1750

# SIXTH FORM MATHEMATICS

ആറാം ഫോറം

# ഗണിതം

K. A. MATHEW

CHITRA PRESS
TIRUVALLA

MUNAWWARUL ISLAM HIGH SCHOOL
ERNAKULAM

ONE RUPEE

1750

# ആറാം ഫോറം

# ഗണിതം

KUNAVIRUL ISLAM HIGH SCHOOL
Date...................
ERNAKULAM.

കെ. ഏ. മാത്യു, ബി. ഏ., എൽ. ററി.

CHITRA PRESS
TIRUVALLA

First edition 1948
Fifth edition (Revised) 1952

*All rights reserved.*

1750

# വിഷയവിവരം.


| അദ്ധ്യായം. | | പേജ്. |
|---|---|---|
| 1. | ചതുരശ്രമാനം (തുടർച്ച) | 1 |
| 2. | ഘനമാനം (തുടർച്ച) | 7 |
| 3. | നിക്ഷേപങ്ങൾ | 23 |
| 4. | വിദേശവ്യാപാരം | 40 |
| 5. | ഘടകങ്ങൾ | 44 |
| 6. | ഭിന്നങ്ങൾ | 53 |
| 7. | ഉത്തമഭാജകം | 57 |
| | ലഘുഗുണകം | 59 |
| 8. | സമവാക്യങ്ങൾ (തുടർച്ച) | 61 |
| | സമ്മിശ്രം | 78 |


## ക്ഷേത്രഗണിതം.


| | | |
|---|---|---|
| | വൃത്തങ്ങൾ | 82 |
| 9. | ശരാശരി (തുടർച്ച) | 120 |
| 10. | ലേഖകൾ | 121 |


...UL ISLAM HIGH SCHOOL
Date...............
ERNAKULAM

1750

# സാങ്കേതിക പദങ്ങൾ

| | |
|---|---|
| അജ്ഞാതസംഖ്യ | Unknown number. |
| അനുപാതസംഖ്യ | Ratio. |
| അനുപൂരകം | Supplementary. |
| അനുസിദ്ധാന്തം | Corollary. |
| അന്തഃകോണം | Included angle. |
| അന്തർലിഖിതം | Inscribed. |
| അഭിക്ഷേപം | Projection. |
| അർദ്ധവൃത്തം | Semicircle. |
| അസൽവില | Face value (par value) |
| അങ്കനം | Plotting. |
| അക്ഷം | Axis. |
| ആധാരം | Base. |
| ആദായശതമാനം | Percentage income. |
| ആന്തരം | Internal. |
| ആന്തരഖണ്ഡങ്ങൾ | Intercepts. |
| ആയതഘനം | Rectangular solid. |
| ആയതക്ഷേത്രം | Rectangle |
| ആരം | Radius. |
| ഉത്തമഭാജകം | H. C. F. |
| ഉന്നതി | Height (altitude) |
| ഊനകോണം | Acute angle. |
| ഊനകോണത്രിഭുജം | Acute angled triangle. |
| ഋജുരേഖ | Straight line. |
| ഋണാത്മകം | Negative. |
| ഏകകേന്ദ്രം | Concentric. |
| ഏകകം | Unit. |
| ഏകഘാതം | Linear. |
| ഏകചക്രീയം | Concyclic. |
| ഏകപാർശ്വസ്പർശകം | Direct common tangent. |
| ഏകാന്തരവൃത്താംശം | Alternate segment. |

| | |
|---|---|
| ഏകാന്തരവൃത്താംശകോണം | Angle in the alternate segment. |
| ഓഹരി | Share. |
| അംശം | Numerator. |
| കനം | Thickness. |
| കമ്പോളവില | Market value. |
| കർണ്ണം | Diagonal. |
| കൃതി | Power. |
| കൃത്യങ്കം | Index. |
| കൃത്യങ്കനിയമങ്ങൾ | Laws of Indices. |
| കൈമാററം | Exchange. |
| കൈമാററച്ചീട്ട് | Bill of exchange. |
| കൈമാററനിരക്ക് | Rate of exchange. |
| ക്രമസംഖ്യകൾ | Consecutive numbers. |
| ഖണ്ഡം | Segment. |
| ഗവൺമെൻറു കടപ്പത്രം | Government loan. |
| ഗോളസ്തംഭം | Cylinder. |
| ഘടകം | Factor. |
| ഘടകക്രിയ | Factorisation. |
| ഘനം | Cube. |
| ചക്രവാളം | Horizon. |
| ചക്രീയം | Cyclic. |
| ചതുർഭുജം | Quadrilateral |
| ചലാങ്കം | Variable. |
| ചാപം | Arc. |
| ഛേദം | Denominator. |
| ജ്യാവ് | Chord. |
| ത്രിഭുജം | Triangle. |
| ധനാത്മകം | Positive. |
| ധർമ്മം | Function. |
| ദല്ലാൾ | Brokerage. |
| ദല്ലാളി | Broker. |
| ദശാംശം | Decimal. |
| ദശാംശബിന്ദു | Decimal point. |
| ദോലകം | Pendulum. |

| | |
|---|---|
| ദ്വികൃതി | Quadratic. |
| ദ്വികൃതിധർമ്മം | Quadratic function. |
| ദ്വിപാർശ്വസ്പർശകം | Transverse common tangent. |
| നിസർഗ്ഗസംഖ്യകൾ | Natural numbers. |
| നിർദ്ധാരണംചെയ്ക | Solve. |
| നിക്ഷേപങ്ങൾ. | Investments. |
| നേർഖണ്ഡം | Cross section. |
| പദം | Term. |
| പരിധി | Perimeter (circumference) |
| പൂർണ്ണസംഖ്യ | Integer. |
| പൊതുഘടകം | Common factor. |
| പൊതുജ്യാവ് | Common chord. |
| പൊതുസ്പർശകം | Common tangent. |
| ബഹുഭുജം | Polygon. |
| ബാർ | Bar. |
| ബാഹ്യം | External. |
| ബിന്ദു | Point. |
| ബിന്ദുപഥം | Locus. |
| ബൃഹൽകോണം | Obtuse angle. |
| ബൃഹൽകോണത്രിഭുജം | Obtuse angled triangle. |
| ഭിന്നങ്ങൾ | Fractions. |
| മദ്ധ്യമം | Median. |
| മിശ്രിതസംഖ്യ | Mixed number. |
| മൂലം (സമവാക്യത്തിന്റെ) | Root (of an equation). |
| മേൽപ്പലിശ | Compound Interest. |
| യുദ്ധക്കടപ്പത്രം | War bond. |
| രാശി | Quantity. |
| രാശിമാല | Expression. |
| രൊക്കവില | Cash value. |
| ലഘുഗുണകം | L. C. M. |
| ലഘുവൃത്താംശം | Minor segment. |
| ലേഖ | Graph. |
| ലംബം | Perpendicular. |
| വജ്രഗുണനം | Cross multiplication. |

| | |
|---|---|
| വർഗ്ഗം | Square. |
| വൃത്തം | Circle. |
| വൃത്തച്ഛേദകം | Secant. |
| വ്യാസം | Diameter. |
| ശീർഷം | Vertex. |
| ശ്രവണം | Hypotenuse. |
| ശ്രേണി | Series. |
| സദൃശകോണം | Equiangular. |
| സ്ഥിരം | Constant. |
| സ്ഥിരാങ്കം | Constant. |
| സ്പർശകം | Tangent. |
| സ്പർശകബിന്ദു | Point of contact. |
| സമകോണം | Right angle. |
| സമകോണത്രിഭുജം | Right angled triangle. |
| സമകൗണികം | Orthogonal. |
| സമകൗണികമായി | Orthogonally. |
| സമചതുരം | Square. |
| സമലംബകം | Trapezium. |
| സമവാക്യം | Equation. |
| സമസ്ഥാനീയം | Corresponding. |
| സമ്മുഖമാക്കുക | Subtend. |
| സ്റ്റോക്ക് | Stock. |
| സമാന്തരികം | Parallelogram. |
| സമാന്തരം | Parallel. |
| സർവ്വസമവാക്യം | Indentity. |
| സാർത്ഥകസ്ഥാനങ്ങൾ | Significant digits. |
| സൂചീഘാതം | Cone. |
| സംഘടിക്കുക | Intersect. |

# ഗണിതം

## അദ്ധ്യായം 1.

## ചതുരശ്രമാനം

(തുടർച്ച)

### പാഠം 1.

### സമപാർശ്വത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം.

സമപാർശ്വം (prism) സൂചീസ്തംഭം, ഗോളസ്തംഭം, സൂചീഘനം, ഗോളം ഇവയുടെ ആകൃതി ഇതിനകം കുട്ടികൾക്ക് പരിചയപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടായിരിക്കുമല്ലോ.

ഒരു സമപാർശ്വത്തിന്റെ രണ്ടു പാർശ്വതലങ്ങളും പരന്നതും ഒരേ ആകൃതിയും, വലിപ്പവും ഉള്ളതും ആകുന്നു. കട്ടിയായ ഒരു സമപാർശ്വത്തെ ഈ തലങ്ങൾക്കു സമാന്തരമായി ഖണ്ഡിച്ചാൽ ഉണ്ടാകുന്ന രണ്ടു തലങ്ങളും മറ്റേ തലങ്ങളോടൊപ്പംതന്നെ ആകൃതിയിലും, വലിപ്പത്തിലും തുല്യമായിരിക്കും. ഈ നേർഖണ്ഡങ്ങൾക്കു സമമായതോ, സമമല്ലാത്തതോ, ഋജുവായതോ, ഋജുവല്ലാത്തതോ ആയ ഭുജങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കാവുന്നതാണ്. ഇതിന്റെ പാർശ്വതലം ഒരു ത്രിഭുജമായിരുന്നാൽ അതിനെ ത്രിഭുജസമപാർശ്വമെന്നും, ഒരു ഷഡ്ഭുജമായിരുന്നാൽ ഷഡ്ഭുജസമപാർശ്വമെന്നും പറഞ്ഞുവരുന്നു. ഇതിന്റെ പാർശ്വതലം ഒരു വൃത്തമായാൽ ഇതിന് ഗോളസ്തംഭം എന്നു പറഞ്ഞുവരുന്നു.

ഒരു സമപാർശ്വത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം അതിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളുടേയും കൂടെയുള്ള ക്ഷേത്രഫലമത്രെ.

### അഭ്യാസം 1.

1. ഒരു സമപാർശ്വത്തിന്റെ പാർശ്വതലങ്ങൾ 5 ഇഞ്ച് സമചതുരവും, അതിന്റെ ഉയരം 12 ഇഞ്ചും ആയാൽ ആകെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

2. ഒരു സമപാർശ്വത്തിന്റെ ഉയരം 6 ഇഞ്ചും, പാർശ്വതലങ്ങൾ 4 ഇ. × 3 ഇ. അളവുള്ള ആയതക്ഷേത്രവും ആയാൽ സമപാർശ്വത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

**3.** ഒരു സമപാർശ്വത്തിന്റെ ഉയരം 4 ഇഞ്ചും, പാർശ്വതലങ്ങൾ വശത്തിന് 3 ഇഞ്ച് നീളമുള്ള സമത്രിഭുജങ്ങളും ആണെങ്കിൽ സമപാർശ്വത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കണക്കാക്കുക.

**4.** പാർശ്വതലങ്ങൾ, 13 ഇ., 14 ഇ., 15 ഇ. വീതം വശമുള്ള ത്രിഭുജങ്ങളും ഉയരം 10 ഇഞ്ചും ഉള്ള ഒരു സമപാർശ്വത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**5.** ഒരിഞ്ച് ഉയരമുള്ള ഒരു സമപാർശ്വത്തിന്റെ പാർശ്വതലങ്ങൾ വശത്തിന് 2 ഇ. വീതം നീളമുള്ള സമഷഡ്ഭുജങ്ങളായാൽ സമപാർശ്വത്തിന്റെ ആകെ ക്ഷേത്രഫലം എന്ത്?

---

ഉത്തരം. **1.** 290 ച. ഇ. **2.** 108 ച. ഇ. **3.** 43·794 ച. ഇ. ഏകദേശം. **4.** 588 ച. ഇ. **5.** 32·76 ച. ഇ.

---

## പാഠം 2.

## ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം.

ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുന്നതിന് അതിന്റെ വൃത്താകാരമായ രണ്ടു വശങ്ങളുടേയും, വക്രതലത്തിന്റെയും ക്ഷേത്രഫലം കൂട്ടേണ്ടതാണ്. അതിന്റെ ആരം $r$ ഇഞ്ചും, ഉന്നതി $h$ ഇഞ്ചും ആയിരുന്നാൽ ആകെ ക്ഷേത്രഫലം,

$$= 2\pi r^2 + 2\pi r h \text{ ച. ഇ.}$$
$$= 2\pi r(r+h) \text{ ച. ഇ.}$$

## പാഠം 2.

മററു വിലകൾ കൊടുത്തിട്ടില്ലാത്തിടത്ത് $\pi = 3\frac{1}{7}$ എന്ന് എടുക്കുക.

**1.** 7 ഇ. വ്യാസവും, 5 ഇ. ഉയരവും ഉള്ള ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

**2.** രണ്ടടി വ്യാസവും, 3 അടി നീളവും ഉള്ള ഒരു റോളർ 50 പ്രാവശ്യം ഉരുണ്ടു കഴിയുമ്പോൾ, അതു കടന്നുപോയ സ്ഥലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം എന്തായിരിക്കും?

**3.** 10 അടി ഉയരവും, $1\frac{1}{2}$ അടി വ്യാസവും ഉള്ള 10 തൂണുകൾ ഒരു വരാന്തയിൽ ഉണ്ട്. 100 ച. അടിക്ക് 5 രൂപാ നിരക്കിന് തൂണുകളെല്ലാം ചായമടിക്കാൻ എന്തു ചിലവാകും?

**4.** 14 അടി വ്യാസവും, 6 അടി ആഴവും ഉള്ള ഒരു കുളത്തിന്റെ വശങ്ങൾക്കും അടിത്തട്ടിനും കൂടെയുള്ള ക്ഷേത്രഫലം എന്തു്?

**5.** 7 അടി വ്യാസവും, 10 അടി നീളവും ഉള്ളതും ഗോളസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ളതും ആയ ഒരു ബോയിലറിന്റെ (boiler) പുറവശത്തു് ചായമടിക്കുന്നതിന് 100 ച. അടിക്ക് 4 രൂപാവെച്ചു് ചിലവെന്തു്?

**6.** ഒരു വശം തുറന്നതും, 6 ഇ. ഉയരവും 5 ഇ. വ്യാസവും ഉള്ളതും ആയ 50 തകരപ്പാത്രം ഉണ്ടാക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ തകിടിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കണക്കാക്കുക.

---

ഉത്തരം. **1.** 187 ച. ഇ. **2.** $942\frac{6}{7}$ ച. അ. **3.** $23\frac{4}{7}$ രൂ. **4.** 418 ച. അ. **5.** 11 രൂ, 14-1 ഏകദേശം. **6.** $5696\frac{3}{7}$ ച. ഇ.

---

## പാഠം 3.

## സൂചീസ്തംഭത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം.

ആധാരത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലവും, ത്രിഭുജരൂപത്തിലുള്ള വശങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലവും കൂടെ കൂട്ടിയാൽ സൂചീസ്തംഭത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കിട്ടും. ആധാരത്തിന്റെ വശങ്ങൾ തുല്യമായിരുന്നാൽ ഈ ത്രിഭുജങ്ങളും അന്യോന്യം തുല്യമായിരിക്കും. സൂചീസ്തംഭത്തിന്റെ ചരിവുയരം എന്നതു് മേൽപ്പറഞ്ഞ ത്രിഭുജങ്ങളുടെ ഉന്നതിയാണ്.

### അഭ്യാസം 3.

**1.** ആറിഞ്ച് സമചതുരമായ ആധാരത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു സൂചീസ്തംഭത്തിന്റെ ചരിവുയരം 5 ഇ. ആയാൽ ത്രിഭുജങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

**2.** വശങ്ങൾക്ക് 10 ഇ. നീളമുള്ള ഒരു സമത്രിഭുജം ആധാരമായുള്ള ഒരു സൂചീസ്തംഭത്തിന്റെ ചരിവുയരം 10 ഇ. ആയാൽ ആകെ ക്ഷേത്രഫലം എന്തു്?

**3.** 10 ഇ. വശമുള്ള ഒരു സമചതുരം ആധാരമായുള്ള ഒരു സൂചീസ്തംഭത്തിന്റെ ഉന്നതി 12 ഇ. ആയാൽ സൂചീസ്തംഭത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

**4.** ഒരു സൂചീസ്തംഭത്തിന്റെ ചരിവുവശങ്ങൾ എല്ലാം സമത്രിഭുജങ്ങളും അതിന്റെ ആധാരം 6 ഇ. വശമുള്ള ഒരു സമചതുരവും ആണെങ്കിൽ ചരിവുവശങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**5.** ഒരു സൂചീസ്തംഭത്തിന്റെ ചരിവുയരം 15 ഇഞ്ചും ആധാരം 18 ഇ. സമചതുരവും ആയാൽ അതിന്റെ ഉന്നതി കണ്ടുപിടിക്കുക.

**6.** ഈജിപ്തിലെ മഹാസൂചീസ്തംഭത്തിനു 450 അടി ഉന്നതിയും 700 അടി സമചതുരമായ ആധാരവും ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിന്റെ ചരിവുവശങ്ങളുടെ ആകെ ക്ഷേത്രഫലം എന്തു്?

---

ഉത്തരം. **1.** 60 ച. ഇ **2.** 193·3 ച. ഇ. ഏകദേശം. **3.** 13 ഇ. **4.** 62·352 ച. ഇ. ഏകദേശം. **5.** 12 ഇ. **6.** 798062 ച. അ. ഏകദേശം.

---

## പാഠം 4.

## സൂചീഘാതത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം.

ഒരു സൂചീഘാതത്തിന്റെ ആധാരം ഒരു വൃത്തമാകയാൽ വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുന്നതിനുള്ള വാക്യം ഉപയോഗിച്ചു് ഈ ആധാരത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണാക്കാം. ഇതിന്റെ ചരിവുവശം അസംഖ്യം തുല്യ ത്രിഭുജങ്ങൾ അടങ്ങിയതാണെന്നു വിചാരിക്കാവുന്നതാണു്. അപ്പോൾ ത്രിഭുജങ്ങളുടെ ആധാരം സൂചീഘാതത്തിന്റെ ആധാരപരിധിയിൽക്കൂടെയുള്ളതും, ശീർഷം പൊതുവായുള്ളതും ആകുന്നു. അതനുസരിച്ചു് ആധാരം $b$ ഇഞ്ചും ഉന്നതി $l$ ഇഞ്ചും ഉള്ളതായ $n$ ത്രിഭുജങ്ങളുണ്ടെന്നു് സങ്കല്പിച്ചാൽ ചരിവുതലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം

$$= n\times \tfrac{1}{2}b\times l \text{ ച. ഇ}, = \tfrac{1}{2}nbl \text{ ച. ഇ.}$$

എന്നാൽ $nb$ ഇഞ്ച് ആധാരത്തിന്റെ പരിധിക്കു തുല്യമാണു്. അതുകൊണ്ടു് ചരിവുതലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം

$$= \tfrac{1}{2}\times \text{പരിധി}\times l \text{ ച. ഇ.}$$

$$= \tfrac{1}{2}\times 2\pi r\times l \text{ ച. ഇ.} \quad (r = \text{ആരം})$$

$$= \pi r l \text{ ച. ഇ.}$$

$h, l, r$ ഇവ യഥാക്രമം സൂചീഘാതത്തിന്റെ ഉന്നതി, ചരിവുയരം, ആധാരത്തിന്റെ ആരം ഇവയെ കുറിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ടു് $h^2+r^2=l^2$ എന്നു് സിദ്ധിക്കുന്നു.

## അഭ്യാസം 4.

**1.** ഒരു സൂചീഘാതത്തിന്റെ ആകെ ക്ഷേത്രഫലം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനുള്ള വാക്യം എന്തു്?

**2.** താഴെ പറയുന്ന അളവുകളുള്ള ഒരു സൂചീഘാതത്തിന്റെ ആകെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

(i) ചരിവുയരം 6 ഇ. വൃത്തപരിധി 11 ഇ.

(ii) ഉന്നതി $4\frac{1}{2}$ ഇ. ആധാരത്തിന്റെ ആരം 6 ഇ.

(iii) ഉന്നതി 2 അ. 4 ഇ., ആധാരപരിധി 11 അടി.

**3.** സൂചീഘാതരൂപത്തിലുള്ള ഒരു കൂടാരത്തിന്റെ ചരിവുയരം 10 അടിയും, അതിന്റെ ആധാരത്തിന്റെ വ്യാസം 14 അടിയും ആണെങ്കിൽ കൂടാരത്തിനു് ആവശ്യമായ കാൻവാസിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

**4.** ഒരു സൂചീഘാതത്തിന്റെ ചരിവുയരം 20 അടിയും, ആധാരപരിധി 24 അടിയും ആയാൽ ച. അടിക്കു് 1 ണ. നിരക്കിനു സൂചീഘാതത്തിന്റെ ചരിവു വശത്തിനു ചായമടിക്കുന്നതിനു് എന്തു ചിലവാകും?

**5.** 5 ഇ. ആരമുള്ളതും, 150° കേന്ദ്രകോണമുള്ളതും ആയ വൃത്തഖണ്ഡാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കടലാസ്സു് കഷണംകൊണ്ടു് ഒരു സൂചീഘാതം ഉണ്ടാക്കിയാൽ അതിന്റെ ആധാരത്തിന്റെ ആരം കാണുക.

**6.** ഉന്നതി 2 അടിയും ആധാരത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം 154 ച. അടിയും ഉണ്ടായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം, സൂചീഘാതരൂപത്തിലുള്ള ഒരു കൂടാരം നിർമ്മിക്കുന്നതിനു എത്ര ച. ഗജം കാൻവാസ്സു് ആവശ്യമുണ്ടു്.

**7.** 17·5 ഇ. ആരമുള്ളതും, 216° കേന്ദ്രകോണമുള്ളതുമായ വൃത്തഖണ്ഡരൂപത്തിലുള്ള ഒരു കടലാസ്സുകഷണം ഒരു സൂചീഘാതമാക്കിത്തീർത്താൽ അതിന്റെ ഉന്നതി നിർണ്ണയിക്കുക.

**8.** ഒരു കൂടാരം മുകളിൽ സൂചീഘാതത്തോടുകൂടിയ ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിലാണു്. അതിന്റെ വ്യാസം 90 അടിയും ഭൂമിയിൽനിന്നുള്ള ആകെ ഉന്നതി 40 അടിയും, ഗോളസ്തംഭത്തിനു മാത്രമുള്ള ഉന്നതി 12 അടിയും ആയാൽ അതിനു് ആവശ്യമായ കാൻവാസിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം എന്തു്? ച. ഗജത്തിനു് $3\frac{1}{2}$ രൂപാവെച്ചു് അതിന്റെ വില കണക്കാക്കുക.

---

ഉത്തരം. **2.** $42\frac{5}{8}$ ച. ഇ., $254\frac{4}{7}$ ച. ഇ., $25\frac{2}{3}$ ച. അടി. **3.** 220 ച. അ. **4.** 15 രു. **5.** $2\frac{1}{12}$ ഇ. **6.** $61\frac{1}{9}$ ച. ഗജം. **7.** 14 ഇ. **8.** 1210 ച. ഗ., 4235 രു.

## പാഠം 9.

## ഗോളത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം.

ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഉയരത്തിന് തുല്യമായ ഉയരമുള്ള ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിൽ ആ ഗോളം കൃത്യമായി ഒതുങ്ങിയിരിക്കുന്നു എന്നു വിചാരിക്കുക. ഇതിൽനിന്നും ഗോളത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ അകമേയുള്ള വക്രതലക്ഷേത്രഫലത്തിനു തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കാവുന്നതത്രെ. ഗോളത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം അതിനെ ചുററിയുള്ള ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലത്തിനു തുല്യമായിരിക്കുമെന്നും പറയാവുന്നതാണ്. ഗോളത്തിന്റെ ആരം r ഇ: ആയിരുന്നാൽ ഗോളത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $= 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$ ച. ഇ.

## അഭ്യാസം 5.

1. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അളവുകളുള്ള ഗോളങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

(i) ആരം 5 ഇ. (ii) വ്യാസം 3 അടി. (iii) ചുററളവ് 44 ഇ.

2. ഭൂമി 3960 മൈൽ ആരമുള്ള ഒരു ഗോളമാണെന്നു സങ്കല്പിച്ച് അതിന്റെ ഉപരിതലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കണക്കാക്കുക.

3. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെയും ഗോളത്തിന്റെയും വ്യാസങ്ങൾ തുല്യമായിരുന്നാൽ അവയുടെ ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതസംഖ്യ എന്തായിരിക്കും?

4. ഒരു വൃത്തം, ഒരു അർദ്ധഗോളം, ഒരു ഗോളം ഇവയ്ക്കു തുല്യമായ ആരങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ ഇവയുടെ ക്ഷേത്രഫലങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

5. ഭൂമി 7920 മൈൽ വ്യാസമുള്ള ഒരു ഗോളമാണെന്നു സങ്കല്പിച്ച് കിഴക്ക് 75° രേഖാംശത്തിനും, കിഴക്ക് 136° രേഖാംശത്തിനും ഇടയ്ക്ക് ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിനുള്ള ക്ഷേത്രഫലം എന്ത് എന്നും കണ്ടുപിടിക്കുക.

---

ഉത്തരം: **1.** $314\frac{2}{7}$ ച, ഇ., $28\frac{2}{7}$ ച. ഇ., 616 ച. ഇ., **2.** 197,140,114 ച. മൈൽ. **3.** 1:4. **4.** 1:3:4. **5.** 33404297 ച. മൈൽ ഏകദേശം.

