തുക ഒരു സമകോണാണെങ്കിൽ അവയെ **പൂരകങ്ങൾ** (Complements) എന്നും, തുക 2 സമകോണുകളാണെങ്കിൽ അവയെ **പരിപൂരകങ്ങൾ** (Supplements) എന്നും പറയുന്നു.

കോണമാപകം (Protractor).

നിങ്ങളുടെ കോണമാപകം പരിശോധിക്കുക. അതിന്മേൽ 0 മുതൽ 180 വരെ സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. അതിനെ ഉപയോഗിച്ചു കോണുകളെ അളക്കുകയും ആവശ്യമുള്ള ഏതു വലിപ്പത്തിലും കോണുകൾ വരക്കുകയും ചെയ്യാം.



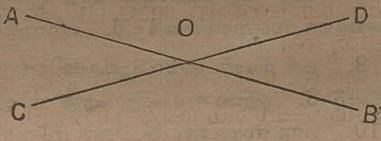
ഒരു കോൺ അളക്കുന്ന മാർഗ്ഗം.

കോണമാപകത്തിന്റെ കേന്ദ്രം (O എന്ന ബിന്ദു) കോണിന്റെ അഗ്രത്തിന്മേലും കേന്ദ്രം സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന വക്കു x y കോണിന്റെ ഒരു ഭുജത്തിന്മേലും ഒപ്പിച്ചുവെക്കുക. മറേറ ഭുജത്തിന്നെതിരായി രണ്ടു സംഖ്യകൾ കാണാം. കോൺ ഒരു അല്പകോണാണെങ്കിൽ ചെറിയ സംഖ്യയും അധികകോണാണെങ്കിൽ വലിയ സംഖ്യയും ആണ് കോണിലുള്ള ഡിഗ്രിയുടെ എണ്ണം.

ഈ മാർഗ്ഗം സൂക്ഷ്മമായി പരിശോധിക്കുന്നതിനാൽ നിങ്ങൾക്കു ആവശ്യമുള്ള വലിപ്പത്തിൽ കോണുകളെ വരക്കാനുള്ള മാർഗ്ഗം മനസ്സിലാക്കാം.

ഒരു കോണിന്റെ ഭുജങ്ങളുടെ നീളം കുറയുകയോ അധികമാകുകയോ ചെയ്യുമ്പോൾ അതിന്റെ വലിപ്പം വ്യത്യാസപ്പെടുന്നില്ല. അതായതു ഒരു കോണിന്റെ വലിപ്പം അതിന്റെ ഭുജങ്ങളുടെ നീളത്തെ ആശ്രയിച്ചു നില്ക്കുന്നില്ല.

O എന്ന ബിന്ദുവിൽ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്ന AB, CD എന്ന രണ്ടു സരളരേഖകൾ വരക്കുക. AOC, BOD എന്ന കോണുകളെ വിരുദ്ധശീർഷ



കോണുകൾ (Vertically opposite angles) എന്നു പറയുന്നു. AOD യും BOC യും വിരുദ്ധശീർഷ കോണുകളാണ്.

$\angle AOC$ഉം $\angle BOD$ഉം $\angle AOD$ന്റെ പരിപൂരകങ്ങളായതുകൊണ്ടു അവ സമമാണ്. ഇതേപ്രകാരം വിരുദ്ധശീർഷകോണുകളായ AODയും BOCയും സമമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

വേറെയും സരളരേഖകൾ വരച്ചുണ്ടാവുന്ന വിരുദ്ധശീർഷകോണുകൾ അളന്നു അവ സമമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

അഭ്യാസം 56.

1. താഴെ പറയുന്ന വലിപ്പമുള്ള കോണുകൾ വരക്കുക:—
35°, 110°, 43°, 154°, 17°, 131°.

2. 45°, 60°, 120° വലിപ്പമുള്ള കോണുകളെ ഊഹിച്ചു വരക്കുക. കോണമാപകംകൊണ്ട് അവയെ അളന്ന് കിട്ടുന്ന വലിപ്പവും ശരിയായ വലിപ്പവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കാണുക.

3. 3, 9, 2, 12, 5 മണി സമയത്ത് ഒരു ഘടികാരത്തിന്റെ സൂചികൾ ക്കിടയിലുള്ള കോൺ എത്ര ഡിഗ്രിയായിരിക്കും?

4. താഴെ കാണുന്ന കോണുകളുടെ പൂരകങ്ങൾ എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്? $10°$, $25°$, $47°$, $\frac{1}{3}$ സമകോൺ, $x°$. അവയുടെ പരിപൂരകങ്ങൾ എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്?

5. രണ്ട് അല്പകോണുകൾ (a) പൂരകങ്ങൾ (b) പരിപൂരകങ്ങൾ ആവാമോ? ന്യായസഹിതം ഉത്തരം എഴുതുക.

6. ഒരു സരളരേഖ വേറൊരു സരളരേഖമേൽ നില്ക്കുന്നു. ഓരോ അവസരത്തിലും കോണുകളുടെ വലിപ്പം എത്രയെന്നു കാണുക.

1. ഒരു കോൺ മറ്റേതിന്റെ ഇരട്ടി.
2. കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $= 30°$.
3. കോണുകളുടെ സംബന്ധം $= 3 : 2$.

7. രണ്ട് കോണുകളുടെ തുക $= 80°$, അവയുടെ പൂരകങ്ങളുടെ സംബന്ധം $= 3 : 2$. എന്നാൽ കോണുകൾ കാണുക.

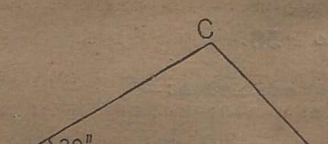
8. രണ്ട് കോണുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $= 100°$. അവയുടെ പരിപൂരകങ്ങളുടെ സംബന്ധം $= 1 : 6$. എന്നാൽ കോണുകൾ കാണുക.

9. ഒരു കോണിന്റെ പൂരകത്തിന്റേയും പരിപൂരകത്തിന്റേയും സംബന്ധം $= 3 : 8$. എന്നാൽ കോൺ എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്?

10. മൂന്നു സരളരേഖകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നതിനാൽ ഉണ്ടാകുന്ന മൂന്നു കോണുകളും സമമാണെങ്കിൽ ഓരോ കോണും എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്? അവയുടെ സംബന്ധം $1 : 2 : 3$ ആണെങ്കിൽ കോണുകളുടെ വലിപ്പം എത്രയായിരിക്കും? കോണമാപകം ഉപയോഗിച്ച് സരളരേഖകൾ വരയ്ക്കുക.

അദ്ധ്യായം 24.

ത്രികോണങ്ങൾ (Triangles).



8സെ. മീ. നീളത്തിൽ AB എന്നൊരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക. AB യ്ക്ക് $30°$ ചരിഞ്ഞു 6സെ. മീ. നീളത്തിൽ AC എന്നൊരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക. B, C എന്ന ബിന്ദുക്കളെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുക. ABC എന്ന രൂപത്തെ ഒരു ത്രികോണം (Triangle) എന്നു പറയുന്നു. ഇങ്ങിനെ മൂന്നു

സരളരേഖകളാൽ ചുറ്റപ്പെട്ട രൂപത്തിന്നു ത്രികോണം എന്നു പേർ. ഇതിന്നു 3 ഭുജങ്ങളുള്ളതുകൊണ്ടു് ഇതിനെ ഒരു ത്രിഭുജം എന്നും പറയും. (1) AB, BC, CA എന്ന ഭുജങ്ങളേയും (2) A, B, C എന്ന കോണുകളേയും ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ അംഗങ്ങൾ (Elements) എന്നു പറയുന്നു. A, B, C എന്ന ബിന്ദുക്കൾ ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ (Vertices) ആകുന്നു. സൌകര്യത്തിന്നായി ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭുജത്തെ ആധാര (Base)മായി കരുതുന്നതായാൽ അതിന്നെതിരായ കോണിനെ ശീർഷകോൺ (Vertical angle) എന്നു പറയുന്നു. ത്രികോണത്തെ കുറിക്കുവാൻ △ എന്ന രൂപം ഉപയോഗിക്കുന്നു. △ ABC എന്നതിന്നു ABC എന്ന ത്രികോണം എന്നർത്ഥം.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ 6 അംഗങ്ങളും വേറൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ 6 അംഗങ്ങളോടു സമമാണെങ്കിൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും സർവ്വാംഗതുല്യങ്ങ (Congruent; identically equal) ളാണെന്നു പറയാം.

ഒരു പെട്ടിയുണ്ടാക്കുവാൻ ഒരു ആശാരി എത്ര അളവുകൾ എടുക്കാറുണ്ടു? 3 മാത്രം. അതായതു് നീളം, വീതി, ഉയരം ഇതേപ്രകാരം ഒരു ത്രികോണത്തിന്നു് 6 അംഗങ്ങളുണ്ടെങ്കിലും അതിന്നു് സർവ്വാംഗതുല്യമായ വേറൊരു ത്രികോണം വരക്കാൻ 6 അംഗങ്ങളേയും അളക്കണമെന്നില്ല. ഏതെല്ലാം അംഗങ്ങൾ അളക്കണമെന്നു് നമുക്കു പരിശോധിക്കാം.

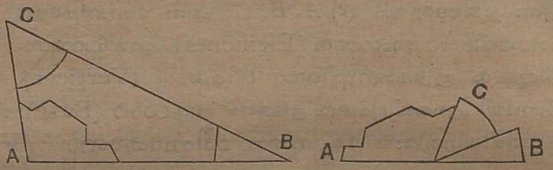
1. രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ നീളവും അവക്കിടയിലുള്ള കോണും മാത്രം ഉപയോഗിച്ചാണു് △ABCത്തെ നാം വരച്ചതു്. രണ്ടു ഭുജങ്ങളും അവക്കിടയിലുള്ള കോണും സമമായ എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളും സർവ്വാംഗതുല്യങ്ങളായിരിക്കുമെന്നു് ഇതിൽനിന്നു് നമുക്കു് അനുമാനിക്കാം. ഈ സത്യത്തെ നാം പിന്നീടു തെളിയിക്കും.

പരീക്ഷണം:—

$DE = 8$ സെ. മീ. $DF = 6$ സെ. മീ. $\angle D = 30°$. ഈ അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ചു് △DEF വരക്കുക. ബാക്കിയുള്ള അംഗങ്ങളെ അളന്നു് △ABC യും △DFE യും സർവ്വാംഗതുല്യങ്ങളാണോ എന്നു് പരിശോധിക്കുക.

△ABCത്തിന്റെ കോണുകൾ അളക്കുക. അവയുടെ തുക കാണുക. വേറെയും ത്രികോണങ്ങളെ വരച്ചു അവയുടെയും കോണുകളുടെ തുക കാണുക. നിങ്ങൾ കൃത്യമായി അളക്കുന്നതായാൽ തുക $180°$ ആണെന്നു് കാണാം. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക $180°$ അഥവാ 2 സമകോണുകൾ ആണെന്നു് നാം പിന്നീടു തെളിയിക്കും.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ആകൃതിയിൽ ഒരു കഷണം കടലാസ്സ് മുറിക്കുക. അതിന്റെ കോണുകളെ മുറിച്ചെടുത്ത് ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ ഒരേ

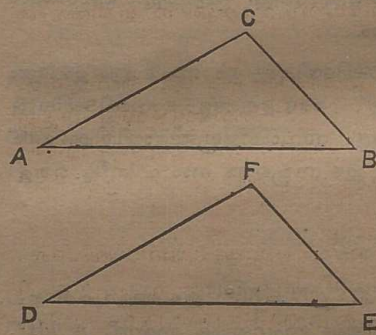


ബിന്ദുവിൽ ചേർത്തു വെക്കുക. അപ്പോൾ ചുവട്ടിലുള്ള 2 ഭുജങ്ങൾ ഒരേ സരളരേഖയിലാണെന്ന് കാണാം. ഒരു സരളരേഖയുടെ ഒരു ഭാഗത്തുള്ള കോണുകളുടെ തുക = 2 സമകോണുകൾ.

∴ ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക = 2 സമകോണുകൾ.

2. $\triangle ABC$ത്തിന് സർവ്വാംഗതുല്യമായ വേറൊരു ത്രികോണം വരക്കാനുള്ള ഒരു മാർഗ്ഗവുംകൂടി നമുക്കു പഠിക്കാം.

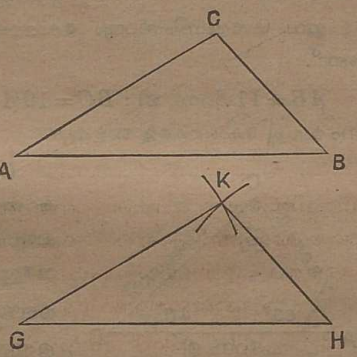
AB എന്ന സരളരേഖക്ക് സമമായി DE എന്നൊരു സരളരേഖ വരക്കുക. D, E എന്ന കോണുകൾ A, B എന്ന കോണുകൾക്ക് സമമാകത്തക്കവണ്ണം D, E എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി രണ്ടു സരളരേഖകൾ വരക്കുക. അവ Fൽ ചേരിക്കുന്നുവെന്നു വിചാരിക്കുക. ABC, DEF എന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ ബാക്കിയുള്ള അംഗങ്ങളെ അളക്കുന്നതായാൽ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും സർവ്വാംഗതുല്യങ്ങളാണെന്ന് കാണാം.



DE എന്ന ഭുജത്തിന്റെ അറ്റങ്ങളിലുള്ള D, E എന്ന രണ്ടു കോണുകൾക്കു പകരം ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു കോണുകളുടെ വലിപ്പമറിയുന്നതായാൽ അവയുടെ തുകയെ 180ൽനിന്നു കിഴിച്ച് മൂന്നാമത്തെ കോണിന്റെ വലിപ്പം നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം.

അതുകൊണ്ട് ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ഭുജത്തിന്റെ നീളവും ഏതെങ്കിലും രണ്ടു കോണുകളുടെ വലിപ്പവും അറിയുന്നതായാൽ ആ ത്രികോണത്തിന് സർവ്വാംഗതുല്യമായ വേറൊരു ത്രികോണം വരക്കുവാൻ സാധിക്കുന്നതാണെന്നു തെളിയുന്നു.

3. $\triangle ABC$ത്തിന്ന് സവ്വാംഗതുല്യമായ വേറൊരു ത്രികോണം വരക്കാൻ മൂന്നാമതൊരു മാർഗ്ഗവുംകൂടി പഠിക്കാം.



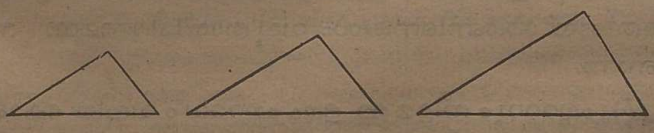
ABക്കു് സമമായി GH എന്നൊരു സരളരേഖ വരക്കുക. G കേന്ദ്രവും AC വ്യാസാർദ്ധവുമായി ഒരു ചാപരേഖ വരക്കുക. ഇതേപ്രകാരം H കേന്ദ്രവും BC വ്യാസാർദ്ധവുമായി ആദ്യത്തെ ചാപരേഖയെ K എന്നൊരു ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു ചാപരേഖ വരക്കുക.

GK, KH എന്നീ സരളരേഖകളെ വരക്കുക. ABC, GHK എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ ഭുജങ്ങൾ പരസ്പരം സമമാണെന്നു വ്യക്തമാകുന്നു. കോണുകളെ അളക്കുക. അവയും യഥാക്രമം സമമായിരിക്കും.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ 3 ഭുജങ്ങളുടേയും നീളം അറിയുന്നതായാൽ അതിനു് സവ്വാംഗതുല്യമായ വേറൊരു ത്രികോണം വരക്കാമെന്നു് ഇതിൽനിന്നു തെളിയുന്നു.

മേൽ ഉദാഹരിച്ചിട്ടുള്ള അളവുകളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു കൂട്ടം അറിയുന്നതായാൽ അവ ഉപയോഗിച്ചു് വരക്കാവുന്ന എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളും സവ്വാംഗതുല്യങ്ങളായിരിക്കും. അതായതു ഒരു നിശ്ചിത വലിപ്പവും രൂപവുമുള്ളൊരു ത്രികോണം വരക്കുവാൻ മേൽപ്പറഞ്ഞ അളവുകളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു കൂട്ടം അറിഞ്ഞാൽ മതി.

മേൽപ്പറഞ്ഞ മൂന്നു അളവുകളുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു കൂട്ടം അറിയാത്തപക്ഷം ഒരു നിശ്ചിത ത്രികോണത്തെ വരക്കാൻ സാധിക്കുന്നതല്ലെന്നും നമുക്കു സ്ഥാപിക്കാം. ഉദാഹരണമായി ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ 3 കോണുകളുടെ വലിപ്പം

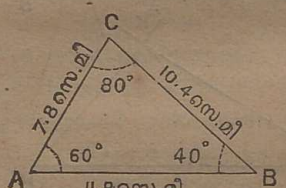


മാത്രം അറിയുന്നതായാൽ ഒരു നിശ്ചിതത്രികോണത്തെ വരക്കാൻ സാധിക്കുമോ എന്നു നോക്കുക. ഭുജങ്ങൾ ഒന്നിനേറെയും നീളം അറിയാത്തതുകൊണ്ടു് കോണു

കളുടെ വലിപ്പം മാത്രം ആസ്പദമാക്കി അനേകം ത്രികോണങ്ങൾ വരക്കാമെന്ന് താഴേ കാണുന്ന ത്രികോണങ്ങൾ പരിശോധിക്കുന്നതിനാൽ സ്പഷ്ടമാകും.

ഇവ ഓരോന്നിന്റെയും കോണുകൾ മറ്റവയുടെ കോണുകളോട് സമമാണ്.

$AB = 11{\cdot}8$ സെ. മീ.; $BC = 10{\cdot}4$ സെ. മീ.; $CA = 7{\cdot}8$ സെ. മീ. ത്രികോണം വരച്ചു കോണുകളെ അളക്കുക.



(1) രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം അവയെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന സരളരേഖയുടെ നീളമാണെന്ന് നാം മുമ്പു പഠിച്ചല്ലോ. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ തുക മൂന്നാമത്തെ ഭുജത്തെക്കാൾ അധികമാണെന്ന് ഇതിൽനിന്നു അനുമാനിക്കാം.

(2) ഈ സത്യം ആസ്പദമാക്കി രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം മൂന്നാമത്തെ ഭുജത്തേക്കാൾ കുറവാണെന്ന് തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

മേൽ കാണുന്ന ത്രികോണത്തെ സംബന്ധിച്ച് ഇവ പ്രസ്തുതമാണോ എന്നു നോക്കുക.

(3) $\angle A = 60°$, $\angle B = 40°$, $\angle C = 80°$

$AB > BC$ (AB, BC യേക്കാൾ വലുതെന്നർത്ഥം).

ABക്കെതിരായ കോൺ $= 80°$

BC ..... $= 60°$

$BC > AC$

ACക്കെതിരായ കോൺ $= 40°$.

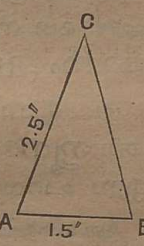
(*a*) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു ഭുജങ്ങൾ സമമല്ലെങ്കിൽ വലിയ ഭുജത്തിനെതിരായ കോൺ ചെറിയ ഭുജത്തിനെതിരായ കോണിനെക്കാൾ വലുതായിരിക്കുമെന്ന് നാം കാണുന്നു.

(*b*) ഏറ്റവും നീളമുള്ള ഭുജം ഏറ്റവും വലിയ കോണിനും, ഏറ്റവും നീളം കുറഞ്ഞ ഭുജം ഏറ്റവും ചെറിയ കോണിനും എതിരായിക്കിടക്കുന്നു.

മൂന്നു ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചു അവയുടെ ഭുജങ്ങളും കോണുകളും അളന്നു മേൽപ്പറഞ്ഞവ വാസ്തവമാണോ എന്നു നോക്കുക.

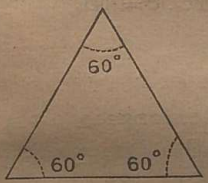
ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $AB = 1{\cdot}5''$, $AC = BC = 2{\cdot}5''$. A, B എന്ന കോണുകൾ അളക്കുക.

$AC = BC$. അതുകൊണ്ടു ഇവക്കെതിരെയുള്ള B, A എന്ന കോണുകളിൽ ഒന്ന് മറേതിനേക്കാൾ വലുതോ ചെറുതോ ആവാൻ പാടില്ല. അതായതു് $A = B$. ഈ കോണുകൾ അളന്നു നോക്കുക.



അനുമാനം:— ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു ഭുജങ്ങൾ സമമാണെങ്കിൽ അവക്കെതിരേയുള്ള കോണുകളും സമമായിരിക്കും. രണ്ടു ഭുജങ്ങളും സമമായിട്ടുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തെ ദ്വിസമ ഭുജത്രികോണം (Isosceles Triangle) എന്നു പറയുന്നു.

മൂന്നു ഭുജങ്ങളും സമമായ ഒരു ത്രികോണം വരക്കുക.



മേൽപ്രസ്താവിച്ച ന്യായപ്രകാരം 3 ഭുജങ്ങളും സമമായതുകൊണ്ടു് അവക്കെതിരായുള്ള കോണുകളും സമമായിരിക്കണം. അളന്നു പരിശോധിക്കുക.

മൂന്നു ഭുജങ്ങളും സമമായ ഒരു ത്രികോണത്തെ സമഭുജത്രികോണം (Equilateral Triangle) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആയതുകൊണ്ടു ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ കോണും 60° ആയിരിക്കും.

കോണമാപകം ഉപയോഗിക്കാതെ 60° വലിപ്പമുള്ള ഒരു കോൺ വരക്കാനുള്ള മാർഗ്ഗം ഇതിൽനിന്നു നമുക്കു് അനുമാനിക്കാം.

ഭുജങ്ങളുടെ വലിപ്പം ആസ്പദമാക്കി ത്രികോണങ്ങളെ തരം തിരിക്കാം.

(1) 3 ഭുജങ്ങളും സമമായ ത്രികോണം — സമഭുജത്രികോണം.

(2) 2 ഭുജങ്ങൾ സമമായ ത്രികോണം — ദ്വിസമഭുജത്രികോണം.

(3) ഭുജങ്ങൾ സമമല്ലാത്ത ത്രികോണം — വിഷമ (അതുല്യ) ഭുജത്രികോണം (Scalene Triangle).

കോണുകളുടെ വലിപ്പം ആസ്പദമാക്കിയും ത്രികോണങ്ങളെ തരം തിരിക്കാം.

(1) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക 180° ആയതുകൊണ്ടു് ഒരു ത്രികോണത്തിൽ ഒരു അധികകോൺ മാത്രമേ ഉണ്ടായിരിക്കയുള്ളു എന്നതു

വ്യക്തമാണല്ലോ. ഒരു അധികകോണുള്ള ത്രികോണത്തെ **അധികകോണത്രികോണം (Obtuse-angled triangle)** എന്നു പറയുന്നു.

(2) ഒരു ത്രികോണത്തിൽ ഒരു സമകോൺ മാത്രമുണ്ടായിരിക്കാൻ പാടുള്ളൂ എന്നുണ്ട് ഒരു സമകോണുള്ള ത്രികോണത്തെ **സമകോണത്രികോണം (Right-angled triangle)** എന്നു പറയുന്നു.

(3) മൂന്നു കോണുകളും ന്യൂനകോണുകളായ ത്രികോണത്തെ **ന്യൂനകോണത്രികോണം (Acute-angled triangle)** എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിലെ ഏറ്റവും വലിയ ഭുജം സമകോണിനെതിരായിരിക്കുമെന്നു വ്യക്തമാണല്ലോ. ഈ ഭുജത്തെ സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ **വിപുലരേഖ (Hypotenuse)** എന്നു പറയുന്നു.

ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ A എന്ന കോണിനെതിരായ BC എന്ന ഭുജത്തെ ചുരുക്കി a എന്നെഴുതുന്നു. ഇതേപ്രകാരം $b=AC$, $c=AB$.

അഭ്യാസം 57.

1. താഴെ പറയുന്ന അളവുകളുള്ള ABC എന്ന ത്രികോണങ്ങളെ വരച്ചു ശേഷമുള്ള അംഗങ്ങളെ അളക്കുക. കോണുകളുടെ വലിപ്പം ആസ്പദമാക്കി ത്രികോണങ്ങളെ തരംതിരിക്കുക.

(*a*) $AB=7{\cdot}5$സെ. മീ., $BC=8{\cdot}7$സെ.മീ., $\angle ABC=110°$.
(*b*) $AB=3{\cdot}8''$, $A=39°$, $B=57°$.
(*c*) $AB=6''$, $BC=3''$, $CA=4''$.
(*d*) $b=4{\cdot}5''$, $c=3{\cdot}8''$, $A=72°$.
(*e*) $b=12{\cdot}3$സെ.മീ., $A=70°$, $B=63°$.
(*f*) $a=7{\cdot}2$സെ.മീ., $b=7.5$സെ.മീ., $c=9{\cdot}3$സെ.മീ.
(*g*) $a=5$സെ.മീ., $b=c=7$സെ.മീ.

2. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഭുജങ്ങളുടെ നീളം $6{\cdot}6$സെ.മീ. ആണ്. ത്രികോണം വരച്ചു കോണുകളെ അളക്കുക.

3. കോണമാപകം ഉപയോഗിക്കാതെ $60°$ വലിപ്പമുള്ള ഒരു കോൺ വരയ്ക്കുക.

4. $\triangle PQR$ത്തിൽ $PQ=PR=2{\cdot}8''$. $\angle P=35°$. Q, R എന്ന

കോണുകളുടെ വലിപ്പം അനുമാനിക്കുക. ത്രികോണം വരച്ച് നിങ്ങളുടെ അനുമാനം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

5. $\triangle XYZ$ത്തിൽ $YZ=8{\cdot}4$സെ.മീ., $XY=XZ$. $X=64°$. ത്രികോണം വരച്ച് സമമായ ഭുജങ്ങളെ അളക്കുക.

6. ഒരു ലിസമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ഭുജം $=5$സെ.മീ. ഒരു കോൺ $=70°$. ഈ അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ചു എത്ര ത്രികോണങ്ങൾ വരക്കാം? ഒരു കോൺ $92°$ ആണെങ്കിൽ എത്ര ത്രികോണങ്ങൾ വരക്കാം? ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ച് അറിയുന്ന അളവുകൾ ക്രമത്തിൽ കുറിക്കുക.

7. ഒരു സമകോണത്രികോണം ഒരു ലിസമഭുജത്രികോണവും ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ കോണുകൾ കാണുക.

8. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു കോണുകളുടെ തുക $110°$യും അവയുടെ വ്യത്യാസം $30°$യുമാണ്.

(1) മൂന്നു കോണുകളുടേയും വലിപ്പം കാണുക.

(2) ത്രികോണം ഏതു തരമാണ്?

(3) ഒരു ഭുജം $2''$ ആണെങ്കിൽ 2 ത്രികോണങ്ങൾ വരക്കാമെന്നു കണിക്കുക. കാരണം പറയുക.

(4) ഓരോ ത്രികോണവും വ്യത്യിയായി വരച്ച് അവയിൽ അറിയുന്ന അംഗങ്ങളുടെ അളവുകൾ കുറിക്കുക. (1935)

9. ഒരു നിരത്തിന്റെ ഒരു വശത്തു 50 വാര അകലെയായി രണ്ടു കഷിത്തൂണുകളും അവക്കു മദ്ധ്യേ ഒരു വൃക്ഷവും ഉണ്ട്. ഒരു കഷിത്തൂണിൽനിന്നു 40 വാരയും മറ്റേതിൽനിന്നു 30 വാരയും അകലെയായി നിരത്തിന്റെ മറുവശത്തു ഒരു വിളക്കുകാലുണ്ട്. എന്നാൽ വൃക്ഷത്തിൽനിന്നു ആ വിളക്കുകാലിലേക്കു എത്ര ദൂരമുണ്ട്?

10. A, B എന്ന 2 പട്ടണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം 18 നാഴികയാണ്. Aയിൽനിന്നു Bയിലേക്കുള്ള നേർനിരത്തിന്നു $60°$ ചരിഞ്ഞ ഒരു നിരത്തിന്മേൽ Aയിൽനിന്നു 24 നാഴിക ദൂരത്തായി C എന്നൊരു പട്ടണം സ്ഥിതിചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ Bയിൽനിന്നു Cയിലേക്കുള്ള ദൂരവും BC എന്ന നിരത്തു AB, AC എന്നീ നിരത്തുകൾക്കു എത്ര ചരിഞ്ഞിരിക്കുന്നുവെന്നും കാണുക.

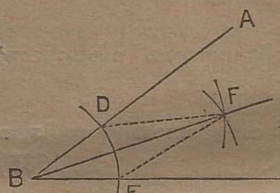
11. ഒരു പുഴയുടെ കരയിൽ ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഗ്രാമമുണ്ട്. ഗ്രാമത്തിന്റെ രണ്ടതിരുകൾ പുഴയോടു $70°$യും $50°$യും ചരിഞ്ഞാണുള്ളതു. പുഴയോടു തൊട്ടിട്ടുള്ള ഭാഗത്തിന്നു 9 ഫർലോങ്ങ് നീളമുണ്ടെങ്കിൽ ശേഷമുള്ള അതിരുകളുടെ നീളം കാണുക.

12. A, B, C മൂന്നു വീടുകളാകുന്നു. Aയും Bയും തമ്മിൽ 820 അടി ദൂരമുണ്ട്. C, Aയിൽനിന്ന് 530 അടിയും, Bയിൽനിന്ന് 360 അടിയും ദൂരത്തായിരിക്കുന്നു. തോതനുസരിച്ച് ഒരു രൂപം വരച്ച് AB, BC, CA എന്നീ സരളരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോണുകളെ അളക്കുക.

അദ്ധ്യായം 25.

ലഘുനിർമ്മാണങ്ങൾ (Simple Constructions).