## അദ്ധ്യായം 2.

# ഘനമാനം.

(തുടർച്ച)

### പാഠം 1.

### സമപാർശ്വത്തിന്റെ ഘനഫലം.

നേർഖണ്ഡത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലത്തെ ഉന്നതി (രണ്ടു പാർശ്വതലങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ദൂരം) കൊണ്ടു് ഗുണിച്ചാൽ സമപാർശ്വത്തിന്റെ ഘനഫലം കിട്ടും. പാർശ്വതലത്തിന്റെ ആകൃതി എന്തുതന്നെ ആയിരുന്നാലും അതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലവും, സമപാർശ്വത്തിന്റെ ഉന്നതിയും തന്നിരുന്നാൽ ഘനഫലം നിർണ്ണയിക്കാവുന്നതാണ്.

### അഭ്യാസം 6.

**1.** ഒരു സമപാർശ്വത്തിന്റെ ഉന്നതി 9 ഇഞ്ചും, നേർഖണ്ഡത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം 7 ച ഇഞ്ചും ആയാൽ ഘനഫലം കാണുക.

**2.** ഒരു തോടിന്റെ നേർഖണ്ഡത്തിനു് മുകളിൽ 24 അടിയും താഴെ 19 അടിയും വീതിയുണ്ടു്. അതിനു് 6 അടി ആഴവും, 810 വാര നീളവും ഉണ്ടായിരുന്നാൽ തോടിന്റെ ഘനഫലം എന്തു്?
(ഉത്തരം ഘനഗജം ആയി പറയുക.)

**3.** ഒരു സമപാർശ്വത്തിന്റെ നേർഖണ്ഡം 5″, 6″, 7″ വീതം വശമുള്ള ഒരു ത്രിഭുജമാണു്. സമപാർശ്വത്തിന്റെ ഉയരം 1 അടി ആണെങ്കിൽ ആകെ ക്ഷേത്രഫലവും ഘനഫലവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

**4.** ഒരു കച്ചിക്കൂന (hay stack) യുടെ നേർഖണ്ഡം മുകളിൽ സമകോണ സമദ്വിഭുജത്തോടു കൂടിയതും വശത്തിനു് 20 അടി നീളമുള്ളതുമായ ഒരു സമചതുരമത്രെ. അതിനു് 50 അടി നീളം ഉണ്ടായിരുന്നാൽ കച്ചിയുടെ ഘനഫലം കണ്ടുപിടിക്കുക

**5.** ഒരു തുരങ്കത്തിന്റെ നേർഖണ്ഡം മുകളിൽ അർദ്ധവൃത്തത്തോടുകൂടിയ ഒരു സമചതുരമാണു്. തുരങ്കത്തിന്റെ വീതി 10 അടിയും, നീളം 150 അടിയും ആയാൽ അതിന്റെ ഘനഫലം കാണുക.

---

ഉത്തരം. **1.** 63 സെ. മീ. **2.** 11610 ഘ. ഗ. **3.** 245·4 ച. ഇ. ഏകദേശം. 176·4 ഘ. ഇ. ഏകദേശം. **4.** 25000 ഘ. അ. **5.** $20892\frac{6}{7}$ ഘ. അ.

## പാഠം 2.

## ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ഘനഫലം.

നേർഖണ്ഡം വൃത്തമായുള്ള ഒരു സമപാർശ്വമാണ് ഗോളസ്തംഭം. അതുകൊണ്ടു് വൃത്താകൃതിയുള്ള വശത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലത്തെ ഉന്നതികൊണ്ടു ഗുണിച്ചു് ഘനഫലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നു. നേർഖണ്ഡത്തിന്റെ ആരം $r$ ഇഞ്ചും. സമപാർശ്വത്തിന്റെ ഉന്നതി $h$ ഇഞ്ചും ആണെങ്കിൽ ഘനഫലം $= \pi r^2 h$ ഘനഇഞ്ച്.

### അഭ്യാസം 7.

**1.** 20 അടി ആഴവും, 10 അടി വ്യാസവും ഉള്ള ഒരു കിണറു് കുഴിക്കാൻ എത്ര ഘനയടി മണ്ണു് എടുക്കണം?

**2.** ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിലുള്ളതും, തടികൊണ്ടു് ഉണ്ടാക്കിയിട്ടുള്ളതും ആയ ഒരു വിളക്കമരത്തിനു 15 അടി ഉയരവും, 18 ഇ. ചുററളവും ഉണ്ടു്. ഒരു ഘനയടി തടിയുടെ ഭാരം 60 പൗണ്ടായാൽ വിളക്കമരത്തിന്റെ ഭാരം കണക്കാക്കുക.

**3.** ഒരു ഘനയടി തടിയുടെ തൂക്കം 40 പൗണ്ടായാൽ ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിലുള്ളതും, 15 അടി നീളവും, 1·4 അടി വ്യാസവും ഉള്ളതും ആയ ഒരു തടിയുടെ വില കണ്ടിക്കു് 25 രൂ നിരക്കിനു് എന്താകും? (ഒരു കണ്ടി=600 പൗണ്ടു്)

**4.** അര മൈൽ നീളമുള്ള ഒരു കുഴലിനു് അകമേ 4 ഇ. വ്യാസമുണ്ടെങ്കിൽ അതിൽ എന്തുമാത്രം വെള്ളം കൊള്ളും?

**5.** അകമേ 2 അടി ഉയരവും, $1\frac{1}{2}$ അടി വ്യാസവും ഉള്ള ഗോളസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിൽനിന്നും അകമേ 3 ഇ. വ്യാസവും, 10 ഇ. ഉയരവും ഉള്ള ഗോളസ്തംഭാകാരമായ എത്ര കുപ്പികൾ നിറയ്ക്കാൻ സാധിക്കും?

**6.** ഗോളസ്തംഭരൂപമുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ അകമേയുള്ള വ്യാസം 1 അടിയും, ഉയരം 2 അടിയും ആയാൽ അതിൽ എത്രപറവെള്ളം കൊള്ളും?

**7.** ഒരു തടിക്കഷണത്തിനു് 10 അടി നീളവും, 8 ഇ. വീതിയും, 6 ഇ. കനവും ഉണ്ടു്. ഇതേ നീളവും ഏററം കൂടുതൽ ഘനഫലവും കിട്ടത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു ഗോളസ്തംഭം ഇതിൽനിന്നും ഉണ്ടാക്കിയാൽ അതിന്റെ ഘനഫലം എന്തായിരിക്കും?

**8.** ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ആരവും ഉന്നതിയും 5% വീതം വർദ്ധിച്ചാൽ അതിന്റെ മഹത്വം എത്ര% വർദ്ധിക്കും?

9. തുല്യവ്യാസങ്ങളോടുകൂടിയ രണ്ടു ഗോളസ്തംഭങ്ങളുടെ ഉന്നതി 3:5 എന്ന അനുപാതസംഖ്യയിലാണു്. എന്നാൽ അവയുടെ ഘനഫലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതസംഖ്യയെന്തു്?

10. തുല്യ ഘനഫലമുള്ള രണ്ടു ഗോളസ്തംഭങ്ങളുടെ ഉന്നതി 7:3 എന്ന അനുപാതസംഖ്യയിലായാൽ അവയുടെ വ്യാസങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുക.

11. ഒരു ചക്ര (നാണയം) ത്തിന്നു് ഒരു അരചക്രത്തിന്റെ ഇരട്ടി ഭാരം ഉണ്ടു്. എന്നാൽ അവയുടെ വ്യാസം 27 മി. മീറ്ററും 22 മി. മീറ്ററും ആയാൽ അവയുടെ കനം ഏതനുപാതസംഖ്യയിലാണു്?

---

ഉത്തരം. **1.** $1571\frac{3}{7}$ ഘ. അ. **2.** $161\frac{7}{88}$ പൗ. **3.** $38\frac{1}{2}$ രൂ. **4.** $230\frac{10}{21}$ ഘ. അ. **5.** 86. **6.** $3\frac{69}{175}$ പറ. **7.** $1\frac{27}{28}$ ഘ. അ. **8.** 15·7625%. **9.** 3:5. **10.** $\sqrt{3}$: ∠7. **11.** 968:729.

---

## പാഠം 3.

## ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ഘനഫലം തന്നിരുന്നാൽ അതിന്റെ ഉയരമോ വ്യാസമോ കാണുന്ന വിധം.

### അഭ്യാസം 8.

1. ഒരു സ്റ്റാൻഡാർഡ് പറയ്ക്കു് അകമേ $8\frac{5}{8}$ ഇഞ്ചു് വ്യാസം ഉണ്ടായിരുന്നാൽ അതിന്റെ ഉയരം എന്തു്?

2. ·08 ഇ. വ്യാസമുള്ള ഒരു ചെമ്പുകമ്പിയുടെ ഭാരം 2 പൗണ്ടാണു്. ഒരു ഘനയിഞ്ചു് ചെമ്പിന്റെ ഭാരം ·35 പൗണ്ടായാൽ കമ്പിയുടെ നീളം കാണുക.

3. ഒരാളിന്നു് ഒരു ദിവസത്തേക്കു് 6 ഗ്യാലൻ വെള്ളം വീതം 7700 ആളുകൾക്കു് 3 ദിവസത്തേക്കു് ആവശ്യമുള്ള വെള്ളം ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിലുള്ള ഒരു കുളത്തിൽ സംഭരിച്ചിരിക്കുന്നു. കുളത്തിന്റെ വ്യാസം 42 അടി ആയിരുന്നാൽ ജലം എത്ര അടി ആഴത്തിൽ ഉണ്ടു്? (ഒരു ഘനയടി=$6\frac{1}{4}$ ഗ്യാലൻ)

4. ഒരിഞ്ചു് വ്യാസമുള്ള കുഴലിൽക്കൂടെ ഒരു മിനിട്ടിൽ 15 ഇടങ്ങഴി വെള്ളം വീതം ഒഴുകി വീഴുന്നെങ്കിൽ ഒഴുക്കിന്റെ വേഗം സെക്കൻഡിൽ എത്ര അടി?

5. കല്ലുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയിട്ടുള്ള ഒരു റോളറിനു് 4 ടൺ 8 ഹൺഡ്രഡ്‌വെയിററു് തൂക്കവും, 4 അടി നീളവും ഉണ്ടു്. റോളർ, ഒരു ഘനയടിക്കു് 441 പൗണ്ടു വീതം തൂക്കമുള്ളതാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാസം കാണുക.

6. 19·72 ഗ്രാം രസം ഒരു സ്ഫടികക്കുഴലിൽ ഒഴിച്ചപ്പോൾ അതു് 20·3 സെ. മീററർ ഉയരത്തിൽ കാണപ്പെട്ടു. എന്നാൽ കുഴലിന്റെ വ്യാസം കണക്കാക്കുക. (ഒരു ഘന സെ. മീററർ രസത്തിന്റെ ഭാരം = 13·6 ഗ്രാം)

7. തുല്യ ഘനയളവുള്ള രണ്ടു ഗോളസ്തംഭങ്ങളുടെ വ്യാസം 5:6 എന്ന അനുപാതസംഖ്യയിലായാൽ അവയുടെ ഉയരം ഏതു് അനുപാതസംഖ്യയിലാണു്?

8. A, B ഇവ ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിലുള്ള രണ്ടു പാത്രങ്ങളാണു്. B യുടെ വ്യാസത്തിന്റെ ഇരട്ടിയാണു് A യുടെ വ്യാസം. എന്നാൽ A യുടെ ഘനയളവിന്റെ ഇരട്ടിയാണു് B യുടെ ഘനയളവു്. അവയുടെ ഉയരങ്ങൾ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

---

ഉത്തരം. 1. $13\frac{9}{13}$ ഇ. ഏകദേശം. 2. $1136\frac{4}{11}$ ഇ. 3. 16 അടി. 4. സെക്കന്റിനു് $2\frac{4}{33}$ അടി. 5. 2 അ. 8 ഇ. 6. 0·3 സെ. മീ. 7. 36:25. 8. 1:8.

---

## പാഠം 4.

## രണ്ടു ഗോളസ്തംഭങ്ങളുടെ ഘനഫലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം.

പൊള്ളയായ ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ പുറമെയുള്ള ഘനഫലത്തിൽനിന്നും അകമേയുള്ള ഘനഫലം കുറച്ചാൽ; ഗോളസ്തംഭം ഉണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെ ഘനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാം.

### അഭ്യാസം 9.

1. വൃത്താകാരമായ ഒരു കുളത്തിന്റെ അകത്തെ വ്യാസം 20 അടിയും, ആഴം 14 അടിയുമാണു്. അതിനു് 1 അടി കനത്തിൽ അടിത്തട്ടിലും, 9 ഇ. കനത്തിൽ വശത്തും കോൺക്രീററു് ഇട്ടാൽ കോൺക്രീററിന്റെ ഘനഫലം കാണുക.

2. 20 അടി നീളമുള്ളതും ·25 ഇ. ഘനമുള്ളതും പുറമെ $3\frac{1}{2}$ ഇ. വ്യാസമുള്ളതും ആയ ഒരു ലോഹക്കുഴലുണ്ടാക്കാൻ ആവശ്യമായ ലോഹത്തിന്റെ ഘനഫലം കാണുക.

**3.** ഗോളസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ബോയിലറിന് (boiler) 3 അടി വ്യാസവും 6 അടി നീളവും നീളത്തിനു സമാന്തരമായി അതിൽ 2 ഇ. വ്യാസമുള്ള 12 കുഴലുകളും ഉണ്ട്. ബോയിലറിന്റെ ബാക്കി ഘനയളവ് കണക്കാക്കുക. (തകിടിന്റെ കനം കണക്കാക്കേണ്ടതില്ല)

**4.** 6 അടി വ്യാസവും 28 അടി ആഴവും ഉള്ള ഒരു കിണറു കുഴിക്കണം. അതിനു ചുറ്റും ഒരടികനത്തിൽ ഭിത്തികെട്ടേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. കിണറു കുഴിക്കുന്നതിന് ഘനയടിക്ക് 1 അണയും ഭിത്തി കെട്ടുന്നതിന് ഘനയടിക്ക് $2\frac{1}{2}$ അണയും നിരക്കായാൽ ആകെ ചെലവു കണക്കാക്കുക.

**5.** പൊള്ളയായ ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിന് അകമേ 20 ഇഞ്ചും പുറമേ 24 ഇഞ്ചും വ്യാസമുണ്ട്. ധാരയ്ക്ക് 22 ഇ. നീളമുള്ളതും, പൊള്ളയില്ലാത്തതുമായ ഒരു ഘനം (cube) ഇതേ സാധനംകൊണ്ടുതന്നെ ഉണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്നു. ഇവയ്ക്കു രണ്ടിനും ഭാരം തുല്യമാണെങ്കിൽ ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം എന്ത്?

**6.** ഒരു കോൺക്രീറ്റ് ആർച്ചിന്റെ (arch) ആകെ ഉയരം 11 അടി 3 ഇ. ആണ്. വളഞ്ഞഭാഗം അകമേ 3 അടി 6 ഇ. പുറമേ 5 അടി 3 ഇ. ആരമുള്ള അർദ്ധവൃത്തമാകുന്നു. ആർച്ചിന് എല്ലാം സ്ഥലങ്ങളിലും 1 അടി 9 ഇ. കനം ഉണ്ട്. എന്നാൽ ഘനയടിക്ക് 1 ക. 8 ണ. നിരക്കിന് ആർച്ച് നിർമ്മിക്കുന്നതിന് എന്തു ചിലവാകും?

**7.** 1 അടി വ്യാസമുള്ള ഗോളസ്തംഭത്തിൽ 6 ഇ. കനത്തിൽ കടലാസ് ചുറ്റിയിരിക്കുന്നു. ഇത്രയും കടലാസ് 6 ഇ. വ്യാസമുള്ള ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിൽ ചുറ്റുന്നതായാൽ അതിന്റെ കനം എന്തായിരിക്കും?

**8.** ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിൽ വച്ചിരിക്കുന്ന വെള്ളത്തിൽ ഗോളസ്തംഭരൂപം ഉള്ളതും ആ പാത്രത്തിനു തുല്യമായ ഉയരം ഉള്ളതും ആയ ലോഹകമ്പി, പാത്രത്തിന്റെ അടിത്തട്ടിനു ലംബമായി നിർത്തിയപ്പോൾ പാത്രത്തിൽ ഒരിഞ്ച് വെള്ളം ഉയർന്നു. മുമ്പുതന്നെ പാത്രത്തിൽ 15 ഇ. ഉയരത്തിൽ വെള്ളം ഉണ്ടായിരുന്നാൽ പാത്രത്തിന്റെയും കമ്പിയുടെയും വ്യാസങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതസംഖ്യയെന്ത്?

---

ഉത്തരം. **1.** $1047\frac{53}{56}$ ഘ. അ. **2.** $612\frac{6}{7}$ ഘ. ഇ. **3.** $40\frac{6}{7}$ ഘ. അ. **4.** $118\frac{1}{4}$ രൂ. **5.** 6 അ, 5 ഇ. **6.** 118 രൂ. 4 ണ. 3 സ. ഏകദേശം. **7.** 7·8 ഇ. ഏകദേശം. **8.** 4:1.

## പാഠം 5

## സൂചീസ്തംഭത്തിൻെറ ഘനഫലം.

സൂചീസ്തംഭത്തിൻെറ ആധാരത്തിനു് $A$ ച. ഇ. ക്ഷേത്രഫലവും അതിൻെറ ഉന്നതി $h$ ഇഞ്ചും ആയാൽ സൂചീസ്തംഭത്തിൻെറ ഘനയളവു് $= \frac{1}{3}Ah$ ഘ. ഇ.

### അഭ്യാസം 10.

**1.** ഒരു സൂചീസ്തംഭത്തിൻെറ ഉന്നതി 8 ഇ., ആധാരത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം 30 ച. ഇഞ്ചു് ആയാൽ അതിൻെറ ഘനഫലം കണ്ടു പിടിക്കുക.

**2.** ഒരു സൂചീസ്തംഭത്തിൻെറ ആധാരം വശത്തിനു് 12 ഇ. നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരമാണു്. അതിൻെറ ഉയരം 10 ഇ. ആയാൽ ഘനഫലം കണക്കാക്കുക.

**3.** ഒരു സൂചീസ്തംഭത്തിൻെറ ആധാരം $9'' \times 7''$ അളവുള്ള ഒരു ആയതക്ഷേത്രം ആകുന്നു. അതിനു് $11''$ ഉന്നതി ഉണ്ടായിരുന്നാൽ അതിൻെറ ഘനയളവു് നിർണ്ണയിക്കുക.

**4.** സൂചീസ്തംഭാകൃതിയിൽ കുറെ നെല്ലു് കൂട്ടിയിരിക്കുന്നു. അതിൻെറ ഉന്നതി 4 അടിയും ആധാരം 6 അടി സമചതുരവും ആണെങ്കിൽ ആ നെല്ലു് എത്ര പറയുണ്ടു്? (1 പറ = 800 ഘ. ഇ.)

**5.** 5 അടി നീളവും, 4 അടി വീതിയുമുള്ള ഒരു ആയതക്ഷേത്രം ആധാരമായും 3 അടി ഉന്നതിയായും ഉള്ള സൂചീസ്തംഭാകാരമായ ഒരു ചരൽക്കൂമ്പാരം ഉണ്ടാക്കിയാൽ അതിലുള്ള ചരലിൻെറ ഘനഫലം എന്തു്?

**6.** 15 അടി സമചതുരമായ ഒരു മുറിയുടെ ഭിത്തികൾക്കു് 10 അടി ഉയരമുണ്ടു്. അതിൻെറ മേൽപുര 5 അടി ഉയരമുള്ള ഒരു സൂചീസ്തംഭരൂപത്തിലായാൽ മുറിയുടെ ആകെ ഘനഫലം കണക്കാക്കുക.

---

ഉത്തരം, **1.** 81 ഘ. ഇ. **2.** 480 ഘ. ഇ. **3.** 231 ഘ. ഇ. **4.** $103\frac{17}{25}$ പറ. **5.** 20 ഘ. അ. **6.** 2625 ഘ. അ.

## പാഠം 6.

## സൂചീഘാതത്തിൻെറ ഘനഫലം.

ഒരു സൂചീഘാതത്തെ അസംഖ്യം വശങ്ങളുള്ള ഒരു സൂചീസ്തംഭമായി ഗണിക്കാവുന്നതാണ്. അപ്പോൾ സൂചീഘാതത്തിൻെറ ഘനഫലം ആധാരത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലവും സൂചീസ്തംഭത്തിൻെറ ഉയരവും തമ്മിലുള്ള ഗുണനഫലത്തിൻെറ മൂന്നിൽ ഒന്നാണ്. അതിൻെറ ആധാരം $r$ ഇഞ്ചാണെങ്കിൽ ക്ഷേത്രഫലം $\pi r^2$ ച. ഇ. അതുകൊണ്ട് ഉയരം $h$ ഇഞ്ചും, ആരം $r$ ഇഞ്ചും ആയിരിക്കുമ്പോൾ സൂചീഘാതത്തിൻെറ ഘനഫലം $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ച. ഇ.

## അഭ്യാസം 11.

1. ഒരു സൂചീഘാതത്തിൻെറ ഉന്നതി $3\frac{1}{2}$ ഇ. ആധാരത്തിൻെറ ആരം 3 ഇ. ആയാൽ അതിൻെറ ഘനഫലം കണ്ടുപിടിക്കുക.

2. ഒരു ചോർപ്പ (funnel) യുടെ സൂചീഘാതരൂപത്തിലുള്ള ഭാഗത്തിന് 4 ഇ. ഉയരവും 4 ഇ. ആരവും ഉണ്ട്. എന്നാൽ അതിൻെറ ഘനഫലം കാണുക.

3. ഒരു സൂചീഘാതത്തിൻെറ ഉന്നതി 8 ഇ. അതിൻെറ ആധാരത്തിൻെറ വ്യാസം 6 ഇഞ്ചാണ്. ഇതു നിർമ്മിച്ചിരിക്കുന്നത് ഒരു ഘനയിഞ്ചിന് 5 ഔൺസു ഭാരമുള്ള സാധനംകൊണ്ടാണെങ്കിൽ സൂചീഘാതത്തിൻെറ ഭാരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

4. കുറെ ധാന്യം സൂചീഘാതരൂപത്തിൽ കൂട്ടിയിരിക്കുന്നു. അതിൻെറ ആധാരപരിധി 40 അടിയും, ഉന്നതി $6\frac{1}{2}$ അടിയും ആയാൽ അതിൽ എത്രപറ ധാന്യം ഉണ്ടായിരിക്കും? (1 പറ=800 ഘ. ഇ.)

5. ഇരുമ്പുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയിട്ടുള്ള ഒരു സൂചീഘാതത്തിൻെറ ഉന്നതി 12 അടിയും ഭാരം 62·8 ടണ്ണും ആണ്. ഒരു ഘനയടി ഇരുമ്പിന് 448 പൗണ്ടു തൂക്കമുണ്ടായിരുന്നാൽ അതിൻെറ ആധാരത്തിൻെറ ആരം എന്ത്?

6. ഒരു സൂചീഘാതത്തിൻെറ ചരിവുയരം 13 ഇ. ആധാരത്തിൻെറ വ്യാസം 10 ഇ. ആയാൽ ഘനഫലം കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. ഒരേ വ്യാസമുള്ള ആധാരത്തിൽ രണ്ടു സൂചീഘാതങ്ങൾ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. അവയുടെ ഉന്നതി 2:3 എന്ന അനുപാതസംഖ്യയിലായാൽ അവയുടെ ഘനയളവുകൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതസംഖ്യ കാണുക.

8. തുല്യ ഉന്നതിയുള്ള രണ്ടു സൂചീഖാതങ്ങളുടെ വ്യാസം 1:2 എന്ന അനുപാതസംഖ്യയിലായാൽ അവയുടെ ഘനഫലം ഏതു് അനുപാതസംഖ്യയിലാണു്?

9. തുല്യ ഘനഫലമുള്ള രണ്ടു സൂചീഖാതങ്ങളുടെ ഉന്നതികൾ 5:6 എന്ന അനുപാതസംഖ്യയിലായാൽ അവയുടെ വ്യാസങ്ങൾ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

10. തുല്യ ഘനഫലമുള്ള രണ്ടു സൂചീഖാതങ്ങളുടെ വ്യാസം 3:4 എന്ന അനുപാതസംഖ്യയിലായാൽ അവയുടെ ഉന്നതികൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതസംഖ്യ എന്തു്?

---

ഉത്തരം. 1. 33 ഘ. ഇ. 2. $16\frac{16}{21}$ ഘ. ഇ. 3. $23\frac{4}{7}$ പൗണ്ടു്. 4. $595\frac{7}{11}$ പറ. 5. 5 അ. ഏകദേശം. 6. $314\frac{2}{7}$ ഘ. ഇ. 7. 2:3. 8. 1:4 9. $\sqrt{6}:\sqrt{5}$. 10. 16:9.

---

## പാഠം 7.

## ഗോളത്തിന്റെ ഘനഫലം.

$r$ ഇഞ്ചു് ആരമുള്ള ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഘനഫലം $=\frac{4}{3}\pi r^3$ ഘന ഇഞ്ചു്.

### അഭ്യാസം 12.

1. താഴെക്കാണുന്ന ആരങ്ങളുള്ള ഗോളങ്ങളുടെ ഘനഫലം കാണുക. (i) 7 ഇ. (ii) 2 അടി. (iii) 1 മൈൽ.

2. രണ്ടു ഗോളങ്ങളുടെ ആരങ്ങൾ 3:4 എന്ന അനുപാതസംഖ്യയിലാണു്. (i) അവയുടെ ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ ഏതു് അനുപാതസംഖ്യയിലാണു്? (ii) ഘനഫലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതസംഖ്യയെന്തു്?

3. നാലു ഗോളങ്ങളുടെ ആരങ്ങൾ 1:2:3:4 എന്ന അനുപാതസംഖ്യയിലാണു്. (i) അവയുടെ ക്ഷേത്രഫലം താരതമ്യപ്പെടുത്തുക. (ii) അവയുടെ ഘനഫലം ഏതു് അനുപാതസംഖ്യയിലാണു്?

4. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ മഹത്വം 10 ഘനയിഞ്ചായാൽ അതിന്റെ വ്യാസം കണ്ടുപിടിക്കുക.

5. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ആരം 10% വർദ്ധിപ്പിച്ചാൽ (i) അതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം എത്ര % വർദ്ധിക്കും? (ii) അതിന്റെ ഘനഫലം എത്ര % വർദ്ധിക്കും?

6. ഭൂമി 8000 മൈൽ വ്യാസമുള്ള ഒരു ഗോളമാണെന്നും, അതിന്റെ ഘനയടിക്കു് 344 പൗണ്ടു് ഭാരമുണ്ടെന്നും സങ്കല്പിച്ചു് ഭൂമിയുടെ ഭാരം എത്ര ടൺ ആയിരിക്കുമെന്നു കണക്കാക്കുക.

7. 50 ഘ. സെ. മീററർ ലോഹത്തിൽനിന്നും 5 മി. മീററർ വ്യാസമുള്ള എത്ര ലോഹഗോളങ്ങൾ വാർത്തുണ്ടാക്കാം?

---

ഉത്തരം. 1. $1437\frac{1}{3}$ ഘ. ഇ; $33\frac{1}{21}$ ഘ. അ. $4\frac{4}{21}$ ഘ. മൈൽ. 4. $\sqrt[3]{105/44}$ ഇ. 5. 21%;33·1%. 6. 606,25?,292,234 $\times 10^{10}$ ടൺ 7. 763. 8. $\sqrt[3]{2100/11}$ ഇ.

---

## പാഠം 8.

## സംയുക്തഘനഫലങ്ങൾ—ഗോളങ്ങൾ, സൂചീഖാതങ്ങൾ, ഗോളസ്തംഭങ്ങൾ.

### അഭ്യാസം 13.

1. ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിലുള്ള ഒരു തൂണിന്റെ ഉയരം 6 അടിയും വ്യാസം 1 അടിയും ആണു്. ഇതിനു മുകളിൽ 6 ഇ. ആരമുള്ള ഒരു ഗോളവും വച്ചിട്ടുണ്ടു്. എന്നാൽ ആകെ ഘനഫലം കണക്കാക്കുക.

2. മുകൾഭാഗം സൂചീഖാതരൂപത്തിലുള്ള ഗോളസ്തംഭരൂപമായ ഒരു അറയുടെ അകമേയുള്ള വ്യാസം 14 അടിയും കൂടിയ ഉയരം 14 അടിയും ഭിത്തിയുടെ ഉയരം 11 അടിയും ആണു്. എന്നാൽ അകമേയുള്ള ഘനഫലം എന്തു്?

3. ഒരടി വ്യാസമുള്ളതും ഗോളസ്തംഭരൂപമുള്ളതുമായ ഒരു പാത്രത്തിലുള്ള വെള്ളത്തിൽ 6″ വ്യാസമുള്ളതായ ഒരു ഗോളം മുഴുവനും മുങ്ങിക്കിടക്കത്തക്കവണ്ണം ഇടുമ്പോൾ വെള്ളത്തിന്റെ നിരപ്പു് എന്തുമാത്രം ഉയരും?

4. അർദ്ധഗോളാകൃതിയുള്ള പാർശ്വങ്ങളോടുകൂടിയ ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ അകമേയുള്ള വ്യാസം 6 അടിയും ആകെ നീളം 18 അടിയും ആയാൽ അതിന്റെ ഘനഫലം നിർണ്ണയിക്കുക.

5. ഒരേ വൃത്തം ആധാരമായി ഒരു സൂചീഖാതവും ഒരു അർദ്ധഗോളവും ഉണ്ടു്. അതിന്റെ ആകെ നീളം $5\frac{1}{4}$ അടിയും ആധാര

ത്തിന്റെ വ്യാസം $3\frac{1}{2}$ അടിയും ആയാൽ അതു മുഴുവൻ വെള്ളത്തിൽ മുങ്ങുമ്പോൾ എന്തുമാത്രം വെള്ളത്തിനു സ്ഥാനാന്തരമുണ്ടാകും?

**6.** ഒരു ഘനസാധനത്തിന്റെ ഒരു വശം ഒരു അർദ്ധഗോളവും മറുവശം ഒരു സൂചീഘാതവുമാണ്. സൂചീഘാതത്തിന്റെ ഉയരം 10 ഇഞ്ചും പൊതുവായുള്ള ആരം 7 ഇഞ്ചും അതിന്റെ ആകെ നീളം 30 ഇഞ്ചും ആയാൽ ആകെ ഘനഫലം കണക്കാക്കുക.

**7.** 5 മി. മീ. വ്യാസം ഉള്ള ഒരു കുഴലിൽക്കൂടെ ഒരു മിനിട്ടിൽ 10 മീറ്റർ വേഗത്തിൽ വെള്ളം ഒഴുകുന്നു. ആധാരം 40 സെ. മീ. വ്യാസമുള്ളതും 24 സെ. മീ. ആഴമുള്ളതും സൂചീഘാതരൂപമുള്ളതും ആയ ഒരു പാത്രം നിറയണമെങ്കിൽ എന്തുസമയം ആവശ്യമുണ്ട്?

**8.** മുകളിൽ ഒരു സൂചീഘാതത്തോടുകൂടിയ ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിലുള്ള ഒരു കുളത്തിൽ എണ്ണ സംഭരിച്ചിരിക്കുന്നു. അതിന്റെ അകത്തെ വ്യാസം 21 അടിയും ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം 18 അടിയും സൂചീഘാതത്തിന്റെ ഉയരം 6 അടിയും ആകുന്നു. ഈ കുളത്തിന്റെ $\frac{14}{15}$ ഭാഗം മാത്രമേ നിറക്കാൻ സാദ്ധ്യമാവുകയുള്ളു. എങ്കിൽ അതിൽ എത്ര ഗ്യാലൻ എണ്ണ നിറയ്ക്കാം? (ഒരു ഘനയടി=$6\frac{1}{4}$ ഗ്യാ.)

**9.** ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിലുള്ള ഒരു എണ്ണക്കുളത്തിന്റെ രണ്ടു വശവും അർദ്ധഗോളങ്ങളാണ്. ഇതിന്റെ വ്യാസം 12 അടിയും ആകെ നീളം 40 അടിയും ആകുന്നു. ഈ കുളത്തിന്റെ നീളം തിരശ്ചീനമായിട്ടാണെങ്കിൽ ഇതിൽ 6 അടി ആഴംവരെ എണ്ണ നിറയ്ക്കുന്നതിന് എത്ര ഗ്യാലൻ എണ്ണവേണം? (ഒരു ഗ്യാലൻ=277·5 ഘ. ഇ.)

**10.** $a$ ഇ. വ്യാസമുള്ള ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിൽ വെള്ളം ഒഴിച്ചു വെച്ചിരിക്കുന്നു. $b$ ഇ. ആരവും $c$ ഇ. ഉന്നതിയും ഉള്ള ഒരു സൂചീഘാതവും $d$ ഇ. ആരമുള്ള ഒരു ഗോളവും അതിൽ ഇട്ടപ്പോൾ സൂചീഘാതം മുഴുവനും ഗോളം പകുതിയും വെള്ളത്തിൽ മുങ്ങുന്നു. എന്നാൽ വെള്ളത്തിന്റെ നിരപ്പ് എത്ര ഇഞ്ച് ഉയർന്നിട്ടുണ്ട്?

---

ഉത്തരം. **1.** $5\frac{5}{21}$ ഘ. അ. **2.** 1848 ഘ. അ. **3.** 1 ഇ. **4.** $452\frac{4}{7}$ ഘ. അ. **5.** $22\frac{11}{24}$ ഘ. അ. **6.** 3234 ഘ. ഇ. **7.** $51\frac{1}{5}$ മിനിട്ട് **8.** 40425 ഗ്യാലൻ **9.** 12682 ഗ്യാലൻ ഏകദേശം. **10.** $4(b^2c+2d^3)/3a^2$.

## പാഠം 9.

## ഘനക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ : സമ്മിശ്രം.

### അഭ്യാസം 14.

1. $V=\pi r^2 h$ എന്ന വാക്യം ഉപയോഗിക്കുന്നതു് എന്തിനായിട്ടാണു്? $V$, $r$, $h$ ഇവ എന്തിനെയെല്ലാം സൂചിപ്പിക്കുന്നു? $r$ എന്നതു് $V$, $h$ എന്ന അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു പറയുക.

2. 5″×6″×7″ അളവുള്ള ഒരു തടിക്കഷണത്തിൽനിന്നും ഉണ്ടാക്കി എടുക്കാവുന്നതിലേക്കും വലിയ ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ഘനഫലം എന്തു്?

3. ഒരു സ്ററാൻഡാർഡു് ചങ്ങഴിക്കു് അകമേ 4 ഇ. വ്യാസം ഉണ്ടായിരുന്നാൽ അതിന്റെ ഉയരം കാണുക. (1 ഇടങ്ങഴി=80 ഘ.ഇ.

4. ഒരു പൗണ്ടു് വെള്ളമാത്രം വയ്ക്കാവുന്ന ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിനു് 3 ഇ. ഉയരവും, 3½ ഇ. വ്യാസവും ഉണ്ടായിരുന്നാൽ ½ പൗണ്ടു വെള്ളം കൊള്ളുന്നതും, 3 ഇ. വ്യാസം ഉള്ളതുമായ പാത്രത്തിന്റെ ഉയരം എന്തായിരിക്കും?

5. ഒരു ചരൾകമ്പിക്കു് 10 ഗജം നീളം ഉണ്ടു്. അതിന്റെ ഘനഫലം ·5 ഘന ഇഞ്ചായാൽ കമ്പിയുടെ വ്യാസം കണക്കാക്കുക.

6. സൂചീഘാതരൂപത്തിൽ കുറെ നെല്ലു് കൂട്ടിയിരിക്കുന്നു. അതിന്റെ ആധാരപരിധി 40 അടിയും ഉന്നതി 4 അടിയും ആണെങ്കിൽ നെല്ലു് എത്ര പറയുണ്ടു്?

7. ഒരു സൂചീഘാതത്തിനും, ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിനും തുല്യ വ്യാസവും തുല്യ ഉന്നതിയും ഉണ്ടായിരുന്നാൽ അവയുടെ ഘനഫലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതസംഖ്യ കാണുക.

8. ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ഉയരം അതിന്റെ വ്യാസത്തിനു തുല്യമായിരുന്നാൽ അതിന്റെ ഘനഫലവും ഇതേ വ്യാസമുള്ള ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഘനഫലവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതസംഖ്യ കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. 16″ വ്യാസമുള്ള ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഘനഫലവും 16″ വ്യാസവും, 16″ ഉയരവും ഉള്ള ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ ഘനഫലവും തമ്മിൽ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

10. 15″×25″ അളവുള്ള ആയതക്ഷേത്രാകാരമായ ഒരു കടലാസു് വളച്ചു് 15″ ഉയരമുള്ള ഒരു ഗോളസ്തംഭമാക്കിയാൽ അതിന്റെ ഘനഫലം കണക്കാക്കുക.

11. 8″ വ്യാസമുള്ള ഒരു കുഴലിൽകൂടെ സെക്കൻഡിൽ 2½ അടി വേഗത്തിൽ വെള്ളം ഒഴുകി 4 ഏക്കർ ക്ഷേത്രഫലമുള്ളതും, വെള്ളം

കിടക്കുന്നതുമായ ഒരു വയലിൽ വീഴുന്നു. ജലനിരപ്പു് ഒരിഞ്ചു് ഉയരാൻ എന്തു സമയം വേണം?

**12.** 6·7 സെ. മീ. വ്യാസമുള്ളതും 7·7 സെ. മീ. ഉയരമുള്ളതും ആയ 10 സിഗററ്റ്ടിന്നുകൾ 5 വീതമുള്ള രണ്ടു നിലയിലായി നിർത്തി ഒരു പെട്ടിയിൽ അടുക്കിയിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ പെട്ടിയിൽ എന്തുമാത്രം സ്ഥലം ടിന്നുകൾക്കു് ഇടയ്ക്കായി കിടപ്പുണ്ടെന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

**13.** ഒരു ഘനയിഞ്ചിനു് 4 തോലാവീതം ഭാരമുള്ള ഒരു സാധനംകൊണ്ടു് നിർമ്മിച്ചിരിക്കുന്നതും 20″ ഉന്നതിയും 12·6″ വ്യാസവും ഉള്ളതുമായ ഒരുസൂചീഖാതത്തിന്റെ ഭാരം കാണുക.

**14.** തടികൊണ്ടുള്ള ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെ നീളം 38″, വ്യാസം 2 അടിയുമാണു്. അതിന്റെ ഒററത്തുനിന്നും അർദ്ധഗോളാകൃതിയിലും, മറേറ അററത്തുനിന്നും രണ്ടടി ആഴത്തിൽ സൂചീഖാതരൂപത്തിലും തടി ചുഴന്നു് എടുത്തുകളഞ്ഞാൽ ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ ഘനഫലം കണക്കാക്കുക. സൂചീഖാതത്തിനും, ഗോളത്തിനും വ്യാസം 2 അടി തന്നെയാണു്.

**15.** ഒരടി ഉന്നതിയുള്ള ഒരു സൂചീഖാതത്തിന്റെ ഘനഫലം 10″ ആരമുള്ള ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഘനഫലത്തിന്റെ $\frac{3}{5}$ ഭാഗമായാൽ സൂചീഖാതത്തിന്റെ ചരിവുയരം കാണുക.

**16.** ലോഹത്തകിടുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയതും ഇരുവശവും തുറന്നതുമായ ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിനു് $3\frac{1}{2}$ അടി വ്യാസവും 4 അടി ഉയരവും ഉണ്ടു്. ഗോളസ്തംഭമാക്കുമ്പോൾ തകിടു് യോജിപ്പിക്കുന്നതു നിമിത്തം തകിടിന്റെ ക്ഷേത്രഫലത്തിൽ 2% നഷ്ടപ്പെടുന്നുണ്ടെങ്കിൽ ഈ ഗോളസ്തംഭമുണ്ടാക്കാൻ ഉപയോഗിച്ച തകിടിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

**17.** ഒരു സൂചീസ്തംഭത്തിന്റെ ആധാരം 3 ഇ. സമചതുരമാണു്. ഇതിന്റെ ചരിവുതലങ്ങളെല്ലാം സമത്രിഭുജങ്ങളായാൽ ആകെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

**18.** 6″ ഉയരമുള്ള ഒരു സൂചീസ്തംഭത്തിന്റെ ആധാരം 10″ സമചതുരമായാൽ സൂചീസ്തംഭത്തിന്റെ ഘനഫലം കാണുക.

**19.** ഒരടി നീളമുള്ള ഒരു കമ്പിയുടെ നേർഖണ്ഡം ഒരിഞ്ചു വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തമാണു്. അതേ ഘനഫലമുള്ളതും 4 അടി നീളമുള്ളതുമായ ഒരു കമ്പിയുടെ നേർഖണ്ഡം ഒരു സമചതുരമായാൽ സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം എത്രയിഞ്ചു് എന്നു രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനംവരെ ശരിയാക്കി പറയുക. ($\pi = 3{\cdot}14$)

**20.** ഗോളസ്തംഭരൂപമുള്ളതും, അകമേ വ്യാസം 9″ ഉള്ളതുമായ ഒരു കുഴലിൽക്കൂടെ സെക്കൻഡിൽ $\frac{1}{2}$ അടി വേഗത്തിൽ വെള്ളം ഒഴുകി 20 അടി ഉന്നതിയും, 10 അടി വ്യാസമുള്ളതും സൂചീഖാ

ത്രൂപമുള്ളതുമായ ഒരു കുളത്തിൽ വീഴുന്നെങ്കിൽ അതു നിറയാൻ എന്തു സമയം വേണം?

**21.** ഒരു ഘനയടിക്കു് 576 പൗണ്ടു ഭാരമുള്ള ലോഹംകൊണ്ടു് ഒരു കട്ടി ഉണ്ടാക്കിയപ്പോൾ ·77 പൗണ്ടു് കൂടുതൽ ഭാരം ഉള്ളതായി കണ്ടു. ഈ കൂടുതൽ ഭാരം ഇല്ലാതാക്കുന്നതിനു് $5\frac{1}{2}''$ വൃത്തപരിധിയുള്ള ഒരു സൂചീഖാതരൂപത്തിൽ അതിൽനിന്നും ലോഹം തുരന്നെടുത്തുകളഞ്ഞാൽ ആ സൂചീഖാതത്തിൻെറ ആഴം എന്തു്?

**22.** 8″ വ്യാസമുള്ള ഗോളസ്തംഭാകാരമായ പാത്രത്തിൽ കുറെ വെള്ളം ഉണ്ടു്. 6″ വ്യാസമുള്ള ഒരു ഗോളം ഇതിൽ ഇട്ടപ്പോൾ അതിൻെറ $\frac{2}{3}$ ഭാഗം മാത്രം വെള്ളത്തിൽ മുങ്ങുന്നെങ്കിൽ ജലനിരപ്പു് എത്രയിഞ്ചു് ഉയർന്നു?

**23.** A, B എന്നിവ ഗോളസ്തംഭരൂപമുള്ള രണ്ടു പാത്രങ്ങളാണു്. A യുടെ വ്യാസത്തിൻെറ ഇരട്ടിയാണു്. B യുടെ വ്യാസം. A യുടെ ഉയരത്തിൻെറ പകുതി മാത്രമാണു് B യുടെ ഉയരം. എന്നാൽ A, B എന്നിവയുടെ ഘനഫലങ്ങൾ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

**24.** 28 അടി ആഴവും, 10 അടി വ്യാസവുമുള്ള വൃത്താകാരമായ ഒരു കിണർ കുഴിക്കുന്നതിനു് ഘനയടിക്കു് ഒരണ വീതം എന്തു ചിലവാകും? അതിനകത്തു് ചുററിനും 6″ കനത്തിൽ കല്ലു് കെട്ടുന്നെങ്കിൽ ഘനയടിക്കു് 2 ണ. വീതം കൂടുതൽ ചിലവു് എന്താകും?

**25.** ഒരു സൂചീഖാതത്തിൻെറയും, ഗോളസ്തംഭത്തിൻെറയും ആധാരത്തിനു തുല്യ ക്ഷേത്രഫലം ഉണ്ടു്. സൂചീഖാതത്തിൻെറ ഉയരം ഗോളസ്തംഭത്തിൻെറ ഇരട്ടിയാണു്. ഗോളസ്തംഭത്തിൻെറ ഘനഫലം 27 ഘ. ഇ. ആയാൽ സൂചീഖാതത്തിൻെറ ഘനഫലം കാണുക.

**26.** രണ്ടു് അററത്തും ഓരോ അർദ്ധഗോളത്തോടുകൂടിയ ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിൻെറ വ്യാസം 3 അടിയും, ആകെ നീളം 8 അ. 3 ഇ. ഞ്ചും ആയാൽ ഘനയടിക്കു് 12 അണ. നിരക്കിനു് അതിൻെറ ആകെ വില കാണുക.

**27.** 7″ വ്യാസമുള്ള ഒരു കുഴലിൽകൂടെ ഒരു മിനിട്ടിനു് 176 അടി വേഗത്തിൽ വെള്ളം ഒഴുകി 22 അടി വ്യാസമുള്ളതും ഗോളസ്തംഭരൂപമുള്ളതുമായ ഒരു പാത്രത്തിൽ വന്നു വീഴുന്നെങ്കിൽ അതിലെ ജലനിരപ്പു് 4 അ. 1 ഇ. ഉയരാൻ എന്തു സമയം വേണം?

**28.** $8\frac{3}{4}$ അ. ആരമുള്ള ഗോളസ്തംഭരൂപമായ ഒരു പാത്രത്തിൽ $5\frac{1}{4}$ അടി ആരമുള്ളതും, ഗോളസ്തംഭരൂപമായതും നിറച്ചു വെള്ളം ഉള്ളതുമായ മറെറാരു പാത്രം വച്ചിരിക്കുന്നു. ധാരയ്ക്കു് 7 അടി നീളമുള്ള ഒരു ഘനം (cube) വെള്ളമുള്ള പാത്രത്തിൽ ഇട്ടപ്പോൾ അതു മുഴുവൻ മുങ്ങുന്നു. എന്നാൽ കവിഞ്ഞൊഴുകുന്ന വെള്ളം രണ്ടു ഗോളസ്തംഭങ്ങളുടെയും ഇടയ്ക്കു് എത്ര അടി ഉയരത്തിൽ നിൽക്കും എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം. **2.** $141\frac{3}{7}$ ഘ. ഇ. **3.** $6\frac{4}{11}$ ഇ. **4.** $2\frac{1}{24}$ ഇ. **5.** ·04 ഇ. **6.** $366\frac{6}{11}$ പറ. **7.** 1:3. **8.** 3:2. **9.** 2:3. **10.** $745\frac{65}{88}$ ഘ. ഇ. **11.** 4 മ. 37 മി. 12 സെക്കൻഡ്. **12.** 740·635 ഘ. സെ. മീ. **13.** 3326·4 തോല. **14.** $5\frac{16}{21}$ ഘ. അ. **15.** 18·5 ഇ. ഏകദേശം. **16.** 45 ച. അടി ഏകദേശം. **17.** 24·58845 ച. ഇ. **18.** 200 ഘ. ഇ. **19.** ·44 ഇ. **20.** $39\frac{1}{2}$ മിനിററ്. **21.** 2·88 ഇ. **22.** $1\frac{1}{2}$ ഇ. **23** 1:2. **24.** $137\frac{1}{2}$ രൂ., $52\frac{1}{4}$ രൂ. **25.** 18 ഘ. ഇ. **26.** 153 രൂ. 13 ണ. **27.** 33 മി. **28.** 2 അ. 3 ഇ.

---

## പാഠം 10.

## ഘനമാനം—സമ്മിശ്രം.

### അഭ്യാസം 15.

**1.** 1650 ച. ഗജം വിസ്തീർണ്ണം ഉള്ള ഒരു വയൽ 2″ താഴ്ത്തി എടുത്ത മണ്ണ് നാല് തുല്യ സൂചീഘാതങ്ങളായി കൂട്ടിയിടുന്നു. സൂചീഘാതങ്ങളുടെ ആധാരത്തിന് 10 അടി ആരമായാൽ സൂചീഘാതങ്ങളുടെ ഉയരം കാണുക.

**2.** 6 അടി ആഴമുള്ള ഒരു തോടിന്റെ ഉപരിതലത്തിന് 15 അടിയും, അടിത്തട്ടിന് 10 അടിയും വീതിയുണ്ട്. ഒരു മണിക്കൂറിന് 4 മൈൽ വേഗത്തിൽ ആ തോട്ടിൽകൂടെ നിറഞ്ഞു വെള്ളം ഒഴുകുന്നെങ്കിൽ ഒരു മിനിട്ടിൽ അതിൽനിന്നും നിർഗ്ഗമിക്കുന്ന ജലത്തിന്റെ ഘനഫലം കാണുക.

**3.** അകമെ $\frac{1}{2}$″ വ്യാസമുള്ള ഒരു കുഴലിൽകൂടെ സെക്കൻഡിന് $1\frac{1}{2}$ അടി വേഗത്തിൽ വെള്ളം ഒഴുകി 5 അടി നീളം, 2 അ. 6 ഇ. വീതിയുള്ള ഒരു പാത്രത്തിൽ വീഴുന്നു. പാത്രത്തിൽ വെള്ളം 6 ഇ. ഉയരാൻ എന്തു സമയം വേണം?

**4.** സൂചീഘാതരൂപത്തിലുള്ള ഒരു പാത്രത്തിന്റെ മഹത്വം 33 ഘനഇഞ്ചാണ്. അതിന്റെ വ്യാസം 6″ ആയാൽ ആ പാത്രം നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ച. അടിക്ക് 1 രൂ. 8 ണ. വീതം എന്തു ചിലവാകും?

**5.** ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിലുള്ള ഒരു റോളറിന് $3\frac{1}{2}$ അടി നീളം ഉണ്ട്. അതിന് ഘനയടിക്ക് 12 ണ. നിരക്കിൽ 18 രൂ. 9 ണ. വിലയായാൽ റോളറിന്റെ വ്യാസം കാണുക.

**6.** 6 അടി വ്യാസവും, 30 അടി ആഴവും ഉള്ള ഒരു കിണറു കുഴിക്കേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. അതിൽ 12 അടി ആഴം വരെ കളിമണ്ണും

ബാക്കി ഭാഗം പാറയും ആണു്. കളിമണ്ണുള്ള ഭാഗത്തു് 3" കനത്തിൽ കോൺക്രീററു് ഇടണം. കളിമണ്ണു് എടുക്കുന്നതിനു് ഘനഗജത്തിനു് 4 ണ. നിരക്കാണു്. പാറയിൽ ചെയ്യേണ്ട ജോലിക്കു് ഘനഗജത്തിനു് 3 രു. 8 ണ. വീതം കൊടുക്കണം. ഘനയടിക്കു് 1 രു. 8 ണ. നിരക്കിനു് കോൺക്രീററു് ഇടുന്നു. എന്നാൽ ആകെ ചിലവു് കണക്കാക്കുക.

7. ഗോളങ്ങളുടെ ഘനഫലം അവയുടെ ആരത്തിൻെറ മൂന്നാം കൃതിക്കു ആനുപാതികമായിരിക്കുന്നു. 9", 12", 12" വീതം ആരമുള്ള മൂന്നു ലോഹഗോളങ്ങൾ കൂട്ടി ഉരുക്കി ഒരു ഗോളമാക്കിയെടുത്താൽ പുതിയ ഗോളത്തിൻെറ ആരം എന്തായിരിക്കും?

8. $1\frac{1}{2}$ അടി വ്യാസമുള്ള ഗോളസ്തംഭാകാരമായ വീപ്പയിലുള്ള മണ്ണെണ്ണയിൽ 4 ഗ്യാലൻ എടുത്തുകഴിയുമ്പോൾ അതിൽ മണ്ണെണ്ണയുടെ നിരപ്പു് എത്രമാത്രം താഴും? (ഒരു ഗ്യാലൻ = $277\frac{1}{4}$ ഘ. ഇ.)

9. $2\frac{1}{2}$" ആരമുള്ള ഒരു ലോഹഗോളത്തിൽനിന്നും $\frac{1}{2}$" ആരമുള്ള എത്ര ഗോളങ്ങൾ നിർമ്മിക്കാം?

10. സൂചീഘനാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കൂടാരത്തിൻെറ ഉന്നതി $10\frac{1}{2}$ അടിയും, ആധാരത്തിൻെറ വ്യാസം 16 അടിയും ആണു്. ഇതിൽ 8 പേർ വസിക്കുന്നെങ്കിൽ ഒരാൾക്കു് ശരാശരി എത്ര ഘനയടി സ്ഥലം (space) ഉണ്ടു്?