(1) ഒരു കോണിനെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുക. ABC എന്ന ഒരു കോൺ വരയ്ക്കുക. BF അതിനെ രണ്ടു സമാംശങ്ങളാക്കുന്നുവെന്നു വിചാരിക്കുക. എന്നാൽ BFന്റെ ഇരുവശത്തും സർവ്വാംഗതുല്യങ്ങളായ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ നിർമ്മിക്കാം. ഇതിൽനിന്നു താഴെ പറയുന്ന നിർമ്മാണം അനുമാനിക്കാമോ?



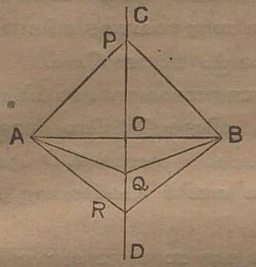
B കേന്ദ്രമായി ഏതെങ്കിലും വ്യാസാർദ്ധത്തോടുകൂടി BA, BC എന്ന ഭുജങ്ങളെ D, E എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു ചാപരേഖ വരയ്ക്കുക. Dയും Eയും കേന്ദ്രങ്ങളായി ഒരേ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള രണ്ടു ചാപരേഖകൾ F എന്ന ബിന്ദുവിൽ തമ്മിൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം വരയ്ക്കുക. എന്നാൽ BF എന്ന സരളരേഖ $\angle ABC$ നെ രണ്ടു സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു.

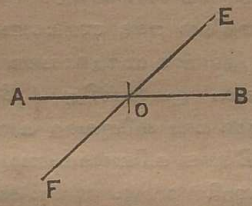
ABF, CBF എന്ന കോണുകളെ അളന്നു അവ സമമോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. ABC എന്ന കോണിനെ BFൽ മടക്കി മടക്കുക. BA, BCയിൽ മടക്കി പതിക്കുന്നുവോ എന്നു നോക്കുക. പതിക്കുന്നതായാൽ ഉപരിവിന്യാസം ആസ്പദമാക്കിയുള്ള ന്യായപ്രകാരം $\angle ABC$നെ BF 2 സമഭാഗങ്ങളാക്കിയിരിക്കുന്നു എന്നു അനുമാനിക്കാം.

$\triangle BDF$ത്തിന്റെ ഭുജങ്ങൾ $\triangle BEF$ത്തിന്റെ ഭുജങ്ങളോടു സമമാണ്. അതിനാൽ ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വാംഗതുല്യങ്ങളും അവയിലുള്ള DBF, EBF എന്ന കോണുകൾ സമവും ആണ്.

ഒരു സമകോണം ഒരു അധികകോണും വരച്ചു മേല്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ അവയെ രണ്ടു സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുക. കോണമാപകംകൊണ്ടു അംശങ്ങളെ അളന്നു ക്രിയ ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(2) ഒരു സരളരേഖയെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുക.





ഒരു കടലാസ്സിൽ AB എന്നൊരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക. B, A യിന്മേൽ പതിക്കത്തക്കവണ്ണം കടലാസ്സു മടക്കുക. കടലാസ്സു വിടർത്തി, മടക്കിന്നു CD എന്നും അതു ABയെ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്നു O എന്നും പേർ കൊടുക്കുക. AOC, BOC എന്ന കോണുകൾ സമമായതുകൊണ്ടു അവ ഓരോന്നും ഒരു സമകോണും CD, ABക്കു ലംബവുമാകുന്നു. O, ABയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവായതുകൊണ്ടു CD, ABയുടെ ഒരു ദ്വിഭാജകം (bisector) ആണു്. 2-ാംപടത്തിൽ ABയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവായ Oയിൽക്കൂടി വരച്ച EOF എന്ന സരളരേഖ ABയുടെ ഒരു ദ്വിഭാജകമാണെങ്കിലും അതിന്നു ലംബമല്ല. 1-ാം പടത്തിൽ COD, ABയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകയും ABക്കു ലംബമാകയും ചെയ്യുന്നതുകൊണ്ടു അതിനെ ABയുടെ ദ്വിഭാജകലംബം (perpendicular bisector) എന്നു പറയുന്നു.

CDയിന്മേൽ P എന്നൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. PA, PB എന്ന സരളരേഖകളെ അളക്കുക. CDയിന്മേൽ Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളേയും അടയാളപ്പെടുത്തി QA, QB, RA, RB എന്ന സരളരേഖകളെ അളക്കുക. $PA=PB$; $QA=QB$; $RA=RB$ ആണെന്നു കാണാം. അതായതു CDയിന്മേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഓരോ ബിന്ദുവും A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽനിന്നു സമദൂരത്താണ്.

പൊതുവിൽ പറയുന്നതായാൽ ഒരു സരളരേഖയുടെ ദ്വിഭാജകലംബത്തിന്മേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഓരോ ബിന്ദുവും രേഖയുടെ രണ്ടറ്റങ്ങളിൽനിന്നും സമദൂരത്താണ്.

CDക്കു പുറമെയുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു Aയിലേക്കും Bയിലേക്കുമുള്ള ദൂരങ്ങൾ സമമല്ലെന്നും പരീക്ഷണംകൊണ്ടു കാണാം.

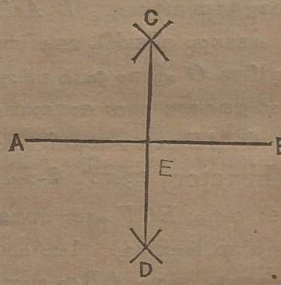
വൃത്തലേഖകം ഉപയോഗിച്ചു Aയിൽനിന്നും Bയിൽനിന്നും സമദൂരത്തായി ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവ CDയിന്മേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതായി കാണാം. അതായതു ഒരു സരളരേഖയുടെ അറ്റങ്ങളിൽനിന്നു സമദൂരത്തിലിരി

ക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ആ രേഖയുടെ ദ്വിഭാജകലംബത്തിന്മേൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

മേൽപ്പറഞ്ഞ സംഗതികളിൽനിന്നും ഒരു സരളരേഖയുടെ ദ്വിഭാജകലംബം വരച്ചു അതിനെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുന്ന മാർഗ്ഗം അനുമാനിക്കാം.

AB എന്നൊരു സരളരേഖയെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കണമെന്നു വിചാരിക്കുക. വൃത്തലേഖകം ഉപയോഗിച്ചു A, B എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽനിന്നും സമമൂരത്തായി C, D എന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ കണ്ടുപിടിക്കുക. എന്നാൽ CD എന്ന സരളരേഖ ABയുടെ ദ്വിഭാജകലംബവും അവ തമ്മിൽ ഛേദിക്കുന്നതു ABയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽ വെച്ചും ആയിരിക്കും.

സാധാരണമായി ഒരു സരളരേഖയെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുന്ന മാർഗ്ഗം താഴെ ചേർക്കുന്നു.



AB എന്നൊരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക. Aയും Bയും കേന്ദ്രങ്ങളായും ABയുടെ പകുതിയിലധികം നീളം വ്യാസാർദ്ധമായും C, D എന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ തമ്മിൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം രണ്ടു ചാപരേഖകൾ വരയ്ക്കുക. Cയും Dയും കൂട്ടിച്ചേർക്കുക. CD, ABയെ E എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നതായാൽ $AE = EB$.

AEയും EBയും അളന്നു അവ സമമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

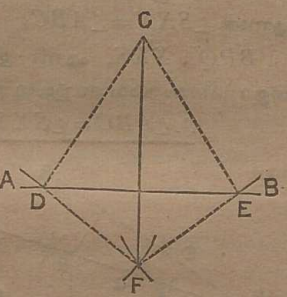
ചതുരമട്ട (Setsquare)ത്തിന്റെ ഒരു വക്കു മറേതിനെ ലംബമായതു കൊണ്ടു അതിനെ ഉപയോഗിച്ചു ഒരു സരളരേഖക്കു അതിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടിയോ അതിനു പുറത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടിയോ ഒരു ലംബരേഖ വരയ്ക്കുവാൻ നിങ്ങൾ പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞുവല്ലോ. അളവുകോലും വൃത്തലേഖകവും മാത്രം ഉപയോഗിച്ചു ലംബരേഖകൾ നിർമ്മിക്കുവാൻ ഇപ്പോൾ പഠിക്കാം.

(3) ഒരു സരളരേഖക്കു ലംബമായി അതിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി ഒരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക.

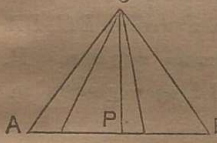
C, AB എന്ന സരളരേഖയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ്. ACB എന്ന കോൺ ഒരു സരളകോൺ, (Straight angle) അതായതു 2 സമകോണുകൾക്കു സമമാണ്. അതിനാൽ ACB എന്ന കോണിനെ 2 സമഭാഗമാക്കുന്നതായാൽ ഓരോ അംശം ഒരു സമകോണും, അതിന്റെ ദ്വിഭാജകം ACBക്കു ലംബവുമായിരിക്കും. മേൽ വിവരിച്ച വിധത്തിൽ $\angle ACB$ നെ രണ്ടു സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിച്ചു $\angle ACF = 90°$ യാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.



(4) ഒരു സരളരേഖക്കു ലംബമായി അതിനു പുറമെയുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നു ഒരു സരളരേഖ വരക്കുക.

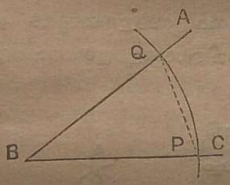


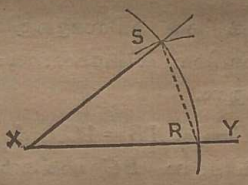
C, ABക്കു പുറമെയുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാകുന്നു. C കേന്ദ്രമായി ABയെ D, E എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്ന ഒരു ചാപരേഖ വരക്കുക. Dയും Eയും കേന്ദ്രങ്ങളായി ഒരേ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള രണ്ടു ചാപരേഖകൾ F എന്ന ബിന്ദുവിൽ തമ്മിൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം വരക്കുക. എന്നാൽ CF എന്ന സരളരേഖ ABക്കു ലംബമായിരിക്കും.



Oയിൽനിന്നു ABക്കു ലംബമായി OP എന്നൊരു സരളരേഖ വരക്കുക. ABയിലേക്കു വേറെയും സരളരേഖകൾ വരക്കുക. അവയെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുന്നതായാൽ OP അവയിൽ ഏറ്റവും ചെറുതാണെന്നു കാണാം. Oയിൽനിന്നു AB യിലേക്കു വരക്കാവുന്ന സരളരേഖകളിൽവെച്ചു ഏറ്റവും ചെറുതായ OP എന്ന രേഖയുടെ നീളത്തെ Oയിൽനിന്നു ABയിലേക്കുള്ള ദൂരമെന്നു പറയുന്നു. പൊതുവിൽ പറയുന്നതായാൽ ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു ഒരു സരളരേഖയിലേക്കുള്ള ദൂരം ആ ബിന്ദുവിൽനിന്നു സരളരേഖയിലേക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളമാകുന്നു.

(5) ഒരു കോണിനു സമമായി വേറൊരു കോൺ വരക്കുക.





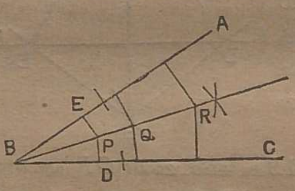
$\angle ABC$നു സമമായി X ഒരു ശീർഷവും XY ഒരു ഭുജവുമായിട്ടുള്ള ഒരു കോൺ വരക്കണമെന്നു വിചാരിക്കുക.

B കേന്ദ്രമായി BC, BA എന്ന ഭുജങ്ങളെ യഥാക്രമം P, Q എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം ഏതെങ്കിലും ഒരു ചാപരേഖ വരക്കുക. അതേ വ്യാസാർദ്ധത്തോടുകൂടി X കേന്ദ്രമായി XYനെ Rൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു ചാപരേഖ വരക്കുക. ഈ ചാപരേഖയെ Sൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം R കേന്ദ്ര

മായും PQ വ്യാസാർദ്ധമായും ഒരു ചാപരേഖ വരക്കുക. S, X കൂട്ടിച്ചേർക്കുക. എന്നാൽ $\angle SXY = \angle ABC$.

BPQ, XRS, എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ ഭുജങ്ങൾ യഥാക്രമം സമവും അതുനിമിത്തം അവ സർവ്വാംഗ തുല്യങ്ങളും ആണ്.

$\therefore \angle ABC = \angle SXY.$



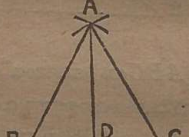
(6) $\angle ABC$ വരച്ചു അതിന്റെ ഛിദ്രാർദ്ധകത്തിന്മേൽ P എന്നൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Pയിൽനിന്നു BC, BA എന്ന ഭുജങ്ങൾക്കു PD, PE എന്ന ലംബരേഖകൾ വരച്ചു അവയെ അളക്കുക. ഇതേപ്രകാരം ഛിദ്രാർദ്ധകത്തിന്മേൽ Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളേയും അടയാളപ്പെടുത്തി അവയിൽനിന്നു BC, BA എന്നീ ഭുജങ്ങളിലേക്കു ലംബരേഖകൾ വരച്ചു അവയെയും അളക്കുക. P, Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഓരോന്നിൽനിന്നും BC, BA എന്ന ഭുജങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബരേഖകൾ സമമാണെന്നു കാണാം.

ഇത്തരം പരീക്ഷണത്തിൽനിന്നു ഒരു കോണിന്റെ ഛിദ്രാർദ്ധകത്തിന്മേലുള്ള ഓരോ ബിന്ദുവും അതിന്റെ ഭുജങ്ങളിൽനിന്നു സമദൂരത്താണെന്നു നമുക്കു അനുമാനിക്കാം.

(7) (a) സാധാരണമായി ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭുജത്തെ അതിന്റെ ആധാരം(Base)മായും അതിനെതിരായ കോണിനെ ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷകോൺ (vertical angle) ആയും കരുതുന്നു.

എന്നാൽ ഒരു ഛിസമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ സമഭുജങ്ങളുടെ ഇടയിലുള്ള കോണിനെ ശീർഷകോണായും അതിനെതിരെയുള്ള ഭുജത്തെ ആധാരമായും കരുതുന്നു.

$\triangle ABC$ത്തിൽ $AB = AC$. A ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷകോണും BC അതിന്റെ ആധാരവും ആണ്.



(b) ABC എന്ന ഒരു ഛിസമഭുജത്രികോണത്തെ ഒരു കടലാസ്സിൽ വരച്ചു B, Cയിന്മേൽ പതിക്കത്തക്കവണ്ണം കടലാസ്സു മടക്കുന്നതായാൽ A മടക്കിന്മേൽ കിടക്കുന്നതായും, AB എന്ന ഭുജം AC എന്ന ഭുജത്തിന്മേലും, മടക്കിന്റെ ഒരു വശത്തുള്ള ത്രികോണം മറ്റേവശത്തുള്ള ത്രികോണത്തിന്മേലും പതിക്കുന്നതായി കാണാം. കടലാസ്സിന്റെ മടക്കു BCയെ Dയിൽ

ചേരിക്കുന്നതായാൽ ADB, ADC എന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വാംഗതുല്യങ്ങളായിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട് (1) AD, A എന്ന ശീർഷകോണിന്റെ ദ്വിഭാജകമായിരിക്കും.

(2) AD, BC എന്ന ആധാരത്തിന്റെ ദ്വിഭാജകലംബമായിരിക്കും.

ഒരു ദ്വിസമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷകോണിന്റെ ദ്വിഭാജകം (1) ആധാരത്തെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുന്നു. (2) ആധാരത്തിനു ലംബമാകുന്നു.

(3) മേൽവിവരിച്ച നിർമ്മാണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു ചില പ്രത്യേകകോണുകൾ വരക്കാം.

(*a*) ഉദാഹരണമായി 45° വലിപ്പമുള്ള ഒരു കോൺ വരക്കാൻ ഒരു സമകോണിനെ 2 സമഭാഗമാക്കിയാൽ മതി.

(*b*) 15° വലിപ്പമുള്ള ഒരു കോൺ വരക്കാൻ 60° വലിപ്പമുള്ള ഒരു കോണിനെ 2 സമഭാഗമാക്കി കിട്ടുന്ന ഒരംശത്തെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കിയാൽ മതി.

അഭ്യാസം 58.

1. 70°, 134°, 25°, 153° വലിപ്പമുള്ള കോണുകളെ വരച്ചു ഓരോന്നിനേയും രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുക. കോണമാപകംകൊണ്ടു ഭാഗങ്ങളെ അളന്നു അവ സമമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

2. 147°, 53° വലിപ്പമുള്ള കോണുകളെ വരച്ചു ഓരോന്നിനേയും 4 സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുക. കോണമാപകം ഉപയോഗിച്ചു നിങ്ങളുടെ ക്രിയ ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

3. 165° വലിപ്പമുള്ള ഒരു കോൺ വരച്ചു അതിന്റെ ഒരംശം മറ്റേതിന്റെ 3 ഇരട്ടിയാകത്തക്കവണ്ണം അതിനെ ഭാഗിക്കുക. ചെറിയ അംശത്തെ അളക്കുക.

4. 129° വലിപ്പമുള്ള ഒരു കോൺ വരച്ചു അതിനെ 4 : 3 : 1 എന്ന സംബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുക. ഓരോ അംശത്തേയും അളക്കുക.

5. 7·5 സെ. മീ. നീളമുള്ള ഒരു സരളരേഖ വരച്ചു അതിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദു കാണുക.

6. 3·7" നീളമുള്ള ഒരു സരളരേഖ വരച്ചു അതിനെ 4 സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുക.

7. 11 സെ. മീ. നീളമുള്ള ഒരു സരളരേഖയുടെ ഒരംശം മറ്റേ അംശത്തിന്റെ 3 ഇരട്ടിയാകത്തക്കവണ്ണം അതിനെ ഭാഗിക്കുക.

8. ഏതെങ്കിലും ഒരു സരളരേഖ വരച്ചു അതിന്റെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗം കാണുക. നീളം അളന്നു നിങ്ങളുടെ ക്രിയ ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

9. 40 അടി നീളമുള്ള ഒരു മതിലിൽനിന്നു 15 അടി അകലെയും മതിലിന്റെ രണ്ടറ്റത്തുനിന്നും സമദൂരത്തുമായി ഒരു തൂൺ നാട്ടിയിരിക്കുന്നു. ഒരു പടം വരച്ചു തൂണിൽനിന്നു മതിലിന്റെ ഓരോ അറ്റത്തിലേക്കുമുള്ള ദൂരം കാണുക.

10. ഒരു പറമ്പിൽ ഒരു മാവിൽനിന്നു 65 വാര അകലെയായി ഒരു പിലാവുണ്ട്. മാവിൽനിന്നു 60 വാരയും, പിലാവിൽനിന്നു 25 വാരയും അകലെയായി ഒരു തെങ്ങുമുണ്ട്. തെങ്ങിൽനിന്നു 40 വാര അകലെയും, മാവിൽനിന്നും പിലാവിൽനിന്നും സമദൂരത്തും, തെങ്ങുള്ളവശത്തായും ഒരു നിധി കുഴിച്ചിട്ടതായി അറിവുണ്ട്. എന്നാൽ ഒരു പടം വരച്ചു നിധിയുടെ സ്ഥാനം കുറിക്കുക.

11. ഏതെങ്കിലും ഒരു ത്രികോണം വരച്ചു അതിന്റെ ഭുജങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ ശീർഷങ്ങളായ ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.

12. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഭുജങ്ങളുടെ നീളം 2·9"ഉം 2·1"ഉം 2"ഉം ആണ്. ത്രികോണം വരച്ചു അതിന്റെ ഏറ്റവും നീളമുള്ള ഭുജത്തിലേക്കു അതിനെതിരായ ശീർഷത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബരേഖയുടെ നീളം കാണുക.

13. ഒരു തോട്ടം ABC എന്ന ത്രികോണാകൃതിയിലാകുന്നു. $AB=640$ അടി; $BC=$ 940 അടി; $AC=1060$ അടി. തോട്ടത്തിന്റെ ഒരു പടം വരയ്ക്കുക. B എന്ന മൂലയിൽനിന്നു AC എന്ന രേഖയിലേക്കുള്ള ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ദൂരം പടത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ദൂരം അളന്നു കാണുക.

14. ഒരു കടൽതീരത്തു 300 വാര അകലെയായി P, Q എന്ന രണ്ടു സ്ഥലത്തുനിന്നു രണ്ടുപേർ B എന്ന ഒരു തോണിയെ നോക്കിയപ്പോൾ BPQ, BQP എന്ന കോണുകൾ 50°യും 70°യും ആണെന്നു കണ്ടു. എന്നാൽ തീരത്തുനിന്നു തോണിയിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക. (കടൽത്തീരം ഒരു സരളരേഖയാണെന്നു കരുതുക). (1922)

15. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $B=70°$ $C=50°$, $c=10$ സെ.മീ. Aയിൽനിന്നും, Bയിൽനിന്നും അവയ്ക്കെതിരെയുള്ള ഭുജങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബരേഖകളുടെ നീളം അളന്നു കാണുക.

16. ഏതെങ്കിലും ഒരു ന്യൂനകോണത്രികോണം വരയ്ക്കുക. അതിന്റെ ഓരോ ശീർഷത്തിൽനിന്നും അതിനെതിരായ ഭുജത്തിലേക്കു ഓരോ ലംബരേഖ വരയ്ക്കുക. നിങ്ങൾ എന്തു കാണുന്നു? വേറെയും രണ്ടു ന്യൂനകോണത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചു ഇതേ പരീക്ഷണം ചെയ്യുക. ലംബരേഖകളെപ്പറ്റി നിങ്ങൾ എന്തനുമാനിക്കുന്നുവെന്നു എഴുതുക.

17. ഒരു അധികകോണത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഓരോ ശീർഷത്തിൽനിന്നും അതിനെതിരായ ഭുജത്തിലേക്കു ഓരോ ലംബരേഖ വരയ്ക്കുക. അവ ത്രികോണത്തിനകത്തോ പുറത്തോ ചേരിക്കുന്നതു? വേറെയും രണ്ടു അധിക

കോണത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചു ഇതേ പരീക്ഷണം ചെയ്യുക. നിങ്ങൾ എന്തുമനസ്സിലാക്കുന്നു?

18. ABC എന്നൊരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ABക്കു സമമായി PQ എന്നൊരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക. P, Q എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ Aക്കും Bക്കും സമമായി കോണമാപകം ഉപയോഗിക്കാതെ കോണുകൾ വരയ്ക്കുക. അവയുടെ ഭുജങ്ങൾ തമ്മിൽ ചേരുന്ന ബിന്ദുവിനു R എന്നു പേരിടുക. ABC PQR എന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വാംഗതുല്യമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

19. AB എന്നൊരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക. ABയുടെ ഒരേ വശത്തായി ഭുജങ്ങൾ Cയിൽ ചേരുകയുംചെയ്യുന്നതുമായ കോണമാപകം ഉപയോഗിക്കാതെ Aയിലും Bയിലും രണ്ടു തുല്യകോണുകൾ വരയ്ക്കുക. ACയും BCയും അളക്കുക. നിങ്ങൾ എന്തു കാണുന്നു?

20. BAC എന്നൊരു ന്യൂനകോൺ വരയ്ക്കുക. അതിനു സമമായി കോണമാപകം ഉപയോഗിക്കാതെ ACയുടെ മറുവശത്തു $\angle CAD$ വരയ്ക്കുക. ACയിന്മേൽ P എന്നൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. Pയിൽനിന്നു AB, AD എന്ന ഭുജങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബദൂരം കാണുക. അവ സമമാണോ?

21. കോണമാപകം ഉപയോഗിക്കാതെ താഴെ കാണുന്ന വലിപ്പമുള്ള കോണുകൾ വരയ്ക്കുക. അവയെ കോണമാപകംകൊണ്ടു അളന്നു നിങ്ങളുടെ നിർമ്മാണം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

$45°$, $30°$, $120°$, $105°$, $67\frac{1}{2}°$, $37\frac{1}{2}°$, $127\frac{1}{2}°$.

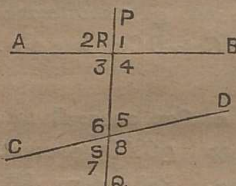
22. ഒരു ലംബസമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കുക. അതിന്റെ ആധാരത്തിലേക്കു അതിനെതിരായ ശീർഷത്തിൽനിന്നു ഒരു ലംബരേഖ വരയ്ക്കുക. ഇതു ശീർഷകോണിന്റെ ലംബാർദ്ധകമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. ഇതു ആധാരത്തെ അംശിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളെ അളക്കുക.

23. ഒരു ലംബസമഭുജത്രികോണം വരയ്ക്കുക. അതിന്റെ ആധാരത്തിന്റെ ലംബാർദ്ധകലംബം വരയ്ക്കുക. ഇതു ശീർഷകോണിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നുവോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

അദ്ധ്യായം 26.

സമാന്തരസരളരേഖകൾ (Parallel Straight Lines).

AB, CD എന്ന സരളരേഖകളെ PQ എന്ന സരളരേഖ R, S എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. PQ എന്ന സരളരേഖയെ AB, CD എന്ന സരളരേഖകളുടെ തിര്യ്ക്കുരേഖ (Transversal) യെന്നു പറയുന്നു.



R, S എന്ന ബിന്ദുക്കളിലുള്ള 8 കോണുകൾക്കു അവയുടെ കിടപ്പനുസരിച്ചു പ്രത്യേക പേരുകൾ കൊടുക്കുന്നു.

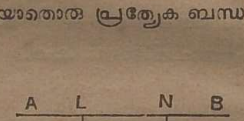
(1) 1ഉം 5ഉം കോണുകളെ സദൃശകോണുകൾ (Corresponding angles) എന്നു പറയുന്നു. ഇതേപ്രകാരം (2, 6), (3, 7), (4, 8) എന്നീ ഓരോ ജോടി കോണുകളും സദൃശകോണുകളാകുന്നു.

(2) ഒരു കോൺ ഇടവിട്ടിട്ടുള്ള കോണുകളെ ഏകാന്തരകോണുകൾ (Alternate angles) എന്നു പറയുന്നു. (4, 6), (3, 5) എന്നീ ജോടി കോണുകൾ ഏകാന്തരകോണുകളാണ്.

(3) AB, CD എന്ന രേഖകളുടെ ഇടയിലുള്ള 3, 4, 5, 6, എന്നീ കോണുകളെ ആന്തരകോണുകൾ (Interior angles) എന്നും അവക്കു പുറമെയുള്ള 1, 2, 7, 8 എന്നീ കോണുകളെ ബാഹ്യകോണുകൾ (Exterior angles) എന്നും പറയുന്നു.

AB, CD എന്ന രേഖകളെ നീട്ടുന്നതായാൽ അവ തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതാണെന്നു സ്പഷ്ടമാണ്. തിര്യ്ക്കുരേഖ ഇവയെ ഛേദിക്കുന്നതിനാൽ ഉണ്ടാവുന്ന സദൃശകോണുകളെ അളക്കുന്നതായാൽ അവ തമ്മിൽ യാതൊരു പ്രത്യേക ബന്ധവുമില്ലെന്നു കാണാം.

ABക്കു ലംബമായി LM, NP എന്ന രണ്ടു സരളരേഖകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. LM, NPക്കു സമമാകത്തക്കവണ്ണം $CMPD$ എന്ന സരളരേഖ വരച്ചിരിക്കുന്നു. LM, NP സമമായതുകൊണ്ടു AB, CD എന്ന സരളരേഖകളെ എത്രതന്നെ ഇരുവശത്തേക്കും നീട്ടുന്നതായാലും അവ തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടുന്നതല്ലെന്നു സ്പഷ്ടമാണ്. ഇങ്ങിനെ ഇരുവശത്തേക്കും എത്രതന്നെ നീട്ടുന്നതായാ



ലും തമ്മിൽ കൂട്ടിമുട്ടാത്ത സരളരേഖകളെ **സമാന്തരസരളരേഖകൾ (Parallel straight lines)** എന്നു പറയുന്നു.

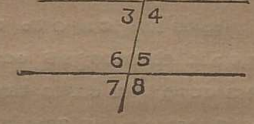
പെട്ടികൾ, മേശകൾ, പുസ്തകങ്ങൾ എന്നിവയുടെ വക്കുകളും തീവണ്ടിപ്പാതയുടെ വാളങ്ങളും നോക്കുന്നതായാൽ അവ സമാന്തരരേഖകളാണെന്നു കാണാം.

രണ്ടു സമാന്തരരേഖകളുടെ ഒരു തിര്യ്ക്കുരേഖ വരക്കുന്നതിനാൽ ഉണ്ടാവുന്ന സദൃശകോണുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം നമുക്കു പഠിക്കാം.

നിങ്ങളുടെ അളവുകോലി (Scale)ന്റെ വക്കുകൾ സമാന്തരങ്ങളായതുകൊണ്ട് അതു ഉപയോഗിച്ചു സമാന്തരരേഖകൾ വരക്കാം.

രണ്ടു സമാന്തരരേഖകളേയും അവയുടെ ഒരു തിര്യ്ക്കുരേഖയേയും വരക്കുക.

(1) 1ഉം 5ഉം കോണുകളെ അളക്കുക. അവ സമമാണെന്നു കാണാം. ശേഷമുള്ള സദൃശകോണുകളേയും അളക്കുക. അവയും സമമാണെന്നു കാണാം.



അതിനാൽ സദൃശകോണുകൾ സമമാണെന്നനുമാനിക്കാം.