11. ഒരു കുഴൽകിണറിനു് 16 ഇ. ആരവും, 280 അടി ആഴവും ഉണ്ടു്. ഇതു കുഴിച്ചതിനു് ഘനയടിക്കു് 3 രു. 12 ണ, നിരക്കായിരുന്നുവെങ്കിൽ ചിലവു് എന്തായിട്ടുണ്ടു്?

12. വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു ഈയത്തകിടിനു് 8" വ്യാസവും, 2" കനവും ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിൽനിന്നും 0·05" വ്യാസമുള്ള എത്ര ഗോളങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കാം?

(ഈയം ഒട്ടുംതന്നെ നഷ്ടപ്പെടുന്നില്ലെന്നു സങ്കല്പിക്കുക.)

---

ഉത്തരം. **1.** 5 അടി $10\frac{7}{8}$ ഇ. **2.** 26400 ച. അടി **3.** 56 മിനിട്ടു് **4.** 7 ണ. 3 സ. **5.** 3 അടി **6.** 158 രു. 1 ണ. 3 സ. **7.** 16·12 ഇ. **8.** 4·356 ഇ. **9.** 125 **10.** $58\frac{3}{32}$ **11.** 5866 രു. 10 ണ. 8 സ. **12.** 192000,

## പാഠം 11.

## ചതുരശ്രഘനമാനങ്ങൾ — സമ്മിശ്രം

### അഭ്യാസം 16.

1. സമചതുരമായ ഒരു വയലിനെ ചുററി 9 അടി വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ട്. പാതയുൾപ്പെടെ വയലിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം $2\frac{1}{2}$ ഏക്കർ ആയാൽ 100 ഘനയടിക്ക് $1\frac{1}{2}$ രൂ. നിരക്കിനു് പാതയിൽ 9 ഇ. കനത്തിൽ ചരൽ വിരിക്കുന്നതിനു് എന്തു ചിലവാകും?

2. സൂചീഘാതരൂപത്തിലുള്ള ഒരു കൂടാരത്തിൻെറ തറയ്ക്കു് $201\frac{1}{7}$ ച. അടിയും, അതിൻെറ വക്രതലത്തിനു $427\frac{3}{7}$ ച. അടിയും ക്ഷേത്രഫലമുണ്ട്. ഒരാളിനു് $22\frac{6}{7}$ ഘനയടി വായുമണ്ഡലം ആവശ്യമുണ്ടെങ്കിൽ അതിൽ എത്രപേർക്കു താമസിക്കാം?

3. ആയതക്ഷേത്രരൂപത്തിലുള്ള ഒരു തോട്ടത്തിൻെറ നീളം 77 അടിയും, വീതി 56 അടിയും ആണു്. ഈ തോട്ടത്തിൽ 9 അടി ആഴവും, 44 അടി വൃത്തപരിധിയും ഉള്ള ഒരു കിണറു് കുഴിച്ചെടുക്കുന്ന മണ്ണു് തോട്ടത്തിൻെറ ബാക്കിഭാഗത്തു് ഒരേ കനത്തിൽ നിരത്തിയാൽ തോട്ടത്തിൻെറ നിരപ്പു് എന്തുമാത്രം ഉയരും?

4. താഴെപ്പറയുന്നവ കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള വാക്യങ്ങൾ എഴുതി അവയിലുള്ള ഓരോ അക്ഷരങ്ങളും എന്തിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്നു പറയുക.

(a) ഒരു മുറിയുടെ നാലു ഭിത്തികളുടെ ക്ഷേത്രഫലം. (b) ഒരു സമലംബകത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം. (c) ഒരു ഗോളത്തിൻെറ ഘനഫലം. (d) ഒരു സമത്രിഭുജത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം.

5. 500 അടി നീളവും, 30 അടി വീതിയും ഉള്ള ഒരു വയലിൽ 30 അടി നീളവും, 20 അടി വീതിയുമുള്ള ഒരു കുളം കുഴിച്ചെടുത്ത മണ്ണു് വയലിൻെറ ബാക്കിഭാഗത്തു് ഒരേ കനത്തിൽ നിരത്തിയപ്പോൾ വയലിൻെറ നിരപ്പു് 6 ഇ. ഉയർന്നാൽ കുളത്തിൻെറ ആഴം എന്തു്?

6. സൂചീഘാതരൂപത്തിലുള്ള ഒരു മണൽക്കൂനയുടെ ഉന്നതി 7 അടിയും, ആധാരത്തിൻെറ വ്യാസം 12 അടിയും ആകുന്നു. 440 വാര നീളവും, 15 അടി വീതിയുമുള്ള ഒരു പാതയിൽ ഈ മണൽ മുഴുവൻ ഒരേ കനത്തിൽ നിരത്തിയാൽ പാത എത്രയിഞ്ചു് ഉയരും?

7. അകമേ 10 ഇ. വ്യാസമുള്ള പൊള്ളയായ ഒരു അർദ്ധഗോളം ഒരിഞ്ചു് കനമുള്ള ലോഹത്തകിടുകൊണ്ടുണ്ടാക്കിയിരിക്കുന്നു. ഒരു ഘനയടി ലോഹത്തിനു് 432 റാത്തൽ ഭാരമുണ്ടായിരുന്നാൽ ഈ അർദ്ധഗോളത്തിൻെറ ഭാരം എന്തു്? അതിൻെറ ഉപരിതലങ്ങളുടെ ആകെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

8. അകമേ 10 ഇ, വ്യാസവും, 24 ഇ. ഉയരവുമുള്ള ആയതക്ഷേത്രാകാരമായ ഒരു പാത്രത്തിൽ നിറച്ച് നെല്ലിരിക്കുന്നു. ആ നെല്ല് സൂചീഘാതരൂപത്തിൽ ഇട്ടപ്പോൾ ഉന്നതി 8 ഇ. ഉണ്ടായിരുന്നാൽ അതിന്റെ ഉപരിതലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലവും ആധാരത്തിന്റെ വ്യാസവും കാണുക.

9. ഒരു ഗോളസ്തംഭരൂപത്തിന്റെ ഉന്നതി 44 ഇഞ്ചും, വ്യാസം 11·2 ഇഞ്ചും ആണ്. ഇതിനോടു തുല്യമായ ആധാരവും, ഉന്നതിയും ഉള്ള ഒരു സൂചീഘാതം ഇതിൽനിന്നു തുരന്ന് എടുത്താൽ ബാക്കി ഭാഗത്തിന്റെ ആകെയുള്ള തലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കണക്കാക്കുക.

---

ഉത്തരം. 1. 130 രു.-0-1 2. 44 3. 4 ഇ. 5. $12\frac{1}{2}$ അടി 6. ·16 ഇ. 7. $95\frac{1}{3}$ ഠ; 418 ച. ഇ. 8. $2\frac{1}{2}$ അടി; $801\frac{3}{7}$ ച. ഇ. 9. 378·75 ച. ഇ.

---

## അദ്ധ്യായം 3.

# നിക്ഷേപങ്ങൾ.

ധനം പലതരത്തിൽ മനുഷ്യർ നിക്ഷേപിക്കാറുണ്ട്. നിലം, പുരയിടങ്ങൾ, സ്വർണ്ണം, രത്നം മുതലായവ വാങ്ങിയും, ബാങ്ക്, ചിട്ടി ആദിയായവയിൽ നിക്ഷേപിച്ചും ചെലവുകഴിച്ചു ബാക്കിയുള്ള പണം പലരും സൂക്ഷിച്ചുപോരുന്നുണ്ട്. എന്നാൽ ഇവ കൂടാതെ ആധുനിക സമ്പ്രദായത്തിൽ പണം നിക്ഷേപിക്കുന്നതിന് രണ്ടു മാർഗ്ഗങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഒന്ന്, ഗവൺമെൻറു കടപ്പത്രങ്ങൾ വാങ്ങുക. രണ്ട്, കമ്പനികളിൽ ഓഹരി എടുക്കുക. ഇങ്ങനെയുള്ള നിക്ഷേപങ്ങളെപ്പററിയാണ് ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ നാം പഠിക്കുന്നത്.

### പാഠം 1.

### സ്റേറാക്ക്.

ഗവൺമെൻറ്, അതുപോലെ സുസ്ഥിരമായ മററു സ്ഥാപനങ്ങളും വമ്പിച്ച ചെലവുകൾക്കായി പണം ആവശ്യപ്പെട്ടപ്പോൾ പൊതുജനങ്ങളിൽ നിന്നു ആ തുക കടം വാങ്ങാറുണ്ട്. ഇങ്ങനെ വാങ്ങുന്ന പണത്തിന് ഒരു രേഖയായി ഗവൺമെൻറു കടപ്പത്രങ്ങൾ കൊടുക്കുന്നു. ഒരു നിശ്ചിതശതമാനം നിരക്കിൽ വർഷംതോറും പലിശ കൊടുത്തുകൊള്ളാമെന്നുള്ള കരാറിന്മേലാണ് ഇങ്ങനെ കടമെടുക്കുന്നത്. ഈ

വിധത്തിൽ ഗവൺമെൻറു വാങ്ങുന്ന പണത്തിന് സ്റേറാക്ക് എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി തിരുവിതാംകൂർ ഗവൺമെൻറ് 1956-ൽ മടക്കിക്കൊടുക്കാമെന്നുള്ള വ്യവസ്ഥയിന്മേൽ 3½% പലിശയ്ക്കു ജനങ്ങളിൽനിന്നു പണം പലിശയ്ക്കെടുത്തിട്ടുണ്ട്. ഇതിൻെറ പലിശ വർഷംതോറും കൊടുക്കാമെന്നും, കാലാവധിക്കു മുതൽമാത്രം തിരിച്ചുകൊടുക്കാമെന്നുമാണ് വ്യവസ്ഥ.

മേൽപ്പറഞ്ഞ സ്റേറാക്കിൽ 100 രൂ. ഒരാൾ നിക്ഷേപിച്ചുവെന്നിരിക്കട്ടെ. ഈ 100 രൂ. അയാൾക്കു 1956-ൽ മാത്രമേ ഗവൺമെൻറ് കൊടുക്കുകയുള്ളു. എന്നാൽ അതിനു മുമ്പു അയാൾക്ക് ഈ പണം തിരികെ കിട്ടണമെങ്കിൽ ആർക്കെങ്കിലും തൻെറ സ്റേറാക്കു വിററിട്ട് കിട്ടുന്ന പണം വാങ്ങി തൃപ്തിപ്പെടുകയേ നിവൃത്തിയുള്ളു. കമ്പോളത്തിൽ സ്റേറാക്കിന് ആവശ്യക്കാർ ധാരാളവും, വിൽക്കാനുള്ളവർ കുറവും ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ അസ്സൽവിലയായ 100 രൂപായേക്കാൾ കൂടുതൽ കിട്ടാവുന്നതും, കമ്പോളത്തിലെ സ്ഥിതി വിപരീതമായിരുന്നാൽ വില 100 രൂപായിൽ കുറഞ്ഞുപോകാവുന്നതുമാണ്.

സ്റേറാക്കിൻെറ അസ്സൽവിലയും, രൊക്കവിലയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം നന്നായി ഗ്രഹിച്ചിരിക്കേണ്ടതാണ്. മേൽപ്പറഞ്ഞ സ്റേറാക്കിൻെറ അസ്സൽവിലയായ 100 രൂ. കൊടുത്തു് ഒരാൾ 100 രൂ. സ്റേറാക്കു വാങ്ങിയെന്നിരിക്കട്ടെ. രൊക്കം 100 രൂ. കൊടുത്തതിനു പകരമായി അയാൾക്കു കിട്ടുന്നതു് 100 രൂ. സ്റേറാക്ക് അതായതു് നാമമാത്രമായി 100 രൂ. വിലയുള്ള ഒരു അവകാശം ആണ്. ഈ അവകാശം ഇന്ന് (ഇതെഴുതുന്ന സമയത്തു്) 103 രൂ. 10 ണ. യ്ക്ക് കമ്പോളത്തിൽ വിൽക്കാവുന്നതാണ്. ഈ 103 രൂ. 10 ണ. 100 രൂ. സ്റേറാക്കിൻെറ കമ്പോളവില അല്ലെങ്കിൽ രൊക്കവിലയാണ്. ഇതു 3½% സ്റേറാക്കാണെന്നു പറഞ്ഞാൽ മനസ്സിലാക്കേണ്ടതു് അസ്സൽവിലയുടെ 3½% ആദായം കിട്ടുന്ന സ്റേറാക്കാണെന്നാണ്. ആദായം കമ്പോളവിലയായ 103 രൂ. 10 ണ. യുടെ 3½% ആണെന്നു ധരിച്ചുകൂടാത്തതാകുന്നു.

സ്റേറാക്കുകളുടെ കമ്പോളവില പ്രതിദിനപ്പത്രങ്ങളിൽ പതിവായി പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്താറുണ്ട്. 1938 ഒക്ടോബർ 12-ാം തീയതിയിലെ "ഹിന്ദു" പത്രത്തിൽ താഴെക്കാണുന്ന വിവരങ്ങൾ പ്രസിദ്ധം ചെയ്തിരുന്നു.

താഴെപ്പറയുന്ന കമ്പോളവിലകൾ മദ്രാസ് സ്റേറാക്ക വ്യാപാര സംഘം റിപ്പോർട്ടു ചെയ്തിരിക്കുന്നു.

| | | |
|---|---|---|
| | | വിലനിരക്ക്. |
| 3% 1951—54 | ഇൻഡ്യാ ഗവൺമെൻറ കടപ്പത്രം | 102 ക. 2 ണ. |
| 3% 1963—65 | ഇൻഡ്യാ ഗവൺമെൻറ കടപ്പത്രം | 98 ക. 1 ണ. |
| 3% 1956—61 | മൈസൂർ കടപ്പത്രം | 100 ക. 5 ണ. |
| 3½% 1956 | തിരുവിതാംകൂർ കടപ്പത്രം | 103 ക. 10 ണ. |

കുറിപ്പ്. 1951—54 അതിന്റെ അർത്ഥം 1951 മുതൽ 1954 വരെയുള്ള കാലത്തിൽ എപ്പോഴെങ്കിലും ഗവർമെൻറ ആ കടം കൊടുത്തു വീട്ടേണ്ടതാണെന്നത്രെ. 1963—65, 1956—61 ഇവയും മേൽപ്രകാരംതന്നെ മനസ്സിലാക്കേണ്ടതാണ്. കമ്പോളവില പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതു് 100 രൂപാ സ്റേറാക്കിനാണ്.

സ്റേറാക്ക് എല്ലായ്പ്പോഴും 100 രൂപായ്ക്ക് തികച്ചു വാങ്ങണമെന്നു നിർബന്ധമില്ല. 100 രൂപായുടെ അംശങ്ങളായി എത്രയെങ്കിലും സംഖ്യയ്ക്കുള്ളതു വാങ്ങാവുന്നതാണ്.

സ്റേറാക്ക് വില്ക്കേണ്ടവരും വാങ്ങേണ്ടവരും തമ്മിൽ നേരിട്ടു കണ്ടു് കച്ചവടം നടത്തുക അത്ര പ്രായോഗികമല്ല. അതിനാൽ അവരുടെ ഇടയ്ക്ക് ഒരു മൂന്നാമൻ (മദ്ധ്യസ്ഥൻ) ആവശ്യമാണ്. വില്ക്കുന്ന ആളും വാങ്ങുന്ന ആളും വ്യാപാരം നടത്തിക്കൊടുക്കുന്നതിനു പ്രതിഫലമായി ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യ ഈ മദ്ധ്യസ്ഥനു കൊടുക്കുന്നു. ഇങ്ങനെ കൊടുക്കുന്ന സംഖ്യയ്ക്ക് ദല്ലാൾ എന്നു പറയുന്നു. പ്രധാന നഗരങ്ങളിൽ സ്റേറാക്കുദല്ലാലികൾ സംഘം ചേർന്നു നിയമങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കി അവയനുസരിച്ചു് പ്രവർത്തനം നടത്തിവരുന്നു. മദ്രാസ് സ്റേറാക്ക വ്യാപാരസംഘം ഗവൺമെൻറ് കടപ്പത്രങ്ങളുടെ വില്പനയ്ക്കു താഴെക്കാണുന്ന ദല്ലാൾ നിശ്ചയിച്ചിരിക്കുന്നു.
25,000 രൂപായോ അതിൽ കുറവോ അസ്സൽവിലയുള്ളതിന്മേൽ ½%
25,000 രൂപയ്ക്ക് മേൽ അസ്സൽവിലയുള്ളതെങ്കിൽ $\frac{1}{16}$%

സാധാരണയായി വില്ക്കുന്നവരും വാങ്ങുന്നവരും ദല്ലാൾ കൊടുക്കുന്നുണ്ടു്. ചുരുക്കം ചില അവസരങ്ങളിൽ ഒരു കക്ഷിമാത്രം കൊടുത്തുവെന്നും വരാം. $\frac{1}{8}$ ശതമാനം എന്നതു് $\frac{1}{8}$ രൂപാ, അതായതു് ഓരോ 100 രൂപാ സ്റേറാക്കിനും രണ്ടണ വീതം എന്നാണ്. മേൽപറഞ്ഞിരിക്കുന്ന കമ്പോളവിലയനുസരിച്ചു് തിരുവിതാംകൂർ 3½% കടപ്പത്രത്തിൽ 100 രൂപാ 10 അണയും ദല്ലാൾ 2 അണയും കൊടുക്കേണ്ടതും ആ സ്റേറാക്ക് വില്ക്കുന്ന ആളിനു് 103 ക. 10 ണ. യിൽനിന്നു ദല്ലാൾ 2 ണ. കുറച്ചു ബാക്കി കിട്ടുന്നതും ആകുന്നു.

## അഭ്യാസം 17.

**1.** താഴെക്കാണുന്ന സ്റേറാക്കിൽ ഓരോന്നിൽനിന്നും വർഷം തോറും എന്തു് ആദായം കിട്ടുമെന്നു് കണക്കാക്കുക.

*a*) 3% 100 രൂ. സ്റേറാക്കു് *b*) $3\frac{1}{2}$% 200 രൂ. സ്റേറാക്കു്
*c*) 4% 1000 രൂ. ,, *d*) $2\frac{1}{2}$% 550 രൂ. ,,
*e*) $3\frac{3}{4}$% 700 രൂ. ,, *f*) $3\frac{1}{2}$% 910 രൂ. ,,

**2.** താഴെക്കാണുന്ന ഓരോ ചോദ്യത്തിലും 100 രൂപാ സ്റേറാക്കിൻെറ കമ്പോളവിലയെത്ര?

കമ്പോളവില അസൽവിലയേക്കാൾ

*a*) 3 രൂ. കൂടുതൽ *b*) 5 രൂ. കൂടുതൽ
*c*) 2 രൂ കുറവു് *d*) 10 രൂ. കുറവു്

**3.** താഴെക്കാണുന്ന കമ്പോളവിലകൾ ഓരോന്നും അനുസരിച്ചു് 100 രൂ. സ്റേറാക്കിനു എന്തു വില കൊടുക്കണം?

*a*) അസ്സൽ വിലയും കമ്പോളവിലയും തുല്യം
*b*) കമ്പോളവില അസ്സൽ വിലയേക്കാൾ $2\frac{1}{2}$ രൂ. കൂടുതൽ
*c*) കമ്പോളവില അസ്സൽ വിലയേക്കാൾ 4 രൂ. കുറവു്
*d*) .... .... .... $18\frac{1}{2}$ രൂ. കുറവു്

**4.** താഴെക്കാണുന്ന സ്റേറാക്കുകൾക്കു് അവയുടെ കമ്പോളനിരക്കുകൾ അനുസരിച്ചു് എന്തു വില കൊടുക്കണം?

*a*) 100 രൂ. സ്റേറാക്കു് കമ്പോളവില 111
*b*) 200 രൂ. .... .... 113
*c*) 500 രൂ. .... .... 98
*d*) 700 രൂ. .... .... 102
*e*) 6500 രൂ. .... .... 101
*f*) 9700 രൂ. .... .... $103\frac{1}{2}$
*g*) 550 രൂ. സ്റേറാക്കു് അസ്സൽ വിലയ്ക്കു്
*h*) 800 രൂ. ....അസ്സൽ വിലയേക്കാൾ 3 രൂ. കൂടുതൽ
*i*) 980 രൂ. .... .... 5 രൂ. കുറവു്
*j*) 1000 രൂ. .... .... $3\frac{1}{2}$ രൂ. കുറവു്
*k*) 3000 രൂ. .... .... $2\frac{1}{2}$ രൂ. കുറവു്
*l*) 2500 രൂ. .... .... $2\frac{3}{4}$ രൂ. കുറവു്

**5.** *a*) 900 രൂ. രൊക്കം കൊടുത്താൽ 90 രൂ. വിലയ്ക്കു് എത്ര സ്റേറാക്കു കിട്ടും?

*b*) 714 രൂ. .... .... 102 രൂ. .... ....
*c*) 9990 രൂ. .... .... 111 രൂ. .... ....
*d*) 582 രൂ. .... .... 97 രൂ. .... ....
*e*) 749 രൂ. .... .... 107 രൂ. .... ....

f) 1111 രൂ. രൊക്കം കൊടുത്താൽ 101 രൂ. വിലയ്ക്കു് എത്ര സ്റ്റോക്ക കിട്ടും?

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| g) 1140 രൂ. | .... .... | 95 രൂ. | .... .... | | |
| h) 966 രൂ. | .... .... | 92 രൂ. | .... .... | | |
| i) 627 രൂ. | .... .... | $104\frac{1}{2}$ രൂ. | .... .... | | |
| j) $868\frac{1}{2}$ രൂ. | .... .... | $96\frac{1}{2}$ രൂ. | .... .... | | |
| k) $1436\frac{1}{2}$ രൂ. | .... .... | $110\frac{1}{2}$ രൂ. | .... .... | | |
| l) $1402\frac{1}{2}$ രൂ. | .... .... | $93\frac{1}{2}$ രൂ. | .... .... | | |

## ഉദാഹരണം 1.

5% കൊച്ചി കടപ്പത്രത്തിൽ എനിക്കു് 3500 രൂ. സ്റ്റോക്കുണ്ടു്. അതിൽനിന്നു് എന്റെ വാർഷികാദായം എന്തു്?

100 രൂ. സ്റ്റോക്കിൽനിന്നുള്ള വാർഷികാദായം = 5 രൂ.

$\therefore$ 3500 രൂ. .... .... .... $= \frac{5 \times 3500}{100}$ രൂ.

$= \underline{175}$ രൂ.

## ഉദാഹരണം 2.

4% സ്റ്റോക്കിൽ 110 രൂ. വിലയ്ക്കു് ഞാൻ 7150 രൂ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. എന്റെ വാർഷികാദായം എന്തു്?

110 രൂ. രൊക്കം കൊടുത്താൽ വാങ്ങാവുന്ന സ്റ്റോക്കു് = 100 രൂ.

$\therefore$ 7150 രൂ. .... .... .... $= \frac{7150 \times 100}{100}$ രൂ.

$= \underline{6500}$ രൂ.

100 രൂ. സ്റ്റോക്കിൽനിന്നുള്ള വാർഷികാദായം = 4 രൂ.

$\therefore$ 6500 .... .... .... $= \frac{4 \times 6500}{100}$ രൂ.

$= \underline{260}$ രൂ.

## ഉദാഹരണം 3.

110 രൂ. വിലയ്ക്കുള്ള 4% കടപ്പത്രമോ, 120 രൂ. വിലയ്ക്കുള്ള 5% കടപ്പത്രമോ ഇവയിൽ ഏതാണു് രൊക്കവിലയിന്മേൽ കൂടുതൽ ശതമാനം ആദായമുള്ളതു്?

110 രൂ. കൊടുത്താൽ 4% ആദായമുള്ള 100 രൂ. സ്റ്റോക്ക കിട്ടുന്നു

$\therefore$ രൊക്കവിലയിന്മേലുള്ള ആദായം $\frac{4 \times 100}{10} = 3\frac{7}{11}\%$

120 രൂ. കൊടുത്താൽ 5% ആദായമുള്ള 109 രൂ സ്റ്റോക്കകിട്ടുന്നു

∴ റൊക്കവിലയിന്മേലുള്ള ആദായം $= \frac{5 \times 100}{120} = 4\frac{1}{6}\%$

∴ 5% കടപ്പത്രം കൂടുതൽ ശതമാനാദായം തരുന്നു.

## അഭ്യാസം 18.

1. $3\frac{1}{2}\%$ മൈസൂർ കടപ്പത്രത്തിന്റെ റൊക്കവില അസ്സൽ വിലയേക്കാൾ $5\frac{1}{2}$ രൂ. കൂടുതലാണു്. 369 രൂ. 4 ണ. കൊടുത്താൽ ഇതിൽ എത്ര സ്റ്റോക്ക വാങ്ങാം?

2. 5% കൊച്ചി കടപ്പത്രത്തിന്റെ വില 111 ആണു്. റൊക്കവിലയിന്മേലുള്ള ആദായം എത്ര%?

3. $6\frac{1}{4}\%$ മൈസൂർ കടപ്പത്രത്തിന്റെ വില 108 രൂ. ആണു്. 783 രൂ. കൊടുത്താൽ ഇതിൽ എത്ര സ്റ്റോക്ക കിട്ടും? ഈ സ്റ്റോക്കിൽനിന്നുള്ള വാർഷികാദായം എന്തു്?

4. $3\frac{1}{2}\%$ തിരുവിതാംകൂർ കടപ്പത്രത്തിന്റെവില 104 രൂ. ആയിരുന്നപ്പോൾ ഞാൻ അതിൽ 300 രൂ. സ്റ്റോക്ക വാങ്ങി. ഞാൻ റൊക്കവില എന്തു കൊടുത്തു? എന്റെ വാർഷികാദായം എന്തു്? റൊക്കവിലയിന്മേൽ എത്ര ശതമാനം ആദായം എനിക്കു കിട്ടുന്നു?

5. ഒരാൾ 4% സ്റ്റോക്കിനു് 88 രൂ. വിലവെച്ചു 7700 രൂ. മുടക്കി. വാങ്ങിയ സ്റ്റോക്ക നാലാളുകൾക്കായി 1:2:3:4 എന്ന അനുപാതസംഖ്യയിൽ വീതിച്ചാൽ ഓരോരുത്തർക്കും കിട്ടുന്ന വാർഷികാദായം എന്തു്?

6. താഴെപ്പറയുന്ന കടപ്പത്രങ്ങളിൽ ഏതാണു് മുടക്കസംഖ്യയിന്മേൽ കൂടുതൽ ശതമാനം ആദായം തരുന്നതു്? $3\frac{1}{2}\%$ ഇൻഡ്യാഗവൺമെൻറു പത്രം 73 രൂ. 4 ണ. വിലയ്ക്കു് 4% ഇൻഡ്യാഗവൺമെൻറു് കടപ്പത്രം 84 രൂ. 12 ണ. വിലയ്ക്കു്.

7. താഴെപ്പറയുന്ന കടപ്പത്രങ്ങളിൽ ഏതിനാണു് മുടക്കസംഖ്യയിന്മേൽ ആദായശതമാനം കൂടുതലുള്ളതു്?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 3% 1941 | ഇൻഡ്യാഗവൺമെൻറു് പത്രം | കമ്പോളവില | | 102 രൂ. |
| $3\frac{1}{2}\%$ 1947 | .... | .... | .... | 106 രൂ. |
| 4% 1943 | .... | .... | .... | 108 രൂ. |

8. താഴെപ്പറയുന്ന സ്റ്റോക്കുകൾ ഓരോന്നിലും മുടക്കുമുതലിന്മേൽ എത്ര % പലിശ കിട്ടുമെന്നു് കണക്കാക്കുക. $4\frac{1}{2}\%$ പത്രം 85 രൂ. വിലയ്ക്കു്, 6% പത്രം 105 രൂ. വിലയ്ക്കു്.

9. ഒരാൾ 84 രൂ. വിലയ്ക്കു് $4\frac{1}{2}\%$ സ്റ്റോക്ക വാങ്ങി. ഇതിൽനിന്നുള്ള ആദായത്തിന്മേൽ രൂപയ്ക്കു് ഒരണ നിരക്കിൽ ആദായനികുതി കൊടുക്കേണ്ടതായുണ്ടു്, നികുതി കൊടുത്തശേഷമുള്ള ആദായം മുടക്കസംഖ്യയുടെ എത്ര ശതമാനമെന്നു് കാണുക.

**10.** ഒരാൾ 104 രൂ. 14 ണ. വിലയ്ക്കു $5\frac{1}{4}$% സ്റ്റോക്കിൽ 1500 രൂ. നിക്ഷേപിക്കുന്നു. (ദല്ലാൾ $\frac{1}{8}$) അയാൾക്കു മുടക്കുമുതലിന്മേൽ എത്ര ശതമാനം ആദായം കിട്ടുന്നു? സ്റ്റോക്കുവില വർദ്ധിച്ച് 106 രൂ. 6 ണ. ആയപ്പോൾ അയാൾ ആ സ്റ്റോക്ക് വിറ്റാൽ (ദല്ലാൾ $\frac{1}{8}$) കിട്ടുന്ന ലാഭമെന്തു്?

**11.** താഴെപ്പറയുന്ന നിക്ഷേപങ്ങളിൽ ഏതാണു് കൂടുതൽ ആദായകരം? $67\frac{1}{8}$ രൂ. വിലയ്ക്കു $3\frac{1}{2}$% ഇൻഡ്യാഗവൺമെൻറ് പത്രം, 104 രൂ. വിലയ്ക്കു $5\frac{1}{2}$% യുദ്ധകടപ്പത്രം ഇവ ഓരോന്നിലും 800 രൂ. സ്റ്റോക്കു് വേണമെങ്കിൽ രൊക്കം എന്തു കൊടുക്കണം?

**12.** 5% ഇൻഡ്യാഗവൺമെൻറു കടപ്പത്രത്തിൻെറ കമ്പോളവില 106 രൂ. ആണു്. വർഷംതോറും 500 രൂ. വീതം ആദായം കിട്ടണമെങ്കിൽ എത്ര സ്റ്റോക്കു വാങ്ങണം? അതിനു രൊക്കവില എന്തു കൊടുക്കണം?

**13.** 3% ഇൻഡ്യാഗവൺമെൻറു കടപ്പത്രത്തിൽ $104\frac{1}{4}$ രൂ. വിലയ്ക്കു് എന്തു സംഖ്യ നിക്ഷേപിച്ചാൽ വർഷംതോറും 150 രൂ. ആദായം കിട്ടും?

**14.** 1940 മൈസൂർ കടപ്പത്രത്തിൻെറ കമ്പോളവില $115\frac{1}{2}$ രൂ. ആയിരിക്കുമ്പോൾ മുടക്കുസംഖ്യയിന്മേൽ 5·4% ആദായം ഉണ്ടായിരിക്കും. എന്നാൽ സ്റ്റോക്കിന്മേൽ ഉള്ള ആദായം (ശതമാനം) എന്തു്?

**15.** 3% മദ്രാസ് കടപ്പത്രത്തിൽ 510 രൂ. നിക്ഷേപിച്ച ഒരാളിനു് വർഷംതോറും 15 രൂ. ആദായം കിട്ടുന്നു. എന്നാൽ സ്റ്റോക്കിൻെറ കമ്പോളവില കാണുക.

**16.** $6\frac{1}{4}$% മൈസൂർ കടപ്പത്രത്തിൽ $113\frac{1}{2}$ രൂ. വിലയ്ക്കു എന്തു സംഖ്യ നിക്ഷേപിച്ചാൽ $937\frac{1}{2}$ രൂ. വാർഷികാദായം ലഭിക്കും?

**17.** $4\frac{1}{2}$% കടപ്പത്രത്തിൽ 2100 രൂ. സ്റ്റോക്കുള്ള ഒരുവൻ അതു് 85 രൂ. വിലയ്ക്കു വിറ്റുകിട്ടിയ പണം 6% കടപ്പത്രത്തിൽ 105 രൂ. വിലയ്ക്കു നിക്ഷേപിച്ചു. അയാൾ വാങ്ങിയ പുതിയ സ്റ്റോക്കു് എത്ര? അയാളുടെ വാർഷികാദായത്തിൽ ഉണ്ടായ വ്യത്യാസം എന്തു്?

**18.** 6% കടപ്പത്രത്തിൽ 126 രൂ. വിലയ്ക്കു ഒരു സംഖ്യ നിക്ഷേപിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന വാർഷികാദായവും, അതേ സംഖ്യ 9% കടപ്പത്രത്തിൽ 210 രൂ. വിലയ്ക്കു നിക്ഷേപിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ആദായവും തമ്മിൽ 45 രൂ. വ്യത്യാസമുണ്ടു്. എന്നാൽ ആ സംഖ്യ എത്ര?

**19.** 3% കടപ്പത്രത്തിൽ $97\frac{1}{2}$ രൂ. വിലയ്ക്കു കുറെ പണവും, 4% പത്രത്തിൽ 125 രൂ. വിലയ്ക്കു് ഒരു തുല്യസംഖ്യയും ഒരാൾ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. ഇവ രണ്ടിൽനിന്നുമുള്ള ആദായത്തിന്മേൽ രൂപയ്ക്കു 4 സ. ആദായനികുതി കൊടുത്തശേഷം ബാക്കി 499 രൂ. 6 ണ. ഉണ്ടെങ്കിൽ അയാൾ ആകെ നിക്ഷേപിച്ച തുക എന്തു്?

20. 4% കടപ്പത്രത്തിൽ $79\frac{3}{4}$ രൂ. വിലയ്ക്കു ഒരാൾ 48,000 രൂ. നിക്ഷേപിക്കുന്നു. ഓരോ വർഷത്തിന്റെയും അവസാനത്തിൽ അയാൾക്കു കിട്ടുന്ന ആദായം ഈ കടപ്പത്രത്തിൽത്തന്നെ മുടക്കുന്നു. ഇതിന്റെ കമ്പോളവില $79\frac{3}{4}$ രൂപയിൽത്തന്നെ സ്ഥിരമായി നില്ക്കുന്നുവെങ്കിൽ മൂന്നാം വർഷത്തിന്റെ അവസാനത്തിൽ അയാൾക്കു് കിട്ടുന്ന ആദായം എന്തു്? (ദല്ലാൾ $\frac{1}{4}$)

---

ഉത്തരം. **1.** $105\frac{1}{2}$ രൂ; 350 രൂ. **2.** $4\frac{56}{111}\%$ **3.** 725 രൂ; 45 രൂ. 5 ണ. **4.** 312 രൂ; $10\frac{1}{2}$ രൂ; $3\frac{19}{52}\%$ **5.** 35 രൂ; 70 രൂ; 105 രൂ; 140 രൂ. **6.** $3\frac{1}{2}\%$ പത്രം **7.** 4% കടപ്പത്രം **8.** 5·3%; 5·7% **9.** $5\frac{5}{224}\%$ **10.** 5%; $18\frac{3}{4}$ രൂ. **11.** $5\frac{1}{2}\%$ പത്രം; 1369 രൂ. **12.** 10,000 രൂ; 10,600 രൂ. **13.** 5200 രൂ. **14.** 6·237% **15.** 102 രൂ. **16.** 17025 രൂ. **17.** 1700 രൂ; $7\frac{1}{2}$ രൂ. **18.** 9450 രൂ. **19.** 16250 രൂ. **20.** 2655 രൂ.

---

## പാഠം 2.

## ഓഹരികൾ.

പല ആളുകൾ ചേർന്നു പണം മുടക്കി നടത്തുന്ന കൂട്ടുവ്യാപാരത്തെപ്പററി നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ആധുനിക വ്യാപാരലോകത്തിൽ കമ്പനികൾ എന്ന പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്ന സ്ഥാപനങ്ങളും ഇതുപോലെ പലർ കൂടി മുതൽ മുടക്കി രൂപീകരിക്കുന്നവയാണു്. എന്നാൽ കമ്പനികളും, പങ്കുകച്ചവടവും തമ്മിൽ ഒരു വ്യത്യാസമുണ്ടു്. പങ്കുകച്ചവടത്തിൽ പങ്കുകാർ തമ്മിലുള്ള ഉടമ്പടി അനുസരിച്ചുള്ള തുകകളാണു് വ്യാപാരത്തിനു മുടക്കുന്നതു്. കമ്പനികളിൽ ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ മാനദണ്ഡമായി വച്ചിട്ടു്, ആ സംഖ്യ മുടക്കുന്ന ആളിനു് കമ്പനിയിൽ ഒരു ഓഹരി ഉള്ളതായി ഗണിക്കുന്നു. ഇങ്ങനെയുള്ള പൂർണ്ണ ഓഹരികൾ ആവശ്യമുള്ളവർക്കു വാങ്ങാവുന്നതാണു്.

ഒരു കമ്പനിക്കു 10,000 രൂ. മുതൽ ശേഖരിക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. പണം പിരിക്കുന്നതിനു മുമ്പായി ഈ പതിനായിരത്തെ ഓഹരികളായി ഭാഗിക്കുന്നു. 100 രൂ. വീതം വിലയുള്ള 100 ഓഹരികളായി ഭാഗിക്കയാണെങ്കിൽ ഒരു ഓഹരിക്കു് 100 രൂ. വീതം കൊടുത്തു കിട്ടുന്നിടത്തോളം ഓഹരികൾ ഒരാൾക്കു വാങ്ങാവുന്നതാണു്. കമ്പനിയുടെ ആദായം ഓരോ ഓഹരിക്കാരനും ഉള്ള ഓഹരികളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ അനുപാതസംഖ്യയിൽ വീതിക്കുന്നതാണു്. ഇങ്ങനെ വീതിക്കുമ്പോൾ ഓഹരിക്കാരനു കിട്ടുന്ന തുകയ്ക്കു് ആദായവീതം എന്നു പറയുന്നു.

ആദായവീതം 5 ശതമാനമെങ്കിൽ 100 രൂപാ ഓഹരിയുള്ള ഒരാൾക്കു് 5 രൂ. ലഭിക്കുന്നതായിരിക്കും.

സ്റ്റോക്കിന്റെ കാര്യത്തിലെന്നപോലെതന്നെ ഓഹരിയുടെയും കമ്പോളവില ഭേദപ്പെട്ടുകൊണ്ടിരിക്കാം. ഒരു ഓഹരി വാങ്ങിയ ആൾ പണം തിരികെ കിട്ടണമെന്നാഗ്രഹിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, ആ ഓഹരി കിട്ടുന്ന വിലയ്ക്കു ആർക്കെങ്കിലും കൊടുക്കുകയല്ലാതെ തരമില്ല. കമ്പനിയിൽനിന്നു ഓഹരിവില ഓഹരിക്കാരനു മടക്കി കൊടുക്കുകയില്ല. കമ്പനിക്കു നല്ല ആദായമോ, ശോഭനമായ ഒരു ഭാവിയോ ഉണ്ടെങ്കിൽ ഓഹരിയുടെ അസ്സൽ വിലയിൽ കൂടുതൽ കിട്ടാവുന്നതും, കമ്പനിയുടെ പ്രവർത്തനം തൃപ്തികരമല്ലെങ്കിൽ ഓഹരിവില അസ്സൽവിലയിൽ കുറഞ്ഞുപോകാവുന്നതും ആണു്.

സ്റ്റോക്കു് എല്ലായ്പോഴും 100 രൂ. തികച്ചു വാങ്ങണമെന്നു് നിർബന്ധമില്ല എന്നു മുമ്പു് പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. സൌകര്യംപോലെ ചെറിയ തുകകളായി സ്റ്റോക്കു വാങ്ങുകയും വിൽക്കുകയും ചെയ്യാം. എന്നാൽ ഓഹരിക്കൈമാററത്തിൽ ഒരു ഓഹരിയുടെ അംശങ്ങൾ വാങ്ങുവാനും, വിൽക്കുവാനും സാധിക്കയില്ല. വിൽക്കുന്ന ഓഹരികളുടെ എണ്ണം ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യയായിരിക്കേണ്ടതാണു്.

## അഭ്യാസം 19.

**1.** ഒരു കമ്പനിയുടെ മുതൽ ഒരുലക്ഷം രൂപയാണു്. കമ്പനി 10% ആദായം വീതിക്കുന്നെങ്കിൽ, ഒരു വർഷത്തിൽ ആദായമായി എന്തു തുക കമ്പനി കൊടുക്കുന്നുവെന്നു കാണുക.

**2.** ഒരു കമ്പനിയുടെ മുതൽ 50 രൂ. വീതമുള്ള 1000 ഓഹരികളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 53 രൂപയാണെങ്കിൽ കമ്പനിയുടെ മുതലിന്റെ മുഴുവൻ വില കാണുക.

**3.** ററാററാ ഇരുമ്പു വ്യവസായകമ്പനിയുടെ 75 രൂ. ഓഹരികളുടെ കമ്പോളവില 143 രൂപയാണു്. എന്നാൽ പത്തു് ഓഹരികളുടെ കമ്പോളവില എത്ര? ആ കമ്പനിയിൽ 375 രൂ. ഓഹരിക്കു് എന്തു വില കൊടുക്കണം?

**4.** നീലഗിരി തേയിലക്കമ്പനിയിൽ എനിക്കു 1600 രൂ. ഓഹരിയുണ്ടു്. ഒരു ഓഹരി 100 രൂ. യാണെങ്കിൽ എനിക്കു് എത്ര ഓഹരിയുണ്ടു്? ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 85 രൂ. യാണെങ്കിൽ എന്റെ ഓഹരികളുടെ ആകെ വിലയെന്തു്?

**5.** മധുരമിൽ 15 രൂ. ഓഹരികളിന്മേൽ 10% ആദായവീതം കൊടുക്കുന്നു. 100 ഓഹരികൾ ഉള്ള ഒരാൾക്കു എന്തു് ആദായം കിട്ടും?

**6.** പീരുമേട്ടു് തേയിലക്കമ്പനിയുടെ മുതൽ 10രൂ. ഓഹരികളായിട്ടാണു് ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നതു്. ആദായവീതം 5% ആണെങ്കിൽ 50 ഓഹരികളിന്മേൽ ഉള്ള വാർഷികാദായം എന്തു്?

7. വെസ്റ്റുകോസ്റ്റു് ഇലക്ട്റിക്കു് കമ്പനിയുടെ 10 രൂ. ഓഹരികൾ 10 രൂ. വിലയ്ക്കു വാങ്ങാനുള്ളപ്പോൾ 190 രൂ. കൊടുത്താൽ എത്ര ഓഹരികൾ കിട്ടും? ആദായവീതം ഓഹരിയൊന്നിനു 6ണ. വച്ചാണെങ്കിൽ ഈ ഓഹരികളിന്മേൽ ഉള്ള ആദായം കണക്കാക്കുക.

8. സീതാറാം മില്ലിൽ എനിക്കു ആറു് 100 രൂ. ഓഹരിയുണ്ടു്. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 34 രൂ. ആണെങ്കിൽ എന്റെ ഓഹരികളുടെ ആകെ വില കാണുക.

9. കൊച്ചി റബ്ബർകമ്പനിയുടെ 15 രൂ. ഓഹരികളുടെ കമ്പോളവില 12 രൂപയാണു്. കമ്പനി 10% ആദായവീതം കൊടുക്കുന്നെങ്കിൽ 1728 രൂ. കൊടുത്തു് ഓഹരികൾ വാങ്ങുന്ന ഒരാളിനു എന്തു് ആദായം കിട്ടും?

10. ഇൻഡ്യൻ അല്യുമിനിയം കമ്പനിയുടെ 100 രൂ. ഓഹരികളിൽ ഒരാൾ 960 രൂ. മുടക്കുന്നു. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 30 രൂപയും, ആദായവീതം $2\frac{1}{2}$ ശതമാനവും ആണെങ്കിൽ മുടക്കുമുതലിന്റെ എത്ര ശതമാനം ആദായം കിട്ടുന്നുവെന്നു കണക്കാക്കുക.

11. ബറോഡാ ബാങ്കിന്റെ 50 രൂ. ഓഹരികളുടെ കമ്പോളവില 105 രൂപയും, ആദായവീതം 10 ശതമാനവും ആണു്. 205 രൂ. ആദായം കിട്ടണമെങ്കിൽ എത്ര ഓഹരികൾ വാങ്ങണം? ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനു് മേൽകാണുന്ന വിവരങ്ങൾ എല്ലാം ആവശ്യമാണോ?

12. മദ്രാസു് ടെലിഫോൺ കമ്പനിയുടെ 10 രൂ. ഓഹരികൾ വാങ്ങുന്നതിനു് എന്റെ കൈവശം 1000 രൂ. ഉണ്ടു്. ഓഹരിയുടെ കമ്പോളവില 17 രൂ. ആണെങ്കിൽ എത്ര ഓഹരികൾ ഈ സംഖ്യകൊണ്ടു വാങ്ങാം? ഓഹരി വാങ്ങിയശേഷം ബാക്കി എന്തുണ്ടായിരിക്കും? ഉത്തരം കാണുന്നതിനു മേൽപറഞ്ഞിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ എല്ലാം ആവശ്യമാണോ?

13. ഒരു എഞ്ചിൻകമ്പനിയിൽ ഇരുപതു് 50 രൂ. ഓഹരികൾ ഉള്ള ഒരാൾ 55 രൂ വിലയ്ക്കു് ആ ഓഹരികൾ വിററുകിട്ടിയ പണംകൊണ്ടു് 110 രൂ. വിലയുള്ള $7\frac{1}{2}\%$ സ്റേറാക്കു വാങ്ങുന്നു. കമ്പനിയുടെ ആദായവീതം 6% ആണെങ്കിൽ അയാളുടെ വാർഷികാദായത്തിൽ എന്തു വ്യത്യാസമുണ്ടാകും?

14. ഒരാൾ 1482 രൂ. കൊടുത്തു് റിസർവ്വു് ബാങ്കിന്റെ ഓഹരികൾ 114 രൂ. വിലയ്ക്കു വാങ്ങിയശേഷം ആ ഓഹരികൾ 115 രൂ. വിലയ്ക്കു വിൽക്കുന്നു. അയാളുടെ ലാഭം എത്ര ശതമാനമെന്നു കാണുക.

15. ഒരു കമ്പനി 100 രൂ. ഓഹരികളിന്മേൽ $5\frac{1}{2}\%$ ആദായവും, വേറൊരു കമ്പനി 10 രൂ. ഓഹരികളിന്മേൽ $3\frac{1}{2}\%$ ആദായവും കൊടുക്കുന്നു. ഒന്നാമത്തേതിന്റെ കമ്പോളവില 115 രൂ. 8 ണ. യും,

രണ്ടാമത്തേതിന്റെ വില 7 രൂ. 12 ണ. യും ആണെങ്കിൽ മുടക്കുസംഖ്യയിന്മേൽ ഇവ രണ്ടിലും കിട്ടുന്ന പലിശനിരക്ക് താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

---

ഉത്തരം. **1.** 10,000 രൂ. **2.** 53,000 രൂ. **3.** 1430 രൂ. 715 രൂ. **4.** 16; 1360 രൂ. **5.** 150 രൂ. **6.** 25 രൂ. **7.** 197 രൂ. 2 ണ. **8.** 204 രൂ. **9.** 216 രൂ. **10.** $8\frac{1}{3}\%$ **11.** 41; അല്ല. **12,** 58; 14 രൂ. അല്ല. **13.** 15 രൂ. വർദ്ധനവ് **14.** $\frac{50}{57}\%$ **15.** 155:147

---

## അഭ്യാസം 20.

**1.** ഇമ്പീരിയൽബാങ്കിന്റെ 500 രൂ. ഓഹരികളുടെ വില 1540 രൂ. ആയിരിക്കുമ്പോൾ 16940 രൂ. രൊക്കം കൊടുത്താൽ എത്ര ഓഹരികൾ വാങ്ങാം?

**2.** സെൻട്രൽ ബാങ്കിന്റെ 25 രൂ. ഓഹരികൾ 35 രൂ. വിലയ്ക്ക് കിട്ടുമ്പോൾ 245 രൂ. കൊടുത്താൽ എത്ര ഓഹരികൾ വാങ്ങാം? വാങ്ങിയശേഷം ആ ഓഹരികൾ 36 രൂ. വിലയ്ക്കു വിററാൽ എന്തു സംഖ്യ കിട്ടും?

**3.** ഒരു ലക്ഷം രൂ. മുതൽ 1000 ഓഹരികളായി ഭാഗിച്ചാൽ ഒരു ഓഹരിയുടെ അസ്സൽ വിലയെന്ത്? ഓഹരിഒന്നിന് കമ്പോള വില $103\frac{1}{2}$ രൂ. യാണെങ്കിൽ മുതലിന്റെ ആകെ വിലയെന്ത്?

**4.** മൈസൂർ പഞ്ചസാരക്കമ്പനിയുടെ 10 രൂ. ഓഹരികളുടെ കമ്പോളവില 27 രൂ. യും, കമ്പനി കൊടുക്കുന്ന ആദായവീതം 11 ശതമാനവും ആണ്. $27\frac{1}{2}$ രൂ. ആദായം കിട്ടുന്നതിന് ഈ ഓഹരികളിൽ എന്തു സംഖ്യ മുടക്കണം?

**5.** ബാങ്ക് ഓഫ് ഇൻഡ്യയുടെ 50 രൂ. ഓഹരികളുടെ കമ്പോളവില 130 രൂ. യാണ്. ഈ ബാങ്ക് എത്ര % ആദായവീതം കൊടുത്താൽ ഒരു നിക്ഷേപകന് അയാളുടെ മുടക്കുസംഖ്യയിന്മേൽ 4% പലിശ കിട്ടും?

**6.** മൈസൂർബാങ്കിന്റെ 100 രൂ. ഓഹരികളുടെ വില 286 രൂപയും ബാങ്ക് കൊടുക്കുന്ന ആദായവീതം 14 ശതമാനവും ആകുന്നു. എന്നാൽ ഈ ഓഹരികളിൽ പണം നിക്ഷേപിക്കുന്ന ഒരാൾക്ക് മുടക്കുസംഖ്യയിന്മേൽ എത്ര ശതമാനം കിട്ടുമെന്നു കാണുക,

**7.** താഴെപ്പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് കൂടുതൽ ആദായകരം? 90 രൂ. വിലയ്ക്കുള്ള $4\frac{1}{2}\%$ ഗവൺമെന്റു കടപ്പത്രം, $112\frac{1}{2}$ രൂ. വിലയ്ക്കുള്ള മദ്രാസ് റെയിൽവേയുടെ 6% ആദായമുള്ള 100 രൂ. ഓഹരികൾ.

**8.** താഴെപ്പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് കൂടുതൽ ആദായകരം? 96 രൂ. വിലയ്ക്കുള്ള $3\frac{1}{2}$% സ്റേറാക്ക്, $10\frac{1}{2}$% ആദായവീതം കൊടുക്കുന്ന ഒരു കമ്പനിയുടെ 1425 രൂ. വിലയ്ക്കുള്ള 500 രൂ. ഓഹരികൾ.

**9.** 3% പലിശയ്ക്കു നിക്ഷേപിച്ചിരുന്ന 3520 രൂ. എടുത്ത് ഒരാൾ 40 രൂ. വിലയ്ക്കുള്ള 50 രൂ. ഓഹരികൾ വാങ്ങി. ഓഹരികളിന്മേൽ ആദായവീതം $2\frac{1}{2}$% ആണെങ്കിൽ അയാളുടെ വാർഷികാദായത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന വ്യത്യാസം കാണുക.

**10.** 5000 രൂപയ്ക്കുള്ള തിരുവിതാംകൂർ ഗവൺമെൻറു 5% ഡിബഞ്ചൂവർ കടപ്പത്രം ഒരാൾ അസ്സൽവിലയ്ക്കു വിററുകിട്ടിയ പണം 7% മൈസൂർ ഗവൺമെൻറു കടപ്പത്രത്തിൽ 105 രൂ. വിലയ്ക്കു നിക്ഷേപിച്ചാൽ അയാളുടെ വാർഷികാദായത്തിൽ എന്തു വ്യത്യാസം ഉണ്ടാകുമെന്നു കാണുക.