(2) ഏകാന്തരകോണുകളായ 4ഉം 6ഉം കോണുകളെ അളക്കുക. ഇവയും സമമാണെന്നു കാണാം. സദൃശകോണുകൾ സമമാണെങ്കിൽ ഏകാന്തരകോണുകളും സമമായിരിക്കുമെന്നു മുമ്പു പഠിച്ച സത്യങ്ങളിൽനിന്നു നമുക്കു അനുമാനിക്കാം. 3ഉം 5ഉം കോണുകളെ അളന്നു അവയും സമമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(3) തിര്യ്ക്കുരേഖയുടെ ഒരേ വശത്തുള്ള ആന്തരകോണുകളായ 4ഉം 5ഉം കോണുകളെ അളന്നു അവയുടെ തുക കാണുക. സദൃശകോണുകൾ സമമായതുകൊണ്ട് തിര്യ്ക്കുരേഖയുടെ ഒരേവശത്തുള്ള ആന്തരകോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളായിരിക്കുമെന്നു എളുപ്പത്തിൽ തെളിയിക്കാം.

3ഉം 6ഉം കോണുകളെ അളന്നു അവയുടെ തുക 2 സമകോണുകളാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

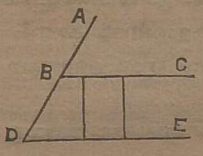
വേറെയും സമാന്തരരേഖകളേയും അവയുടെ തിര്യ്ക്കുരേഖകളേയും വരച്ചുണ്ടാവുന്ന കോണുകളെ അളക്കുന്നതായാൽ താഴെയുള്ള അനുമാനങ്ങൾ ശരിയാണെന്നു തെളിയും.

ഒരു സരളരേഖ രണ്ടു സമാന്തരരേഖകളെ ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാവുന്ന

(*a*) സദൃശകോണുകൾ സമമായിരിക്കും.

(*b*) ഏകാന്തരകോണുകൾ സമമായിരിക്കും.

(c) തിയ്യ്കുരേഖയുടെ ഒരേവശത്തുള്ള ആന്തരകോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളായിരിക്കും.



$\angle ABC$ വരക്കുക. ABയെ Dയിലേക്കു നീട്ടി BDE, ABC എന്ന കോണുകൾ സമമാകത്തക്കവണ്ണം DE വരക്കുക. BCയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽനിന്നും DEയിലേക്കു ലംബരേഖകൾ വരച്ചു അവ സമമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. അവ സമമാണെങ്കിൽ BCയും DEയും കൂട്ടിമുട്ടുന്നതല്ല. അവ സമമാണെന്നും അതുനിമിത്തം BCയും DEയും സമാന്തരങ്ങളാണെന്നും കാണാം.

ഇങ്ങിനെ വേറെയും സദൃശകോണുകളെ വരച്ചു പരീക്ഷണം ചെയ്യുക. ഈ പരീക്ഷണങ്ങളുടെ ഫലമായി താഴെ പറയുന്ന സത്യം അനുമാനിക്കാം. ഒരു സരളരേഖ വേറെ രണ്ടു സരളരേഖകളെ ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാവുന്ന സദൃശകോണുകൾ സമമാണെങ്കിൽ ആ രണ്ടു സരളരേഖകൾ സമാന്തരങ്ങളായിരിക്കും.

ഈ തത്വം ആസ്പദമാക്കിയാണ് ചതുരമട്ടം ഉപയോഗിച്ചു ഒരു സരളരേഖക്കു സമാന്തരരേഖകൾ വരക്കുന്നതു.



അളവുകോലും ചതുരമട്ടവും ഉപയോഗിക്കുന്ന മാർഗ്ഗം പടത്തിൽനിന്നും വ്യക്തമാകുന്നതാണ്. ചതുരമട്ടത്തിന്റെ ഒരു കോൺ സദൃശകോണുകളായിത്തീരുന്നതു പടത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഒരു സരളരേഖ വേറെ രണ്ടു സരളരേഖകളെ ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാവുന്ന ഏകാന്തരകോണുകൾ സമമാവുകയോ തിയ്യ്കുരേഖയുടെ ഒരേവശത്തുള്ള രണ്ടു ആന്തരകോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളാകയോ ചെയ്യാൽ ആ രണ്ടു സരളരേഖകൾ സമാന്തരങ്ങളായിരിക്കുമെന്നു മുൻപറഞ്ഞ സത്യത്തിൽനിന്നും അനുമാനിക്കാം.

അഭ്യാസം 59.

1. ചതുരമട്ടം ഉപയോഗിച്ചു രണ്ടു സമാന്തരരേഖകൾ വരക്കുക. അവയുടെ ഒരു തിയ്യ്കുരേഖ വരച്ചുണ്ടാവുന്ന 8 കോണുകളേയും അളന്നു അവയെ സംബന്ധിച്ചുള്ള നമ്മുടെ അനുമാനങ്ങൾ ശരിയോയെന്നു പരിശോധിക്കുക.

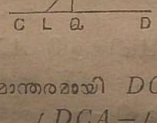
2. രണ്ടു സമാന്തരരേഖകൾ വരയ്ക്കുക. അവയിൽ ഒന്നിനു $40°$ ചരിഞ്ഞു ഒരു തിര്യ്ക്കുരേഖ വരയ്ക്കുക. ഇങ്ങിനെയുണ്ടാവുന്ന മറ്റു 7 കോണുകളുടേയും വലിപ്പം അന്വേഷിക്കുക. അവയെ അളന്നു നിങ്ങളുടെ അന്വേഷണം ശരിയോയെന്നു നോക്കുക.

3. രണ്ടു സമാന്തരരേഖകളെ വേറൊരു സരളരേഖ ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാവുന്ന കോണുകൾ തമ്മിൽ മുമ്പു പ്രസ്താവിച്ച 3 ബന്ധങ്ങൾ ഓരോന്നും ആസ്പദമാക്കി AB എന്നൊരു സരളരേഖയും C എന്നൊരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി ഒരു സമാന്തരരേഖ വരയ്ക്കുക.

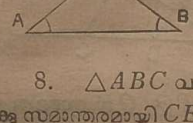
4. രണ്ടു സമാന്തരരേഖകൾ വരയ്ക്കുക. അവയിൽ ഒന്നിനു ലംബമായി രണ്ടു സരളരേഖകൾ വരയ്ക്കുക. അവ മറ്റേ സരളരേഖയും ലംബമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ഈ ലംബരേഖകൾ ഒരോന്നിനേറെയും നീളത്തെ സമാന്തരരേഖകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം എന്നു പറയുന്നു.

5. AB എന്നൊരു സരളരേഖയിൽനിന്നു (a) 1″ (b) 2″ ദൂരത്തായി അതിന്റെ ഇരുവശത്തും സരളരേഖകൾ വരയ്ക്കുക.

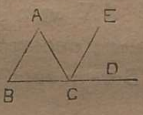
6. AB, CD എന്ന രണ്ടു സമാന്തരരേഖകൾ വരയ്ക്കുക. ABയ്ക്കു ലംബമായി PQ എന്നൊരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക. PQ യിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവായ Oയിൽക്കൂടി ABയെ M ഇലും CDയെ L ഇലും ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക. OM, OL എന്ന അംശങ്ങളെ അളക്കുക. നിങ്ങൾ എന്തു കാണുന്നു?



7. $\triangle ABC$ വരയ്ക്കുക. Cയിൽക്കൂടി ABയ്ക്കു സമാന്തരമായി DCE എന്നൊരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക. $\angle DCA = \angle A$; $\angle ECB = \angle B$ എന്നു തെളിയിക്കുക. ഇതിൽനിന്നു ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



8. $\triangle ABC$ വരച്ചു BCയെ Dയിലേക്കു നീട്ടുക. ABയ്ക്കു സമാന്തരമായി CE വരയ്ക്കുക. $\angle ACE = \angle A$; $\angle DCE = \angle B$ എന്നു തെളിയിക്കുക. ഇതിൽനിന്നു ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക 2സമകോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.



9. $\triangle ABC$ വരയ്ക്കുക. ACയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽ കൂടി BCയെ Eയിൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം ABയ്ക്കു സമാന്തരമായി ഒരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക. BE, EC അളക്കുക. നിങ്ങൾ എന്തു കാണുന്നു?

നിങ്ങളുടെ അളവുകോൽ ഉപയോഗിച്ചു ഒരു സരളരേഖയിന്മേൽ 1സെ.മീ. അകലെയായി കുറെ ബിന്ദുക്കളെ കുറിക്കുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി സമാന്തരരേഖകൾ വരക്കുക. ഈ സമാന്തരരേഖകളെ ഛേദിക്കുന്ന PQ, XY എന്ന രണ്ടു സരളരേഖകൾ വരക്കുക.

PQ എന്ന തിയ്യ്കുരേഖയുടെ ഖണ്ഡങ്ങൾ സമമാണെന്നും, അതേപ്രകാരം XY എന്ന തിയ്യ്കുരേഖയുടെ ഖണ്ഡങ്ങളും സമമാണെന്നും കാണാം.

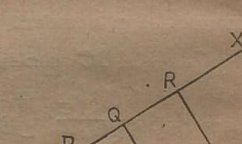


അതായതു കുറെ സമാന്തരരേഖകൾ ഒരു തിയ്യ്കുരേഖയെ ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാവുന്ന ഖണ്ഡങ്ങൾ സമമാണെങ്കിൽ അവ വേറെ തിയ്യ്കുരേഖകളേയും ഛേദിക്കുമ്പോളുണ്ടാവുന്ന ഖണ്ഡങ്ങളും സമമായിരിക്കും.

ഈ സത്യത്തെ ആസ്പദമാക്കി നമുക്കു ഒരു സരളരേഖയെ ആവശ്യപ്പെട്ടതു സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി 4·5" നീളമുള്ള AB എന്നൊരു സരളരേഖയെ 3 സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം.

Aയിൽകൂടി AX എന്നൊരു സരളരേഖ വരക്കുക. AX ൽ AP, PQ, QR എന്ന മൂന്നു സമനീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. Rഉം Bഉം കൂട്ടിച്ചേർക്കുക. Q, P എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി ABയെ C, D എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ യഥാക്രമം ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം RBക്കു സമാന്തരമായി സരളരേഖകൾ വരക്കുക.



AX എന്ന തിയ്യ്കുരേഖയുടെ ഖണ്ഡങ്ങളായ AP, PQ, QR സമമായതുകൊണ്ടു സമാന്തരരേഖകളാലുണ്ടാക്കപ്പെട്ട ABയുടെ ഖണ്ഡങ്ങളായ AD, DC, CBയും സമമായിരിക്കും. ഇവയെ അളന്നു സമമോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

അഭ്യാസം 60.

1. 3·2" നീളമുള്ള ഒരു സരളരേഖ വരച്ചു അതിനെ 5 സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുക.

2. 7സെ മീ. നീളമുള്ള ഒരു സരളരേഖയുടെ ഒരംശം മറ്റേ അംശത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാകത്തക്കവണ്ണം അതിനെ രണ്ടംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുക.

3. 4·1" നീളമുള്ള ഒരു സരളരേഖ വരച്ചു അതിന്റെ $\frac{4}{7}$ ഭാഗം കാണുക. അതിന്റെ നീളം അളക്കുക. അതിന്റെ നീളം ഗണിച്ചു, അളന്നു കിട്ടിയ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു നോക്കുക.

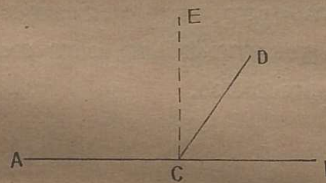
4. 10·5 സെ.മീ. നീളമുള്ള ഒരു സരളരേഖ വരച്ചു അതിന്റെ അംശങ്ങൾ 1 : 2 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിലാകത്തക്കവണ്ണം അതിനെ 3 അംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുക.

അദ്ധ്യായം 27.

പ്രമേയങ്ങൾ (Theorems).

പ്രമേയം 1.

ഒരു സരളരേഖ വേറൊരു സരളരേഖമേൽ നില്ക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന രണ്ടു സമീപകോണുകളുടെ തുക രണ്ടു സമകോണുകളാകുന്നു.

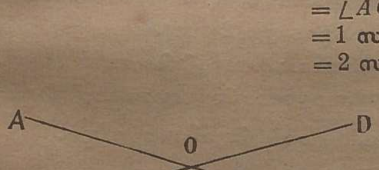


സങ്കല്പം:— ACB എന്ന സരളരേഖമേൽ CD എന്ന സരളരേഖ നില്ക്കുന്നു.

പരിണാമം:— എന്നാൽ $\angle ACD + \angle DCB = 2$ സമകോണുകൾ എന്നു തെളിയിക്കാം.

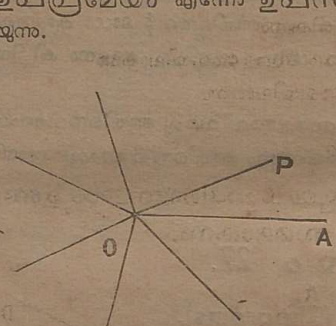
നിർമ്മാണം:— ACBക്കു ലംബമായി CE വരയ്ക്കുക.

ഉപപത്തി:— $\angle ACD + \angle DCB = \angle ACE + \angle ECD + \angle DCB$
$= \angle ACE + \angle ECB$
$= 1$ സമകോൺ $+ 1$ സമകോൺ
$= 2$ സമകോണുകൾ.



2 സരളരേഖകൾ പരസ്പരം ചേരിക്കുന്നതിനാൽ ഉണ്ടാകുന്ന 4 കോണുകളുടെ തുക 4 സമകോണുകളാകുന്നു. ഇതു മേൽ തെളിയിച്ച പ്രമേയത്തിൽ നിന്നു എളുപ്പത്തിൽ അനുമാനിക്കാവുന്നതാണ്. ഇങ്ങിനെ ഒരു പ്രമേയത്തിൽനിന്നു

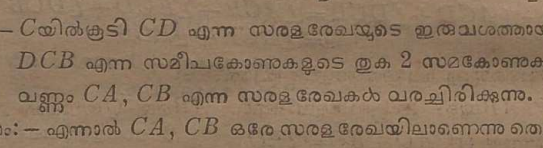
എളുപ്പത്തിൽ അനുമാനിക്കാവുന്ന ഒരു സത്യത്തെ ആ പ്രമേയത്തിന്റെ ഉപപ്രമേയം എന്നോ ഉപസിദ്ധാന്തം (Corollary) എന്നോ പറയുന്നു.



2. വേറൊരു ഉപസിദ്ധാന്തം ഇവിടെ ഉദ്ധരിക്കാം. ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു അനേകം സരളരേഖകൾ വരക്കുന്നതിനാൽ ഉണ്ടാവുന്ന കോണുകളെ ക്രമത്തിൽ എടുക്കുന്നതായാൽ അവയുടെ തുക 4 സമകോണുകൾ ആയിരിക്കും.

പ്രമേയം 2.

ഒരു സരളരേഖയിലെ ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി അതിന്റെ ഇരുവശത്തായി രണ്ടു സരളരേഖകൾ വരക്കുന്നതിനാലുണ്ടാവുന്ന രണ്ടു സമീപകോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളാണെങ്കിൽ ആ രണ്ടു സരളരേഖകൾ ഒരേ സരളരേഖയിലായിരിക്കും.



സങ്കല്പം: — Cയിൽക്കൂടി CD എന്ന സരളരേഖയുടെ ഇരുവശത്തായി ACD, DCB എന്ന സമീപകോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളാകത്തക്കവണ്ണം CA, CB എന്ന സരളരേഖകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു.

പരിണാമം: — എന്നാൽ CA, CB ഒരേ സരളരേഖയിലാണെന്നു തെളിയിക്കാം.

നിർമ്മാണം: — ACയെ E എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിലേക്കു നീട്ടുക.

ഉപപത്തി: — നിർമ്മാണപ്രകാരം ACE ഒരു സരളരേഖയാകുന്നു.

$\therefore \angle ACD + \angle DCE = 2$ സമകോണുകൾ.

എന്നാൽ സങ്കല്പപ്രകാരം $\angle ACD + \angle DCB = 2$ സമകോണുകൾ.

$\therefore \angle ACD + \angle DCB = \angle ACD + \angle DCE$

ഇരുവശത്തിൽനിന്നും $\angle ACD$ കിഴിക്കുക.

$\therefore \angle DCB = \angle DCE$

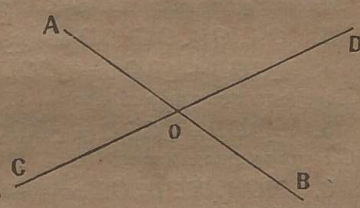
$\therefore$ CB, CEയിൽ കൂടി പതിക്കുന്നു.

നിർമ്മാണപ്രകാരം CAയും CEയും ഒരേ സരളരേഖയിലാകുന്നു.

$\therefore$ CAയും CBയും ഒരേ സരളരേഖയിലാകുന്നു.

പ്രമേയം 3.

രണ്ടു സരളരേഖകൾ പരസ്പരം ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാവുന്ന വിരുദ്ധശീർഷകോണുകൾ സമമാകുന്നു.



സങ്കല്പം:— AB, CD എന്ന സരളരേഖകൾ Oയിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

പരിണാമം: എന്നാൽ $\angle AOC = \angle BOD$; $\angle COB = \angle AOD$ എന്നു തെളിയിക്കാം.

ഉപപത്തി:— OC എന്ന സരളരേഖ AB എന്ന സരളരേഖമേൽ നിൽക്കുന്നതുകൊണ്ടു $\angle AOC + \angle COB = 2$ സമകോണുകൾ.

OB എന്ന സരളരേഖ CD എന്ന സരളരേഖമേൽ നിൽക്കുന്നതുകൊണ്ടു $\angle COB + \angle BOD = 2$ സമകോണുകൾ.

$\therefore \angle AOC + \angle COB = \angle COB + \angle BOD$

ഇരുവശത്തിൽനിന്നും $\angle COB$ കിഴിക്കുക.

$\therefore \angle AOC = \angle BOD$.

ഇതേപ്രകാരം $\angle COB = \angle AOD$ എന്നു തെളിയിക്കാം.

അഭ്യാസം 61.

(1 — 3വരെയുള്ള പ്രമേയങ്ങളുടെ പ്രയോഗം).

1. P, ABയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാകുന്നു. ABയെ Qയിലേക്കു നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ (1) $AQ + BQ = 2PQ$.

Q, PBയിലാണെങ്കിൽ (2) $AQ - BQ = 2PQ$.

2. 1-ാം പ്രമേയത്തിലെ പടത്തിൽ ECD എന്ന കോൺ BCD, DCA എന്ന കോണുകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ പകുതിയാണ്.

3. 3-ാം പ്രമേയത്തിലെ പടത്തിൽ താഴെ പറയുന്നവ ശരിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

a. AOD, DOB എന്ന സമീപകോണുകളുടെ ബിഭാജകങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബങ്ങളാണ്.

ഇതിൽനിന്നു ഈ സത്യം അനുമാനിക്കാം: —

ഒരു സരളരേഖ മറ്റൊരു സരളരേഖമേൽ നില്ക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന രണ്ടു സമീപകോണുകളുടെ ബിഭാജകങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബങ്ങളാണ്.

b. $\angle AOD$ യുടെ ബിഭാജകത്തെ നീട്ടിയാൽ അതു $\angle BOC$നെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുന്നു.

c. AOC, BOD എന്ന കോണുകളുടെ ബിഭാജകങ്ങൾ ഒരേ സരളരേഖയിലാകുന്നു.

4. A, B, C, D നാലു ബിന്ദുക്കളാകുന്നു. ABയും BCയും Dയിൽ 2 പരിപൂരകകോണുകളെ അഭിമുഖീകരിക്കുന്നു (Subtend). എന്നാൽ A, D, C ഒരേ സരളരേഖയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

5. OA, OB, OC, OD പരസ്പരം Oയിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

a. $\angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle DOA$ ആണെങ്കിൽ OCഉം OAയും ഒരേ സരളരേഖയിലാണ്.

b. $\angle AOB = \angle COD$ഉം $\angle BOC = \angle DOA$ഉം ആണെങ്കിൽ AOC, BOD സരളരേഖകളാണ്.

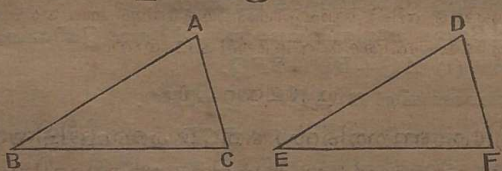
6. XOA, XOB, OXന്റെ ഒരേ വശത്തുള്ള കോണുകളാണ്. OC, $\angle AOB$നെ 2 സമഭാഗമാക്കുന്നു.

എന്നാൽ $\angle XOA + \angle XOB = 2\angle XOC$.

7. OX, XOB എന്ന 2 സമീപകോണുകളിൽ AOX ആണ് അധികം വലിയതു. OC, $\angle AOB$നെ 2 സമഭാഗമാക്കുന്നു. എന്നാൽ $\angle AOX - XOB = 2\angle COX$.

പ്രമേയം 4.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു ഭുജങ്ങളും അവകിടയിലുള്ള കോണും യഥാക്രമം മറ്റൊന്നിന്റെ രണ്ടു ഭുജങ്ങൾക്കും അവകിടയിലുള്ള കോണിനും തുല്യമെങ്കിൽ ആ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങളും സർവ്വാംഗതുല്യങ്ങളാകുന്നു.



സങ്കല്പം:—ABC, DEF എന്ന ത്രികോണങ്ങളിൽ

$AB = DE$, $AC = DF$, ഇടയിലുള്ള കോൺ A = ഇടയിലുള്ള കോൺ D.

പരിണാമം:— എന്നാൽ ABC, DEF എന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശംഗതുല്യങ്ങളെന്നു തെളിയിക്കാം.

ഉപപത്തി:— A, Dയിന്മേലും, AB, DEയിൽക്കൂടിയും പതിക്കത്തക്കവണ്ണം $\triangle ABC$ത്തെ $\triangle DEF$ത്തിന്മേൽ വിന്യസിക്കുക. $AB = DE$ (സങ്കല്പം)

$\therefore$ B, Eയിന്മേൽ പതിക്കുന്നു.

AB, DEന്മേൽ പതിക്കുകയും $\angle A = \angle D$യും ചെയ്യുന്നതുകൊണ്ടു AC, DFൽക്കൂടി പതിക്കുന്നു.

$AC = DF$ (സങ്കല്പം).

$\therefore$ C, Fന്മേൽ പതിക്കുന്നു.

A, Dന്മേലും, B, Eന്മേലും, C, Fന്മേലും പതിക്കുന്നു.

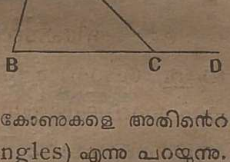
$\therefore$ $\triangle ABC$ത്തെ $\triangle DEF$ത്തിന്മേൽ വിന്യസിച്ചിരിക്കുന്നു.

$\therefore$ $\triangle ABC$ഉം, $\triangle DEF$ഉം സദൃശംഗതുല്യങ്ങളാണ്.

(ABC, DEF എന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശംഗതുല്യങ്ങളാണെന്നു $\equiv$ എന്ന സംക്ഷിപ്തസംജ്ഞ ഉപയോഗിച്ചു ഇങ്ങിനെ എഴുതാം. $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$).

കുറിപ്പു:— ഈ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശംഗതുല്യങ്ങൾ എന്നു തെളിയിച്ചതിനാൽ അവയുടെ ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ സമമാണെന്നും $BC = EF$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ എന്നും വ്യക്തമാണ്. സമഭുജങ്ങൾക്കു എതിരായ കോണുകൾ സമമാണെന്നു വിദ്യാർത്ഥി ഓർക്കണം. ഇങ്ങനെ സമമായ ഭുജങ്ങളോ, കോണുകളോ സദൃശമാണെ (Correspond)ന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ഭുജത്തെ നീട്ടിയാലുണ്ടാവുന്ന കോണിനെ ത്രികോണത്തിന്റെ ബാഹ്യകോൺ (Exterior Angle) എന്നു പറയുന്നു.

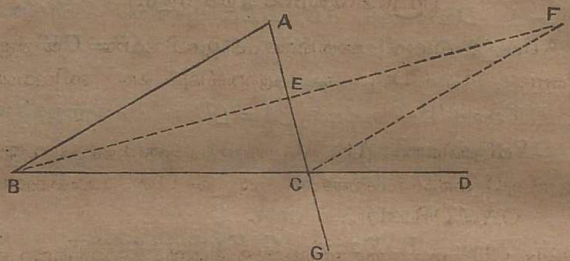


ACD ഒരു ബാഹ്യകോണാകുന്നു. A, B എന്ന കോണുകളെ അതിന്റെ ആന്തര വിരുദ്ധകോണുകൾ (Interior opposite angles) എന്നു പറയുന്നു. വേറെയും ഭുജങ്ങളെ നീട്ടി ബാഹ്യകോണുകളുടേയും അവയുടെ ആന്തരവിരുദ്ധകോണുകളുടേയും പേരുകൾ വിദ്യാർത്ഥി പറയേണം.

പ്രമേയം 5.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ഭുജത്തെ നീട്ടിയാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോൺ അതിന്റെ ആന്തരവിരുദ്ധകോണുകൾ ഓരോന്നിനേക്കാളും വലിയതാകുന്നു.

സങ്കല്പം: — $\triangle ABC$ത്തിന്റെ BC എന്ന ഭുജത്തെ Dയിലേക്കു നീട്ടിയിരിക്കുന്നു



പരിണാമം: — എന്നാൽ ബാഹ്യകോൺ ACD, അന്തരവിരുദ്ധകോണുകളായ BAC, ABC എന്നിവയേക്കാൾ വലിയതാകുന്നു എന്നു തെളിയിക്കാം.

നിർമ്മാണം: — ACയെ Eൽ 2 സമഭാഗമാക്കുക.

BE ചേർക്കുക.

EF, BEക്കു സമമാകത്തക്കവണ്ണം BEയെ Fലേക്കു നീട്ടുക. CF ചേർക്കുക.

ഉപപത്തി: — AEB, CEF എന്ന ത്രികോണങ്ങളിൽ

$AE = CE$ (നിർമ്മാണം)

$EB = EF$ (നിർമ്മാണം)

ഇടയിലുള്ള $\angle AEB =$ ഇടയിലുള്ള $\angle CEF$

$\therefore \triangle AEB \equiv \triangle CEF$

$\therefore \angle EAB = \angle ECF$

എന്നാൽ CF, $\angle ACD$ന്നു ഉള്ളിലാകുന്നു.

$\therefore \angle ACD > \angle ECF.$

$\therefore \angle ACD > \angle BAE$

അതായതു് $\angle ACD > \angle BAC$

ACയെ Gലേക്കു നീട്ടിയാൽ BCയെ 2 സമഭാഗമാക്കി ഇതേപ്രകാരം $\angle BCG > \angle ABC$ എന്നു തെളിയിക്കാം.

എന്നാൽ $\angle BCG =$ വിരുദ്ധശീർഷകോൺ ACD

$\therefore \angle ACD > \angle ABC.$

$\therefore \angle ACD$, BAC, ABC എന്ന ഓരോ കോണിനെക്കാളും വലിയതാകുന്നു.

അഭ്യാസം 62.

(പ്രമേയങ്ങൾ 4ഉം 5ഉം.)

1. ABക്ക ലംബമായി അതിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവായ Cയിൽക്കൂടി CD വരച്ചിരിക്കുന്നു. P, CDമേലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണെങ്കിൽ $PA = PB$.

2. $\triangle ABC$ത്തിന്റെ AB, AC എന്ന ഭുജങ്ങൾക്കു അവയുടെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി വരച്ച ലംബങ്ങൾ പരസ്പരം Oൽ ഛേദിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $OA = OB = OC$.

3. AB, CD എന്ന സരളരേഖകൾ ഒന്നിനും മറ്റേതിന്റെ ദ്വിഭാജക ലംബമാണ്. AD, DB, BC, CA ക്രമമായി ചേർക്കുന്നതിനാലുണ്ടാവുന്ന ADBC എന്ന രൂപത്തിന്റെ എല്ലാ ഭുജങ്ങളും സമമാണ്.

4. $\triangle ABC$ത്തിൽ $AB = AC$. $\angle BAC$ന്റെ ദ്വിഭാജകം BCയെ Xൽ ഛേദിക്കുന്നു. എന്നാൽ (*a*) $\angle ABC = \angle ACB$. (*b*) AX, BCയെ 2സമഭാഗമാക്കുന്നു.

(*c*) $AX \perp BC$. ഒരു ദ്വിസമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഈ ഗുണങ്ങളെ സാമാന്യമായി പ്രസ്താവിക്കുക.

5. $\triangle ABC$ത്തിൽ $AB = AC$. AB, AC എന്ന ഭുജങ്ങളിന്മേൽ AP, AQ എന്ന സമനീളങ്ങൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ (1) $BQ = CP$. (2) $\angle ABC = \angle ACB$.

6. ABC ഒരു ത്രികോണവും X അതിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവും ആകുന്നു. BX, CX ചേർക്കുക. $\angle BXC > \angle BAC$.

7. ഇതുവരെ പഠിച്ച പ്രമേയങ്ങൾ മാത്രം ആസ്പദമാക്കി താഴെ പറയുന്നവ തെളിയിക്കുക.

1. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ 2 കോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളേക്കാൾ ചെറുതാകുന്നു.

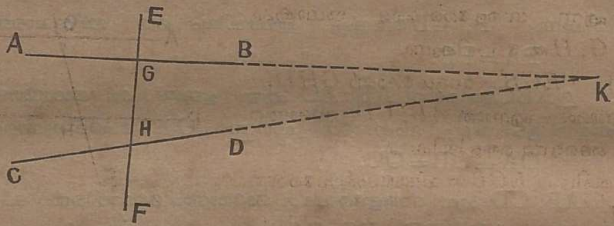
2. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ 2 കോണുകൾ അല്പകോണുകളാകുന്നു.

പ്രമേയം 6.

രണ്ടു സരളരേഖകളെ മൂന്നാമതൊരു സരളരേഖ ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഒരു ജോഡി ഏകാന്തരകോണുകൾ സമമെങ്കിൽ ആ രണ്ടു സരളരേഖകൾ സമാന്തരങ്ങളാകുന്നു.