**11.** 125 രൂ. വിലയ്ക്കുള്ള 4% സ്റേറാക്കിൽ ഒരു സംഖ്യ നിക്ഷേപിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ആദായം അതേസംഖ്യ 88 രൂ. വിലയ്ക്കുള്ള $2\frac{3}{4}$% സ്റേറാക്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചാൽ കിട്ടുന്നതിനേക്കാൾ 9 രൂ. 6 ണ. കൂടുതലാണ്. എന്നാൽ ആ സംഖ്യയെന്ത്?

**12.** 85 രൂ. വിലയ്ക്ക് 45,600 രൂ. യുടെ സ്റേറാക്ക് ($2\frac{1}{2}$ ശതമാനം) ഒരാൾ വിററുകിട്ടിയ പണം 114 രൂ. വിലയ്ക്കുള്ള 4 ശതമാനം സ്റേറാക്കിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. ആദായനികുതി (രണ്ടിലും ഒരേ നിരക്കിൽത്തന്നെ) കൊടുത്തശേഷം ബാക്കി ഇപ്പോൾ ഉള്ള സംഖ്യ മുമ്പുകിട്ടിക്കൊണ്ടിരുന്ന ബാക്കിയേക്കാൾ 215 രൂ. 6 ണ. 8 പൈ. കൂടുതലാണെങ്കിൽ, ആദായനികുതി രൂപയ്ക്കെത്രയെന്നു കാണുക.

**13.** എനിക്കു വർഷംതോറും 300 രൂ. ആദായം ലഭിക്കുന്ന 3% സ്റേറാക്കുണ്ട്. അതിൻെറ പകുതി 92 രൂ. വിലയ്ക്കു വിററുകിട്ടിയ പണം റയിൽവേ ഓഹരികളിൽ 46 രൂ. വിലയ്ക്കു നിക്ഷേപിച്ചു. ഇതുമൂലം എൻെറ വാർഷികാദായം 50 രൂ വർദ്ധിക്കണമെങ്കിൽ റയിൽവേ ഓഹരികളിന്മേൽ എത്ര ശതമാനം ആദായവീതം ലഭിക്കണം?

---

ഉത്തരം. **1.** 5500 രൂ. **2.** 7;252 രൂ. **3.** 100രൂ. 103,500 രൂ. **4.** 675 രൂ. **5.** $10\frac{2}{5}$% **6.** 4·9% ഏകദേശം. **7.** 6% ഓഹരികൾ. **8.** 500 രൂ. ഓഹരികൾ. **9.** $4\frac{2}{5}$ രൂ. വർദ്ധനവ്. **10.** $83\frac{1}{3}$ രൂ. വർദ്ധനവ്. **11.** 12,500 രൂ. **12.** രൂപയ്ക്ക് 4 പൈ. **13.** 2%.

## പാഠം 3.

# കമ്പനികളുടെ രൂപീകരണവും പ്രവർത്തനവും.

കമ്പനികളുടെ ആവശ്യം:—

ആധുനിക വ്യാപാരരീതികൾ നടപ്പിൽ വരുന്നതിനു മുമ്പ്, വ്യവസായങ്ങൾ നടത്തിക്കൊണ്ടിരുന്നതു് ഒന്നുകിൽ വ്യക്തികളോ അല്ലെങ്കിൽ പ്രത്യേക വ്യവസ്ഥകളിന്മേൽ സംഘടിച്ച പങ്കുകാരോ ആണു്. എന്നാൽ ഇങ്ങനെയുള്ളവരുടെ കഴിവുകൾ സാധാരണയായി പരിമിതമായതിനാൽ വളരെ വമ്പിച്ചവയും, ചിലപ്പോൾ സാഹസികവുമായ വ്യവസായസംരംഭങ്ങളിൽ ഇവർ ഏർപ്പെടുന്നതു് അപൂർവ്വമായിട്ടത്രെ. അനുദിനം പുരോഗമിച്ചുകൊണ്ടിരുന്ന വ്യവസായപദ്ധതികൾക്കു് വളരെ വലിയ സംഖ്യകൾ മുടക്കേണ്ടതായി വന്നുകൂടിയപ്പോൾ കുറച്ചുപേർ മാത്രം ഉൾപ്പെട്ട പങ്കുവ്യാപാരത്തിന്റെ സീമകളെ അതിലംഘിച്ചു രാജ്യവ്യാപകമായ ഒരു സാമ്പത്തിക പരിശ്രമമെന്നോണം പഴയ പരിമിതവ്യാപാരങ്ങൾ വികസിക്കയോ, പുതിയ സ്ഥാപനങ്ങൾ രൂപമെടുക്കുകയോ ചെയ്യേണ്ടതു് അനിർവാര്യമായിത്തീർന്നു. അനവധി ആളുകൾ സഹകരിച്ചു പ്രവർത്തിക്കുമ്പോൾ ഒരു വലിയ മൂലധനം ഉണ്ടാക്കുവാൻ സാധിക്കുമെന്നു മാത്രമല്ല, വ്യാപാരത്തിൽ ഉണ്ടായേക്കാവുന്ന നഷ്ടം ചുരുക്കം ചില വ്യക്തികളെ മാത്രം സാരമായി സ്പർശിക്കാതെ അസംഖ്യം ആളുകൾക്കായി വിഭജിക്കപ്പെട്ടു പോകുകയും ചെയ്യും. ഇപ്രകാരം ആവിർഭവിച്ച ഒരു നവീന വ്യവസ്ഥിതിയിൽ ലോകത്തിലെ സാമ്പത്തിക സാദ്ധ്യതകളെ പൂർവ്വാധികം വർദ്ധിപ്പിക്കയും, പൊതുജന സഹകരണംകൊണ്ടും, തന്മൂലം ഉണ്ടായ സമാന്യ ധനശക്തികൊണ്ടും വൻതോതിൽ പ്രവർത്തനം നടത്തുകയും ചെയ്യുന്ന മഹത്സ്ഥാപനങ്ങളാണു് ഇന്നു നാം ലോകത്തിൽ കാണുന്ന പ്രധാന കമ്പനികൾ. എന്നാൽ ഏററം ചുരുങ്ങിയ തോതിലുള്ള വ്യാപാരങ്ങളും കമ്പനിയായി നടത്തുന്നതുകൊണ്ടു് ചില പ്രയോജനങ്ങൾ ഉള്ളതിനാൽ, അവയും കമ്പനിരൂപത്തിൽ പ്രവർത്തിക്കുക സർവ്വസാധാരണമായിത്തീർന്നിട്ടുണ്ടു്. ഇങ്ങനെയുള്ള സ്ഥാപനങ്ങളെപ്പററിയാണു് ഈ പാഠത്തിൽ നാം പഠിക്കുന്നതു്.

ഏകീകരണം:— കമ്പനി ഉണ്ടാക്കുന്ന കാര്യത്തിൽ താൽപര്യമുള്ളവർ അതിന്റെ പ്രാരംഭപ്രവർത്തകർ എന്ന നിലയിൽ ഒരു പ്രകടനപ്പത്രിക (prospectus) തയ്യാറാക്കുന്നു. ഈ പത്രികയിൽ കമ്പനി ചെയ്യുവാനുദ്ദേശിക്കുന്ന കാര്യങ്ങൾ അതിന്റെ വിജയത്തിനുള്ള സാദ്ധ്യതകൾ, മൂലധനം, ഓഹരി മുതലായവയെപ്പററിയുള്ള വിവരങ്ങൾ, പ്രാരംഭപ്രവർത്തകരുടെ പേരുകൾ, അവരുടെ താൽപ്പര്യങ്ങൾ എന്നിങ്ങനെ കമ്പനിയിൽ ഓഹരി എടുക്കുന്നവർ അവശ്യം അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ട എല്ലാ കാര്യങ്ങളെപ്പററിയും പ്രതിപാദിച്ചിരിക്കും.

ഇതിനും പുറമെ memorandum, articles of association എന്നു പേരായി രണ്ടു പ്രമാണങ്ങളും ഇവർ എഴുതിയുണ്ടാക്കും. ഇവയിൽ കമ്പനിയുടെ സംഘടനയും പ്രവർത്തനവും സംബന്ധിച്ച വിശദവും അധികൃതവുമായ വ്യവസ്ഥകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. ഈ പ്രമാണങ്ങൾ ജോയിൻറ്സ്റ്റോക്കു് രജിസ്ത്രാരുടെ പക്കൽ സമർപ്പിച്ചു രജിസ്റ്റർ ചെയ്യുന്നതിനുള്ള ഫീസു് അടയ്ക്കുമ്പോൾ കമ്പനി ഔദ്യോഗികമായി നിലവിൽ വന്നു എന്നു പ്രഖ്യാപനം ചെയ്യുന്ന ഒരു രേഖ, ഏകീകരണസർട്ടിഫിക്കറ്റു് (certificate of incorpor-atian) രജിസ്ത്രാർ പുറപ്പെടുവിക്കും. ഇതോടുകൂടി കമ്പനി നിയമപരമായി സാധുവായ ഒരു സ്ഥാപനമായിത്തീരുന്നു.

ക്ലിപ്തക്കമ്പനികൾ:—ക്ലിപ്തക്കമ്പനികൾ, ക്ലിപ്തമല്ലാത്ത കമ്പനികൾ എന്നിങ്ങനെ രണ്ടു വിധത്തിൽ കമ്പനികളെ തരംതിരിക്കാറുണ്ടു്. ഇവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ഒരുദാഹരണംകൊണ്ടു് വ്യക്തമാക്കാം. പത്തു രൂപാവീതം വിലയുള്ള ഓഹരികളായി മൂലധനം ശേഖരിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു കമ്പനിക്കു് മുതലിൽ കൂടുതൽ കടം വന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. കമ്പനി ക്ലിപ്തമാണെങ്കിൽ ഓഹരി ഒന്നിനു പത്തുരൂപാവീതം കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓഹരിക്കാരൻ ഈ കൂടുതൽ കടത്തിനു് ഉത്തരവാദിയല്ല. കമ്പനി ക്ലിപ്തമല്ലെങ്കിൽ ഓഹരിക്കാർ ആ കടത്തിനു മുഴുവൻ ഉത്തരവാദികളായിരിക്കും. കമ്പനിയെ സംബന്ധിച്ച ക്ലിപ്തം എന്നു പറയുന്നതിന്റെ അർത്ഥം കമ്പനിയുടെ (ഓഹരിക്കാരുടെ) ബാദ്ധ്യത ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു എന്നത്രെ.

ഭരണം:— കമ്പനിയുടെ ദൈനംദിനമുള്ള കാര്യങ്ങൾ നിർവ്വഹിക്കുന്നതു് അതിലേക്കു് പ്രത്യേകം നിയമിക്കപ്പെടുന്ന ഉദ്യോഗസ്ഥന്മാർ മുഖാന്തിരമാണു്. ഈ ഉദ്യോഗസ്ഥന്മാരെ നിയമിക്കുന്നതും, നിയന്ത്രിക്കുന്നതും കമ്പനിയുടെ പ്രവർത്തനരീതികളെ പൊതുവെ സ്പർശിക്കുന്ന എല്ലാ കാര്യങ്ങളും തീരുമാനിക്കുന്നതും, തിരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട ഒരു നായകസമിതി (board of directors) ആണു്. കമ്പനിയുടെ ഘടനാവ്യവസ്ഥകളിൽ ഈ നായകന്മാരുടെ യോഗ്യത, അധികാരപരിധി, പ്രവർത്തനകാലം ആദിയായ സംഗതികൾ പ്രസ്താവിച്ചിട്ടുണ്ടു്. നായകന്മാർ മിക്കവാറും ഇതരജോലികളിൽ ഏർപ്പെട്ടിരിക്കുന്നവരാകയാൽ അവരുടെ സമയം മുഴുവൻ കമ്പനിക്കുവേണ്ടി ചെലവഴിക്കുക സാധാരണയല്ല. ആയതിനാൽ അവരിൽ ഒരാളെത്തന്നെയോ, പുറമേനിന്നു് ആരെയെങ്കിലുമോ കമ്പനിയുടെ മാനേജരായി നിയമിക്കും. ഈ മാനേജർ ഭരണം നടത്തുകയും കമ്പനിവക എല്ലാം കാര്യങ്ങളിലും നായകന്മാരോടു് ഉത്തരവാദിത്വമുള്ളവനായിരിക്കുകയും ചെയ്യും. നായകന്മാർ ആവശ്യാനുസരണം യോഗംകൂടി നിശ്ചയിച്ചാണു് ഭരണം നടത്തുന്നതു്. അവരുടെ സേവനത്തിനു് ശമ്പളം കൊടുക്കുക എന്നൊരു പതിവില്ല. എന്നാൽ അവർ യോഗത്തിനു് ഹാജരാകുന്നെങ്കിൽ അതിനുവേണ്ടി ഒരു സംഖ്യ കമ്പനിയിൽനിന്നു

കൊടുക്കാറുണ്ടു്. നായകന്മാർ കമ്പനിയെ ഭരിക്കുന്നുണ്ടെങ്കിലും കമ്പനിയെ സംബന്ധിച്ച പരമാധികാരം ഓഹരിക്കാർക്കാണു്. ഭരണഘടനയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നതനുസരിച്ചു് നിയമപ്രകാരം സാധുവായ രീതിയിൽ വിളിച്ചുകൂട്ടുന്ന (ഓഹരിക്കാരുടെ) പൊതുയോഗമാണു് സർവ്വകാര്യങ്ങളും അന്തിമമായി തീരുമാനിക്കുകയോ അംഗീകരിക്കുകയോ ചെയ്യുന്നതു്. ഈ പൊതുയോഗത്തിനു് നായകന്മാരെ നിയമിക്കുവാനും, നീക്കുവാനും, നായകന്മാരുടെ തീരുമാനത്തെ ഭേദപ്പെടുത്തുവാനും, എന്നല്ല കമ്പനിയെത്തന്നെ ഇല്ലാതാക്കുവാൻപോലും അധികാരമുണ്ടു്. വാർഷികമായി കൂടുന്ന ഈ പൊതുയോഗത്തിനും പുറമെ തക്കതായ ആവശ്യമുണ്ടെങ്കിൽ ഒരു അസാധാരണ (extra ordinary) പൊതുയോഗം വിളിച്ചുകൂട്ടാവുന്നതാണു്.

മൂലധനം:— കമ്പനി റജിസ്റ്ററർ ചെയ്യുന്ന സമയത്തു് അതിന്റെ മുതൽ ആയി ഒരു തുക നിശ്ചയിച്ചിരിക്കും. ഈ സംഖ്യയ്ക്കു അധികൃത (authorized) മൂലധനം എന്നു പറയുന്നു. അധികൃതമൂലധനം ഓഹരികളായി വീതിച്ചിരിക്കും. കമ്പനി തുടങ്ങുമ്പോൾ ഈ ഓഹരികൾ മുഴുവൻ പൊതുജനങ്ങൾക്കു കൊടുക്കണമെന്നില്ല. അവയിൽ യുക്തമെന്നു തോന്നുന്നിടത്തോളം ഓഹരികൾ വില്ക്കണമെന്നു നിശ്ചയിച്ചശേഷം ആവശ്യക്കാരുടെ പക്കൽനിന്നു അപേക്ഷകൾ ക്ഷണിക്കുകയും, വില്ക്കേണ്ട ഓഹരികൾ ഈ അപേക്ഷകർക്കായി വീതിച്ചുകൊടുക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇങ്ങനെ വീതിച്ചുകൊടുക്കുന്ന ഓഹരികളുടെ ആകെവിലയ്ക്കു വാഗ്ദത്തമൂലധനമെന്നു പറയുന്നു. ഈ ഓഹരികളുടെ വില പലതവണയായി വാങ്ങുകയാണു് പതിവു്. ഓഹരിയൊന്നിനു് നിശ്ചയിച്ചിരിക്കുന്ന വിലയുടെ ഒരു ഭാഗം അപേക്ഷയോടുകൂടെയും, വേറൊരു ഭാഗം അപേക്ഷ സ്വീകരിച്ചു് ഓഹരി വീതിക്കുന്ന സമയത്തും ശേഷം സംഖ്യ ഒന്നോ, അതിൽകൂടുതലൊ തവണകളായും കൊടുക്കേണ്ടതാണു്. ചിലപ്പോൾ ഓഹരിവില മുഴുവൻ പിരിച്ചെടുക്കേണ്ട ആവശ്യം ഇല്ലാതെ വരാം. അങ്ങനെയെങ്കിൽ ഓഹരിവിലയിൽ റൊക്കം അടച്ചുതു കഴിഞ്ഞുള്ള ബാക്കി ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ കൊടുക്കേണ്ട ഒരു കടം എന്ന നിലയിൽ ഓഹരിക്കാരന്റെ പക്കൽ നിർത്തിയേക്കും. ഈ ബാക്കിക്കു് റിസർവ്വ് ബാദ്ധ്യതയെന്നും, റൊക്കം പിരിച്ചെടുത്ത തുകയ്ക്കു നിക്ഷിപ്തമൂലധനം (paid up capital) എന്നും പറഞ്ഞുവരുന്നു. കമ്പനിയുടെ നിശ്ചയപ്രകാരം ഉള്ള സംഖ്യ കൊടുത്തുകഴിഞ്ഞാൽ ഓഹരിക്കാരനു് ഒരു ഓഹരി സർട്ടിഫിക്കററു് കമ്പനിയിൽനിന്നും കൊടുക്കുന്നതായിരിക്കും. അതിൽ അയാൾക്കുള്ള ഓഹരികൾ എത്രയെന്നും, ഓഹരികളെപ്പററിയുള്ള മററു വിവരങ്ങളും ഉണ്ടായിരിക്കും.

ഡിബെഞ്ചുവർ പത്രങ്ങൾ:— മൂലധനത്തിനു പുറമെ ഡിബെഞ്ചുവർ പത്രങ്ങൾ പുറപ്പെടുവിച്ചു അതിന്മേൽ പൊതുജനങ്ങളിൽ നിന്നും കമ്പനിക്കു ധനശേഖരം ചെയ്യാവുന്നതാണു്. ഡിബെഞ്ചുവർ പത്രം വാങ്ങുന്ന ആളിനു അയാൾ മുടക്കിയ തുകയിന്മേൽ ഒരു നിശ്ചിത

പലിശ കിട്ടും. ഏതെങ്കിലും കാരണത്താൽ കമ്പനിപ്രവർത്തനം നിന്നുപോയാൽ കമ്പനിവക സ്വത്തുക്കൾ ജപ്തിചെയ്തു അവയിൽനിന്നും ഡിബഞ്ചുവറിൽ മുടക്കിയ തുക ഈടാക്കാവുന്നതാണു്.

ഓഹരികൾ:— ഓഹരികളെ അവയിൽനിന്നു കിട്ടുന്ന ആദായത്തിന്റെ രീതി അനുസരിച്ചു് മൂന്നായി തരം തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. കമ്പനിയുടെ വാർഷികാദായത്തിൽ നിന്നു മൂലധനത്തിന്റെ ഒരു നിശ്ചിതശതമാനം കൊടുത്തുകൊള്ളാമെന്നുള്ള കരാറിന്മേൽ എടുക്കുന്ന ഓഹരികൾക്കു് പ്രിഫറൻസ്സ് ഓഹരികൾ എന്നും, പ്രത്യേക വ്യവസ്ഥയൊന്നുമില്ലാത്ത ഓഹരികൾക്കു് സാധാരണ ഓഹരികൾ എന്നും പറയുന്നു. ഈ ഓഹരികൾ രണ്ടിന്മേലും ഉള്ള ആദായം കൊടുത്തുകഴിഞ്ഞു് ആദായത്തിൽ ബാക്കി ഉണ്ടെങ്കിൽ കൊടുക്കാമെന്നുള്ള കരാറിന്മേൽ എടുക്കുന്ന ഓഹരികൾക്കു് ഡിഫർഡ് ഓഹരികൾ എന്നാണു പറഞ്ഞുവരുന്നതു്. ആദായം നിർണ്ണയിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ ഡിബഞ്ചുവറിന്മേലുള്ള പലിശയും, പ്രിഫറൻസ്സ് ഓഹരികളിന്മേലുള്ള ആദായവും ആണു് ആദ്യം കൊടുക്കുന്നതു്. അതുകഴിഞ്ഞു് ശേഷിക്കുന്ന തുകയിൽനിന്നു് കമ്പനി അപ്പോഴപ്പോൾ നിശ്ചയിക്കുന്ന നിരക്കിൽ സാധാരണ ഓഹരികളിന്മേലുള്ള ആദായവും, പിന്നീടുള്ള ബാക്കിയിൽനിന്നു് ഡിഫർഡ് ഓഹരികളിന്മേൽ ഉള്ള ആദായവും കൊടുക്കുന്നു. വാർഷികാദായത്തിന്റെ ഒരംശം ആണ്ടുതോറും റിസർവ്വ് ഫണ്ട് എന്നറിയപ്പെടുന്ന ഒരു നിധിയിൽ ചേർത്തു് സൂക്ഷിക്കാറുണ്ടു്. ഈ നിധി കമ്പനിയുടെ സാമ്പത്തികഭദ്രതയെ സുരക്ഷിതമാക്കുന്നതിന്നു് സഹായിക്കുന്നു.

ഓരോ വർഷത്തിന്റെയോ, അർദ്ധവർഷത്തിന്റെയോ അവസാനത്തിൽ ആ കാലത്തേക്കുള്ള വരവുചെലവിനങ്ങളുടെ ആകെത്തുകകൾ കണക്കാക്കി അവയിൽനിന്നും ലാഭനഷ്ടക്കണക്കു് തയ്യാറാക്കുന്നു. ഇതോടുകൂടിത്തന്നെ കമ്പനിയുടെ അന്നത്തെ നില കാണിക്കുന്ന ബാക്കിപ്പത്രവും എഴുതിയുണ്ടാക്കുന്നു. ബാക്കിപ്പത്രത്തിൽ കമ്പനിയുടെ മൂലധനം, ബാദ്ധ്യതകൾ, സ്ഥാവരജംഗമസ്വത്തുക്കൾ, പിരിഞ്ഞുകിട്ടേണ്ട ഇനങ്ങൾ, രൊക്കം നീക്കിയിരിപ്പു് മുതലായ സംഖ്യകൾ കാണിച്ചിരിക്കും. കമ്പനിയുടെ സാമ്പത്തികനില എങ്ങനെയിരിക്കുന്നു എന്നു കാണിക്കുന്ന പ്രധാന പ്രമാണമാണു് ബാക്കിപ്പത്രം.

ഓഹരി കൈമാററം:— ഓഹരികൾ വില്ക്കുകയും, വാങ്ങുകയും ചെയ്യുന്നതു് സാധാരണയായി ദല്ലാലികൾ വഴിയായിട്ടാണു്. കച്ചവടം നടത്തിത്തരുന്നതിനു് പ്രതിഫലമായി വില്ക്കുന്നവരും, വാങ്ങുന്നവരും ദല്ലാൽ കൊടുക്കുന്നു. ഓഹരികൾ വില്ക്കുവാനുള്ള ആൾ അയാളുടെ ഓഹരിസർട്ടിഫിക്കററും ഒരു കൈമാററപ്പത്രവും ദല്ലാലിയുടെ പേർക്കു അയയ്ക്കുന്നു. ആ ഓഹരി ആവശ്യമുള്ള ഒരാളെ ദല്ലാലി കണ്ടുപിടിച്ചു് അയാളെക്കൊണ്ടു് ഓഹരിയുടെ വില കൊടു

പ്പിക്കുകയും, കമ്പനിയുടെ റിക്കാർട്ടുകളിൽ ഈ കൈമാററം രേഖപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്യുന്നു.

കമ്പോളം:— ഓഹരികളുടെ വില ആഴ്ചതോറും ദല്ലാലികൾ പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തുന്ന വിലവിവരപ്പട്ടികയിൽ നിന്നും, പ്രതിദിനപ്പത്രങ്ങളിൽ നിന്നും നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്. ഒരിക്കൽ ഹിന്ദു പത്രം പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയിരുന്ന ഒരു പട്ടികയിൽ നിന്ന് ചില ഭാഗങ്ങൾ താഴെ ഉദ്ധരിച്ചിരിക്കുന്നു.

| ഓഹരി (paid up) | ആദായ വീതം | കമ്പനികൾ | കമ്പോളവില | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Rs. | % | | Rs. | as. | |
| 100 | 7 | മൈസൂർബാങ്ക് | 285 | | int. div. |
| 25 | 3 | സെൻട്രൽബാങ്ക് | 30 | | do. |
| 500 | 6 | ഇമ്പീരിയൽബാങ്ക് | 1550 | | do. |
| 10 | nil | തിരുവിതാംകൂർ റബ്ബർ | 3 | 14 | |
| 22½ | 6¼ | ട്രോപ്പിക്കൽ പ്ലാന്റേഷൻസ് | 13 | | |
| 10 | new | മൈസൂർപേപ്പർമിത്സ് | 10 | 10 | |
| 10 | 10 | ഹൈലാൻഡ് പ്രൊഡ്യൂസ് | 20 | | cum-div. |
| 10 | 20 | പീരുമേട് തേയില | 23 | | ex-div. |
| 30 | nil | മലങ്കര | 35 | | |

ഇവിടെ ഒന്നാം കോളത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്നത് ഓഹരി ഒന്നിനു അടച്ചിട്ടുള്ള അസ്സൽ വിലയാണ്. ഇതും, കമ്പോളവിലയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എന്തെന്നു നന്നായി മനസ്സിലാക്കിയിരിക്കണം. രണ്ടാമത്തെ കോളത്തിൽ വർഷംതോറും കമ്പനി ഓഹരികളിന്മേൽ കൊടുത്തുകൊണ്ടിരിക്കുന്ന ആദായവീതം ശതമാനമായി പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. int div. എന്നാൽ interim dividend എന്നാണ്. അതായതു് ഒരു വർഷം തികയുന്നതിനു മുമ്പായി വാർഷികാദായ വീതത്തിന്റെ ഒരംശം interim dividend എന്ന പേരിൽ ഓഹരിക്കാർക്കു കൊടുക്കുന്നു എന്നത്രെ. nil (ഇല്ല) എന്നതിന്റെ അർത്ഥം ആ വർഷത്തിൽ ആദായവീതം കൊടുക്കുവാൻ നിശ്ചയിച്ചിട്ടില്ല എന്നാണ്. new എന്നതു് പുതിയതായി ആരംഭിച്ച കമ്പനി എന്നു വായനക്കാരെ മനസ്സിലാക്കാൻ പറഞ്ഞിരിക്കുകയാണ്. cum-div എന്നു പറഞ്ഞാൽ തന്നാണ്ടത്തെ ആദായവീതത്തോടുകൂടി ഓഹരി വിൽക്കാൻ തയ്യാറുണ്ടു് എന്നും, ex-div എന്നു പറഞ്ഞാൽ തന്നാണ്ടത്തെ ആദായം കൂടാതെ ഓഹരി വിൽക്കാനുണ്ടെന്നും അത്രെ.