സങ്കല്പം: — EF എന്ന സരളരേഖ AB, CD എന്ന സരളരേഖകളെ യഥാക്രമം G, Hൽ ഛേദിക്കുമ്പോൾ

$\angle AGH$ = ഏകാന്തരകോൺ GHD.



പരിണാമം: — എന്നാൽ AB, CD സമാന്തരങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കാം.

ഉപപത്തി: — AB, CD സമാന്തരങ്ങളല്ലെങ്കിൽ അവ B, D എന്ന ഭാഗത്തേക്കോ അല്ലെങ്കിൽ A, C എന്ന ഭാഗത്തേക്കോ നീട്ടിയാൽ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നതാണ്. B, D എന്ന ഭാഗത്തേക്കു നീട്ടിയാൽ അവ Kൽ ഛേദിക്കുന്നുവെന്നു വിചാരിക്കുക.

അപ്പോൾ KGH ഒരു $\triangle$ ആകുന്നു. അതിന്റെ KG എന്ന ഭുജം Aയിലേക്കു നീട്ടിയിരിക്കുന്നു.

$\therefore$ ബാഹ്യകോൺ $AGH >$ ആന്തരവിരുദ്ധകോൺ $\angle GHK$

അതായത് $\angle AGH > \angle GHD$

എന്നാൽ $\angle AGH = \angle GHD$ (സങ്കല്പം)

$\therefore \angle AGH > \angle GHD$ എന്നതു ശരിയല്ല.

$\therefore B, D$ എന്ന ഭാഗത്തേക്കു നീട്ടുമ്പോൾ AB, CD പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നു എന്നു വിചാരിക്കുന്നതു തെറ്റാണ്.

$\therefore B, D$ എന്ന ഭാഗത്തേക്കു നീട്ടിയാൽ AB, CD ഛേദിക്കുന്നില്ല.

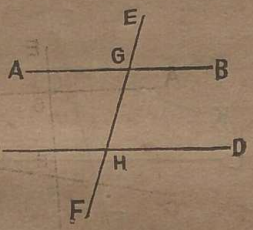
ഇപ്രകാരം തന്നെ A, C എന്ന ഭാഗത്തേക്കു നീട്ടിയാലും AB, CD പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നില്ലെന്നു തെളിയിക്കാം.

$\therefore AB, CD$ സമാന്തരങ്ങളാകുന്നു.

പ്രമേയം 7.

രണ്ടു സരളരേഖകളെ മൂന്നാമതൊരു സരളരേഖ ഛേദിക്കുമ്പോൾ (i) ഒരു ജോഡി സദൃശകോണുകൾ സമമാകുകയോ (ii) ഛേദിക്കുന്ന രേഖയുടെ ഒരേവശത്തുള്ള ഒരു ജോഡി

ആന്തരകോണുകൾ പരിപൂരകങ്ങൾ ആകുകയോ ചെയ്യുന്നതായാൽ ആ രണ്ടു സരളരേഖകൾ സമാന്തരങ്ങളാകുന്നു.



സങ്കല്പം:— EF എന്ന സരളരേഖ AB, CD എന്ന സരളരേഖകളെ യഥാക്രമം G, Hൽ ഛേദിക്കുന്നു.

(i) $\angle EGB =$ സദൃശകോൺ GHD.

പരിണാമം:— എന്നാൽ AB, CD സമാന്തരങ്ങളെന്നു തെളിയിക്കാം.

ഉപപത്തി:— $\angle EGB =$ വിരുദ്ധശീർഷകോൺ AGH.

$\angle EGB = \angle GHD$ (സങ്കല്പം)

$\therefore \angle AGH = \angle GHD$

ഇവ ഏകാന്തരകോണുകളാകുന്നു.

$\therefore AB \parallel CD$.

(ii) സങ്കല്പം:— $\angle BGH + \angle GHD = 2$ സമകോണുകൾ

പരിണാമം:— എന്നാൽ $AB \parallel CD$ എന്നു തെളിയിക്കാം.

ഉപപത്തി:— AGB ഒരു സരളരേഖയായതുകൊണ്ട്

$\angle AGH + \angle BGH = 2$ സമകോണുകൾ

$\angle BGH + \angle GHD = 2$ സമകോണുകൾ (സങ്കല്പം)

$\therefore \angle AGH + \angle BGH = \angle BGH + \angle GHD$

$\therefore \angle AGH = \angle GHD$

ഇവ ആന്തരകോണുകളാകുന്നു.

$\therefore AB \parallel CD$.

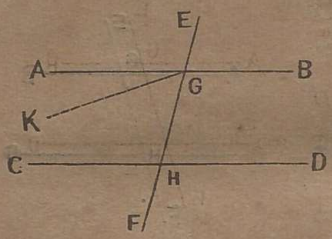
സമാന്തരങ്ങളെപ്പറ്റിയുള്ള ഒരു പ്രത്യക്ഷതത്വം ഇവിടെ ഉദ്ധരിക്കാം. ഇതിനെ പ്ലേഫെയറിന്റെ പ്രത്യക്ഷതത്വം (Playfair's Axiom) എന്നു പറയുന്നു. പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്ന രണ്ടു സരളരേഖകൾ ഒരേ സരളരേഖക്കു സമാന്തരമല്ല.

പ്രമേയം 8.

(ഇതു 6-ാം പ്രമേയത്തിന്റെ വിലോമം ആണ്).

രണ്ടു സമാന്തര സരളരേഖകളെ മൂന്നാമതൊരു സരള

രേഖ ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ഓരോ ജോഡി ഏകാന്തരകോണുകളും സമമാകുന്നു.



സങ്കല്പം:—EF എന്ന സരളരേഖ AB, CD എന്ന സമാന്തരസരളരേഖകളെ യഥാക്രമം G, Hൽ ഛേദിക്കുന്നു.

പരിണാമം:—എന്നാൽ $\angle AGH =$ ഏകാന്തരകോൺ GHD എന്നു തെളിയിക്കാം.

ഉപപത്തി:—$\angle AGH$, $\angle GHD$ന്നു സമമല്ലെങ്കിൽ

$\angle KGH$, $\angle GHD$ന്നു സമവും ഏകാന്തരവും ആകത്തക്കവണ്ണം GK വരക്കുക.

$\angle KGH =$ ഏകാന്തരകോൺ GHD

$\therefore KG \parallel CD.$

എന്നാൽ $AB \parallel CD.$ (സങ്കല്പം).

$\therefore$ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നതായ AB, KG എന്ന രണ്ടു സരളരേഖകളും CDക്കു സമാന്തരങ്ങളാകുന്നു.

എന്നാൽ പ്ലേഫെയറിന്റെ പ്രത്യക്ഷതാപ്രകാരം ഇതു അസംഭവ്യമാകുന്നു.

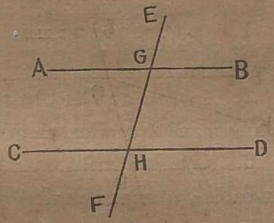
$\therefore \angle AGH$, $\angle GHD$ സമങ്ങളല്ലെന്ന വിചാരം തെറ്റാണ്.

$\therefore \angle AGH = \angle GHD.$

പ്രമേയം 9.

രണ്ടു സമാന്തര സരളരേഖകളെ മൂന്നാമതൊരു സരളരേഖ ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന (i) ഓരോ ജോഡി സദൃശകോണുകളും സമമാകുന്നു. (ii) ഛേദിക്കുന്ന രേഖയുടെ ഒരേ വശത്തുള്ള ഓരോ ജോഡി ആന്തരകോണുകളും പരിപൂരകങ്ങളും ആകുന്നു.

സങ്കല്പം: — EF എന്ന സരളരേഖ AB, CD എന്ന സമാന്തര സരളരേഖകളെ യഥാക്രമം G, Hൽ ഛേദിക്കുന്നു.



പരിണാമം: — (i) എന്നാൽ $\angle EGB =$ സ്ഥശകോൺ GHD എന്നു തെളിയിക്കാം.

ഉപപത്തി: — $AB \parallel CD$

$\therefore \angle AGH = \angle GHD$

എന്നാൽ $\angle AGH =$ വിരുദ്ധശീർഷകോൺ EGB.

$\therefore \angle EGB = \angle GHD$.

പരിണാമം: — (ii) എന്നാൽ $\angle BGH + \angle GHD = 2$ സമകോണുകൾ എന്നു തെളിയിക്കാം.

ഉപപത്തി: — $AB \parallel CD$ $\therefore \angle AGH =$ ഏകാന്തരകോൺ GHD

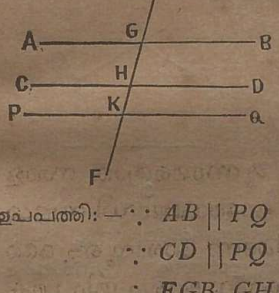
AGB ഒരു സരളരേഖയായതുകൊണ്ട്

$\angle BGH + \angle AGH = 2$ സമകോണുകൾ

$\therefore \angle BGH + \angle GHD = 2$ സമകോണുകൾ.

പ്രമേയം 10.

ഒരേ സരളരേഖക്കു സമാന്തരമായ സരളരേഖകൾ പരസ്പരം സമാന്തരമാകുന്നു.



സങ്കല്പം: — AB, CD ഇവ ഓരോന്നും PQനു സമാന്തരമാണ്.

പരിണാമം: — $AB \parallel CD$ എന്നു തെളിയിക്കാം.

നിർമ്മാണം: — EF എന്നൊരു സരളരേഖ വരയ്ക്കുക. അതു AB, CD, EFനെ യഥാക്രമം G, H, Kൽ ഛേദിക്കട്ടെ.

ഉപപത്തി: — $\because AB \parallel PQ$ $\therefore \angle EGB =$ സ്ഥശകോൺ GKQ

$\because CD \parallel PQ$ $\therefore \angle GHD =$,, ,, GKQ

$\therefore EGB$, GHD എന്ന സ്ഥശകോണുകൾ സമമാകുന്നു.

$\therefore AB \parallel CD$.

അഭ്യാസം 63.

(പ്രമേയങ്ങൾ 6—10).

1. ഒരേ സരളരേഖക്കു ലംബങ്ങളായ സരളരേഖകൾ പരസ്പരം ലംബങ്ങളാണ്.

2. രണ്ടോ അതിലധികമോ സമാന്തരരേഖകളെ ഛേദിക്കുന്ന ഒരു സരളരേഖ അവയിൽ ഒന്നിനു ലംബമാണെങ്കിൽ ശേഷമുള്ളവക്കും ലംബമായിരിക്കും.

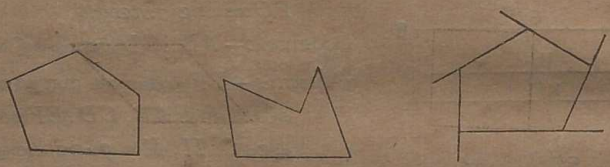
3. ഒരു കോണിന്റെ ഭുജങ്ങൾ ഓരോന്നു വേറൊരു കോണിന്റെ ഭുജങ്ങൾക്കു സമാന്തരമെങ്കിൽ ആ കോണുകൾ സമമോ പരിപൂരകങ്ങളോ ആയിരിക്കും.

4. AB, CD എന്ന രണ്ടു സരളരേഖകൾ ഓരോന്നും മറ്റേതിനെ 2 സമഭാഗമാക്കുന്നുവെങ്കിൽ (i) $AC \parallel BD$. (ii) $CB \parallel AD$.

5. AB, CD യഥാക്രമം EF, GHനു ലംബവും $EF \parallel GH$ഉം ആണെങ്കിൽ $AB \parallel CD$.

സരളഭുജരൂപങ്ങൾ. (Rectilineal Figures).

സരളരേഖകളാൽ ചുറ്റപ്പെട്ട ഒരു രൂപത്തെ സരളഭുജരൂപം (Rectilineal figure) എന്നു പറയുന്നു. എല്ലാ ഭുജങ്ങളും സമമായരൂപത്തെ സമഭുജ (Equilateral)രൂപമെന്നും എല്ലാ കോണുകളും സമമായരൂപത്തെ സമകോണ(Equiangular)രൂപമെന്നും പറയുന്നു. 2 സമകോണകളേക്കാൾ വലുതായ കോൺ ഇല്ലാത്ത സരളഭുജരൂപത്തെ ഉന്നതോദര (Convex) സരളഭുജരൂപമെന്നു പറയുന്നു.

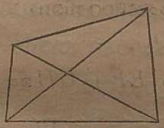


1 2 3

1-ാം രൂപം ഉന്നതോദരം ആകുന്നു; 2-ാം രൂപം ഉന്നതോദരം അല്ല. 3-ാം രൂപത്തിലെപ്പോലെ ഒരു സരളഭുജരൂപത്തിന്റെ ഭുജങ്ങളെ നീട്ടുന്നതായാൽ അവയെ ക്രമത്തിൽ (in order) എന്നോ ഏകഗതിയിൽ (in the same sense) എന്നോ നീട്ടിയിരിക്കുന്നുവെന്നു പറയുന്നു. നാലിലധികം സരളരേഖ

കളാൽ ചുറ്റപ്പെട്ട സമതലക്ഷേത്രം (Plane figure) ത്തിന്നു ബഹുകോണം (Polygon; ബഹുകോണക്ഷേത്രം) എന്നു പേർ. ബഹുകോണങ്ങൾക്കു അവയുടെ ഭുജങ്ങളുടെ (അഥവാ കോണുകളുടെ) എണ്ണമനുസരിച്ചാണ് പേർ കൊടുക്കുന്നതു. 5, 6, 7, 8, 9, 10 ഭുജങ്ങളുള്ള ബഹുകോണങ്ങളെ യഥാക്രമം പഞ്ചകോണം (Pentagon), ഷഡ്കോണം (Hexagon), സപ്തകോണം (Heptagon), അഷ്ടകോണം (Octagon), നവകോണം (Nonagon), ദശകോണം (Decagon) എന്നു പറയുന്നു.

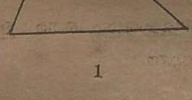
എല്ലാ ഭുജങ്ങളും എല്ലാ കോണുകളും സമമായ ബഹുകോണത്തെ തുല്യാംശ ബഹുകോണം (Regular polygon) എന്നു പറയുന്നു.



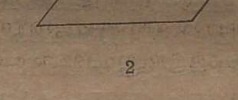
നാലു സരളരേഖകളാൽ ചുറ്റപ്പെട്ട സമതലക്ഷേത്രത്തിന്നു ചതുർഭുജം (Quadrilateral; ചതുർഭുജക്ഷേത്രം) എന്നു പേർ.

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർ ശീർഷങ്ങളെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന സരളരേഖകളെ അതിന്റെ കർണ്ണങ്ങൾ (Diagonals) എന്നു പറയുന്നു.

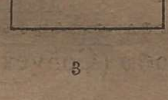
ചതുർഭുജങ്ങൾ പലതരമുണ്ടു.



1



2



3



4



5

1. 2 ഭുജങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളായ ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്നു ട്രപ്പീസിയം (Trapezium) എന്നു പേർ.

2. എതിർഭുജങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളായ ചതുർഭുജത്തിന്നു സമാന്തരചതുഷ്കോണം (Parallelogram) എന്നു പേർ.

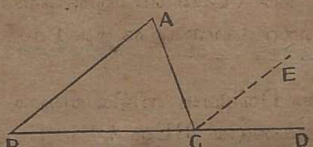
3. ഒരു കോൺ സമകോണായ സമാന്തര ചതുഷ്കോണത്തിനു സമകോണചതുരം (Rectangle) എന്നു പേർ.

4. സമീപമായ രണ്ടു ഭുജങ്ങൾ സമമായ സമകോണചതുരത്തിനു സമചതുരം (Square) എന്നു പേർ.

5. കോണുകൾ സമകോൺ അല്ലാത്തതും എല്ലാ ഭുജങ്ങൾ സമവും ആയ ചതുർഭുജത്തിനു സമചതുർഭുജം (Rhombus) എന്നു പേർ.

പ്രമേയം 11.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ഭുജത്തെ നീട്ടിയാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോൺ അതിന്റെ രണ്ടു ആന്തരവിരുദ്ധകോണുകളുടെ തുകക്കു സമമാകുന്നു; ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു കോണുകളുടെ തുക 2 സമകോണുകളാകുന്നു.



സങ്കല്പം: $\triangle ABC$ത്തിന്റെ BC എന്ന ഭുജത്തെ D ലേക്കു നീട്ടിയിരിക്കുന്നു.

പരിണാമം:—(i) എന്നാൽ $\angle ACD = \angle A + \angle B$ എന്നു തെളിയിക്കാം.

നിർമ്മാണം:—Cൽകൂടി BAക്കു സമാന്തരമായി CE വരക്കുക.

ഉപപത്തി:—BA||CE (നിർമ്മാണം). AC അവയെ ഛേദിക്കുന്നു.

$\therefore \angle ACE =$ एकान्तरविരുദ്ധകോൺ A

BA || CE (നിർമ്മാണം). BD അവയെ ഛേദിക്കുന്നു.

$\therefore \angle ECD =$ സദൃശകോൺ B

$\therefore \angle ACE + \angle ECD = \angle A + \angle B$

$\therefore \angle ACD = \angle A + \angle B.$

പരിണാമം:—(ii) $\triangle ABC$ത്തിന്റെ 3 കോണുകളുടേയും തുക 2 സമകോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കാം.

ഉപപത്തി: $\angle ACD = \angle A + \angle B$ എന്നു തെളിയിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഈ തുല്യങ്ങളോടു $\angle ACB$ കൂട്ടുക.

$\therefore \angle ACD + \angle ACB = \angle A + \angle B + \angle ACB.$

BCD ഒരു സരളരേഖയായതുകൊണ്ടു $\angle ACD + \angle ACB = 2$ സമകോണുകൾ.

$\therefore \angle A + \angle B + \angle ACD = 2$ സമകോണുകൾ.

അഭ്യാസം 64.

പ്രമേയം 11.

1. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ ശേഷമുള്ള 2 കോണുകളുടെ തുകയോടു സമമാണെങ്കിൽ അതു ഒരു സമകോണത്രികോണമാകുന്നു.

2. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും 2 കോണുകൾ മൂന്നാമത്തേതിനേക്കാൾ വലുതാണെങ്കിൽ അതു ഒരു ന്യൂനകോണത്രികോണമാകുന്നു.

3. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ 2 കോണുകൾ മൂന്നാമത്തേതിനെക്കാൾ ചെറുതാണെങ്കിൽ അതു ഒരു അധികകോണത്രികോണമാകുന്നു.

4. രണ്ടു സമാന്തരസരളരേഖകളെ ഒരു സരളരേഖ ഛേദിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ ഒരേ വശത്തുള്ള രണ്ടു ആന്തരകോണുകളുടെ ദ്വിഭാജകങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമാണ്. ഇതുപയോഗിച്ചു താഴെ എഴുതിയതു തെളിയിക്കുക:—

ഒരു സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ ദ്വിഭാജകങ്ങൾ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നതിനാലുണ്ടാവുന്ന ചതുർഭുജം ഒരു സമകോണചതുരമാകുന്നു.

5. ഒരു കണ്ണം വരച്ചു ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക 4 സമകോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

6. $\triangle ABC$ത്തിന്റെ BC എന്ന ഭുജത്തെ Dയിലേക്കു നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. ABC, ACD എന്ന കോണുകളുടെ ദ്വിഭാജകങ്ങളായ BEഉം CEഉം Eൽ ഛേദിക്കുന്നു. $\angle BEC = \frac{1}{2} \angle BAC$.

7. $\triangle ABC$ത്തിൽ $\angle BAC$നെ AD 2 സമഭാഗമാക്കുകയും BCയെ Dൽ ഛേദിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. BCയെ Eലേക്കു നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ $\angle ABE + \angle ACE = 2\angle ADE$.

8. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർ കോണുകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ എതിർ ഭുജങ്ങൾ സമാന്തരമാണ്.

9. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ A, B എന്ന കോണുകളുടെ ദ്വിഭാജകങ്ങൾ Eയിൽ ഛേദിക്കുന്നു. എന്നാൽ $\angle C + \angle D = 2\angle E$.

10. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ B, C എന്ന കോണുകളുടെ ദ്വിഭാജകങ്ങൾ Xൽ ഛേദിക്കുന്നു. എന്നാൽ $\angle BXC = 90° + \frac{1}{2} A$.

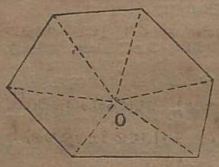
11. $\triangle ABC$ത്തിന്റെ AB, AC എന്ന ഭുജങ്ങളെ നീട്ടുമ്പോൾ B, C എന്ന ശീർഷങ്ങളിൽ ഉണ്ടാവുന്ന ബാഹ്യകോണുകളുടെ ദ്വിഭാജകങ്ങൾ Xൽ ഛേദിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\angle BXC = 90° - \frac{1}{2} A$.

12. രണ്ടു സരളരേഖകൾ വേറെ രണ്ടു സരളരേഖകൾക്കു ലംബമാണെങ്കിൽ ഒന്നാമത്തെ ജോഡി സരളരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള അല്പകോൺ രണ്ടാമത്തെ ജോഡി സരളരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള അല്പകോണിനു സമമാകുന്നു.

13. $\triangle ABC$ത്തിന്റെ BC, CA എന്ന ഭുജങ്ങളിലേക്കു യഥാക്രമം AD, BE എന്ന ലംബങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. അവ Pയിൽ ചേരിക്കുന്നതായാൽ $\angle APE = \angle C$.

പ്രമേയം 12.

n ഭുജങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുകോണത്തിന്റെ ആന്തരകോണുകളുടെ തുക $(2n-4)$ സമകോണുകളാകുന്നു.



സങ്കല്പം:— ബഹുകോണത്തിനു n ഭുജങ്ങളുണ്ട്.

പരിണാമം:— എന്നാൽ അതിന്റെ ആന്തരകോണുകളുടെ തുക $(2n-4)$ സമകോണുകൾ ആണെന്നു തെളിയിക്കാം.

നിർമ്മാണം:— ബഹുകോണത്തിനകത്തു O എന്നൊരു ബിന്ദു കരുതുക. അതിനെ ഓരോ ശീർഷത്തോടും ചേർക്കുക.

ഉപപത്തി:— ബഹുകോണത്തിനു n ഭുജങ്ങളുള്ളതുകൊണ്ടു അതു n ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ തുക $= 2$ സമകോണുകൾ.

$\therefore n$ ത്രികോണങ്ങളുടെ എല്ലാ കോണുകളുടേയും തുക $= 2n$ സമകോണുകൾ.

എന്നാൽ എല്ലാ ത്രികോണങ്ങളുടേയും എല്ലാ കോണുകളുടേയും തുക $=$ ബഹുകോണത്തിന്റെ ആന്തരകോണുകളുടെ തുക $+ O$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ കോണുകളുടെ തുക.

O എന്ന ബിന്ദുവിലെ കോണുകളുടെ തുക $= 4$ സമകോണുകൾ

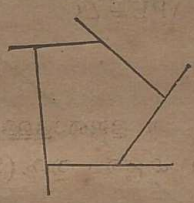
$\therefore$ ബഹുകോണത്തിന്റെ ആന്തരകോണുകളുടെ തുക
$= 2n$ സമകോണുകൾ $- 4$ സമകോണുകൾ.
$= (2n-4)$ സമകോണുകൾ.

പ്രമേയം 13.

ഒരു ബഹുകോണത്തിന്റെ എല്ലാ ഭുജങ്ങളേയും ക്രമത്തിൽ നീട്ടിയാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോണുകളുടെ തുക 4 സമകോണുകളാകുന്നു.

സങ്കല്പം: — n ഭുജങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുഭുജക്ഷേത്രത്തിന്റെ ഭുജങ്ങളെ ക്രമത്തിൽ നീട്ടിയിരിക്കുന്നു.

പരിണാമം: — എന്നാൽ ബാഹ്യകോണുകളുടെ തുക 4 സമകോണുകളാണെന്നു തെളിയിക്കാം.



ഉപപത്തി: — ബഹുകോണത്തിനു n ഭുജങ്ങളുള്ളതുകൊണ്ടു ശീർഷങ്ങളുടെ എണ്ണവും n ആകുന്നു.

ഓരോ ശീർഷത്തിലേയും ആന്തരകോൺ + ബാഹ്യകോൺ = 2 സമകോണുകൾ.

∴ എല്ലാ ആന്തരകോണുകൾ + എല്ലാ ബാഹ്യകോണുകൾ = $2n$ സമകോണുകൾ.

എന്നാൽ എല്ലാ ആന്തരകോണുകളുടെയും തുക = $(2n-4)$ സമകോണുകൾ.

∴ എല്ലാ ബാഹ്യകോണുകളുടെയും തുക = $[2n-(2n-4)]$ സമകോണുകൾ
= 4 സമകോണുകൾ.

അഭ്യാസം 65.

(പ്രമേയം 12ഉം 13ഉം)

1. ചില ബഹുകോണങ്ങളുടെ ആന്തരകോണുകളുടെ തുക താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു. അവയുടെ ഭുജങ്ങളുടെ എണ്ണം ഗണിക്കുക. 24, 14, 8 സമകോണുകൾ.

2. 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12 ഭുജങ്ങളുള്ള തുല്യാംഗബഹുകോണങ്ങളുടെ കോണിന്റെ വലിപ്പം ഗണിക്കുക.

3. ചില തുല്യാംഗബഹുകോണങ്ങളുടെ കോണിന്റെ വലിപ്പം താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു. അവയുടെ ഭുജങ്ങളുടെ എണ്ണം ഗണിക്കുക. 165°, 156°, 160°.

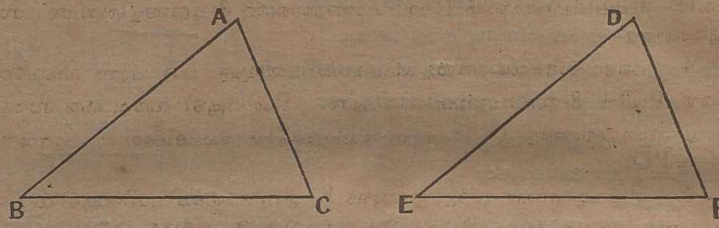
4. 145° വലിപ്പമുള്ള കോണുകളുള്ള തുല്യാംഗബഹുകോണം വരക്കാമോ? ഉത്തരം ന്യായസഹിതം എഴുതുക.

5. ഒരു ബഹുകോണത്തിന്റെ കണ്ണുകളെ ക്രമത്തിൽ വരച്ചു 12-ാം പ്രമേയം തെളിയിക്കുക.

പ്രമേയം 14.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു കോണുകളും ഒരു ഭുജവും യഥാക്രമം മറ്റൊരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു കോണു

കർണ്ണവും സദൃശമായ ഭുജത്തിന്നും തുല്യമാണെങ്കിൽ ആ രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വാംശതുല്യങ്ങളാകുന്നു.



സങ്കല്പം:—ABC, DEF എന്ന ത്രികോണങ്ങളിൽ

$\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $\therefore \angle A = \angle D$.

$BC = EF$.

പരിണാമം:—എന്നാൽ $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ എന്നു തെളിയിക്കാം.

ഉപപത്തി:—B, Eന്മേലും BC, EFൽ കൂടിയും പതിക്കത്തക്കണ്ണം $\triangle ABC$ത്തെ $\triangle DEF$ത്തിന്മേൽ വിന്യസിക്കുക.

$\therefore BC = EF$ (സങ്കല്പം) $\therefore$ C, Fന്മേൽ പതിക്കുന്നു.

BC, EFന്മേൽ പതിക്കുന്നതുകൊണ്ടും $\angle B = \angle E$ ആകുന്നതുകൊണ്ടും BA, ED കൂടി പതിക്കുന്നു.

ഇതേപ്രകാരം CB, FEന്മേൽ പതിക്കുന്നതുകൊണ്ടും $\angle C = \angle F$ ആകുന്നതുകൊണ്ടും CA, FDയിൽകൂടി പതിക്കുന്നു.

$\therefore BA$, CA പരസ്പരം ചേരിക്കുന്ന A എന്ന ബിന്ദു ED, FD പരസ്പരം ചേരിക്കുന്ന Cഎന്ന ബിന്ദുവിന്മേൽ പതിക്കുന്നു.

അതായതു A, Dന്മേലും, B, Eന്മേലും, C, Fന്മേലും പതിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ടു ABC, DEF എന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സന്നിപതിക്കുന്നു.

$\therefore \triangle ABC = \triangle DEF$.

അഭ്യാസം 66.

പ്രമേയം 14.

1. ഒരു കോണിന്റെ ലിഭാജകത്തിന്മേലുള്ള ഓരോ ബിന്ദുവും ഭുജങ്ങളിൽനിന്നു സമദൂരത്താണ്.

2. $\triangle ABC$ത്തിൽ B, C എന്ന കോണുകളുടെ ലിഭാജകങ്ങൾ പരസ്പരം Pയിൽ ചേരിക്കുന്നു. BC, CA, AB എന്ന ഭുജങ്ങൾക്കു യഥാക്രമം ലംബമായി PD, PE, PF വരച്ചാൽ $PD = PE = PF$.

3. $\triangle ABC$ത്തിന്റെ AB, AC എന്ന ഭുജങ്ങളെ നീട്ടുന്നതിനാൽ B, C എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഉണ്ടാവുന്ന ബാഹ്യകോണുകളുടെ ദ്വിഭാജകങ്ങൾ പരസ്പരം Pയിൽ ഛേദിക്കുന്നതായാൽ P ത്രികോണത്തിന്റെ 3 ഭുജങ്ങളിൽനിന്നും സമദൂരത്താണ്.

4. രണ്ടു സമാന്തര സരളരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള AB എന്ന ലംബരേഖയെ Pയിൽ 2 സമഭാഗമാക്കിയിരിക്കുന്നു. Pയിൽകൂടി വരച്ച ഒരു സരളരേഖ സമാന്തരങ്ങളെ C, D എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. എന്നാൽ $PC = PD$.