## അദ്ധ്യായം 4.

# വിദേശവ്യാപാരം.

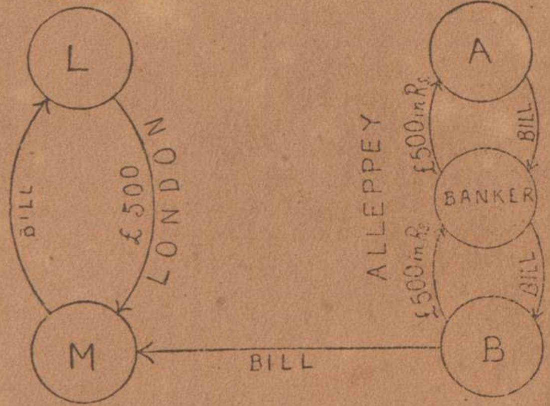
വിദേശത്തുനിന്ന് ചരക്കുകൾ വരുത്തുന്നവർ അവയുടെ വില നേരിട്ടു പണമായി വിദേശത്തേക്കയയ്ക്കുക വളരെ അപൂർവ്വമായിട്ടേ ചെയ്യാറുള്ളു. ചിലപ്പോൾ ചെക്ക്, ഡ്രാഫ്റ്റ് എന്നിവ അയച്ചുകൊടുക്കാറുണ്ടെങ്കിലും വിദേശത്തേക്ക് അയയ്ക്കുന്ന പണത്തിന്റെ ഒരു വലിയ പങ്ക് താഴെ വിവരിക്കുംപ്രകാരം കൈമാററപ്പത്രങ്ങൾ വഴിയായിട്ടാണ് അയയ്ക്കുന്നത്. ഈ രാജ്യത്തുനിന്നു വിദേശത്തേക്ക് അയയ്ക്കുന്ന ചരക്കുകളുടെ വിലയും കൈമാററപ്പത്രങ്ങൾ വഴിയായിട്ടാണ് ഇവിടെ കിട്ടാറുള്ളത്.

A എന്ന കച്ചവടക്കാരൻ ആലപ്പുഴനിന്നും 500 പവൻ വിലയ്ക്കുള്ള ചരക്ക് ലണ്ടനിൽ L എന്ന വ്യാപാരിക്കു അയച്ചുകൊടുക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. ചരക്കു കപ്പലിൽ കയററിയശേഷം A 00 പവന് ഒരു കൈമാററച്ചീട്ട് L ന്റെ പേരിൽ എഴുതുന്നു. ഈ ചീട്ട് ആലപ്പുഴയുള്ള ഒരു ബാങ്കിനു വിററിട്ട് A പണം വാങ്ങുന്നു.

ഇതേസമയത്തു ആലപ്പുഴയുള്ള വേറൊരു കച്ചവടക്കാരൻ B ലണ്ടനിലുള്ള M എന്നയാളിന്റെ പക്കൽനിന്നു 500 പവൻ വിലയ്ക്കുള്ള ചരക്ക് വരുത്തുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇതിനു B ലണ്ടനിലേക്ക് 500 പവൻ അയയ്ക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ നേരിട്ടു ഈ സംഖ്യ അയയ്ക്കുന്നതിനു പകരം B ആലപ്പുഴ ബാങ്കിൽ 500 പവനു തുല്യമായ സംഖ്യ ഇൻഡ്യൻ നാണയത്തിൽ കൊടുത്തു L ന്റെ പേരിൽ അവിടെയുള്ള കൈമാററച്ചീട്ട് വിലയ്ക്കു വാങ്ങി M ന്റെ പേർക്ക് അയച്ചുകൊടുക്കുന്നു. ലണ്ടനിൽ വ്യാപാരം ചെയ്യുന്ന M ആ നഗരത്തിൽത്തന്നെയുള്ള L ന്റെ പക്കൽനിന്നും 500 പവൻ വാങ്ങിക്കൊണ്ട് കൈമാററച്ചീട്ട് L നു കൊടുക്കുന്നു.

ഇങ്ങനെ ഒരു ചീട്ട് കൈമാററുന്നതുമൂലം ലണ്ടനിൽനിന്ന് ആലപ്പുഴയ്ക്കോ, ഇവിടെനിന്ന് ലണ്ടനിലേക്കോ പണം അയക്കാതെ ലണ്ടനിൽ പണം കിട്ടേണ്ട ആളിന് അവിടെയും, ആലപ്പുഴെ വ്യാപാരിക്കു കിട്ടേണ്ടതു് ആലപ്പുഴയും കിട്ടുന്നതായി നാം കാണുന്നു. ഈ കാരണത്താലാണ് ഈ ചീട്ടിന് കൈമാററച്ചീട്ട് എന്നു പേരുണ്ടായത്.

മേൽവിവരിച്ച ഏർപ്പാട് താഴെക്കാണുന്ന വിധത്തിൽ ചിത്രീകരിക്കാം.




വിദേശവ്യാപാരത്തിൽ വാസ്തവത്തിൽ നടക്കുന്ന കൊടുക്കൽവാങ്ങൽ മേൽക്കാണുന്നപ്രകാരം അത്ര ലളിതമായ രീതിയിൽ അല്ല. ഒരേസമയത്തു് രണ്ടു രാജ്യങ്ങളിൽനിന്നു് അങ്ങോട്ടും ഇങ്ങോട്ടും ഒരേ വിലയ്ക്കുള്ള ചരക്ക് അയയ്ക്കുന്ന രണ്ടു വ്യാപാരികൾ ഉണ്ടായിരിക്കുക എപ്പോഴും സാദ്ധ്യമല്ല. അതുകൊണ്ടാണു് കയററുമതിക്കാരന്റെയും, ഇറക്കുമതിക്കാരന്റെയും ഇടയ്ക്കു് ഒരു മദ്ധ്യസ്ഥനായി ബാങ്ക് വന്നുകൂടുന്നതു്. ബാങ്കുകാർ കയററുമതിക്കാരുടെ പക്കൽനിന്നും കൈമാററച്ചീട്ടുകൾ വിലകൊടുത്തു വാങ്ങി സൂക്ഷിക്കയും ആ സ്ഥലത്തു തന്നെയുള്ള ഇറക്കുമതിക്കാർക്കു് ആവശ്യംപോലെ ഈ ചീട്ടുകൾ വില്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

വിദേശവ്യാപാരത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന കൈമാററച്ചീട്ടുകൾ മലയാളത്തിൽ എഴുതാറില്ല. മുൻപറഞ്ഞ കച്ചവടത്തിൽ A ലണ്ടനിലെ L നു് എഴുതുന്ന കൈമാററച്ചീട്ടു് താഴെക്കാണുന്നപ്രകാരമായിരിക്കും.

£ 500 Alleppey,
20th October, 1938.

On demand pay to my order the sum of five hundred pounds sterling, value received.

To Mr. L,
London.

A (signature)

ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ പണം തരാമെന്നുള്ള വ്യവസ്ഥയിന്മേലോ, അല്ലെങ്കിൽ ചീട്ടു കൈപ്പററുന്നതു മുതലോ, ചീട്ടിന്റെ തീയതിമുതലോ ഇത്രദിവസം അല്ലെങ്കിൽ മാസം കഴിഞ്ഞു് പണം തരണമെന്നു കാണിച്ചോ കൈമാററച്ചീട്ടു് എഴുതുന്നു. വിദേശ നാണയത്തിൽ തുക എഴുതിയിരിക്കുന്ന ഒരു ചീട്ടു് സ്വദേശത്തു് വാങ്ങുകയോ വില്ക്കുകയോ ചെയ്യണമെങ്കിൽ രണ്ടു ദേശത്തേയും നാണയങ്ങളുടെ വില താരതമ്യപ്പെടുത്തി ഒരു കൈമാററനിരക്കു് നിശ്ചയിക്കാതെ നിവൃത്തിയില്ലല്ലോ. വ്യാപാരലോകത്തിന്റെ അന്നന്നുള്ള സ്ഥിതി അനുസരിച്ചു ഇങ്ങനെയുള്ള നിരക്കുകൾ ക്രമീകരിക്കുകയും അവ പ്രതിദിനപ്പത്രങ്ങൾ വഴിയായി പ്രസിദ്ധീകരിക്കുകയും ചെയ്തുവരുന്നു. ഇതിനുദാഹരണമായി "ഹിന്ദു" പത്രത്തിൽനിന്നു് ഒരു ഭാഗം താഴെ ഉദ്ധരിക്കുന്നു.

മദ്രാസ്,
1938 ഒക്ടോബർ 12,
ബുധനാഴ്ച,

| | |
|---|---|
| Banks selling T. T. | $17\frac{27}{32}$ |
| Banks selling D. D. | $17\frac{29}{32}$ |
| Banks buying rate D. D. on London | $17\frac{31}{32}$ |
| Banks buying rate 3 months' sight on London | $18\frac{1}{16}$ |
| France banks selling D. D. (Rs. 100) | 1275 Francs |
| American banks selling D. D. ($ 100) | Rs. 284 |
| American banks buying D. D. ($ 100) | Rs. 274 |

കുറിപ്പു്: T. T. എന്നതു് telegraphic transfer എന്നാണു്. തപാൽവഴി കൈമാററച്ചീട്ടു് അയക്കുന്നതു വളരെ താമസമാണെന്നു തോന്നുന്ന അവസരങ്ങളിൽ കമ്പിമാർഗ്ഗം കൈമാററം സാധിക്കുന്നതിനു ബാങ്കുകാർ തമ്മിൽ വേണ്ട ഏർപ്പാടുകൾ ചെയ്തിട്ടുണ്ടു്. ഇങ്ങനെ കമ്പിമാർഗ്ഗം ലണ്ടനിലേക്കു കൈമാററം സാധിക്കണമെങ്കിൽ ഒരു രൂപയ്ക്കു് $17\frac{27}{32}$ പെൻസു നിരക്കിൽ വേണ്ട സംഖ്യയും കമ്പിയടിക്കുന്നതിനുള്ള ചെലവും, മദ്രാസ് ബാങ്കുകളിൽ ഒന്നിൽ ഏല്പിച്ചാൽ അവർ ആ കൈമാററം ഉടൻതന്നെ നടത്തുന്നതായിരിക്കും.

D. D. എന്നതു് demand draft എന്നാണു്. ആവശ്യപ്പെടുമ്പോൾ പണം തരണമെന്നുള്ള വ്യവസ്ഥയിന്മേലുള്ള കൈമാററച്ചീട്ടുകൾക്കാണു് ഈ പേരുപയോഗിക്കുന്നതു്. ഇപ്രകാരമുള്ള ചീട്ടുകൾ ഒരു രൂപയ്ക്കു $17\frac{29}{32}$ പെൻസു നിരക്കിൽ മദ്രാസിലെ ബാങ്കുകാർ വില്ക്കുന്നതാണു്.

3 months' sight എന്നതു് കൈപ്പററുന്നതുമുതൽ മൂന്നുമാസം തികയുമ്പോൾ പണം തരാമെന്നുള്ള വ്യവസ്ഥയിന്മേൽ എഴുതിയ കൈമാററച്ചീട്ടുകളെ സംബന്ധിച്ചു ഉപയോഗിക്കുന്നതാണു്.

ഫ്റാങ്ക് ഫ്റാൻസിലെ നാണയമാണ്. ഇവിടെ 100 രൂപയ്ക്കു തുല്യമായി 1275 ഫ്റാങ്ക് എന്നു പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. അമേരിക്കയിലെ നാണയം ഡോളർ ആണ്. 100 ഡോളറിനു് 284 രൂ. എന്നും, 274 രൂ. എന്നും കൈമാററനിരക്കു തന്നിരിക്കുന്നു,

മേൽക്കുറിച്ചിരിക്കുന്ന നിരക്കുകൾ 1938-ലെയാണ്. രണ്ടാം ലോകമഹായുദ്ധത്തിനുശേഷം വ്യാപാരനിലകൾ പാടെ വ്യത്യാസപ്പെട്ടുപോയി. നിയന്ത്രണം, യുദ്ധക്കടം മുതലായ കാരണങ്ങളാൽ വിദേശവ്യാപാരം നിശ്ചിതമായിത്തീർന്നു. ഈ അടുത്തകാലത്തു് പവന്റെ വിലയിൽ വരുത്തിയ മാററംകൊണ്ടു് അമേരിക്കയുമായുള്ള എക്സ്ചേൻജ് വ്യത്യാസപ്പെട്ടു. ഇപ്പോൾ (അതായതു് ഒക്ടോബർ 1949) വിദേശവുമായി പണമിടപാടുകൾ നടത്തുന്ന മദ്രാസ് ബാങ്കുകൾ താഴെ കാണുന്ന നിരക്കുകൾ അനുസരിച്ചു അവ നടത്തുന്നു.

Madras, October 28, 1949

Banks selling T. T. on London $17\frac{31}{32}$ d.

„ „ New York \$ 100 = Rs. 478-1-4

„ „ France Rs. 100 = 7250 Franc.

„ „ Sweeden Rs. 100 = Kroners 107-1-2

ഇൻഡ്യയും, ജപ്പാൻ, ഇററലി, ജർമ്മനി, ടർക്കി എന്നീ രാജ്യങ്ങളുമായുള്ള ഇടപാടുകൾ ഇപ്പോൾ പവന്റെ വില അടിസ്ഥാനമാക്കി നടത്തുന്നതിനാൽ അവിടുത്തെ നാണയങ്ങളും, ഇൻഡ്യൻ നാണയവും തമ്മിലുള്ള നിരക്ക് പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്താറില്ല.

## അഭ്യാസം 21.

**1.** ഒരാൾ മാസംതോറും 340 രൂ. വീതം ഇംഗ്ലണ്ടിലേക്കയയ്ക്കുന്നു. ഒരു രൂപയ്ക്കു തുല്യമായി 1 ഷില്ലിങ്ങ് $10\frac{1}{4}$ പെൻസ് എടുത്താൽ ഒരു വർഷത്തിൽ അയയ്ക്കുന്ന ആകെ സംഖ്യ ഇംഗ്ലീഷ് നാണയത്തിൽ പറയുക.

**2.** 1 രൂപാ, 1 ഷി. 8 പെൻസിനു തുല്യമാണ്. എന്നാൽ രൂപയ്ക്കു 1 ഷി. $8\frac{1}{2}$ പെൻസു നിരക്കിൽ 4800 രൂ. ഇംഗ്ലീഷ് നാണയമായും, പവനൊന്നിനു 11 രൂ. നിരക്കിൽ 50 പവൻ ഇൻഡ്യൻ നാണയമായും മാറി കൊടുത്താൽ എന്തു ലാഭമുണ്ടെന്നു കാണുക.

**3.** അമേരിക്കയിൽ എത്തിയ ഒരാൾ അയാളുടെ കൈവശമുണ്ടായിരുന്ന 200 പവൻ പവനൊന്നിനു 4·8 ഡോളർ നിരക്കിൽ ഡോളറായി മാറി. അവിടെ 726·25 ഡോളർ ചിലവാക്കിയശേഷം ബാക്കിയുള്ള പണം ഡോളറിനു 4 ഷി. 1 പെനിവച്ചു ഇംഗ്ലീഷ് നാണയമാക്കിയാൽ അയാളുടെ കൈവശം എന്തു സംഖ്യയുണ്ടായിരിക്കും?

4. ലണ്ടനിൽനിന്നു കുറെ ചരക്കു വരുത്തുന്നതിന് അഡ്വാൻസായി 100 രൂ. അയച്ചുകൊടുത്തു. അന്നു കൈമാററം 1 ഷി. 6½ പെ. വച്ചായിരുന്നു. കൈമാററനിരക്ക് 1 ഷി. 6 പെ. ആയപ്പോൾ 50 പവൻ വിലയ്ക്കു ചരക്ക് ഇൻഡ്യയിലേക്കയച്ചു. ബാക്കി എന്തു സംഖ്യ ലണ്ടനിലേക്കയയ്ക്കണമെന്നു ഇൻഡ്യൻ നാണയത്തിൽ പറയുക.

5. ബോംബയിലെ ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ ലണ്ടൻവഴി ബർലിനിലേക്കു 1410 രൂ. അയയ്ക്കുന്നു. ബോംബയും, ലണ്ടനും തമ്മിലുള്ള കൈമാററനിരക്ക് രൂപയ്ക്കു 1 ഷി. 6 പെ. വച്ചും, ബർലിനും, ലണ്ടനും തമ്മിലുള്ളതു് മാർക്കൊന്നിനു 11¾ പെൻസുവച്ചും ആണെങ്കിൽ ബർലിനിൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ ജർമ്മൻ നാണയത്തിൽ പറയുക.

6. ലണ്ടനും, ന്യൂയോർക്കും തമ്മിലുള്ള കൈമാററനിരക്കു ഡോളറൊന്നിന് 4·85 ഷില്ലിങ്ങും, ന്യൂയോർക്കും, ബോംബെയും തമ്മിലുള്ളതു രൂപയ്ക്ക് 0·365 ഡോളറും, ലണ്ടനും, ബോംബെയും തമ്മിലുള്ളതു രൂപയ്ക്ക് 1 ഷി. 6 പെൻസും ആണ്. ബോംബെയിലെ ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ ന്യൂയോർക്കിൽ 1000 ഡോളർ കൊടുക്കേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. ഈ സംഖ്യ നേരിട്ടു ന്യൂയോർക്കിലേക്ക് അയയ്ക്കുന്നതും, ലണ്ടൻവഴി അയയ്ക്കുന്നതും തമ്മിൽ ഏതാണ് കൂടുതൽ ലാഭകരം? ലാഭം എന്ത്?

7. 3 ഷി. 6 പെ. വിലകുറിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു പുസ്തകത്തിന്റെ 1,200 പ്രതികൾ ലണ്ടനിൽനിന്നു വരുത്തുന്നതിന് മദ്രാസിലൊരാൾ ഏർപ്പാടുചെയ്തു. കുറിച്ച വിലയിൽ 25% ഡിസ്കൗണ്ട് അനുവദിച്ചു. കപ്പൽക്കൂലിക്ക് 3 പവൻ ചെലവായി. 18 പെൻസിന് 1 രൂ. നിരക്കിൽ വിലയും, കപ്പൽക്കൂലിയും ലണ്ടനിലേക്കയച്ചു. അയാൾ മുഴുവൻ ചരക്കും 15% ഡിസ്കൗണ്ട് (കുറിച്ച വിലയിൽ) കുറച്ചു വിററു. കുറിച്ചവില ഷില്ലിങ്ങൊന്നിനു 11 ണ. വച്ചു കണക്കാക്കിയാൽ ഈ ഏർപ്പാടിൽ ആകെ അയാൾക്കു എന്തു ലാഭമുണ്ട്?

---

ഉത്തരം. **1**. 378 പ. 5 ഷി. **2**. 170 രൂ. **3**. 40 പ, 6 ഷി. 5½ പെൻസ്. **4**. 563 രൂ. 14 ണ. 3 സ. **5**. 2160 മാർക്ക്. **6**. ന്യൂയോർക്കിലേക്കു അയയ്ക്കുന്നതു്; 483 രൂ. 6 ണ. 3 സ. **7**. 352 രൂ. 6 ണ.

---

## അദ്ധ്യായം 5.

# ഘടകങ്ങൾ.

$x^2+bx+c$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള രാശിമാലകളുടെ ഘടകങ്ങൾ കാണുന്ന രീതി നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. $x$ന്റെ പൂർണ്ണമായ ഘാതി

തിധർമ്മം $ax^2+bx+c$ ആണ്. ഇതിൽ $x$ ചലാങ്കവും $a$, $b$, $c$ ഇവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളും അത്രെ. $ax^2+bx+c$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ധർമ്മങ്ങളുടെ ഘടകക്രിയയാണ് ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ നാം പഠിക്കുന്നതു്.

താഴെ കാണുന്ന ഗുണനഫലങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക.

$$(3x+5)(4x+9)=12x^2+47x+45 \qquad (1)$$
$$(3x-5)(4x-9)=12x^2-47x+45 \qquad (2)$$
$$(3x+5)(4x-9)=12x^2-7x-45 \qquad (3)$$
$$(3x-5)(4x+9)=12x^2+7x-45 \qquad (4)$$

ഇവയിൽ ഒന്നാമത്തേതിൽ, $47=20+27$; $12\times 45=20\times 27$.

രണ്ടാമത്തേതിൽ, $-47=-20-27$; $12\times 45=-20\times -27$.

മൂന്നാമത്തേതിൽ, $-7=20-27$; $12\times -45=20\times -27$.

നാലാമത്തേതിൽ, $7=27-20$; $12\times -45=20\times -27$.

ഇതിൽ ഒന്നാമത്തെ ഗുണനഫലമായ $12x^2+47x+45$ ഘടകങ്ങളാക്കണമെങ്കിൽ, ഗുണിച്ചാൽ $12\times 45$-ഉം കൂട്ടിയാൽ $47$-ഉം കിട്ടുന്ന രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കണം. ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ ആ സംഖ്യകൾ 20, 27 ഇവയാണല്ലോ. $47x$ എന്ന പദം $20x$, $27x$ എന്ന രണ്ടു പദങ്ങളായി പിരിച്ചെഴുതി താഴെക്കാണുന്നപ്രകാരം ഘടകക്രിയ ചെയ്യാം.

$$\begin{aligned}12x^2+47x+45 &= 12x^2+27x+20x+45\\ &= 3x(4x+9)+5(4x+9)\\ &= (4x+9)(3x+5)\end{aligned}$$

ഒരു നിയമമായി പറഞ്ഞാൽ, $ax^2+bx+c$ എന്ന ധർമ്മം ഘടകങ്ങളാക്കുന്നതിന് ഗുണിച്ചാൽ $ac$-ഉം, കൂട്ടിയാൽ $b$-ഉം കിട്ടുന്ന രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കണം.

## ഉദാഹരണം 1.

2 സംഖ്യകളുടെ തുക $-4$; ഗുണനഫലം $-320$ എന്നാൽ സംഖ്യകൾ ഏവ?

ഇവിടെ ഗുണനഫലം ഋണാത്മകമായതിനാൽ ഒരു സംഖ്യ ഋണാത്മകവും, മറ്റേതു് ധനാത്മകവും ആയിരിക്കും. തുക ഋണാത്മകമായാൽ സംഖ്യകളിൽ വലുതു് ഋണാത്മകമായിരിക്കും. താഴെക്കാണുന്ന വിധത്തിൽ പല ജോഡി ഘടകങ്ങൾ എടുത്തു പരിശോധിക്കാം.

| | |
|---|---|
| 1 | −320 |
| 5 | − 64 |
| 10 | − 32 |
| −20 | !16 |

ഈ ഘടകങ്ങൾ ഓരോ ജോഡി എഴുതുമ്പോഴും തുക $-4$ വരുന്നോ എന്നുകൂടി നോക്കേണ്ടതാണ്. ഇങ്ങനെ $-20$, 16 എന്ന ഘടകങ്ങൾ കിട്ടുന്നു.

ഇപ്രകാരം സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് താഴെക്കാണുന്ന നിയമങ്ങൾ സഹായകമായിരിക്കും.

(i) ഗുണനഫലവും, തുകയും ധനാത്മകങ്ങളായിരുന്നാൽ സംഖ്യകൾ രണ്ടും ധനാത്മകങ്ങളായിരിക്കും. (ii) ഗുണനഫലം ധനാത്മകവും, തുക ഋണാത്മകവും എങ്കിൽ രണ്ടു സംഖ്യകളും ഋണാത്മകമായിരിക്കും. (iii) ഗുണനഫലം ഋണാത്മകവും തുക ധനാത്മകവും എങ്കിൽ വലിയ സംഖ്യ ധനാത്മകവും മറേറതു് ഋണാത്മകവും ആയിരിക്കുന്നു. (iv) ഗുണനഫലവും, തുകയും ഋണാത്മകമെങ്കിൽ വലിയ സംഖ്യ ഋണാത്മകവും, മറേറതു് ധനാത്മകവും ആയിരിക്കും.

ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യ ഓരോ ജോഡി ഘടകങ്ങളായി പിരിച്ചെഴുതിയാൽ, ഘടകങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അന്തരം കുറയുന്തോറും അവയുടെ തുകയും കുറഞ്ഞുകൊണ്ടിരിക്കും. ഉദാഹരണം: 192 എന്ന സംഖ്യ താഴെക്കാണുന്ന വിധത്തിൽ ഘടകങ്ങളാക്കാവുന്നതാണ്.

| ഘടകങ്ങൾ: | ഘടകങ്ങളുടെ തുക. | ഘടകങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം. |
|---|---|---|
| $1\times 192$ | 193 | 191 |
| $2\times 96$ | 98 | 94 |
| $3\times 64$ | 67 | 61 |
| $4\times 48$ | 52 | 44 |
| $6\times 32$ | 38 | 26 |
| $8\times 24$ | 32 | 16 |
| $12\times 16$ | 28 | 4 |

രണ്ടു പൂർണ്ണസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം എല്ലായ്പ്പോഴും അവയുടെ തുകയെക്കാൾ വലുതായിരിക്കണമെന്നില്ല എന്നുള്ളതു് മേൽക്കാണുന്ന ഉദാഹരണത്തിൽനിന്നു മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്.