5. PQ എന്നൊരു സരളരേഖയുടെ R എന്ന മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽകൂടി വരച്ച ഒരു സരളരേഖയിലേക്കു Pയിൽനിന്നും Qയിൽനിന്നും PM, QN എന്ന ലംബങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ $PM = QN$.

6. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ AC എന്ന കർണ്ണം BD എന്ന കർണ്ണത്തെ 2 സമഭാഗമാക്കുന്നു. എന്നാൽ Bയും Dയും ACയിൽനിന്നു സമദൂരത്താണ്.

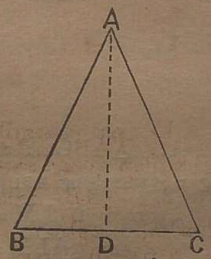
7. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ AC എന്ന കർണ്ണം A, C എന്ന കോണുകളെ 2 സമഭാഗമാക്കുന്നു. എന്നാൽ $AC \perp BD$.

8. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ എതിർഭുജങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളാണെങ്കിൽ അവ സമമാകുന്നു; ഓരോ കർണ്ണവും മറ്റേതിനെ 2 സമഭാഗമാക്കുന്നു.

9. $\triangle ABC$ത്തിന്റെ A, B, C എന്ന ശീർഷങ്ങളിൽകൂടി BC, CA, AB എന്ന ഭുജങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായി വരച്ച സരളരേഖകൾ പരസ്പരം D, E, Fൽ ഛേദിക്കുന്നു. എന്നാൽ A, B, C യഥാക്രമം EF, FD, DE എന്നിവയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാകുന്നു.

പ്രമേയം 15.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു ഭുജങ്ങൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയ്ക്കെതിരായ കോണുകൾ തുല്യമാണ്.



സങ്കല്പം: — $\triangle ABC$ത്തിൽ $AB = AC$

പരിണാമം: — എന്നാൽ $\angle B = \angle C$ എന്നു തെളിയിക്കാം.

നിർമ്മാണം: — AD, $\angle BAC$നെ 2 സമഭാഗമാക്കുകയും BCയെ Dൽ ഛേദിക്കുകയും ചെയ്യട്ടെ.

ഉപപത്തി: — ABD, ACD എന്ന ത്രികോണങ്ങളിൽ $AB = AC$. (സങ്കല്പം) AD, രണ്ടിനേറെയും പൊതുഭുജം.

ഇടയിലുള്ള കോൺ BAD = ഇടയിലുള്ള കോൺ CAD (നിർമ്മാണം)

$\therefore \triangle ABD \equiv \triangle ACD.$

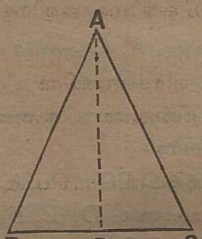
$\therefore \angle B = \angle C.$

ഉപസിദ്ധാന്തങ്ങൾ.

1. ഒരു ലംബസമദ്വിഭാജകത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷകോണിന്റെ ലംബഭാജകം
   (1) ആധാരത്തെ 2 സമഭാഗമാക്കുന്നു.
   (2) ആധാരത്തിനു ലംബമാണ്.
2. ഒരു സമദ്വിഭാജകത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകൾ തുല്യമാകുന്നു.

പ്രമേയം 16.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു കോണുകൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ അവയ്ക്കെതിരായ ഭുജങ്ങൾ തുല്യമാണ്.



സങ്കല്പം:— ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle B = \angle C$

പരിണാമം:— എന്നാൽ $AB = AC$ എന്നു തെളിയിക്കാം.

നിർമ്മാണം:— AD, $\angle BAC$ നെ 2 സമഭാഗമാക്കുകയും BC യെ D യിൽ ചേരിക്കുയും ചെയ്യട്ടെ.

ഉപപത്തി:— ABD, ACD എന്ന ത്രികോണങ്ങളിൽ

$\angle B = \angle C$ (സങ്കല്പം)

$\angle BAD = \angle CAD$ (നിർമ്മാണം)

AD രണ്ടിനേറയും പൊതുഭുജം.

$\therefore \triangle ABD \equiv \triangle ACD$

$\therefore AB = AC$

ഉപസിദ്ധാന്തം:— കോണുകൾ തുല്യമായ ത്രികോണത്തിന്റെ ഭുജങ്ങളും തുല്യമാകുന്നു.

അഭ്യാസം 67.

(പ്രമേയം 15ഉം, 16ഉം)

1. $\triangle ABC$ത്തിൽ $AB = AC$ഉം L, M, N യഥാക്രമം AB, BC, CA എന്ന ഭുജങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളും ആകുന്നു.

   എന്നാൽ (1) $LM = NM$ (2) $BN = CL$.

   (3) $\angle ALM = \angle ANM$.

2. BC എന്ന ഒരു ആധാരത്തിന്മേൽ (അതിന്റെ ഒരേ വശത്തോ അല്ലെ

ങ്കിൽ ഇരുവശങ്ങളിലോ) ABC, DBC എന്ന 2 ലംബസമപാർശ്വത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ $\angle ABD = \angle ACD$.

3. ABC എന്നൊരു ലംബസമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ BC എന്ന ആധാരത്തിന്മേൽ $DB = EC$ ആകത്തക്കവണ്ണം D,E എന്ന 2 ബിന്ദുക്കൾ കുറിച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ (i) $AD = AE$ (ii) $\angle ADE = \angle AED$

4. ABC എന്നൊരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിനു പുറത്തായി അതിന്റെ പാർശ്വങ്ങളിന്മേൽ DBC, ECA, FAB എന്ന ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ DEF ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണമായിരിക്കും.

5. ABC എന്നൊരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ AB, BC, CA എന്ന പാർശ്വങ്ങളിന്മേൽ $AP = BQ = CR$ ആകത്തക്കവണ്ണം P, Q, R എന്ന 3 ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ $PQ = QR = RP$.

6. ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കൾ ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളാകുന്നു.

7. $\triangle ABC$ന്റെ AB, AC എന്ന പാർശ്വങ്ങളിന്മേൽ ത്രികോണത്തിനു പുറമെയായി ABH, ACK എന്ന ത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ $CH = BK$.

8. AB ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസവും C അതിന്റെ പരിധിയിന്മേലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവും ആണെങ്കിൽ $\angle ACB = 1$ സമകോൺ.

9. $\triangle ABC$ ഒരു സമകോണത്രികോണവും BC അതിന്റെ വിപുലരേഖയും ആകുന്നു. $\angle DBA = \angle DAB$ ആകത്തക്കവണ്ണം BCയിന്മേൽ D അടയാളപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ $DA = DB = DC$.

10. ABC എന്നൊരു സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ BC എന്ന വിപുലരേഖ അതിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിനെ Aയിലേക്കു ചേർക്കുന്ന സരളരേഖയുടെ ഇരട്ടിയാകുന്നു.

11. $\triangle ABC$ത്തിന്റെ AB, AC എന്ന പാർശ്വങ്ങളിന്മേൽ DE, BCക്കു സമാന്തരവും BDക്കു സമവും ആകത്തക്കവണ്ണം യഥാക്രമം D, E എന്ന ബിന്ദുക്കൾ എങ്ങിനെ കാണാം? ന്യായം എഴുതുക.

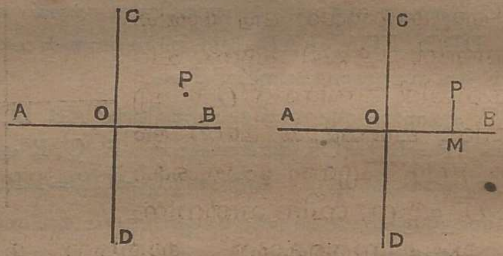
12. $\triangle ABC$ത്തിന്റെ AB എന്ന പാർശ്വം വ്യാസമായി ഒരു വൃത്തം വരച്ചിരിക്കുന്നു. PQ, BCക്കു സമാന്തരമായ വ്യാസമാണെങ്കിൽ BP, BQ ത്രികോണത്തിന്റെ Bയിലെ ആന്തരകോണിന്റേയും ബാഹ്യകോണിന്റേയും ലംബാർദ്ധകങ്ങളാകുന്നു.

———

അദ്ധ്യായം 28.

ലേഖാചിത്രം (GRAPH).

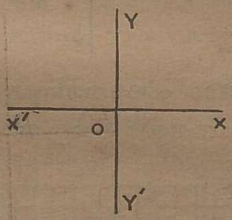
ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തൽ (Plotting points).



P എന്നൊരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം നിശ്ചയിക്കേണമെന്നു വിചാരിക്കുക. AB എന്നൊരു സരളരേഖ വരക്കുക. അതിനു ലംബമായി അതിനെ Oയിൽ ഛേദിക്കുന്നതുമായ CD എന്നൊരു സരളരേഖ വരക്കുക. ഈ രണ്ടു സരളരേഖകളുടെ സ്ഥാനത്തെ ആസ്പദമാക്കി P എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനം തിട്ടപ്പെടുത്താം. Pയിൽനിന്നു OBക്കു ലംബമായി PM വരക്കുക. Oയിൽനിന്നു OM എന്ന ദൂരം വലത്തും Mൽനിന്നു MB എന്ന ദൂരം മേലോട്ടുമുള്ള ബിന്ദുവാകുന്നു P. ഈ രണ്ടു അളവുകളുമുള്ള വേറൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുവാൻ സാധിക്കുന്നതുമല്ല. ഇങ്ങിനെ രണ്ടളവുകൾ മാത്രം ഉപയോഗിച്ചു ഏതു ബിന്ദുവിന്റെയും സ്ഥാനം തിട്ടപ്പെടുത്തുവാൻ സാധിക്കുന്നതുകൊണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം നിർണ്ണയിപ്പാൻ ഈ സമ്പ്രദായം സർവ്വത്ര ഉപയോഗിച്ചുവരുന്നു.

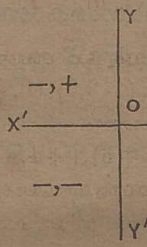
Oയിൽനിന്നുള്ള ദൂരം വലത്തോ ഇടത്തോ എന്നു വേർതിരിച്ചു കാണിപ്പാൻ അവയെ '+', '−' എന്ന ചിഹ്നങ്ങൾ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇതേപ്രകാരം AOB എന്ന രേ

ഖക്ഷ മേല്പോട്ടുള്ള ദൂരങ്ങളെ '+' എന്ന ചിഹ്നംകൊണ്ടും കീഴ്പോട്ടുള്ള ദൂരങ്ങളെ '−' എന്ന ചിഹ്നംകൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

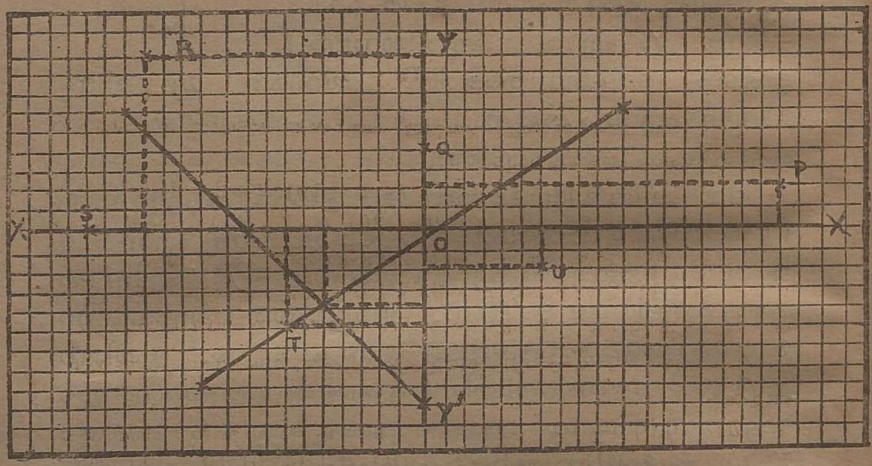


യാതൊരു രേഖകളെ ആസ്പദമാക്കി ദൂരങ്ങളെ അളക്കുന്നുവോ, ആ രേഖകളെ അക്ഷങ്ങൾ (Axes) എന്നു പറയുന്നു. ഇവയിൽ ഒന്നിനു $X'OX$ എന്നും അതിനു ലംബമായ മറേറ അക്ഷത്തിനു YOY' എന്നും പേർ കൊടുക്കുന്നു. O എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നു ദൂരങ്ങൾ അളക്കുന്നതുകൊണ്ടു് അതിനെ **മൂലബിന്ദു** (Origin) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു ബിന്ദുവിലേക്കു രണ്ടക്ഷങ്ങളിൽനിന്നുമുള്ള ദൂരങ്ങളെ അതിന്റെ നിയാമകങ്ങൾ (Co-ordinates) എന്നു പറയുന്നു. ഒന്നാമതായി പ്രസ്താവിക്കുന്നതു YOY' എന്ന അക്ഷത്തിൽനിന്നുള്ള ദൂരമാണു്. ഈ ദൂരത്തെ ബിന്ദുവിന്റെ പ്രഥമനിയാമകം (Abscissa) എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $X'OX$ എന്ന അക്ഷത്തിന്മേൽ അളക്കുന്നതുകൊണ്ടു ഈ ദൂരത്തെ x എന്ന അക്ഷരംകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുകയും $X'OX$നെ xന്റെ അക്ഷം (axis of x; x-axis) എന്നു പറയുകയും ചെയ്യുന്നു. രണ്ടാമതായി പ്രസ്താവിക്കുന്നതു $X'OX$ എന്ന അക്ഷത്തിൽനിന്നു ബിന്ദുവിലേക്കുള്ള ദൂരമാണു്. ഈ ദൂരത്തെ ബിന്ദുവിന്റെ ദ്വിതീയനിയാമകം (Ordinate) എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $Y'OY'$ എന്ന അക്ഷത്തിന്മേൽ അളക്കുന്നതുകൊണ്ടു ഈ ദൂരത്തെ y എന്ന അക്ഷരംകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുകയും YOY'നെ yയുടെ അക്ഷം (axis of y; y-axis) എന്നു പറയുകയും ചെയ്യുന്നു.



$X'OX$, YOY' എന്ന അക്ഷങ്ങൾ ഒരു സമതലത്തെ 4 പാദങ്ങൾ (Quadrants) ആയി ഭാഗിക്കുന്നു. XOY, $X'OY$, $X'OY'$, XOY' എന്ന പാദങ്ങളെ യഥാക്രമം ഒന്നാം, രണ്ടാം, മൂന്നാം, നാലാം പാദങ്ങളെന്നു പറയുന്നു. ഓരോ പാദത്തിലുമുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ നിയാമകങ്ങളുടെ ചിഹ്നങ്ങൾ ചിത്രത്തിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ട്.



ചതുരക്കള്ളിക്കടലാസ്സ് ഉപയോഗിക്കുന്നതിനാൽ ബിന്ദുക്കളുടെ നിയാമകങ്ങൾ എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കയും നിയാമകങ്ങൾ അറിയപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളെ കടലാസ്സിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യാം.

ചതുരക്കള്ളിക്കടലാസ്സിൽ 1 അംഗുലത്തെ 10 സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു. 1 അംശത്തിന്റെ നീളത്തെ (·1 അംഗുലം) മൂല അളവായി കരുതുക.

P, Q, R, S, T, U എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ നിയാമകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക.

അവ യഥാക്രമം $(+18,+2), (0,+4), (-14,+9), (-17,0), (-7,-5), (+6,-2)$ ആണ്.

ചതുരക്കള്ളിക്കടലാസ്സിൽ താഴേ പറയുന്ന നിയാമകങ്ങളുള്ള ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവയെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുക. $(-15,+6), (-9,0), (0,-9)$ ഇവ മൂന്നും ഒരേ സരളരേഖമേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നുവെന്നു കാണാം.

താഴേ പറയുന്ന ബിന്ദുക്കളേയും കൂട്ടിച്ചേർക്കുക. $(+10,+6), (+4,+2), (-11,-8)$. ഇവയെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന രേഖയും ഒരു സരളരേഖയാകുന്നു. രണ്ടു സരളരേഖകളും പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ നിയാമകങ്ങൾ കാണുക.

മൂലബിന്ദുവായ O എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ നിയാമകങ്ങൾ $(0,0)$ ആണ്. x — അക്ഷത്തിന്മേലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടേയും ദ്വിതീയനിയാമകം പൂജ്യമാണ്; ഇതേപ്രകാരം y — അക്ഷത്തിന്മേലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളുടേയും പ്രഥമനിയാമകം പൂജ്യമാണ്.

അഭ്യാസം 68.

1. 1 അംഗുലം മൂല അളവായെടുത്ത് ചതുരക്കള്ളിക്കടലാസ്സിൽ താഴേ പറയുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

a) $(+19,+3), (-17,+17), (-1,-19), (+2,-18), (+15,-15), (-5,+12), (+20,+20), (-7,-11)$ ഇവയെ കടലാസ്സിൽ അടയാളപ്പെടുത്താതെ അവ ഏതു പാദത്തിലാണെന്നു പറയാമോ?

b) $(+11,0), (0,-8), (-9,0), (0,+16)$. ഇവയെ കടലാസ്സിൽ അടയാളപ്പെടുത്താതെ അവ ഏതു അക്ഷത്തിന്മേലാണെന്നു പറയാമോ?

2. താഴേ പറയുന്ന ബിന്ദുക്കളെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന സരളരേഖകളുടെ നീളം അളക്കുക.

(*a*) $(0,0), (+17,-11)$. (*b*) $(-18,-3), (+4,+16)$.

(*c*) $(-7,+15), (+2,-9)$. (*d*) $(+14,0), (0,-14)$.

3. (*a*) മൂലബിന്ദുവിൽക്കൂടി ഒന്നും മൂന്നും പാദങ്ങളിൽ കിടക്കുന്ന ഒരു സരളരേഖ വരക്കുക.

(*b*) മൂലബിന്ദുവിൽക്കൂടി രണ്ടും നാലും പാദങ്ങളിൽ കിടക്കുന്ന ഒരു സരളരേഖ വരക്കുക.

4. (*a*) $(+6,0)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി y — അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി ഒരു സരളരേഖ വരക്കുക. ഈ രേഖമേലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ പ്രഥമനിയാമകം എത്രയാണ്?

(*b*) $(0,-13)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി x — അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി

ഒരു സരളരേഖ വരക്കുക. ഈ രേഖമേലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ ദ്വിതീയനിയമകം എത്രയാണ്?

5. $(0,0), (-12,-12)$. ഈ ബിന്ദുക്കളെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന സരളരേഖമേലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ നിയാമകങ്ങൾ തമ്മിൽ വല്ല ബന്ധവും നിങ്ങൾ കാണുന്നുണ്ടോ? $(-5,-5)$ എന്ന ബിന്ദു ഈ സരളരേഖമേലാണോ?

6. താഴേ പറയുന്ന ബിന്ദുക്കളെ കടലാസ്സിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി അവയുടെ സ്ഥാനത്തെപ്പറ്റി നിങ്ങൾ എന്തു കാണുന്നെന്നു എഴുതുക.

(*a*) $(+18,-5), (-5,+18), (+11,+2)$.

(*b*) $(0,+16), (-7,+9), (+3,+19)$.

7. താഴേ പറയുന്ന ബിന്ദുക്കളെ കടലാസ്സിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവയെ ക്രമത്തിൽ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്നതിനാൽ ഏതൊരു രൂപമാണുണ്ടാവുന്നതെന്നു എഴുതുക.

(*a*) $(+10,+5), (+5,-5), (-10,-5), (-5,+5)$.

(*b*) $(-5,+5), (-5,+15), (-15.+15), (-15,+5)$.

(*c*) $(+6,+2), (+6,-8), (-7,-8), (-7,+2)$.

(*d*) $(-3,-1), (+4,-1), (+3,+4), (-2,+4)$.

8. താഴേ പറയുന്ന ബിന്ദുക്കളെ കടലാസ്സിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക. അവയെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്നതിനാലുണ്ടാവുന്ന സരളരേഖകൾ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ നിയാമകങ്ങൾ കാണുക.

(1) $(-18,+8), (+17,-13); (+15,+13), (-14,-3)$.

(2) $(+5,0), (+1,-9); (-2,+11), (+20,+1)$.

9. താഴേ പറയുന്ന ബിന്ദുക്കളെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന സരളരേഖകളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളുടെ നിയാമകങ്ങൾ കാണുക.

(1) $(-14,-11), (+20,+19)$. (2) $(-3,+18), (+15,-18)$.

10. $(+12,+6), (+12,-8), (-5,+6)$ ഇവ ഒരു സമകോണചതുരത്തിന്റെ മൂന്നു ശീർഷങ്ങളാണെങ്കിൽ ശേഷമുള്ള ശീർഷത്തിന്റെ നിയാമകങ്ങൾ കാണുക.

സ്ഥിതിവിവരക്കണക്കുകളുടെ ലേഖാചിത്രങ്ങൾ
(Graphs of Statistics).

നിങ്ങൾ ആശുപത്രിയിൽ രോഗികളെ സന്ദർശിച്ചിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ അവരുടെ ദേഹത്തിലെ താപത്തെ കാണിക്കുന്ന **ലേഖാചിത്രം** (Graph) കണ്ടിരിക്കും. രോഗികളുടെ ദേഹ

ത്തിലെ താപത്തെ ഡോക്ടർമാർ ഇടക്കിടെ താപമാപിനി കൊണ്ടു അളക്കുകയും താപത്തെ ചതുരക്കള്ളികടലാസ്സിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുന്നു. ജ്വരം ബാധിച്ച ഒരു രോഗിയുടെ ദേഹത്തിലെ താപത്തെ താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

സമയം	തിങ്കൾ ഉച്ച 4മണി	7മണി	10മണി	ചൊവ്വ രാവിലെ 1മണി	4മണി	7മണി
താപം	100·2°	101·4°	102·8°	103·6°	102·7°	100·5°

10മണി	ഉച്ച 1മണി	4മണി
100·0°	100 1°	100·3°

ഈ പട്ടിക നോക്കുന്നതായാൽ രോഗിയുടെ താപത്തിലുണ്ടായിരുന്ന മാറ്റങ്ങൾ വളരെ എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാകുന്നതല്ല. ആശുപത്രിയിൽ കണ്ടിട്ടുള്ള ലേഖാചിത്രത്തിൽ നിന്നു രോഗിയുടെ താപത്തിലുണ്ടായിരുന്ന മാറ്റത്തെ നിങ്ങൾ വളരെ എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കിയിരിക്കും. ഈ കാരണത്താലാണ് ഡോക്ടർമാർ താപത്തിന്റെ പട്ടിക തയ്യാറാക്കുന്നതിനു പകരം ലേഖാചിത്രം വരക്കുന്നത്. ഇത്തരം ഒരു ലേഖാചിത്രം വരക്കുന്നതെങ്ങിനെയെന്നു നമുക്കു പഠിക്കാം.

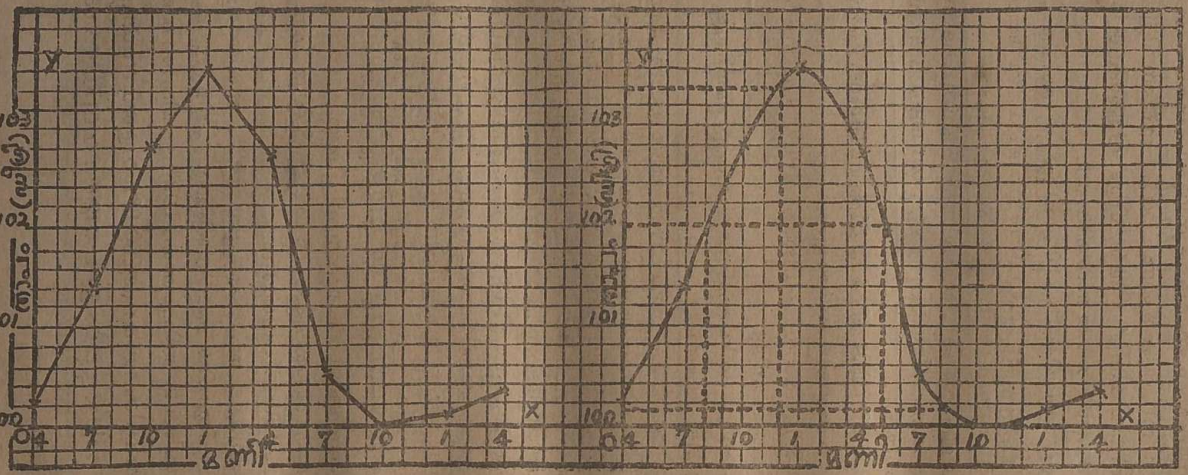
(1) 3 മണിക്കൂർതോറുമുള്ള താപം നമുക്കു പട്ടികയിൽനിന്നു കാണാം.

(2) ഓരോ സമയത്തുമുള്ള താപം അറിയുന്നതുകൊണ്ട് ഒരു അക്ഷം സമയത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെങ്കിൽ മറേറ അക്ഷത്തിൽ താപത്തെ സൂചിപ്പിക്കാം.

(3) അതിനാൽ ഒരു ബിന്ദുവിനെക്കൊണ്ടു ഒരു സമയത്തേയും ആ സമയത്തുള്ള താപത്തേയും സൂചിപ്പിക്കുവാൻ സാധിക്കും.

(4) ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ താപം 100·0°യും ഏറ്റവും കൂടിഞ്ഞത് 103·6യും ആയതുകൊണ്ട് 3·6° മാത്രമേ ലേഖാചിത്രത്തിൽ കാണിക്കേണ്ടതുള്ളു. 3 മണിക്കൂർ ഇടവിട്ടുള്ള 9 സമയങ്ങളേയും കാണിക്കണം. ഇങ്ങിനെ നാം ലേഖാചിത്ര

തോത് നിശ്ചയിക്കുമ്പോൾ നാം എന്തെല്ലാം സംഗതികൾ ഓർക്കണം? (1). നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന കടലാസ്സിൽ കഴിയുന്നത്ര വലിയ പടം വരക്കണം. (2) ചോദ്യത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള അളവുകൾ കൃത്യമായി ഉൾപ്പെടുത്തത്തക്ക ഒരു തോത് കണ്ടുപിടിക്കണം.



ത്തിൽ കാണിക്കേണ്ടുന്ന അളവുകളെ നിശ്ചയിക്കുന്നതിനെ അതിന്റെ അതിരുകൾ (Range) നിശ്ചയിക്കൽ എന്നു പറയാം. ഇതനുസരിച്ചാണ് നാം തോതും അക്ഷവും നിശ്ചയിക്കുന്നത്. ലേഖാചിത്രം വരക്കുമ്പോൾ ഇതു നാം പ്രത്യേകിച്ചു ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതായ ഒരു സംഗതിയാണ്.

(5) x — അക്ഷത്തിൽ $1'' = 10$ മണിക്കൂർ, y — അക്ഷത്തിൽ $1'' = 2°$ എന്നു കരുതുക. (വിദ്യാർത്ഥി ഈ ലേഖാചിത്രം ഇതിലും വലിയ തോതിൽ വരക്കണം).

(6) പട്ടിക നോക്കി ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(7) ഇടത്തുവശത്തുള്ള ലേഖാചിത്രത്തിൽ ബിന്ദുക്കളെ സരളരേഖകളാൽ കൂട്ടിച്ചേർത്തിരിക്കുന്നു. ഇങ്ങിനെ ചെയ്യുന്നതു താഴെ പറയുന്ന കാരണങ്ങൾ നിമിത്തം ശരിയല്ല.

(*a*) ഒരു രോഗിയുടെ താപം സമയത്തിനു ക്രമാനുപാതമല്ല.

(*b*) താപം പെട്ടെന്നു മാറുന്നതല്ല.

(*c*) 103·6° ഏറ്റവും കവിഞ്ഞതും 100·0° ഏറ്റവും കുറഞ്ഞതും ആയ താപമായിരിക്കണമെന്നില്ല.

അതുകൊണ്ടു ഈ ബിന്ദുക്കളെ വലത്തുവശത്തു കാണിച്ചപ്രകാരം ഒരു വക്രരേഖകൊണ്ടു കൂട്ടിച്ചേർക്കണം.

(8) ഒരു രോഗിയുടെ താപം സമയത്തിനു ക്രമാനുപാതമല്ലാത്തതുകൊണ്ടു ലേഖാചിത്രത്തിൽനിന്നു ഏതെങ്കിലും സമയത്തിൽ രോഗിക്കുണ്ടായിരുന്ന താപം സുമാറായി മാത്രമേ നിശ്ചയിക്കുവാൻ സാധിക്കയുള്ളു. രോഗിയുടെ താപത്തിലുണ്ടായ മാറ്റത്തെ എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കുവാനാണ് ഇപ്രകാരം ലേഖാചിത്രങ്ങൾ അധികം ഉപയോഗിക്കുന്നതു.

(9) (*a*) തിങ്കളാഴ്ച രാത്രി 12 മണിക്കും ചൊവ്വാഴ്ച രാവിലെ 8·30നും രോഗിയുടെ താപം എത്രയായിരുന്നുവെന്നു ലേഖാചിത്രത്തിൽനിന്നു കാണുക.

12 മണിസമയത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി x — അക്ഷത്തിനു ഒരു ലംബരേഖ വരക്കുക. ഇതു ലേഖാചിത്രത്തെ ചേരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി x — അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായി ഒരു സരളരേഖ വരക്കുക. ഇതു y — അക്ഷത്തെ ചേരിക്കുന്ന ബിന്ദു താപത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. താപം 103·4° ആയിരുന്നെന്നു കാണാം. ഇതേപ്രകാരം ചൊവ്വാഴ്ച 8.30നു ഉണ്ടായ താപവും കാണാം. താപം 100·15° ആയിരുന്നു.

(*b*) രോഗിയുടെ താപം എപ്പോൾ 102° ആയിരുന്നുവെന്നു കാണുന്ന വിധം ലേഖാചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. തിങ്കളാഴ്ച രാത്രി 8 മണിക്കും ചൊവ്വാഴ്ച രാവിലെ 5 മണിക്കും താപം 102° ആയിരുന്നുവെന്നു കാണുന്നു.

സ്ഥിതിവിവരക്കണക്കുകളിൽ വളരെ സംഖ്യകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും; ചിലപ്പോൾ ഇവ വളരെ വലിയ സംഖ്യകളുമായി

രിക്കും. അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം വായനക്കാക്ക് എപ്പോഴും വേഗത്തിൽ മനസ്സിലാക്കുവാൻ സാധിക്കുന്നതല്ല. അവയുടെ ലേഖാചിത്രം വരക്കുന്നതിനാൽ അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഒരു നോട്ടത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാം. ലേഖാചിത്രം ഏതെങ്കിലും ഒരു സ്ഥിതിയിലുള്ള മാറ്റത്തെ ചിത്രീകരിക്കുന്നുവെന്നു പറയാം.

ഇന്ത്യയിൽനിന്നു 1927 മുതൽ 1935 വരെ അന്യരാജ്യങ്ങളിലേക്കു കൊല്ലന്തോറും കയറുമതി ചെയ്ത ചായയുടെ വില (ലക്ഷം ഉറുപ്പികയായി) താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ ചേർത്തിരിക്കുന്നു. ഇവയെ കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം തയ്യാറാക്കുക.

കൊല്ലം	1927	28	29	30	31	32	33	34	35
വില	2904	3190	2660	2601	2356	1944	1715	1985	2013

(1) അതിർ നിശ്ചയിക്കൽ.

(a) 9 കൊല്ലം.

(b) ഏറ്റവും കവിഞ്ഞ വില = 3190 ലക്ഷം ക.

,, കുറഞ്ഞ ,, = 1715 ,, ,,

∴ കാണിക്കേണ്ടുന്ന വില = 1475 ,, ,,

(2) തോതു് നിശ്ചയിക്കൽ.

x — അക്ഷത്തിൽ $1'' = 2$ കൊല്ലം.

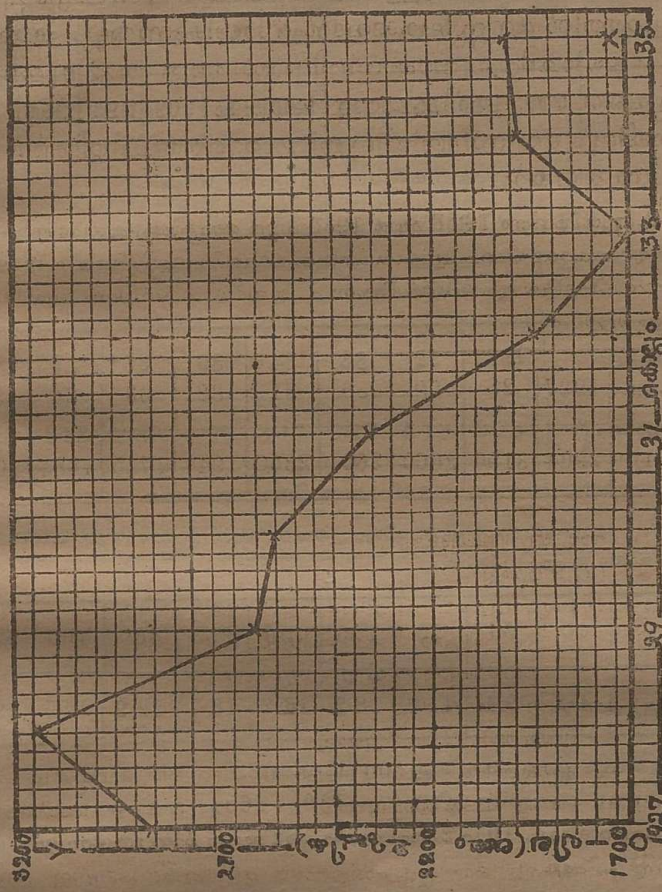
y — അക്ഷത്തിൽ $1'' = 500$ ലക്ഷം ക.

(3) ബിന്ദുക്കളെ അടയാളപ്പെടുത്തൽ.

(4) താപംപോലെ വില അനുനിമിഷം മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നില്ല. അതുകൊണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ ഒരു വക്രരേഖകൊണ്ടു കൂട്ടിച്ചേർക്കണമെന്നില്ല. സരളരേഖകൾകൊണ്ടു ചേർത്താൽ മതി.

(5) ഈ ലേഖാചിത്രത്തിൽനിന്നു കൊല്ലങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള സമയത്തുള്ള കയറുമതിയുടെ വില കാണാൻ സാധിക്കുന്നതല്ല.

(6) 1928 മുതൽ 33 വരെ ചായയുടെ വില കുറയുകയും 33 മുതൽ 35 വരെ വില അല്പമായി കയറുകയും ചെയ്തുവെന്നു പട്ടികയിൽനിന്നു മനസ്സിലാക്കുന്നതിലും എളുപ്പത്തിൽ ലേഖാചിത്രത്തിൽനിന്നു മനസ്സിലാക്കാം.



അഭ്യാസം 69.

1. 1928 മുതൽ 1937വരെ ഇന്ത്യയിലെ കാപ്പിത്തോട്ടങ്ങളിൽനിന്നു കൊല്ലന്തോറും കിട്ടിയ കാപ്പിയുടെ തൂക്കം (1000 ശതതൂക്കമായി) താഴെ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

കൊല്ലം	1928	29	30	31	32	33	34	35	36	37
തുക്കം	318	248	352	294	300	295	309	293	368	304

ഇവയെ കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം തയ്യാറാക്കുക.

2. 1931 മുതൽ 1938 വരെ ഇന്ത്യിരിയൽ ബേങ്കിൽ കൊല്ലംതോറും ജനങ്ങൾ സൂക്ഷിപ്പായി വെച്ചിട്ടുള്ള സംഖ്യകൾ (കോടി ഉറുപ്പികയായി) താഴേ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

കൊല്ലം	1931	32	33	34	35	36	37	38
സൂക്ഷിപ്പ്	66·2	61·5	74·2	74·8	72·4	78·9	83·1	81·2

ഇവയെ കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം തയ്യാറാക്കുക.

3. ഭൂമിയിൽനിന്നു ഏതെങ്കിലും ഉയരത്തിൽ നില്ക്കുന്നതായാൽ കാണാവുന്ന ദൂരം താഴേ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

ഉയരം (അടി)	10	50	70	100	150	200	300	400	500
ദൂരം (നാഴിക)	4·2	9·4	11·0	13·2	16·2	18·7	22·9	26·5	29·6

ഉയരവും ദൂരവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം വരക്കുക. ഈ ലേഖാചിത്രത്തിൽനിന്നു 130ഉം 260ഉം അടി ഉയരത്തിൽനിന്നു കാണാവുന്ന ദൂരവും, 10ഉം 25ഉം നാഴിക ദൂരത്തോളം കാണാൻ വേണ്ടുന്ന ഉയരവും നിശ്ചയിക്കുക.

4. ഒരു ലഘുലോലക (Simple Pendulum)ത്തിന്റെ നീളവും അതിന്റെ ദോലനകാല (period of oscillation)വും താഴേ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

നീളം (അടി)	1	4	9	16	25	36
ദോലനകാലം (സെക്കണ്ട്)	1·1	2·2	3·3	4·4	5·6	6·7

നീളവും ഭോലനകാലവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെക്കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം വരയ്ക്കുക. 12 അടി നീളമുള്ള ഒരു ഭോലകത്തിന്റെ ഭോലനകാലവും, ഭോലനകാലം 6 സെക്കണ്ടായ ഭോലകത്തിന്റെ നീളവും ലേഖാചിത്രത്തിൽ നിന്നു കാണുക

5. ഒരാളുടെ മരണശേഷം അയാളുടെ അവകാശികൾക്കു 1000 ക. കിട്ടുവാൻ ഒരു ഇൻഷ്യുറൻസ് കമ്പനിയിൽ കൊല്ലന്തോറും അടയ്ക്കേണ്ടുന്ന സംഖ്യയും അതിൽ ചേരുമ്പോഴുള്ള വയസ്സും താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

വയസ്സ്	20	22	25	30	35	40	45	50	55
കൊല്ലന്തോറും അടയ്ക്കേണ്ട സംഖ്യ (ഉറുപ്പിക)	18	19	20	23	27	31	36	44	55

ഒരു ലേഖാചിത്രം വരച്ചു അതിൽനിന്നു 26ഉം 52ഉം വയസ്സിൽ കമ്പനിയിൽ ചേരുന്നവർ കൊല്ലന്തോറും അടയ്ക്കേണ്ടുന്ന സംഖ്യ (ഉറുപ്പികയിൽ കുത്യമായി) കാണുക.

6. അമേരിക്കയിലെ ഐക്യസംസ്ഥാനങ്ങളിൽ 1840 മുതൽ 1900 വരെയുണ്ടായിരുന്ന ജനസംഖ്യ (മില്യനായി) താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

കൊല്ലം	1840	50	60	70	80	90	1900
ജനസംഖ്യ	17	23	31	39	50	63	76

ജനസംഖ്യയിലുണ്ടായ മാറ്റം ഒരു ലേഖാചിത്രം മൂലം കാണിക്കുക. 1895 ലെ ജനസംഖ്യയും ജനസംഖ്യ 25 മില്യനായിരുന്ന കൊല്ലവും ലേഖാചിത്രത്തിൽ നിന്നു കാണുക.

7. ഒരു റബ്ബർകയറിന്റെ അറ്റത്തു ഭാരം കെട്ടിത്തൂക്കുമ്പോൾ അതിന്നുള്ള നീളം താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

ഭാരം (റാത്തൽ.)	10	12	17	21	23	25
നീളം (സെ.മീ.)	36·4	37·7	40·5	43·0	44·3	45·4

ഭാരം ഇല്ലാതിരിക്കുമ്പോൾ കയറിന്റെ നീളവും, നീളം 41·2 സെ. മീ. ആവാൻ വേണ്ടുന്ന ഭാരവും ഒരു ലേഖാചിത്രം വരച്ചു നിർണ്ണയിക്കുക.

8. സ്ത്രീപുരുഷന്മാരുടെ വയസ്സും അവർ ഇനിയും ജീവിച്ചിരിപ്പാൻ തരമുള്ള കൊല്ലവും താഴേ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

ഇപ്പോഴുള്ള വയസ്സു		70	60	50	40	30	20	10	4	0
ഇനിയുംജീവിച്ചിരിപ്പാൻ തരമുള്ള കൊല്ലം	സ്ത്രീ	9·0	14·2	20·6	27·8	35·4	43·4	52·0	56·3	47·8
	പുരുഷൻ	8·3	13·1	18·9	25·6	33·1	41·0	49·6	54·0	44·1

(*a*) സ്ത്രീകളെ (*b*) പുരുഷന്മാരെ സംബന്ധിച്ചുള്ള ലേഖാചിത്രങ്ങൾ വരക്കുക. 54 വയസ്സുള്ള സ്ത്രീപുരുഷന്മാർ, 15 വയസ്സുള്ള കുട്ടികൾ ഇവർ എത്ര കൊല്ലംകൂടി ജീവിച്ചിരിക്കാമെന്നു ലേഖാചിത്രത്തിൽനിന്നു കാണുക.

9. സമുദ്രനിരപ്പിൽനിന്നുള്ള ഉയരവും വായുസമ്മർദ്ദവും താഴേ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

ഉയരം (ആയിരം അടിയായി)	0	5	10	15	20	25
വായുസമ്മർദ്ദം (അംഗുലമായി)	30·1	25	20·6	17·1	14·3	11

ഉയരത്തിലുള്ള വർദ്ധനവും അതിനാൽ സമ്മർദ്ദത്തിലുള്ള കുറവും കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം വരക്കുക. 18000 അടി ഉയരത്തിലുള്ള സമ്മർദ്ദവും എത്ര ഉയരത്തിൽ സമ്മർദ്ദം 12" ആയിരിക്കുമെന്നും കാണുക.

10. 1911 ഏപ്രിൽ തുടങ്ങി 1912 മാർച്ച് വരെ ഓരോ മാസവും 15-ാം൹ Red Hills തടാകത്തിലുണ്ടായിരുന്ന വെള്ളത്തിന്റെ നിരപ്പ് യഥാക്രമം 42·1, 40·5, 39·0, 37·9, 36·9, 36·6, 37·3, 39·1, 44·0, 44·3 43·4 43·0 ആയിരുന്നു. നിരപ്പിലുണ്ടായ മാറ്റങ്ങളെ വക്രരേഖയായ ഒരു ലേഖാചിത്രംമൂലം കാണിക്കുക. നിരപ്പു എപ്പോഴായിരുന്നു (*a*) ഏറ്റവും ഉയർന്നതു (*b*) ഏറ്റവും താണതു എന്നു കാണുക. (1914)

11. ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭാരത്തെ നിൽക്കേണ്ടതിന്നു ഒരു യന്ത്രത്തിൽ പ്രയോഗിക്കേണ്ടുന്ന ബലത്തെ താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

ഭാരം (റാത്തൽ)	50	100	200	300	400	500
ബലം (റാത്തൽ)	106	122	152	184	216	246

ഭാരവും ബലവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം വരക്കുക. ഭാരം 350 റാത്തലാണെങ്കിൽ പ്രയോഗിക്കേണ്ടുന്ന ബലവും, 158 റാത്തൽ ബലംപ്രയോഗിച്ചു നീക്കാവുന്ന ഭാരവും കാണുക. (1916)

12. സ്ത്രീപുരുഷന്മാരുടെ ശരാശരി ഉയരവും തൂക്കവും താഴേ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

ഉയരം	5′0″	5′2″	5′4″	5′6″	5′8″	5′9″	5′10″	6′0″
പുരുഷന്റെ ശരാശരി തൂക്കം (റാത്തൽ)	—	126	139	145	155	162	169	178
സ്ത്രീയുടെ ശരാശരി തൂക്കം (റാത്തൽ)	103	112	126	139	152	156	—	—

സ്ത്രീപുരുഷന്മാരുടെ ശരാശരി ഉയരവും തൂക്കവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്ന രണ്ടു ലേഖാചിത്രങ്ങൾ ഒരേ കടലാസ്സിൽ വരക്കുക. 10 കല്യ തൂക്കമുള്ള സ്ത്രീപുരുഷന്മാരുടെ ശരാശരി ഉയരത്തിലുള്ള വ്യത്യാസവും, അവരുടെ ഉയരം 5′6½″ഉം ആണെങ്കിൽ തൂക്കത്തിലുള്ള വ്യത്യാസവും, കാണുക.

13. ചില കൊല്ലങ്ങളിൽ A, B എന്ന രണ്ടു പട്ടണങ്ങളിൽ ഉണ്ടായിരുന്ന ജനസംഖ്യ (ആയിരമായി) താഴേ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

കൊല്ലം	1835	45	55	65	75	80	90
A	24·4	26	29·5	34	40	43	50
B	34	36	38·4	41·1	43	44·8	46·7

ഒരേ കടലാസ്സിൽ രണ്ടു ലേഖാചിത്രങ്ങളും വരച്ചു 1870-ാം കൊല്ലാരംഭത്തിൽ ഓരോ പട്ടണത്തിലുമുണ്ടായിരുന്ന ജനസംഖ്യ കാണുക. ഏതുകൊല്ലത്തിൽ രണ്ടു പട്ടണങ്ങളിലേയും ജനസംഖ്യ സമമായിരുന്നെന്നും, അതു എത്രയായിരുന്നുവെന്നും, കാണുക.

14. ശാസ്ത്രസംബന്ധമായ ഒരു പരീക്ഷണം നടത്തിയപ്പോൾ ഒരു വസ്തുവിന്റെ താപം 10, 20, 30, 40, 50, 60 സെക്കണ്ടിന്റെ ഒടുവിൽ യഥാക്രമം 15, 30. 43, 56, 58, 45 ഡിഗ്രിയാണെന്നും ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ താപം 60° ആണെന്നും കണ്ടു. താപത്തിലുണ്ടായ മാറ്റത്തെ കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം വരക്കുക. 25 സെക്കണ്ടിന്റെ ഒടുവിൽ താപം എത്രയായിരുന്നുവെന്നും

എപ്പോൾ 50° താപം ഉണ്ടായിരുന്നുവെന്നും ലേഖാചിത്രത്തിൽനിന്നു നിർണ്ണയിക്കുക. (1920)

15. ഒരു പുഴയുടെ കടവിന്റെ വീതി 42 വാരയാണ്. ഒരു കരയിൽ നിന്നു പല ദൂരത്തുമുള്ള ആഴം താഴേ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ട്. കടവിന്റെ ആഴത്തെ കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം വരയ്ക്കുക. (1) കടവിന്റെ മദ്ധ്യത്തിലുള്ള ആഴവും (2) 5'2" ആഴത്തിൽ ആപത്തു കൂടാതെ ഇറങ്ങുവാൻ കഴിയുന്ന ഒരാൾക്കു കരയിൽനിന്നു എത്ര ദൂരത്തോളം പോകാമെന്നും കാണുക. (1921)

ഒരു കരയിൽനിന്നുള്ള ദൂരം (വാര)	0	5	8	10	14	16	19	23	26	30	32	35	38	42
ആഴം (അടി)	0	2·8	4·4	5·0	7·2	8·0	10·2	9·8	8·4	7·3	6·0	4·8	3·1	0

16. 6 കൊല്ലങ്ങളുടെ ആരംഭത്തിൽ A, B എന്ന രണ്ടു കുട്ടികൾക്കുണ്ടായിരുന്ന ഉയരം താഴേ കാണുന്ന പട്ടികയിൽ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

കൊല്ലം	1916	17	18	19	20	21
A	3'0"	3'4·5"	3'7·75"	3'10·75"	4'1"	4'2·75"
B	3'2"	3'3·5"	3'5·75"	3'8·5"	3'11·75"	4'4"

രണ്ടു കുട്ടികളുടേയും വളർച്ച കാണിക്കുന്ന ലേഖാചിത്രങ്ങൾ ഒരേ കടലാസ്സിൽ വരച്ചു രണ്ടു പേർക്കും ഒരേ ഉയരം ഉണ്ടായിരുന്ന തീയതികൾ കാണുക. (1923)

17. 100 ഗ്രാം വെള്ളത്തിൽ അലിയുന്ന പടികക്കാരത്തിന്റെ തൂക്കവും വെള്ളത്തിന്റെ താപവും താഴേ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

താപം (സെൻറിഗ്രെഡ് ഡിഗ്രി)	0	10	20	30	40	50	60	70
പടികക്കാരത്തിന്റെ തൂക്കം (ഗ്രാം)	3·9	9 5	15·1	22·0	30·9	44·1	66·6	90·7

വെള്ളത്തിനു എത്ര താപമുള്ളപ്പോൾ 100 ഗ്രാം വെള്ളത്തിൽ 50 ഗ്രാം പടികക്കാരം അലിയുമെന്നു ഒരു ലേഖാചിത്രം വരച്ചു കാണുക. (1925)

അദ്ധ്യായം 29.

പരീക്ഷക്കടലാസ്സുകൾ (Test papers).

വിദ്യാർത്ഥിയുടെ ശീഘ്രതയും സൂക്ഷ്മതയും പരിശോധിപ്പാൻ ചില പരീക്ഷാചോദ്യങ്ങൾ താഴെ ചേർക്കുന്നു. കടലാസ്സിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ള സമയത്തിൽ ചെയ്തീർക്കുന്നതായാൽ എത്ര മാർക്ക് കിട്ടുമെന്നു വിദ്യാർത്ഥി ഒരു നോട്ടപുസ്തകത്തിൽ കുറിക്കേണം. ഓരോ വിദ്യയും ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ചശേഷം ഇത്തരം വേറെയും ചോദ്യക്കടലാസ്സുകൾ ഉണ്ടാക്കി കൊടുക്കുകയും അവയിൽ കിട്ടിയ മാർക്കും വിദ്യാർത്ഥി കുറിക്കുകയും ചെയ്യുന്നതിനാൽ വിദ്യാർത്ഥിയുടെ പുരോഗതി നിശ്ചയിക്കാം. ഓരോ ചോദ്യത്തിന്റേയും മാർക്ക് ആവരണചിഹ്നങ്ങളിൽ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

മാർക്ക്: 20. 1. ശരാശരി സമയം: 25മി.

1. രാധയുടെ വയസ്സു 9കൊ. 8മാ. ആണ്. അവൾക്കു 4 സഹോദരന്മാരുണ്ട്. അവരിൽ 2 പേർക്കു അവളേക്കാൾ 5കൊ. 8മാ.വും 2കൊ. 9മാ.വും അധികം വയസ്സുണ്ട്. ശേഷമുള്ള 2 പേരുടെ വയസ്സു അവളുടെ വയസ്സിനേക്കാൾ 3കൊ. 2മാ.വും 6കൊ. 1മാ.വും കുറവാണ്. എന്നാൽ കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സു കാണുക.

2. ഒരു പട്ടണത്തിൽ 3 ദിവസങ്ങളിൽ സൂര്യൻ 5മ. 42മി., 5മ. 44മി., 5മ. 47മി.നു ഉദിക്കുകയും 5മ. 58മി., 5മ. 56മി., 5മ. 55മി.നു അസ്തമിക്കുകയും ചെയ്താൽ ആ ദിവസങ്ങളിലെ പകലിന്റെ ശരാശരി ദൈർഘ്യം കാണുക. (5)

3. 38 കുട്ടികൾ ഒരു അദ്ധ്യയന യാത്രക്കു പോയതിൽ അവരുടെ ശരാശരി ചെലവു 2ക. 14ണ. ആയിരുന്നു. 17 കുട്ടികൾക്കുടി 41ക. കൊടുത്തുവെങ്കിൽ ശേഷമുള്ളവർ ശരാശരി എത്ര കൊടുത്തിരിക്കണം? (4)

4. Aയിൽനിന്നു Bയിലേക്കു പോകുവാൻ ഒരു തീവണ്ടിക്കു 50 മിനുട്ടു വേണം. ഇതിൽ 25 മിനുട്ടു മണിക്കുറിൽ 30 നാഴിക വീതവും, 15 മിനുട്ടു മണിക്കുറിൽ 25 നാഴിക വീതവും ആണ് ഓടിയതു. ബാക്കിസമയം വഴിമദ്ധ്യേയുള്ള ഒരു ആപ്പീസിൽ നിന്നുവെങ്കിൽ ഈ യാത്രയിൽ വണ്ടിയുടെ ശരാശരി ശീഘ്രത (മണിക്കുറിൽ) കാണുക. (6)

മാർക്ക്: 20 2. സംബന്ധവും അനുപാതവും. സമയം: 25മി.

1. ഒരാൾ തീവണ്ടിയിൽ 2ഉം 3ഉം ക്ലാസ്സുകളിൽ യഥാക്രമം 54ഉം 120ഉം

നാഴിക യാത്രചെയ്യുന്നതിന്നു 3 ക. 15 ണ. യും 3 ക. 2 ണ. യും ക്രമീകൊടുത്തുവെങ്കിൽ ഒരേ ദൂരം ഈ ക്ലാസ്സുകളിൽ യാത്രചെയ്യുന്നതിന്നുള്ള ക്രമികൾ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക. (5)

2. 15 മാറ്റ് ശുദ്ധിയുള്ള 3 ഔൺസ് സ്വർണ്ണത്തോടു 16 മാറ്റ് ശുദ്ധിയുള്ള 4 ഔൺസ് സ്വർണ്ണം ഉരുക്കി ചേർത്താൽ കിട്ടുന്ന ലോഹത്തിന്റെ ശുദ്ധി കാണുക. (5)

3. 1 : 7200 എന്ന തോതിൽ വരച്ച ഒരു പടത്തിൽ ഒരു ഗ്രാമത്തിലെ 2 കെട്ടിടങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം 2·2″ ആണെങ്കിൽ അവ തമ്മിലുള്ള യഥാർത്ഥ ദൂരം ഗണിക്കുക. (4)

4. 10,000 നിവാസികൾ ഉള്ള ഒരു പട്ടണത്തിൽ 35 ദിവസത്തേക്കുള്ള റേഷൻ ഉണ്ട്. 5 ദിവസത്തിനുശേഷം 2500 അഭയാർത്ഥികൾ വന്നുകൂടിയപ്പോൾ റേഷൻ പകുതിയാക്കിയാൽ അവിടെയുള്ള ഭക്ഷണം എത്ര ദിവസത്തേക്കു ഉണ്ടായിരിക്കും? (Oct. 1950) (6)

മാർക്ക്: 20 3. അനുപാതത്തിന്റെ പ്രയോഗം. സമയം: 25 മി.

1. 6000 ക. മുടക്കി A ഒരു കച്ചവടം തുടങ്ങി. 3 മാസം കഴിഞ്ഞശേഷം B ഒരു പങ്കുകാരനായി ചേർന്നു. കച്ചവടം തുടങ്ങി ഒരു കൊല്ലം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ ഉണ്ടായ 1500 ക. ലാഭത്തിൽ നിന്നു B ക്കു 900 ക. കിട്ടിയെങ്കിൽ അയാളുടെ മൂലധനം കാണുക. (7)

2. ഒരു കുഴൽ ഒരു വെള്ളത്തൊട്ടിയെ 8 മിനുട്ടിൽ നിറയ്ക്കും. തൊട്ടിയുടെ അടിയിൽ ഒരു ചോരുമുള്ളതുകൊണ്ടു തൊട്ടി നിറയുവാൻ 2 മിനുട്ടു അധികം വേണ്ടിവരുന്നു. തൊട്ടി നിറഞ്ഞ ഉടനെ കുഴൽ അടച്ചാൽ എത്ര മിനുട്ടിൽ തൊട്ടി ഒഴിയും? (6)

3. ഒരു കുട്ടി സ്കൂളിലേക്കു മണിക്കൂറിൽ 3 നാഴിക വീതം നടക്കുന്നു. കുട്ടി പുറപ്പെട്ടു $\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ കഴിഞ്ഞശേഷം അവന്റെ അച്ഛൻ വീട്ടിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു കാറിൽ മണിക്കൂറിൽ 15 നാഴിക വീതം അവൻ പോയ വഴിയായി പോകുകയും സ്കൂളിന്റെ മുൻവശത്തുവെച്ചു അവനെ കടന്നുപോകുകയും ചെയ്താൽ വീട്ടിൽനിന്നു സ്കൂളിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക. (7)

മാർക്ക്: 20 4. ശതമാനം. സമയം: 25 മി.

1. ഒരു ജില്ലയിലെ ജനങ്ങളിൽ 85 ശ. മാ. ഗ്രാമവാസികളാണ്. അക്ഷരപരിജ്ഞാനമുള്ളവർ ആകെ ജനസംഖ്യയിൽ 8 ശ. മാ. യും നഗരവാസികളിൽ 30 ശ. മാ. യും ആണെങ്കിൽ ഗ്രാമവാസികളിൽ എത്ര ശ. മാ. അക്ഷരപരിജ്ഞാനമുള്ളവരാണ്? (1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.) (6)

2. 100ന്റെ 7ക. 8ണ. വീതം ഒരാൾ 840 മാങ്ങ വാങ്ങി. പകുതി ഡസ നും 1ക. 4ണ. വീതവും, $\frac{1}{3}$, 1ക.ക്കു 10 വീതവും ബാക്കി ആകെ 7ക.ക്കും വി റ്റാൽ അയാൾക്കു എത്ര ശ.മാ. ലാഭം കിട്ടും? (7)

3. ഒരാളുടെ വക്കൽ 238 ഇടങ്ങഴി അരിയുള്ളതിൽ 84 ഇടങ്ങഴി 87ക. 8ണ.ക്കു വിറ്റു 25% ലാഭം ഉണ്ടാക്കി. ബാക്കിയുള്ളതു 10% ലാഭത്തിനു വിറ്റു. അയാളുടെ വക്കലുണ്ടായിരുന്ന മുഴുവൻ അരിയും 20% ലാഭത്തിനു വിറ്റി രുന്നെങ്കിൽ അയാൾക്കു എത്ര അധികം ലാഭം കിട്ടുമായിരുന്നു? (Oct. '50) (7)

മാക്: 15 5. സാധാരണ പലിശ. സമയം: 15മി.

1. $2\frac{1}{2}$% പലിശകൊടുക്കുന്ന ഒരു ബേങ്കിൽ ഏതൊരു സംഖ്യ ഇട്ടാൽ 6മാ സത്തിനു ശേഷം 86ക. 1ണ. കിട്ടും? (5)

2. പണ്ടം പണയത്തിന്മേൽ 6% പലിശക്കു ഒരാൾ 225ക. കടംവാങ്ങി. കടം വീട്ടുവാൻ 230ക. 10ണ. കൊടുക്കേണ്ടിവന്നാൽ എത്ര മാസം കഴി ഞ്ഞാണ് പണം തിരിച്ചു കൊടുത്തത്? (4)

3. ഒരു വായനശാലയിലെ വരിപ്പണം ഒരു ബേങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചു 5ഉം 9ഉം മാസം കഴിഞ്ഞശേഷം ശാലയുടെ പേരിലുള്ള സംഖ്യ 381ക. 4ണയും 386ക. 4ണ.യും ആണെങ്കിൽ പലിശനിരക്കു കാണുക. (6)

മാക്: 35. 6. ബീജഗണിതം. സമയം: 35മി.

1. $7x^2+4$നെ $3x-5$കൊണ്ടു പെരുക്കുക. $x=-1\frac{1}{3}$ ആയാൽ ഗുണന ഫലത്തിന്റെ വില കാണുക. (6)

2. $15x^2-4x+3$യെ $3x+7$കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. (5)

3. നേരിട്ടു പെരുക്കാതെ ഉത്തരം കാണുക.
71^2; $5\cdot8^2$; $9\cdot2\times8\cdot8$; $14\cdot2^2-13\cdot2^2$ (5)

4. ഒരു മോട്ടോർലോറിയുടെ ഭാരം w ടൺ ആകുന്നു. n ചാക്ക് നെല്ലു കയറ്റിയശേഷം ഭാരം Wടൺ ആയാൽ 1 ചാക്ക് നെല്ലിന്റെ ഭാരം കാ ണുക. $w=1\frac{1}{2}$; $W=2\frac{3}{4}$; $n=25$ ആയാൽ 1 ചാക്ക് നെല്ലിന്റെ ഭാരം എത്ര റാത്തൽ ആണ്? (5)

5. സമതുലഫലം നിർണ്ണയിക്കുക. സത്യാപനം ചെയ്യുക.

$$\frac{3x+1}{7}-2x=4-1\tfrac{1}{2}x-\frac{5x-2}{2} \qquad (6)$$

6. ഒരു സമിതിയിലെ രണ്ടു കക്ഷികളുടെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം 3 : 2 എന്ന സംബന്ധത്തിലാകുന്നു. ഭൂരിപക്ഷത്തിൽനിന്നു 18 പേർ തെറ്റി ന്യൂനപക്ഷ ത്തിൽ ചേർന്നാൽ സംബന്ധം 5 : 4 ആകും. എന്നാൽ സമിതിയിലെ ആകെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക. (April 1947) (8)

മാക്ക്: 20. 7. ക്ഷേത്രഗണിതം. സമയം: 25മി.

1. 2 പൂരകകോണുകളുടെ വ്യത്യാസം 12° ആണെങ്കിൽ അവയുടെ വലിപ്പം എത്ര? (2)

2. 2 പരിപൂരക കോണുകളിൽ ഒന്നു മറ്റേതിന്റെ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടിയാണെങ്കിൽ വലിയതിന്റെ വലിപ്പം എത്ര? (3)

3. ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി 3 സരളരേഖകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. സമീപകോണുകളുടെ വലിപ്പം 1 : 2 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണെങ്കിൽ അവയുടെ വലിപ്പം എത്ര? കോണുകളെ വരക്കുക. (4)

4. ഒരു ലംബസമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 100° ആണെങ്കിൽ മറ്റു രണ്ടു കോണുകളുടെ വലിപ്പം എഴുതുക. (3)

5. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ കോണുകളുടെ വലിപ്പം എഴുതുക. (2)

6. 8സെ. മീ. നീളമുള്ള ഒരു സരളരേഖ വരക്കുക. അതിന്റെ ഒരംശം മറ്റേ അംശത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാകത്തക്കവണ്ണം അതിനെ ഭാഗിക്കുക. ഓരോ അംശത്തേയും അളക്കുക. (6)

മാക്ക്: 25. 8. ക്ഷേത്രഗണിതം. സമയം: 25മി.

1. ഒരു ത്രികോണത്തിൽ 2 അധികകോണുകൾ ഉണ്ടാകയില്ലെന്നു തെളിയിക്കുക. (4)

2. റൂളറും (ruler) വൃത്തലേഖകവും മാത്രം ഉപയോഗിച്ചു (*a*) 90° വലിപ്പമുള്ള ഒരു കോൺ വരക്കുക. അതിന്റെ ഒരംശം മറ്റേതിന്റെ 3 ഇരട്ടിയാകത്തക്കവണ്ണം അതിനെ ഭാഗിക്കുക. (*b*) 60° വലിപ്പമുള്ള ഒരു കോൺ നിർമ്മിക്കുക. (10)

3. ഒരു സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ 75° ആണെങ്കിൽ മറ്റു കോണുകളുടെ വലിപ്പം ഗണിക്കുക. നിങ്ങളുടെ ഉത്തരത്തിനു ആസ്പദമായ പ്രമേയം എഴുതുക. (4)

4. ഒരു തുല്യാംഗ അഷ്ടകോണത്തിന്റെ കോണിന്റെ വലിപ്പമെത്ര? (3)

5. ഒരു തുല്യാംഗ ബഹുകോണത്തിന്റെ ബാഹ്യകോൺ 162° ആണെങ്കിൽ അതിനു എത്ര ഭുജങ്ങളുണ്ട്? (4)

സാങ്കേതികപദങ്ങൾ (Technical Terms).

Abbreviation	സംക്ഷിപ്തസംജ്ഞ
Abscissa	പ്രഥമനിയാമകം
Accurate	കൃത്യ
Acre	ഏക്കർ
Add	കൂട്ടുക
Addition	കൂട്ടൽ
Adjacent	സമീപ
,, angle	സമീപകോൺ
,, side	സമീപഭുജം
Algebra	ബീജഗണിതം
Alternate angle	ഏകാന്തരകോൺ
Altitude	ഉയരം, ഉന്നതി
Amount	പലിശയടക്കം മുതൽ
Angle	കോൺ
,, Acute	അല്പകോൺ
,, Arms of an	കോണഭുജങ്ങൾ
,, Complementary	പൂരകകോൺ
,, Corresponding	സദൃശകോൺ
,, Exterior	ബാഹ്യകോൺ
,, Interior	ആന്തരകോൺ
,, Interior opposite	ആന്തരവിരുദ്ധകോൺ
,, Obtuse	അധികകോൺ
,, Opposite	വിരുദ്ധകോൺ
,, Right	സമകോൺ
,, Straight	സരളകോൺ
,, Supplementary	പരിപൂരകകോൺ
,, Vertex of an	കോണാഗ്രം
,, Vertical	ശീർഷകോൺ
,, Vertically opposite	വിരുദ്ധശീർഷകോൺ
Answer	ഉത്തരം
Apparatus	ഉപകരണം

Application	പ്രയോഗം
Apply (a theorem)	പ്രയോഗിക്കുക
,, (the triangle, etc.)	ഉപരിവിന്യസിക്കുക
Approximate	സുമാർ
Arc	ചാപരേഖ
,, Major	ഗുരുചാപം
,, Minor	ലഘുചാപം
Area	ക്ഷേത്രഫലം
Arithmetic	അങ്കഗണിതം
Average	ശരാശരി
Axiom	പ്രത്യക്ഷതത്ത്വം
Axes of co-ordinates	നിയാമകാക്ഷങ്ങൾ
Axis	അക്ഷം
Base (of a triangle)	ആധാരം
Binomial	ദ്വിപദം
,, expression	ദ്വിപദവ്യഞ്ജകം
Bisect	രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുക
Bisection	രണ്ടു സമഭാഗമാക്കൽ
Bisector	ദ്വിഭാജകം
Brackets	ആവരണചിഹ്നം
,, Curved	ചെറിയ ആവരണചിഹ്നം
,, Double	വലിയ ,,
,, Square	ചതുര ,,
Breadth	വീതി
Calculate	കണക്കാക്കുക, ഗണിക്കുക
Capital	മൂലധനം
Carat	മാറ്റ്
Centre	കേന്ദ്രം
Chord	ജ്യാവ്
Cipher	പൂജ്യം
Circle	വൃത്തം
,, segment of	വൃത്തഖണ്ഡം
,, semi	അർദ്ധവൃത്തം
Circumference	പരിധി

Co-efficient	ഗുണകം
,, Literal	അക്ഷരഗുണകം
,, Numerical	സംഖ്യഗുണകം
Coincide	സന്നിപതിക്കുക
Common angle	പൊതുകോൺ
,, side	പൊതുഭുജം
Compasses	വൃത്തലേഖകം
Complement	പൂരകം
Conclusion	പരിണാമം
Concrete (number)	വസ്തു സൂചക (സംഖ്യ)
Condition	ഉപാധി
Conditional	ഔപാധിക
Cone	ക്രമ്പാരം
Congruence	സർവ്വാംഗതുല്യത
Congruent	സർവ്വാംഗതുല്യമായ
Consecutive	ക്രമഗത
Construct	നിർമ്മിക്കുക
Construction	നിർമ്മാണം
Converse	വിലോമ
Conversely	വിലോമമായി
Convex	ഉന്നതോദര
Corollary	ഉപസിദ്ധാന്തം
Correspond	സംഗതമാവുക
Corresponding	സംഗത
,, side	,, ഭുജം
Cube (x^3)	ത്രിഘാതം (xന്റെ ത്രിഘാതം)
Curve	വക്രം
Curved surface	വക്രതലം
Decagon	ദശകോണം
Decimal	ദശാംശ
Define	നിർവ്വചിക്കുക
Degree (angle)	ഡിഗ്രി
Demonstrate	തെളിയിക്കുക
Denominator	ഛേദകം

Diagonal	കണ്ണം
Diagram	രേഖാചിത്രം
Diameter	വ്യാസം
Difference	വ്യത്യാസം
Directed numbers	ദിഗ്ഭേദ സംഖ്യകൾ
Divide	ഹരിക്കുക
Dividers	വിഭാജകം
Division	ഹരിക്കൽ
Divisor	ഹാരകം
Edge	വക്ക്
Element (of a figure)	അംഗം
Enunciate	പ്രസ്താവിക്കുക
Enunciation	പ്രസ്താവം
Equal	തുല്യം
,, in all respects	സർവ്വാംഗതുല്യമായ
Equality	തുല്യത
Equation	സമതാപം
,, conditional	ഔപാധികസമതാപം
,, identical	സർവ്വസമതാപം
,, simple (linear)	ഏകഘാതസമതാപം
,, solution of an	സമതാഫലനിർണ്ണയം
,, solve an	സമതാഫലം നിർണ്ണയിക്കുക
Equiangular	തുല്യകോണമായ
Equilateral	തുല്യഭുജമായ
Even	ഇരട്ട
Expression Algebraical	ബീജഗണിത വ്യഞ്ജകം
Exterior, External	ബാഹ്യ
Extremes	അഗ്രപദങ്ങൾ
Face (e. g. of a cube)	പരപ്പ്
Factor	ഘടകം
Figure (geometry)	രൂപം
,, (arithmetic)	അക്കം
,, Rectilineal	സരളരേഖാരൂപം
,, Regular	തുല്യാംഗരൂപം

Foot	അടി
Form	രൂപം
Formula	സൂത്രം
Fraction	ഭിന്നിതം, ഭിന്നം
,, Representative	തോഭ ഭിന്നിതം
Geometry	ക്ഷേത്രഗണിതം
,, Practical	പ്രായോഗികക്ഷേത്രഗണിതം
,, Theoretical	സൈദ്ധാന്തികക്ഷേത്രഗണിതം
Graph	ലേഖാചിത്രം
Height	ഉന്നതി
Heptagon	സപ്തകോണം
Hexagon	ഷഡ്കോണം
Horizontal	അനുപ്രസ്ഥം
Hypotenuse	വിപുലരേഖ
Hypothesis	സങ്കല്പം
Hypothetical (construction)	സങ്കല്പ (നിർമ്മാണം)
Identity	സർവ്വസമതാ
Index (of a power)	ഘാതസംജ്ഞ
Integer	പൂർണ്ണസംഖ്യ
Integral part	അഭിന്നഭാഗം
Interest simple	സാധാരണപലിശ
Intersect	പരസ്പരം ഛേദിയ്ക്കുക.
Inverse ratio	പ്രതിക്രമസംബന്ധം
Isosceles	ദ്വിസമഭുജ
Length	നീളം
Like	സജാതീയ
Line	രേഖ
,, curved	വക്രരേഖ
,, straight	സരളരേഖ
Magnitude Ascending order	ആരോഹക്രമം
,, Descending order	അവരോഹക്രമം
Mathematics	ഗണിതശാസ്ത്രം.
Means	മദ്ധ്യപദങ്ങൾ
Minus sign	ഋണചിഹ്നം

Multiple	ഗുണിതം
Multiplication Cross	തിയ്യ്കഗുണനം
Negative	ഋണ
,, quantity	ഋണരാശി
,, sign	ഋണചിഹ്നം
Number Positive	ധനസംഖ്യ
Numerator	അംശം
Oblique	ചരിഞ്ഞ
Octagon	അഷ്ടകോണം
Odd	ഒറ്റ
Opposite	വിരുദ്ധ
Ordinate	ദ്വിതീയനിയാമകം
Origin	മൂലബിന്ദു
Parallel	സമാന്തര
Parallelogram	സമാന്തരചതുഷ്കോണം
Partnership	കൂട്ടുകച്ചവടം
Pentagon	പഞ്ചകോണം
Percent-Percentage	ശതമാനം
Perpendicular	ലംബം
,, bisector	ദ്വിഭാജകലംബം
Plane	സമതലം
Plot (points)	അടയാളപ്പെടുത്തുക
Plus sign	ധനചിഹ്നം
Point	ബിന്ദു
Polygon	ബഹുകോണം
Position	സ്ഥാനം
Positive quantity	ധനരാശി
Postulate	സ്വീകൃതം
Power	ഘാതം
Principal	മുതൽ
Problem	പ്രശ്നം
Product	ഗുണനഫലം
,, continued	അവിരാമഗുണനഫലം
Profit and Loss	ലാഭവും നഷ്ടവും

Proof	ഉപപത്തി
Proportion	അനുപാതം
,, Direct	ക്രമാനുപാതം
,, Inverse	പ്രതിക്രമാനുപാതം
Proposition	സാദ്ധ്യം
Protractor	കോണമാപകം
Pyramid	പിറമിഡ്ഡ്
Quadrant	പാദം
Quadrilateral	ചതുർഭുജം
Quantity	രാശി
Quotient	ഹരിതഫലം
Radius	വ്യാസാർദ്ധം
Rate	വീതം, നിരക്ക്
Ratio	സംബന്ധം
,, Inverse	പ്രതിക്രമ സംബന്ധം
Rectangle	സമകോണചതുരം
Rectilineal figure	സരളഭുജരൂപം
Remainder	ശിഷ്ടം
Rhombus	സമചതുർഭുജം
Rule of signs	ചിഹ്നനിയമം
,, ,, three	ത്രൈരാശികം
Ruler	റൂളർ
Scale	അളവുകോൽ; തോതു്
Scalene	അതുല്യഭുജ
Sector	വൃത്തകോണാംശം
Segment of a circle	വൃത്തഖണ്ഡം
Semicircle	അർദ്ധവൃത്തം
Series	ശ്രേണി
Set square	ചതുരമട്ടം
Side	ഭുജം
Sign	ചിഹ്നം
Solid	ഘനവസ്തു
Solution	ലബ്ധഫലം
Speed	ശീഘ്രത

Sphere	ഗോളം
Square	വർഗ്ഗം; സമചതുരം
Substitute	പകരംചേക്കുക
Superpose	ഉപരിവിന്യസിക്കുക
Superposition	ഉപരിവിന്യാസം
Supplement	പരിപൂരകം
Surface	തലം
Symbol	ചിഹ്നം
Symbolic (representation)	ചിഹ്നീയസൂചനം
Term	പദം
Theorem	പ്രമേയം
Trade discount	കച്ചവടക്കിഴിവ്
Transversal	തിര്യക്കുരേഖ
Trapezium	ട്രപ്പീസിയം
Triangle	ത്രികോണം
,, Acute angled	ന്യൂനകോണത്രികോണം
,, Equilateral	സമഭുജ ,,
,, Isosceles	ദ്വിസമഭുജ ,,
,, Right-angled	സമകോണ ,,
,, Scalene	വിഷമ (അതുല്യ) ഭുജത്രികോണം
Unit	മാത്ര
Unitary	ഐകിക
Unlike	വിജാതീയ
Verification	സത്യാപനം
Vertex	ശീർഷം
Vertical	ഊർദ്ധ്വാധര
Vertically opposite	വിരുദ്ധശീർഷ
Vinculum	മേൽവര
Volume	ആയതനം

ഉത്തരങ്ങൾ

അഭ്യാസം 1.

1. (*a*) $58\frac{2}{3}$. (*b*) 25·68. (*c*) $496\frac{1}{4}$. 2. (*a*) 63ക. 5ണ. 4പ. (*b*) 54ക. 15ണ. 2പ. (*c*) 26ക. 5ണ. 6പ.; 8ക. 6ണ. 2പ. 3. (*a*) 1ക. 4ണ. 9പ. (*b*) 3ക. 13ണ. 1പ. (*c*) 2ക. 8ണ. 4പ. 4. (*a*) 15. (*b*) 11; 4. 5. 205ക. 6. (*a*) 81·6. (*b*) 74. (*c*) 1. വ്യാഴം; തിങ്കൾ; ചൊവ്വ. 7. 10ക. 8ണ. 8പ. 8. മണിക്കൂറിൽ $17\frac{6}{7}$ നാ. 9. (*a*) 57. (*b*) 68. (*c*) 57. (*d*) 73. (*e*) 57. (*f*) 70. 10. 22 നാ.; 25 നാ.

11. (*a*) 8,02,338, 12,03,291.

(*b*) ക: +5,86,306; +12,84,792
ബോ: +3,59,045; + 2,86,592
മ: −1,55,108; − 4,25,810
ഹൈ: −3,35,444; − 4,64,132
ഡെ: −4,54,799; − 6,81,442

(*c*) 1,09,944; 32,850; 13025; 27,227; 17,431.

12. (*a*) 390; 256; 753; 518; 339. (*b*) 411.
13. 3ക. 15ണ.; 4ക. 8ണ. 6പ. 14. $1\frac{1}{20}$. 15. 5ണ.
16. $535\frac{1}{2}$. 17. $33\frac{5}{18}$. 18. $24\frac{2}{3}$. 19. $44\frac{2}{3}$.
20. $139\frac{1}{2}$ ദി. 21. 33·5. 22. 14. 23. 25.
24. 13. 25. 13ക. 7ണ. 26. 1·08. 27. $22\frac{3}{4}$ക.
28. 17. 29. 4ണ.; 3ക. 10ണ. 30. 675ക.; 10320ക.
31. $28\frac{4}{5}$ നാ. 32. $\frac{mx-ny}{m-n}$; 10·0. 33. 40.
34. $32\frac{1}{2}$പ. 35. 34·8.

അഭ്യാസം 2.

1. (i) 3:2. (ii) 4:3. (iii) 116:35. (iv) 1:6. (v) 19:20. (vi) 8:5. 2. (*a*) $\frac{5}{7}$. (*b*) $\frac{2}{7}$. 3. 21:16. 4. 4:7. 5. ക്ല:11ക. 4ണ. ര:17ക. 8ണ. 6. 175, 200, 150.
7. $17\frac{1}{2}$; 10:11. 8. $3\frac{1}{2}$ക.; $4\frac{1}{2}$ക.; 3:4; 4:5; 7:9.

9. 189ക. 13ണ. 6പ. 10. 3ക.; 5ക. 10ണ.; 5ക.
11. 800ക. 12. $2\frac{1}{3}$; $\frac{35}{36}$. 13. 21:24:14.
14. 121:110:90. 15. 49:40. 16. 42:25.
17. 225ക., $67\frac{1}{2}$ക., $262\frac{1}{2}$ക. 18. 189, 168, 120.
19. $10\frac{1}{2}$ക., 14ക, 12ക. 20. $\frac{y}{x+y}$; $\frac{240x}{x+y}$; $\frac{8x}{y}$.
21. $\frac{c-g}{c}$; $c-g:g$. 22. 37:35. 23. 1ക. 2ണ.
24. 10:9. 25. 4:3. 26. 15:16.
27. 5; 20; 160. 28. 10:3. 29. 40ക.
30. 70; 85. 31. ഒന്നാമത്തേതു്. 32. രണ്ടാമത്തേതു്.
33. 72°. 34. 9:25. 35. 1പ. 10ക്കി.; 15ക്കി.; 10ക്കി.
36. 98. 37. 3420; 3780; 2880; 2970. 38. 350ക.; 245ക, 105ക. 39. 1:4. 40. 11:12. 41. $15\frac{1}{5}$.
42. 15 മാറു്. 43. 13:17. 44. 13·8 മാ. 45. $19\frac{1}{2}$ മാ.
46. 13 മാ. 47. 7. 48. 343:169. 49. $\frac{1}{5}$. 50. $\frac{1}{4}$ ക.

അഭ്യാസം 3.

1. 5376. 2. $\frac{1}{2}$. 3. 3 64. 4. $168\frac{3}{4}$.
5. 29ക. 5ണ. 4പ. 6. 4ണ. 7. $17\frac{1}{3}$ ഔ. 8. $\frac{bc}{a}$.

അഭ്യാസം 5.

1. 108. 2. 1ക. 13ണ. 2പ.; 72 നാ. 3. 35.
4. 4. 5. $1\frac{1}{4}$. 6. $6\frac{1}{4}$.ണ; 2. 7. 15; 18.
8. $1\frac{1}{4}$. 9. $\frac{9}{10}$. 10. $\frac{4}{5}$; 1ക. 4ണ. 11. $27\frac{1}{2}$.
12. $1\frac{1}{2}$ മ. 13. 46; $\frac{2}{325}$. 14. 4 വാ.; 27ക. 14ണ. 3പ.
15. 20പ. 17 ക്കി. 6 പൈ.; 23ക. 3ണ. $2\frac{2}{5}$ പ. 16. 4.

അഭ്യാസം 6.

4. (1) 20. (2) 150. (3) $8\frac{1}{3}$. (4) 1·6. 5. 1;1800.
6. 1:63360. 7. $\frac{1}{3\,6\,3\,0\,0\,0\,0}$. 8. $1\frac{1}{3}$ നാ.; 1 നാ.
9. 549 നാ. 10. 8·8″ 11. 12·7″

അഭ്യാസം 7.

1. $7\frac{1}{2}$. 2. 1202ക. 8ണ. 3. $4\frac{4}{7}$. 4. 9ക. 6ണ.
5. $14\frac{2}{3}$. 6. 429 ($428\frac{3}{4}$). 7. 6000. 8. 4″.
9. 5 മി. 10. $6\frac{3}{4}$. 11. 391ക. 3പ. 12. $13\frac{1}{5}$; $8\frac{1}{4}$.
13. 250ക. 14. 12. 15. 10000. 16. $24\frac{3}{4}$ ഔ.
17. 80. 18. $9\frac{3}{4}$; 341പ. 5ക്കി. 19. 7. 20. 225.

അഭ്യാസം 8.

1. 160ക.; 125ക.; 205ക.; 62ക. 8ണ. 2. 295ക.; 177ക.
3. $121\frac{2}{3}$പ.; $166\frac{2}{3}$പ.; $211\frac{2}{3}$പ. 4. 360ക.; 460ക.; 680ക.
5. 2650ക.; 113ക.; 12ണ.; 136ക. 8ണ. 6. 5192ക.
7. 3123പ. 14ക്കി. $4\frac{4}{5}$പൈ.; 2082പ. 9ക്കി. $7\frac{1}{5}$പൈ.; 2443പ. 16ക്കി.
8. 3060ക., 1530ക., 510ക. 9. 600ക. 10. 350ക.; 1125ക.; 900ക. 11. 375ക. 12 360ക., 480ക., 720ക.
13. 1200പ.; 1350പ. 14. $213\frac{1}{3}$ക.; 192ക.; $74\frac{2}{3}$ക.
15. 2ക. 2ണ. 6പ.; 2ക. 13ണ. 6പ. 16. 1200ക.; 675ക.; 10.
17. 420ക., 300ക, 218ക. 12ണ. 18. 1200ക.
19. 2 മാസത്തിനു ശേഷം. 20. $\frac{7}{15}$. 21. 6300ക.

അഭ്യാസം 9.

1. $3\frac{3}{10}$. 2. 54. 3. 2ക. 10ണ.; 1ക. 12ണ.; 1ക. 5ണ.
4. 1ക. 6ണ.; 1ക. 10ണ. 5. 1ക. 14ണ.; 1ക. 2ണ.; 6ണ.
6. 9.30നു. 7. 6, 5, $4\frac{2}{7}$. 8. $7\frac{1}{17}$. 9. 16, 48, 24.
10. $16\frac{1}{2}$. 11. 2. 12. 100. 13. 48. 14. 45.
15. 4മ. 36മി.; 5മണിക്കു. 16. $42\frac{6}{7}$. 17. $\frac{mnp}{q}$; 38.
18. 15ക. 12ണ.; 28ക. 14ണ.; 20ക. 4ണ. 19. $6\frac{2}{3}$.
20. 250ക. 21. 40.

അഭ്യാസം 10.

1. $5\frac{1}{2}$മ. ശേഷം; Aയിൽനിന്നു $101\frac{3}{4}$നാ. 2. 6; 924വാ.
3. 11മ. 40മി.നു; Aയിൽനിന്നു 75നാ. 4. 2മ. 51മി.

5. (*a*) 77. (*b*) $52\frac{4}{5}$. (*c*) $\frac{22x}{15}$. 6. (*a*) 45. (*b*) $18\frac{3}{4}$.
(*c*) 63. (*d*) $\frac{15y}{22}$ (*e*) $6\frac{3}{8}$. 8. 4:3. 9. (i) $5\frac{3}{5}$മ.;
$8\frac{4}{5}$മ. ശേഷം. (ii) $\frac{45-m}{6\frac{1}{4}}$മ.; $\frac{45+m}{6\frac{1}{4}}$മ. ശേഷം.
(iii) $7\frac{1}{5}$മ. ശേഷം; പുറപ്പെട്ട സ്ഥലത്തുനിന്നു $23\frac{2}{5}$നാ.
10. കാർ പുറപ്പെട്ട 3മ. ശേഷം; $70\frac{1}{2}$ നാ. ദൂരത്തു. 11. $1\frac{1}{10}$നാ.
12. $3\frac{7}{11}$. 13. Aയിൽനിന്നു $\frac{dx}{x+y}$ നാ. ദൂരത്തു.
14. $\frac{hmn}{60(n-m)}$ നാ. ദൂരത്തു.

അഭ്യാസം 11.

1. $18\frac{3}{4}$മി. 2. 20മി. 3. $a=b(f-e)$. $c=d(f+e)$;
$e=2$; $f=10$. 4. $\frac{v^2-u^2}{v}$നാ.; $59\frac{7}{12}$നാ.

അഭ്യാസം 12.

1. 309. 2. 88. 3. B; $10\frac{10}{11}$. 4. B; 13 അടി.
5. 4മ. 52മി; 35; 32. 6. 5·7നാ.

അഭ്യാസം 13.

1. 176′ 2. 3സെ. 3. 480′. 4. 88വാ;; $22\frac{1}{2}$നാ.
5. $7\frac{1}{2}$; 6സെ. 6. 3നാ. 7. 352′. 8. 10സെ.

അഭ്യാസം 14.

1. (*a*) (i) 1മ. $5\frac{5}{11}$മി. (ii) 1മ. $38\frac{2}{11}$മി. (iii) 1മ. $21\frac{9}{11}$മി.;
1മ. $54\frac{6}{11}$മി. (*b*) (i) 4മ, $21\frac{9}{11}$മി. (ii) 4മ. $54\frac{6}{11}$ മി.
(iii) 4മ. $5\frac{5}{11}$മി.; 4മ. $38\frac{3}{11}$മി. ((*c*) (i) 8മ. $43\frac{7}{11}$മി. (ii) 8മ.
$10\frac{10}{11}$മി. (iii) 8 മ. $27\frac{3}{11}$മി (*d*) (i) 10മ. $54\frac{6}{11}$ മി. (ii) 10മ.
$21\frac{9}{11}$ മി. (iii) 10 മ. $5\frac{5}{11}$ മി.; 10 മ. $38\frac{2}{11}$ മി. 2. 4മ. $30\frac{6}{11}$മി.
3. 8മ. $38\frac{2}{11}$മി. 4. 1മ. $5\frac{5}{11}$മി.

അഭ്യാസം 15.

1. $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{20}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{11}{50}$, $\frac{37}{100}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{11}{20}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{1}{12}$.

2. (*a*) 70, 65, 60, $43\frac{3}{4}$, $62\frac{1}{2}$, $22\frac{2}{9}$, $27\frac{3}{11}$, 23, 25, $33\frac{1}{3}$, $23\frac{1}{3}$ 34, 92, $83\frac{1}{3}$, $57\frac{1}{7}$.

(*b*) (i) $\frac{31}{48}$ $\frac{27}{40}$, $\frac{17}{24}$, $\frac{11}{16}$. (ii) $\frac{17}{32}$, $\frac{13}{23}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{11}{19}$.

3. 35, 80, 2, 1·7, ·1, 10, 30, 2·02.

4. (i) 14ക. 1ണ. (ii) 1ഫ. 110ഖ. (iii) 13ക്കി. 6പൈ. (iv) 16ഗ്രാ. (v) 20മീ. (vi) ·448ഘ്രാം. (vii) ·048സേർ.

5. 102; 76. 6 217. 7. $13\frac{1}{3}$; 429, 130, 117, 104.
8. (*a*) 6. (*b*) 132, 188. 9. $22\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{4}$, $51\frac{1}{4}$. 10 1584.
11. 1575. 12. 224. 13. 4·5; 4374പ.; 1758പ. 7ക്കി. 6പൈ.; 313പ. 17ക്കി. 6പൈ.; 303പ. 15ക്കി. 14. $42\frac{1}{3}$. 15. $6\frac{2}{3}$.
16. $4\frac{11}{16}$. 17. $88\frac{8}{9}$; $11\frac{1}{9}$. 18. 5, 40, 55. 19. $15\frac{5}{13}$.
20. 18. 21. $1\frac{11}{24}$; $1\frac{77}{18}$; $\frac{5}{72}$. 22. $82\frac{2}{3}$. 23. $29\frac{1}{2}$.
24. 7·9. 25. 12·5. 26. 27·1. 27. 10·65.
28. $97\frac{1}{2}$. 29. 25. 30. വ്യത്യാസം; 14. 31. 160.
32. $13\frac{1}{3}$ക. തുക്കം; $1\frac{19}{30}$ക. 33. $28\frac{1}{2}$നാ.; $19\frac{1}{2}$നാ. 1ക. 15ണ. 3പ.
34. 409. 35. 3750ക. 36. 17500. 37. 300ക.; 225ക.; കാര്യം: $6\frac{1}{4}$. 38. 225, 39. 180; $37\frac{1}{2}$. 40. 400; 40. 41. 48. 42. 154. 43. 32700. 44. 1900.
45. 90. 46. 40. 47. 150ക. 48. $9\frac{1}{11}$. 49. $33\frac{1}{3}$.
50. 12. 51. 43560; 47916; 29040; 75504; $+4\%$.
52. വ്യത്യാസം:12%; 161567. 53. 60·7; 22·7; 16·5.

54. (*a*) xക. (*b*) $\frac{xy}{100}$ക. 55. (*a*) $100+p$; $\frac{m(100+p)}{100}$;
(*b*) $100-n$; $\frac{x\ (100-n)}{100}$. 56. $\frac{100\ a}{a+b+c}$; $\frac{100\ b}{a+b+c}$;
$\frac{100\ c}{a+b+c}$. 57. (*a*) x; $100-x$. (*b*) $\frac{100\ n}{m}$; $\frac{100\ (m-n)}{m}$.
58. $100-a-b$; $\frac{ax}{100}$ക.; $\frac{bx}{100}$ക.; $\frac{(100-a-b)x}{100}$ക.

59. $\frac{100x}{p}$ ഒ. 60. $\frac{100a}{100-x-y}$ നാ.; $\frac{ax}{100-x-y}$ നാ.; $\frac{ay}{100-x-y}$ നാ.

61. $\frac{100a}{2n-100}$; $\frac{an}{2n-100}$; $\frac{a(100-n)}{2n-100}$.

62. $\frac{100m}{100+x}$ നാ. 63. $\frac{ax+by}{a+b}$. 64. 3200 ഏ.; 4ക.

അഭ്യാസം 16.

1. $\frac{21}{20}$, $\frac{27}{20}$, $\frac{9}{8}$, $\frac{187}{100}$, $\frac{13}{12}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{27}{25}$, $\frac{8}{7}$, $\frac{10}{9}$, $\frac{129}{100}$, $\frac{17}{25}$, $\frac{7}{10}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{10}{11}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{39}{100}$, $\frac{47}{80}$, $\frac{31}{40}$.

2. ല. 7, 25; ന. 20, 9, $12\frac{1}{3}$; ല. 10, $8\frac{1}{3}$; ന. $7\frac{2}{13}$; ല. 100, 200.

3. ല. 20; ന. $37\frac{1}{2}$; ല. 31; ന. 6; ല. 50; ന. $33\frac{1}{3}$, $18\frac{2}{11}$; ല. $22\frac{2}{9}$; ന. 50; ല. 100.

4. (1) 78ക. 1ണ. 6പ. (2) 39പ. 15ക്കി. 5പൈ. (3) $-11\frac{1}{4}$. (4) $+10$. (5) 9ക. 6. (6) 2ക. 5ണ. 6പ. 5. 7. 6. $12\frac{1}{2}$.

7. ല. 25. 8. ല. $2\frac{5}{6}$. 9. ല. $\frac{4}{5}$. 10. 125.

11. 5ക. 10ണ.; 6ക. 9ണ. 9പ. 12. 56ക. 4ണ.

13. 3600ക.; 20. 14. ന. 20. 15. ല. 5.

16. ന. 6·45. 17. 1440ക.; 30. 18. $66\frac{2}{3}$. 19. 20.

20. 75. 21. $28\frac{4}{7}$. 22. 9ക. 6ണ. 23. 3ക. 3ണ. 9പ. 24. 60. 25. 125ക. 26. 20. 27. 28.

28. (i) $8\frac{1}{4}$ണ. (ii) 7ക. 11ണ. 9പ. (iii) 12ക. 8ണ. (iv) $48\frac{1}{2}$.

29. 150ക. 30. ന 12. 31. ന. 4. 32. 8ണ.

33. 2ക. 8ണ. 34. 24ക. 35. 2500ക. 36. 142ക.; 18ക.

37. 8. 38. $16\frac{2}{3}$. 39. $4\frac{8}{15}$. 40. നക്കും 1.

41. 4800ക. 42. $10\frac{1}{2}$; 62ക. 8ണ.; 81ക. 4ണ. 43. 50; 45ക.; $37\frac{1}{2}$ക. 44. 50. 45. $17\frac{13}{16}$. 46. 6·9.

47. 16:5. 48. $\frac{10000\,r}{(100+p)\,(100+q)}$ ക.; 400ക.

49. $\frac{(ma+nb)\,(100+c)}{100(m+n)}$ക.; 7ക. 13ണ.

50. 16. 51. 1:2. 52. 6500ക.; 2500ക.

അഭ്യാസം 17.

1. (*a*) 2ക. 13ണ.6പ. (*b*) 1ക. 2ണ. (c) 10ക. 8ണ.
2. (*a*) 73ക. 9ണ. 11പ. (*b*) 18ക. 11ണ. 9പ.
   (*c*) 438ക. 2ണ. 0പ.
3. 9ക. 9ണ. 4. 904ക. 4ണ. 5. 924ക. 12ണ.
6. ഒക്ടോ. 7. 7. $2\frac{1}{2}$. 8. 9500ക. 9. 3600ക.; $2\frac{1}{4}$ക.
10. 175ക. 11. 1800ക.; 40ക.
12. 9%. 13. $3\frac{3}{4}$. 14. 6. 15. $12\frac{1}{2}$. 16. $16\frac{2}{3}$.
17. 40. 18. $6\frac{2}{3}$. 19. $19\frac{1}{21}$. 20. $2\frac{6}{7}$%.
21. 8%. 22. 8%. 23. 15. 24. 10 മാസത്തിനുശേഷം.
25. 4കൊ. 26. 1500ക. 27. 375ക.; $3\frac{1}{2}$%.
28. 350പ.; $3\frac{1}{2}$%. 29. 2400ക.; 1750ക. 30. 1674ക. 12ണ.
31. $57\frac{10}{7}$%. 32. 4ണ. 33. 2000ക. 34. $54\frac{6}{11}$.
35. $1\frac{1}{4}$; 3; $3\frac{3}{4}$; 4; $4\frac{1}{6}$. 36. 655ക. 2ണ. 0പ. 37. 234ക. 4ണ. 3പ. 38. 1ക. 1ണ. 8പ. 39. 1869ക. 1ണ. 10പ.
40. 408ക. 1ണ. 10പ. 41. 418ക. 12ണ. 42. 604ക. 14ണ.
43. 9ക. 5ണ. 4പ. 44. 209ക.

അഭ്യാസം 18.

14. (*a*) 90. (*b*) $3\frac{1}{2}$. (*c*) 0. (*d*) 1·11.
19. (1) 5·4. (2) $\frac{75}{176}$. (3) ·225.
20. (1) $\frac{m}{2}=q$. (2) $3x+5y=17$. (3) $7p-9q=29$.
(4) $4\times 26=15k$. (5) $\frac{9c-11d}{10}=12$.
21. (1) 7. (2) 15. (3) 4. (4) 7. (5) 3.
(6) 6. (7) 5. (8) 20. (9) 63. (10) 6. (11) 45.
(12) 10. (13) 32. (14) 17. (15) 10. (16) 3.
(17) 11. (18) 4. (19) 1. (20) 9. (21) 3.

അഭ്യാസം 24.

1. (*a*) $-37, +21$. (*b*) $-48, +125$.
2. (*a*) $-15, -5, -1, 0, +8, +13$.
   (*b*) $-32, -20, -14, -7, +12, +20$.

3. (*a*) $+12$. (*b*) $+9$. (*c*) $+18$. (*d*) $+9$. (*e*) $+7$

4. (1) $+2, +1, 0, -1, -2, -3, -4, -5$.
(2) $-5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4$.
(3) (*a*) $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$.
(*b*) $-1, 0, +1, +2, +3, +4, +5$.
(*c*) $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0$.
(4) (*a*) $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5, n+6$.
(*b*) $n, n-1, n-2, n-3, n-4, n-5, n-6$.
(*c*) $n-3, n-2, n-1, n, n+1, n+2, n+3$.

5. (*a*) $+10, +8, +6, +4, +2$. (*b*) $-10, -12, -14, -16, -18$.

6. (*a*) $+9, +7, +5, +3, +1$. (*b*) $-9, -11, -13, -15, -17$.

7. (*a*) $n, n+2, n+4, n+6, n+8$.
(*b*) $n, n-2, n-4, n-6, n-8$.
(*c*) $n-4, n-2, n, n+2, n+4$.

8. (*a*) $+5, 0, -5$. (*b*) $-9, -12, -15$. (*c*) $-3, -7, -11$. (*d*) $0, +10, +20$.

അഭ്യാസം 25.

1. $23x$. 2. $-33a$. 3. $+12$. 4. -91. 5. $-24y$. 6 0. 7. $-78c$. 8. $+77q$. 9. $-1\frac{13}{30}$. 10. 0. 11. -94. 12. $-132x$. 13. $-56n$. 14. -2. 15. $-m$. 16. ലാഭം 50ക. 17. തെ. 81നാ. 18. 326ക. 4ണ. 9ച. 19. 680അ.

അഭ്യാസം 26.

30. $0, -5, -10, -15$; 0. 31. $-10, -6, -2, +2$; -70.

അഭ്യാസം 29.

1. $8a-11b-4$. 2. $-8xy-100$. 3. $21x$.
4. $-ab-3bc+ac$. 5. $-13p+18q-101-r$. 6. 0.
7. $-90ap+25bp-43cp$. 8. $-\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}b-1\frac{1}{4}c$.
9. $3{\cdot}4l-2{\cdot}2m-2{\cdot}2n$. 10. $-37abcd$.

അഭ്യാസം 30.

1. 25, 125; 121, 1331; 289, 4913; $9x^2$, $27x^3$; $16y^2$, $64y^3$.
2. $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$; $\frac{36}{49}$, $\frac{216}{343}$; $\frac{9}{121}$, $\frac{27}{1331}$; $\frac{1}{4}a^2$, $\frac{1}{8}a^3$; $\frac{4}{9}b^2$, $\frac{8}{27}b^3$.
3. $2\frac{1}{4}$, $3\frac{3}{8}$; $5\frac{4}{9}$, $12\frac{19}{27}$; $10\frac{9}{16}$, $34\frac{21}{64}$; $1\frac{9}{16}m^2$, $1\frac{61}{64}m^3$; $2\frac{7}{9}n^2$, $4\frac{17}{27}n^3$.
4. ·04, ·008; ·16, ·064; 1·69, 2·197; $·09c^2$, $·027c^3$; $2·25d^2$, $3·375d^3$.
5. (*a*) $2\frac{1}{4}a^2$ ച. അം.; $3\frac{3}{8}$ ഘ. അം.

അഭ്യാസം 32.

1. 400. 2. 44. 3. 314. 4. $346\frac{1}{2}$.
5. (1) 24. (2) 52. (3) -7. 6. (1) 1500. (2) 2190.
7. (1) 1275. (2) 5050. (3) 2420. 8. 13, 4, -7, -15, -14. 9. 9, 3, -1, $-1\frac{4}{5}$, -5, -3. 10. $1\frac{3}{4}$, 1, $-1\frac{1}{4}$, $-2\frac{3}{4}$, -2, $-1\frac{5}{8}$. 11. 3·7, $-2·8$, -6. 12. 6, $2\frac{1}{4}$, 3.

അഭ്യാസം 33.

1. 1. 2. 26. 3. $5\frac{3}{4}$. 4. 7. 5. $115\frac{3}{4}$.

അഭ്യാസം 34.

1. (1) 12. (2) 0. (3) -14. (4) -1. (5) -10. (6) $13x$. (7) $-38a$. (8) $-a-b$. (9) $-5l+3m+2n$. (10) $a-2b+c$. (11) $6p+8q-14r$. (12) $-3x^2+a^2$. (13) $20+3k+13l-6m$. (14) $-31x-13y+29$.

2. (1) $-4x+15$. (2) $23a-10b+8c$. (3) $-30x+74y+48z$. (4) $-89x^2+38x-28$. (5) $-17a^2-74ab+146b^2$.

4. (1) 55. (2) 1. (3) -4.

5. (1) (*a*) $+(x-a)+(-y+b)+(-z-c)$
$-(-x+a)-(y-b)-(z+c)$.
(*b*) $+(x-a-y)+(b-z-c)$
$-(-x+a+y)-(-b+z+c)$.

(2) (*a*) $+(-x^2+3x)+(-1-5x)+(4x^2-7)$
$-(x^2-3x)-(1+5x)-(-4x^2+7)$.
(*b*) $+(-x^2+3x-1)+(-5x+4x^2-7)$
$-(x^2-3x+1)-(5x-4x^2+7)$.

(3) (*a*) $+(14a^2-3ab)+(-7a^2+5b^2)+(-7ab+2b^2)$
$-(-14a^2+3ab)-(7a^2-5b^2)-(7ab-2b^2)$.
(*b*) $+(14a^2-3ab-7a^2)+(5b^2-7ab+2b^2)$
$-(-14a^2+3ab+7a^2)-(-5b^2+7ab-2b^2)$.

6. (1) (1) $+(6x^4-x^4)+(5x^3-3x^3)+(-4x^2-x^2)$
$+(10x^5+7x^5)$.
(2) $-(-6x^4+x^4)-(-5x^3+3x^3)-(4x^2+x^2)$
$-(-10x^5-7x^5)$.
(2) (1) $+(14x-8x+x)+(-x^2-2x^2-4x^2)$
$+(3x^3-x^3)$.
(2) $-(-14x+8x-x)-(x^2+2x^2+4x^2)$
$-(-3x^3+x^3)$.

7. (1) (1) $1+(-a+b-c-14x+15y-16z)$
(2) $1-(a-b+c+14x-15y+16z)$.
(2) (1) $5x+(-3y-4a+1+9b-7c-22k)$
(2) $5x-(3y+4a-1-9b+7c+22k)$.

അഭ്യാസം 35.

1. $-3a-4$. 2. $14x-6y+8$. 3. -2. 4. 2. 5. $-4b$. 6. $-4x-9y$. 7. $6a-5b+4c$. 8. $3q+2r-p$. 9. (*a*) $+a, -b, +c, -d$. (*b*) $+a, +b, -c, +d$. (*c*) $-a, +c, -d$. 10. $-4x$. 11. $4a+2b-6c$. 12. $-\frac{a}{6}+b+\frac{c}{4}$.

അഭ്യാസം 36.

1. $-5a+2b+6$. 2. $26x^2-19x-12$.
3. $16x^3+8x^2-4x-8$. 4. $-10p^2-18q^2$.
5. $-2b^2-2c^2$. 6. $4x^3+x^2y-5xy^2-2y^3$.

7. $1\frac{5}{6}a-2b+2$. 8 $-\frac{1}{5}a-\frac{1}{10}c$. 9. $6x-26y-5z$.
10. $-8x^4+22x^3-6x^2-5x-24$.

അഭ്യാസം 37.

1. $-2x-5y+3$. 2. $-3a+4b-5c$.
3. $-3p^2+2q^2$. 4. $2-6xy+x^2-x^3$.
5. $-2m^2+6mn-2m-7$. 6. $-6x+11y$.
7. $-\frac{1}{2}a+1\frac{2}{3}b$. 8. $\frac{1}{12}a-\frac{7}{12}b$.
9. $-7x^2$. 10. $-3q+3r$. 11. $-x^3+5x^2-22$.
12. $a^2+2ab-b^2$. 13. $-4a+6b-6c$.
14. $-2l^2-2m^2-4n^2$. 15. $3m+4n-4p$.
16. $-x^2-8x+9$. 17. $-2y$. 18. p^3-p^2.

അഭ്യാസം 38.

1. $3xy-6xz-yz$. 2. $-2a^2-3ab+5b^2$.
3. $5abc-6a^2b+14b^2c+3ac^2$. 4. $-8p^2-12pq+15q^2$.
5. $47x^2-15x$. 6. $4a^3-a^2$.

അഭ്യാസം 39.

2. (1) $15x^2+22xy+8y^2$. (2) $2x^2-13x+20$.
(3) $21x^2+x-2$. (4) $2-11a+15a^2$. (5) $m^2-8m+16$.
(6) n^2+n-6. (7) $-20y^4+43y^2-21$.
(8) $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}$. (9) $\frac{1}{3}x^2-4x+12$.
3. (1) $a^2+2ab+b^2$. (2) $a^2-2ab+b^2$.
(3) $16x^2-24x+9$. (4) $x^2-4xy+4y^2$.

അഭ്യാസം 40.

1. $-5x^2-25x+50$. 2. $75x^2+25x-24$.
3. $76a^2-94a+11$. 4. $10x^2-31x+11$.
5. $-5a^2-20ab+11b^2$. 6. $21x^2-70x+60$.
7. $-25x^2+16$.

അഭ്യാസം 42.

1. $5x+2$. 2. $6y-5$. 3. $7a-8$. 4. $13m+4$.
5. $x+13y$. 6. $10a-13b$. 7. $3m+4n$. 8. $9x^2-4y^2$.
9. $4+3ab$. 10. a^2+14a. 11. $3x-4$; 1.
12. $5x-2y$; $5y^2$. 13. $p-5q$; $-24q^2$.
14. $4a^2-10a+23$; -47.

അഭ്യാസം 43.

1. $c^2+2cd+d^2$.
2. $k^2-2kl+l^2$.
3. x^2-y^2.
4. $a^2+4ab+4b^2$.
5. $9k^2-6k+1$.
6. a^2-49.
7. $9a^2+6ab+b^2$.
8. $49x^2-28xy+4y^2$.
9. $25x^2-1$.
10. $x^2+8x+16$.
11. $1-16a+64a^2$.
12. $100b^2-9c^2$.
13. $100n^2+20n+1$.
14. $\frac{1}{4}a^2+a+1$.
15. $225y^2-120xy+16x^2$.
16. $\frac{1}{4}a^2-3ab+9b^2$.
17. $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{3}xy+\frac{1}{4}y^2$.
18. $\frac{1}{4}m^2-1$.
19. $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{4}l^2$.
20. $p^2-2pq+q^2$.
21. y^2-x^2.
22. $-x^2-2xy-y^2$.
23. $a^2x^2-b^2$.
24. $\frac{1}{100}m^4+2m^2+100$.
25. $\frac{4}{16}p^2-\frac{1}{6}pq+\frac{1}{9}q^2$.
26. 1681.
27. 2704.
28. 6084.
29. 9·61.
30. 9991.
31. 28·09.
32. 35·75.
33. 195·99.
34. 9801.
35. 399·96.
36. $56\frac{1}{4}$.
37. 9000.
38. 784.
39. 11800.
40. 399·9996.
41. 61×59; $3^2\times29\times31$; 97×103; $2^2\times59\times61$; $2^4\times41\times39$.

അഭ്യാസം 44.

1. 8600. 2. 890. 3. 18900. 4. 538. 5. 841.

അഭ്യാസം 45.

1. $l=\frac{A}{b}$; $b=\frac{A}{l}$. $8\frac{8}{9}$. 2. $l=\frac{V}{bh}$; $b=\frac{V}{lh}$; $h=\frac{V}{lb}$.

(1) 6. (2) $5\frac{1}{3}$.

3. (*a*) $b=\frac{2A}{h}$; 8. (*b*) $h=\frac{2A}{b}$; 6.

4. (*a*) $c=y-mx$. (*b*) $mx=y-c$. (*c*) $x=\frac{y-c}{m}$.

(1) -42. (2) 8.

5. (1) $u=v-ft$. (2) $f=\frac{v-u}{t}$. (3) $t=\frac{v-u}{f}$.

(*a*) 8. (*b*) -11. (*c*) 3.

6. (1) $g=\frac{2s}{t^2}$; 32. (2) $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$; 5.

7. (1) $r=\frac{c}{2\pi}$; 14 അടി. (2) $\pi=\frac{c}{2r}$; 3·14.

അഭ്യാസം 46.

1. (*a*) $37-x$ (*b*) $s-x$. 2. (*a*) $53-a-b$ (*b*) $s-a-b$.
3. 5; $x-15$; $x-y$. 4. 4; $16-x$; $y-x$.
5. $x+5$; $2x+5$. 6. $a-d$; $2a-d$.
7. 8. 8. 3; $\frac{x}{7}$; $\frac{x}{y}$.
9. 5; $\frac{x}{3}$; $\frac{15}{x}$. 10. 7.
11. $p+m$; $p-n$; $q-p$. 12. (1) $36l+12m+n$.

(2) $3l+m+\frac{n}{12}$ (3) $l+\frac{m}{3}+\frac{n}{35}$.

13 (1) $(x-1)\,20+y$; $(x-1)+\frac{y}{20}$.

(2) $20x+y-45$; $x+\frac{y-45}{20}$.

(3) $19x+y$; $\frac{19x+y}{20}$. (4) $20x-19y$; $\frac{20x-19y}{20}$.

14. $16p-q$.

15. (1) $\frac{16r}{b}$ (2) $\frac{cr}{b}$ (3) $\frac{b}{r}$ (4) $\frac{bn}{16r}$.

16. (1) $\frac{m}{h}$ (2) $\frac{mx}{60h}$ (3) $\frac{60hy}{m}$ (4) $\frac{7\frac{1}{2}h}{m}$.

17. $13x$ ചു. അടി; 2 $(x+13)$ അടി; $\frac{13x}{20}$ അടി.

18. $\frac{4x}{3}$; $\frac{x^2}{9}$. 19. $\frac{3y}{x}$. 20. $y+3$; $y+x+3$; $z-y-3$.

21. $n+6$; $3n+9$; $3y-3x$. 22. $5x+20$; $3x$; $3x$.

23. $2m-n$. 24. $(s-c)$ക.; $(c+g)$ക.

25. $1\frac{1}{2}x$ചു. 26. $\frac{x-y}{2}$ണ. 27. $\frac{n}{60}$ക.

28. $\frac{7}{100}$ക.; $\frac{7pn}{100}$ക. 29. $\frac{npr}{100}$ക. 30. $\frac{xy}{x+1}$ണ.

31. $a+\frac{bp}{12}$; $(bp-n)$ചു. 32. (1) $2n+2$, $2n+4$, $2n+6$, $2n+8$; $10n+20$. (2) $2n-2$, $2n-4$, $2n-6$, $2n-8$; $10n-20$. (3) $2n+4$, $2n+2$, $2n-2$, $2n-4$; $10n$.

33. (1) $2n+3$, $2n+5$, $2n+7$, $2n+9$; $10n+25$
(2) $2n-1$, $2n-3$, $2a-5$, $2n-7$; $10n-15$
(3) $2n-3$, $2n-1$, $2n+3$, $2n+5$; $10n+5$.

34. (1) $\frac{1}{15}$. (2) $\frac{n}{15}$ (3) $\frac{1}{d}$ (4) $\frac{m}{d}$.

35. $\frac{xa+yb}{x+y}$ 36. $\frac{xl-ya}{x-y}$ ഗ. 37. $8\frac{1}{4}ma$ണ.

38. $m(1\frac{1}{2}-a)$ചു. 39. $\frac{100(A-P)}{Pn}$ 40. $\frac{100(y-x)}{x}$.

അഭ്യാസം 47.

1. 20. 2. 1. 3. -8. 4. 11. 5. 21.
6. -30. 7. 0. 8. -2. 9. 9. 10. 7.
11. -4. 12. -8. 13. -11. 14. 5.
15. $-2\frac{3}{4}$. 16. $2\frac{2}{3}$. 17. $-\frac{4}{7}$. 18. $-\frac{5}{9}$. 19. 6.

20. 5. 21. 3. 22. $-4\frac{1}{2}$. 23. $2\frac{3}{7}$ 24. $\frac{4}{9}$.
25. $\frac{2}{11}$. 26. 0. 27. 24 28. $14\frac{2}{3}$. 29. 18.
30. $\frac{a}{3}$. 31. $\frac{5}{a}$. 32. 0. 33. $2a$. 34. a.
35. p. 36. $\frac{4}{a}$. 37. $\frac{9}{a}$. 38. $6a$. 39. pq.
40. $-ab$.

അഭ്യാസം 48.

1. 5. 2. 9. 3. -4. 4. 9. 5. 0.
6. $1\frac{6}{13}$. 7. $1\frac{1}{3}$. 8. $2\frac{2}{5}$. 9. 2. 10. -3.
11. 1. 12. 3. 13. 15. 14. $3\frac{1}{4}$. 15. $-4\cdot3$.
16. -2. 17. $\frac{17}{18}$. 18. -3. 19. $8\frac{11}{48}$.
20. $\frac{d-b}{a-c}$.

അഭ്യാസം 49.

1. $\frac{2}{3}$. 2. $10\frac{5}{7}$. 3. 12. 4. 17. 5. 7.
6. 30. 7. $17\frac{1}{7}$. 8. -11. 9. 10. 10. 24.
11. $54\frac{2}{5}$. 12. 7. 13. 5. 14. 8. 15. $4\frac{1}{2}$.
16. 8. 17. 2. 18. $-2\frac{39}{73}$. 19. -7. 20. 2.
21. 15. 22. $-5\frac{1}{6}$. 23. $-1\frac{31}{95}$. 24. 10.

അഭ്യാസം 50.

1. $\frac{1}{4}$. 2. -11. 3. 0. 4. $-3\frac{1}{10}$. 5. 2.
6. 1. 7. -3. 8. 3. 9. $-9\frac{1}{2}$.
10. $-1\cdot67$. 11. 14.33. 12. $-1\cdot22$.

അഭ്യാസം 51.

$19\frac{1}{2}$. 2. $-\frac{1}{3}$. 3. $\frac{bc}{ad}$. 4. mn. 5. $\frac{2}{25}$.
6. $\frac{b^2}{a}$. 7. $\frac{2}{7}$. 8. 10.

അഭ്യാസം 52.

1. $2x+d=s$.
2. $m+(m-2)+(m-4)=t$.
3. $11b-16s=l$.
4. $\frac{3x+5y}{x+y}=z$.
5. $11c=10s$.
6. $17s=20c$.
7. (*a*) $x-3=7\,(y-3)$. (*b*) $x+9=3(y+9)$.
8. (*a*) $1\frac{1}{3}xy=9A$. (*b*) $2(x+1\frac{1}{3}y)=3p$.
9. $16m-n=p$.
10. $240x+12y+z=d$.
11. $hm=nr$.
12. $\frac{x}{2}=(x-d+a)$.
13. $n(n-1)(n+1)=p$.
14. $D=dq+r$.
15. $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{d}$.
16. $p-q=q-r$.
17. (1) $10x+y=4(x+y)$ (2) $10y+x=10x+y-36$.
18. (1) $\frac{an}{n+3}=b$. (2) $\frac{an}{n-2}=c$. (3) $n(a-d)=e$.
    (4) $n(f-a)=g$.
19. $ax+by+c(m-x-y)=md$.
20. $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=h$.
21. $pq=\frac{27}{12}\times 3l$.
22. $20n=\frac{16n\times 12}{10}+m$.
23. $\frac{mq}{p+p}=l$.
24. $md=n(d-5)$.

അഭ്യാസം 53.

1. ഉത്തരത്തിൽനിന്നു 7 കിഴിച്ചു കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടത്തെ 2കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ വിചാരിച്ച സംഖ്യ കിട്ടും.
2. 6. 3. 24, 36, 48. 4. 18, 21, 7, 63.
5. എ: 133ക., ബി: 96ക., സി: 171ക.
6. എ: 200ക., ബി: 32ക., സി: 135ക.
7. 40; 10. 8. 25; 10. 9. (*a*) 13 (*b*) 3.
10. 7. 11. 38. 12. 27. 13. 39.
14. 30, 45. 15. 18നാ. 16. 3ണ. 9പ., 4ണ. 6പ.
17. 15, 30, 98. 18. 61ക. 19. 1050.

20. 44, 36. 21. 5 : 1 22. 60 ; 40ക.
23. 24. 24. 27ക. 25. 5250ക. ; 6000ക.
26. 40ക. 27 14അം. 28. 272ച.അ.
29. 2914ച. അ. 30. 381. 31. 30നാ.
32. 3000. 33. 19699 ; 12429.
34. 2740ക. 35. 250ക. ; 600ക.
36. $6^0/_0$. 37. 12. 38. 50.
39. 14, $17\frac{1}{2}$. 40. 90.
41. 75നാ. ; 8മ. 30മി. 42. ആകോണത്തുനിന്നു 25നാ.
43. 180നാ. 44. 2മ. 12മി. ; pയിൽനിന്നു 66നാ.
45. 84നാ. 46. $94\frac{1}{2}$നാ.
47. 6നാ. 48. $5\frac{1}{3}$നാ.
49. $9\frac{7}{8}$. 50. 40. 51. 5·8″.

പരീക്ഷകടലാസ്സുകൾ.

1. 1. 9കൊ. 6മാ. 2. 12മ. 12മി. 3. 3ക. 4ണ. 4. $22\frac{1}{2}$നാ.
2. 1. 15 : 4. 2. $15\frac{4}{7}$ മാറ്റ്. 3. 2. 4. 48.
3. 1. 12000ക. 2. 40. 3. 15ഫ.
4. 1. 4·1. 2. 25. 3. 9ക. 5ണ. 4പ.
5. 1. 85ക. 2. 5. 3. $4^0/_0$.
6. 1. $21x^3 - 35x^2 + 12x - 20$; $-187\frac{5}{8}$.
   2. $5x - 13$; ശിഷ്ടം : 94.
   3. 5041; 33·64; 80·96; 27·4.
   4. $\frac{W-w}{n}$ടൺ ; 112ഠ.
   5. 2. 6. 405.
7. 1. 39° ; 51°. 2. 108°. 3. 60°, 120°. 180°.
   4. 40°, 40°. 5. 60°, 60°, 60°
8. 3. 105°, 75°, 105°. 4. 135°. 5. 20.

MALABAR CHRISTIAN COLLEGE LIBRARY
3717
CALICUT

GEN/16

GENERAL MATHEMATICS

BOOK I FOR FORM IV

(According to the Syllabus issued in July 1950)

J. Pavamani, B. A., L. T.
Headmaster, B. E. M. High School, Palghat.

സാമാന്യഗണിതശാസ്ത്രം

ഒന്നാം പുസ്തകം — 4ാം ഫോറത്തിനു.

(1950 ജൂലായി മാസം പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ പാഠ
പദ്ധതിക്കനുസരിച്ചെഴുതിയതു്.)

37171
510
PAV/S

PUBLISHED BY THE
MISSION BOOK DEPOT
MANGALORE
1950

Indic Digital Archive Foundation
gpura.org