## ഉദാഹരണം 2.

ഘടകങ്ങളാക്കുക: $60x^2+103x-72$

ഇവിടെ ആദ്യമായി ചെയ്യേണ്ടതു്, ഗുണിച്ചാൽ $-60\times 72$, കൂട്ടിയാൽ 103 എന്ന വ്യവസ്ഥകൾ അനുസരിച്ചുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുകയാണ്

ഗുണനഫലം ഋണാത്മകവും, തുക ധനാത്മകവും ആകയാൽ, വലിയസംഖ്യ ധനാത്മകവും, മറേറതു് ഋണാത്മകവും ആയിരിക്കും. $60\times 72=30\times 144=40\times 108$. ഘടകങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം (അക്കം മാത്രം കണക്കാക്കിയാൽ) 103 ആയിരിക്കണം. $144-30=114$; $108-40=68$. അതിനാൽ ചെറിയ ഘടകം $-30$, $-40$ ഇവയ്ക്കിടയ്ക്കായിരിക്കണം. $-32$ പരീക്ഷിച്ചു നോക്കുമ്പോൾ,

$-32+135=103$, എന്നു കിട്ടും. ഇതിൽനിന്നും നമുക്കുവേണ്ട സംഖ്യകൾ $-32$, $135$ എന്നിവയെന്നു ഗ്രഹിക്കാം. അനന്തരം താഴെക്കാണുന്ന പ്രകാരം ക്രിയ ചെയ്യുക.

$$\begin{aligned} 60x^2+103x-72 &= 60x^2+135x-32x-72 \\ &= 15x(4x+9)-8(4x+9) \\ &= (4x+9)(15x-8) \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 3.

ഘടകങ്ങളാക്കുക: $112-97x-90x^2$

ഇവിടെ കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം $-90\times 112$, തുക $-97$. ആയതിനാൽ, മുമ്പിലത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ വിവരിച്ചിരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ ചിന്തിച്ചു. സംഖ്യകൾ $63, -160$ എന്നു മനസ്സിലാക്കുന്നു.

$$\begin{aligned} 112-97x-90x^2 &= 112+63x-160x-90x^2 \\ &= 7(16+9x)-10x(16+9x) \\ &= (16+9x)(7-10x) \end{aligned}$$

## അഭ്യാസം 22.

സാദ്ധ്യമെങ്കിൽ ഘടകങ്ങളാക്കുക:

**1.** $2m^2+3m+1$ **2.** $3n^2+2n-1$
**3.** $1+4x-5x^2$ **4.** $3h^2-h-2$
**5.** $8y^2+21y-9$ **6.** $3z^2-17z+20$
**7.** $4a^2+8a+3$ **8.** $6a^2+13a+6$
**9.** $10c^2+c-2$ **10.** $5i^2+6i+7$
**11.** $35g-6-36g^2$ **12.** $14d^2+41d+30$
**13.** $42y^2-85y+42$ **14.** $12x^2-x-20$
**15.** $72-17x-72x^2$ **16.** $10x^2+x-3$
**17.** $21y^2+11y-2$ **18.** $36m^2+43m+12$
**19.** $30h^2+17h-21$ **20.** $70z-24z^2-50$
**21.** $36b^2+33b-20$ **22.** $20c^2-31c-66$
**23.** $24a^2-a+19$ **24.** $72y^2+101y+35$
**25.** $60+16l-55l^2$ **26.** $92x-117-15x^2$
**27.** $12x^2+79x+80$ **28.** $40x^2-131x+105$
**29.** $169-26x-80x^2$ **30.** $70a^2+151a-140$

ഉത്തരം. **1.** $(2m+1)(m+1)$ **2.** $(3n-1)(n+1)$
**3.** $(1+5x)(1-x)$ **4.** $(3h+2)(h-1)$ **5.** $(y+3)(8y-3)$
**6.** $(3z-5)(z-4)$ **7.** $(2a+3)(2a+1)$ **8.** $(3a+2)(2a+3)$
**9.** $(5c-2)(2c+1)$ **11.** $(2-9g)(4g-3)$ **12.** $(2d+3)(7d+10)$
**13.** $(7y-6)(6y-7)$ **14.** $(3x-4)(4x+5)$ **15.** $(8-9x)(9+8x)$
**16.** $(5x+3)(2x-1)$ **17.** $(3y+2)(7y-1)$ **18.** $(4m+3)(9m+4)$
**19.** $(6h+7)(5h-3)$ **20.** $(8z-10)(5-3z)$ **21.** $(12b-5)(3b+4)$
**22.** $(4c-11)(5c+6)$ **24.** $(9y+7)(8y+5)$ **25.** $(11l+10)(6-5l)$
**26.** $(5x-9)(13-3x)$ **27.** $(4x+5)(3x+16)$ **28.** $(8x-15)(5x-7)$
**29.** $(13-10x)(13+8x)$ **30.** $(10a-7)(7a+20)$

---

ഉദാഹരണം 4.

ഘടകങ്ങളാക്കുക: $18x^2-87x+105$.

ഇവിടെ 3 എന്ന ഘടകം നീക്കിയശേഷം, $6x^2-29x+35$ എന്നു കിട്ടും. ഗുണിച്ചാൽ $6\times35$, കൂട്ടിയാൽ $-29$ എന്ന വ്യവസ്ഥയിലുള്ള സംഖ്യകൾ $-14, -15$ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

$$\begin{aligned}18x^2-87x+105&=3(6x^2-29x+35)\\&=3\{(6x^2-15x-14x+35)\}\\&=3\{3x(2x-5)-7(2x-5)\}\\&=3(2x-5)(3x-7)\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 5.

ഘടകങ്ങളാക്കുക: $15x^4+61x^2+56$

ഈ രാശിമാല നാലാം കൃതിയിലാണെങ്കിലും ഇതിനെ $x^2$ ന്റെ ഒരു ധർമ്മമായി ഗണിച്ചാൽ ഒരു ദ്വികൃതിധർമ്മമായി ക്രിയ ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

$$\begin{aligned}15x^4+61x^2+56&=15x^4+21x^2+40x^2+56\\&=3x^2(5x^2+7)+8(5x^2+7)\\&=(5x^2+7)(3x^2+8)\end{aligned}$$

## അഭ്യാസം 23.

സാദ്ധ്യമെങ്കിൽ ഘടകങ്ങളാക്കുക.

A

**1.** $2x^2+6x+4$ **2.** $2x^2+4x-6$ **3.** $2a^2-12a-110$
**4.** $3b^2-9b-30$ **5.** $9n-3-6n^2$ **6.** $4n^2+14n+6$
**7.** $4n^2-24n+20$ **8.** $6m^2+3m-9$ **9.** $30p^2-25p-20$

B

1. $2a^4-a^2-1$
2. $3a^4+2a^2-1$
3. $5n^2-3-2n^4$
4. $3x^4+11x^2-20$
5. $6l^4+7l^2-5$
6. $30m^4+7m^2-15$
7. $21z^4-11z^2+5$
8. $2a^2b^2-ab-1$
9. $3x^2y^2+7xy-6$
10. $21nm-10m^2n^2-9$
11. $2a^2b^2c^2-9abc-35$
12. $24-23xyz-12x^2y^2z^2$

C

1. $3a^3+5a^2+2a$
2. $12m^3+25m^2+12m$
3. $15p^3-41p^2+28p$
4. $42n^3+13n^2-40n$
5. $12k^2h^2+29kh^2-8h^2$
6. $3y^2+y^3-10y^4$
7. $2b^5-b^3-3b$
8. $17c^3-7c-6c^5$
9. $20a^4d^2+7a^2d^2-3d^2$
10. $6abx^4+7abx^2-20ab$
11. $6xyz-29a^2xyz-42a^4xyz$

---

ഉത്തരം. A. **1.** $2(x+2)(x+1)$ **2.** $2(x+3)(x-1)$ **3.** $2(a-11)(a+5)$ **4.** $3(b-5)(b+2)$ **5.** $3(1-n)(2n-1)$ **6.** $2(2n+1)(n+3)$ **7.** $4(n-5)(n-1)$ **8.** $3(2m+3)(m-1)$ **9.** $5(3p-4)(2p+1)$

B. **1.** $(2a^2+1)(a+1)(a-1)$ **2.** $(3a^2-1)(a^2+1)$ **3.** $(2n^2-3)(n+1)(1-n)$ **4.** $(x^2+5)(3x^2-4)$ **5.** $(3l^2+5)(2l^2-1)$ **6.** $(6m^2+5)(5m^2-3)$ **8.** $(2ab+1)(ab-1)$ **9.** $(xy-3)(3xy-2)$ **10.** $(5mn-3)(3-2mn)$ **11.** $(abc-7)(2abc+5)$ **12.** $(3xyz+8)(3-4xyz)$

C. **1.** $a(3a+2)(a+1)$ **2.** $m(4m+3)(3m+4)$ **3.** $p(5p-7)(3p-4)$ **4.** $n(7n+8)(6n-5)$ **5.** $h^2(3k+8)(4k-1)$ **6.** $y^2(2y+1)(3-5y)$ **7.** $b(2b^2+1)(b^2-3)$ **8.** $c(2c^2-1)(7-3c^2)$ **9.** $d^2(5a^2+3)(2a+1)(2a-1)$ **10.** $ab(2x^2+5)(3x^2-4)$ **11.** $xyz(7a^2+6)(1-6a^2)$

---

മുൻ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന രീതി കൂടാതെ വേറെ വിധത്തിലും $ax^2+bx+c$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള രാശിമാലകൾ ഘടകങ്ങളാക്കാവുന്നതാണ്.

**1.** $x^2$ ന്റെ ഗുണോത്തരം കൊണ്ടു ഗുണിക്കയും ഹരിക്കയും ചെയ്തു ഘടകങ്ങളാക്കുന്ന വിധം.

ഉദാഹരണം 6.

ഘടകങ്ങളാക്കുക: $8x^2+14x-15$.

$$\begin{aligned}8x^2+14x-15&=\tfrac{1}{8}(8\cdot 8x^2+8\cdot 14x-8\cdot 15)\\&=\tfrac{1}{8}\{(8x)^2+14(8x)-120\}\\&=\tfrac{1}{8}(8x+20)(8x-6)\\&=\tfrac{1}{4}(8x+20)\times\tfrac{1}{2}(8x-6)\\&=(2x+5)(4x-3)\end{aligned}$$

**2.** വർഗ്ഗപൂർത്തീകരണം.

ഉദാഹരണം 7.

ഘടകങ്ങളാക്കുക: $x^2+5x-24$

$$\begin{aligned}x^2+5x-24&=x^2+2\times\tfrac{5}{2}x+(\tfrac{5}{2})^2-(\tfrac{5}{2})^2-24\\&=(x+\tfrac{5}{2})^2-\{(\tfrac{5}{2})^2+24\}\\&=(x+\tfrac{5}{2})^2-\tfrac{121}{4}\\&=(x+\tfrac{5}{2})^2-(\tfrac{11}{2})^2\\&=(x+\tfrac{5}{2}+\tfrac{11}{2})(x+\tfrac{5}{2}-\tfrac{11}{2})\\&=(x+8)(x-3)\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 8.

$$6x^2+7x-3$$

$$\begin{aligned}6x^2+7x-3&=6(x^2+\tfrac{7}{6}x-\tfrac{1}{2})\\&=6\{x^2+2\cdot\tfrac{7}{12}x+(\tfrac{7}{12})^2-(\tfrac{7}{12})^2-\tfrac{1}{2}\}\\&=6\{(x+\tfrac{7}{12})^2-(\tfrac{121}{144})\}\\&=6\{(x+\tfrac{7}{12})^2-(\tfrac{11}{12})^2\}\\&=6(x+\tfrac{7}{12}+\tfrac{11}{12})(x+\tfrac{7}{12}-\tfrac{11}{12})\\&=6(x+\tfrac{3}{2})(x-\tfrac{1}{3})\\&=2(x+\tfrac{3}{2})\times 3(x-\tfrac{1}{3})\\&=(2x+3)(3x-1)\end{aligned}$$

## അഭ്യാസം 24.

ഘടകങ്ങളാക്കുക.

**1.** $x^2-2x-15$ **2.** $a^2+a-56$ **3.** $c^2+2c-15$

4. $d^2-20d+99$ 5. $2a^2-11a-6$ 6. $3y^2+23y-36$
7. $8z-1-15z^2$ 8. $14+36m-18m^2$ 9. $15x^2+44x+32$
10. $6a^2-29a-65$ 11. $4x^2+5x-9$ 12. $6x^2+11x-7$

---

ഉത്തരം. 1. $(x+3)(x-5)$ 2. $(a+8)(a-7)$ 3. $(c+5)(c-3)$ 4. $(d-11)(d-9)$ 5. $(a-b)(2a+1)$ 6. $(3y-4)(y+9)$ 7. $(5z-1)(1-3z)$ 8. $2(7-3m)(3m+1)$ 9. $(3x+4)(5x+8)$ 10. $(2a-13)(3a+5)$ 11. $(4x+9)(x-1)$ 12. $(3x+7)(2x-1)$

---

## അഭ്യാസം 25.

## സമ്മിശ്രം

1. $3x+1$ എന്നതു് $6x^2-7x-3$ എന്ന രാശിമാലയുടെ ഘടകമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

2. $x+3$ എന്നതു് $2x^2-3x+6$ എന്ന രാശിമാലയുടെ ഘടകമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

3. $2x+5$ എന്നതു് $6x^2+ax-35$ ൻ്റെ ഒരു ഘടകമാണെങ്കിൽ $a$ എത്രയായിരിക്കണം?

4. $m$ എത്രയായിരുന്നാൽ $5-2y$ എന്നതു് $40+my-18y^2$ ൻ്റെ ഒരു ഘടകമായിരിക്കും?

5. താഴെക്കാണുന്ന ഘടകക്രിയയിൽ ഉള്ള തെററു് കണ്ടുപിടിക്കുക.

$$ac+bc+ad-bd=c(a+b)+d(a-b)$$
$$=(c+d)(a\pm d)$$

6. ലഘൂകരിക്കുക: $\dfrac{x-y}{y-x}$

7. $x-7$ എന്നതു് $7-x$ നോടു തുല്യമാണോ?
$(x-7)(x-5)$ എന്നതു് $(7-x)(5-x)$ നോടു തുല്യമാണോ?

8. ലഘൂകരിക്കുക: $\dfrac{(a-b)(c-d)}{(b-a)(d-c)}$

9. A എത്രയായിരുന്നാൽ $4x^4+Ax^2+9$ ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗമായിരിക്കും? A യുടെ വില കണ്ടശേഷം $4x^4-37x^2+9$ എന്ന രാശിമാല രണ്ടു പൂർണ്ണവർഗ്ഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തോടു തുല്യമായി എഴുതി, അതിൻ്റെ ഘടകങ്ങൾ എല്ലാം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**10.** താഴെക്കാണുന്ന വ്യവസ്ഥയനുസരിച്ചുള്ള സംഖ്യകളുടെ ചിഹ്നങ്ങളെപ്പററി എന്തറിയാം?

1. രണ്ടുസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ധനാത്മകം; തുക ഋണാത്മകം.
2. .... .... ഋണാത്മകം; .... ധനാത്മകം.
3. .... .... ഋണാത്മകം; .... ഋണാത്മകം.
4. .... .... ധനാത്മകം; .... ധനാത്മകം.

**11.** ലഘൂകരിക്കുക: $\dfrac{(a-1)(a-2)(a-3)}{(3-a)(2-a)(1-a)}$

**12.** $m$ ഒരു ധനാത്മക പൂർണ്ണസംഖ്യയാണെന്നു തന്നിരുന്നാൽ, താഴെക്കാണുന്ന ഓരോ രാശിമാലയ്ക്കും ഘടകങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കണമെങ്കിൽ $m$ എത്രയായിരിക്കണമെന്നു നിർണ്ണയിക്കുക.

1. $mx^2-2x-10$ 2. $49+mz-30z^2$
3. $15y^2-82y+m$ 4. $ma^2-8a-35$

**13.** താഴെക്കാണുന്ന ഓരോ രാശിമാലയോടു എന്തുകൂട്ടിയാൽ ഒരു പൂർണ്ണവർഗ്ഗം കിട്ടും?

1. $x^2+px$ 2. $x^2+q$ 3. $q+px$

**14.** $m$ എത്രയായിരുന്നാൽ $\dfrac{a^2-a}{m}$ എന്നതു് $\dfrac{a}{a-1}$ നോടു തുല്യമായിരിക്കും?

**15.** ലഘൂകരിക്കുക. $\dfrac{a^2-b^2}{b^2-a^2}+\dfrac{a-b}{b-a}-\dfrac{a^3-b^3}{b^3-a^3}$

**16.** താഴെക്കാണുന്ന ഓരോ പ്രസ്താവനയും ശരിയൊ, തെററൊ എന്നു കാരണസഹിതം പറയുക.

1. $\dfrac{a}{b-c}=\dfrac{-a}{c-b}$

2. രണ്ടു പൂർണ്ണസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം, അക്കംമാത്രം നോക്കിയാൽ അവയുടെ തുകയേക്കാൾ എല്ലായ്പോഴും കൂടുതലായിരിക്കും.

3. $x(x+y)+z(y+z)=(x+z)(x+y)(y+z)$

4. രണ്ടു പൂർണ്ണസംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം അക്കംമാത്രം നോക്കിയാൽ അവയുടെ ഗുണനഫലത്തേക്കാൾ എല്ലായ്പോഴും കുറവായിരിക്കും.

**17.** ഘടകങ്ങളാക്കുക:

1. $144x^2y^2-(4x^2+9y^2)^2$ 2. $9x^4-13x^2+4$
3. $18-71x-45x^2$ 4. $49x^2+70xy+25y^2$

5. $a^2-5ab-6b^2$ 6. $(a^2-b^2)x-ab(x^2-1)$
7. $x^2+7x+3(2+a)(1-3a)$ 8. $x(ax+1)+2(1-2a)$
9. $(x^2-y^2)(a^2-b^2)+4abxy$.

---

ഉത്തരം. **3.** 1 **4.** 29 **6.** −1 **8.** 1 **9.** 12; $(2x+1)(2x-1)(x+3)(x-3)$ **11.** −1 **15.** −1 **17.** (i) $(2x+3y)^2(2x-3y)(3y-2x)$ (ii) $(3x+2)(3x-2)(x+1)(x-1)$ (iii) $(9+5x)(2-9x)$ (iv) $(7x+5y)^2$ (v) $(a+b)(a-6b)$ (vi) $(ax+b)(a-bx)$ (vii) $(x+3a+6)(x-3a+1)$ (viii) $(x+2)(ax-2a+1)$ (ix) $(ax+by+ay-bx)(ax+ay-ay+bx)$

---

# അദ്ധ്യായം 6.

# ഭിന്നങ്ങൾ.

## അഭ്യാസം 26.

ലഘൂകരിക്കുക:

**1.** $\frac{x(a+b)}{a+b}$ **2.** $\frac{(a+b)(a-b)}{b+a}$

**3.** $\frac{a-b}{b-a}$ **4.** $\frac{(a-b)^2}{(b-a)^2}$

**5.** $\frac{x^2y-xy^2}{xy}$ **6.** $\frac{x^3y+xy^3}{x^2+y^2}$

**7.** $\frac{(a-b)(b-c)}{(b-a)(c-b)}$ **8.** $\frac{a^2bc-bc}{a+1}$

**9.** $\frac{m^2+2mn+n^2}{m^2-n^2}$ **10.** $\frac{x^3-x}{x-1}$

**11.** $\frac{p^{10}-q^{10}}{p^5+q^5}$ **12.** $\frac{3m^2n^2p^2}{m^3n^3-m^2n^2}$

**13.** $\frac{x(a^2-b^2)}{b^2-a^2}$ **14.** $\frac{ax+bx+cx}{ay+by+cy}$

**15.** $\frac{x^2yz+xy^2z+xyz^2}{x^2y^2z^2}$ **16.** $\frac{2x-2a}{6}\times\frac{1}{x^2-a^2}$

17. $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \div \dfrac{a+b}{a-b}$ 18. $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-3x}$

19. $\dfrac{a^2-7a}{a^2-14a+49}$ 20. $\dfrac{9-m}{m^3-18m^2+81m}$

21. $\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-6x} \times \dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 22. $\dfrac{6x^2-x-12}{y^2+5y} \times \dfrac{y^2-25}{12+x-6x^2}$

23. $\dfrac{10p^2q-7pq-12q}{p^2} \div \dfrac{23p-12-10p^2}{p^3}$

---

ഉത്തരം. 8. $bc(a-1)$ 9. $(m+n)(m-n)$ 10. $x(x+1)$
11. $p^5-q^5$ 12. $3p^2/(mn-1)$ 13. $-x$ 14. $x/y$
15. $(x-y+z)/xyz$ 16. $\dfrac{1}{3(x+a)}$ 17. $\dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$ 18. $\dfrac{x+2}{x}$
19. $\dfrac{a}{a-7}$ 20. $\dfrac{1}{m(9-m)}$ 21. $\dfrac{x+5}{x-6}$ 22. $\dfrac{5-y}{y}$ 23. $\dfrac{pq(5p+4)}{4-5p}$

അങ്കഗണിതത്തിൽ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൂട്ടുകയും, കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്ന രീതിയിൽ തന്നെ ബീജഗണിതത്തിലും ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

---

ഉദാഹരണം.

ലഘൂകരിക്കുക:

$$\frac{1}{x^2-2x-3}+\frac{3}{x^2-x-2}-\frac{5}{x^2-5x+6}$$

$$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$
$$x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$
$$x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$

∴ ഛേദങ്ങളുടെ ലഘുഗുണകം $=(x+1)(x-2)(x-3)$

ആയതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന രാശിമാല

$$=\frac{(x-2)+3(x-3)-5(x+1)}{(x+1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{x-2+3x-9-5x-5}{(x+1)(x-2)(x-3)}$$

$$=\frac{-x-16}{(x+1)(x-2)(x-3)}$$

## അഭ്യാസം 27.

ലഘൂകരിക്കുക.

1. $\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}$
2. $\frac{3}{x+5}-\frac{4}{x+2}$
3. $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{y-x}$
4. $\frac{2a}{a-3}+\frac{3a}{4+a}$
5. $\frac{x-y}{x+y}-1$
6. $1-\frac{m+n}{m-n}$
7. $\frac{x-y}{xy}+\frac{y-z}{yz}$
8. $\frac{a+b}{a-b}+\frac{b+a}{b-a}$
9. $\frac{a}{a-2}-\frac{2a}{a+3}-\frac{3}{a}$
10. $\frac{x^2}{x-5}+\frac{x}{x+2}-\frac{x}{3}$
11. $\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{2}{a+b}$
12. $\frac{5}{a-b}-\frac{6}{(a-b)^2}$
13. $\frac{2}{(a+b)(a-b)}-\frac{3}{a-b}$
14. $\frac{4}{a-b}-\frac{3}{a^2-b^2}$
15. $\frac{1}{x^2-a^2}+\frac{5}{(x+a^2)}-\frac{2}{(x-a)^2}$
16. $\frac{3}{x^2-2ax+a^2}+1+\frac{1}{x^2-a^2}$
17. $\frac{x}{x^2-4}-\frac{2x}{x^2+4x+4}+\frac{3}{x^2-4x+4}$
18. $\frac{4}{x^4-9}+\frac{3}{x^2+3}-\frac{2}{x^2+6x+9}$
19. $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}-\frac{2b}{a^2+b^2}-\frac{4b^3}{a^4+b^4}$
20. $\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a-2b}-\frac{8b^2}{a^3-4ab^2}$
21. $\frac{4x^2+x-14}{2x-14}\times\frac{4x(x-2)}{4x-7}\div\frac{2x^2+4x}{3x^2-x-14}$
22. $\frac{7x^3+19x^2-6x}{2x^2+x-15}\div\frac{7x^2-2x}{2x^2-7x+5}$
23. $\frac{9x-x^3}{x-3}\times\frac{x^4-50x^2+625}{x^3-10x^2+25x}\times\frac{1}{x^2+8x+15}$

24. $\dfrac{2}{2x^2+9x-18} - \dfrac{1}{x^2+5x-6}$

25. $\dfrac{2x^2-10x}{x^2-2x-15} + \dfrac{18x+6}{3x^2+10x+3}$

26. $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)^2} \div \left\{ \dfrac{1}{(1-x)^2} - \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)} + \dfrac{1}{(1-x^2)^2} \right\}$

27. $\dfrac{4x^3}{x^4-1} + \dfrac{1-\dfrac{1}{x^2}}{x+\dfrac{1}{x}} - \dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x-\dfrac{1}{x}}$

---

ഉത്തരം. 1. $\dfrac{2a}{a^2-1}$ 2. $\dfrac{-x-14}{(x+5)(x+2)}$ 3. $\dfrac{x+y}{x-y}$

4. $\dfrac{a(5a-1)}{(4+a)(a-3)}$ 5. $\dfrac{-2y}{x+y}$ 6. $\dfrac{-2n}{m-n}$ 7. $\dfrac{x-z}{xz}$

8. 0. 9. $\dfrac{-a^3+4a^2-3a+18}{a(a-2)(a+3)}$ 10. $\dfrac{2x^3+12x^2-5x}{3(x-5)(x+2)}$

11. $\dfrac{2a+2b+1}{(a+b^2)}$ 12. $\dfrac{5a-5b-6}{(a-b)^2}$ 13. $\dfrac{2-3a-3b}{a^2-b^2}$

14. $\dfrac{4a+4b-3}{a^2-b^2}$ 15. $\dfrac{4x^2+2a^2-14ax}{x^2-2a^2x^2+a^2}$

16. $\dfrac{x^3-ax(x+a)+4x+a^3+2a}{(x-a)^2(x+a)}$ 17. $\dfrac{-x^3+11x^2+12}{(x^2-4)^2}$

18. $\dfrac{x^4+18x^3+22x^2-30x-27}{(x^2-9)(x^2+6x+9)}$ 19. $\dfrac{8x^7}{a^8-b^8}$ 20. $\dfrac{2}{a}$

21. $\dfrac{(x^2-4)(3x-7)}{x-7}$ 22. $x-1$. 23. $-(x+5)$

24. $\dfrac{1}{(x-1)(2x-3)(x+6)}$ 25. 2. 26. $\dfrac{1}{1-x^3}$ 27. $\dfrac{4x}{x^2+1}$

---

## അദ്ധ്യായം 7.

### പാഠം 1.

# ഉത്തമഭാജകം.

അങ്കഗണിതത്തിൽ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഉത്തമഭാജകം എന്നു പറഞ്ഞാൽ നാം മനസ്സിലാക്കുന്നതു് ആ സംഖ്യകൾ രണ്ടിനേയും നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഏററവും വലിയ സംഖ്യ, അല്ലെങ്കിൽ ആ സംഖ്യകളുടെ ഏററവും വലിയ പൊതുഘടകം എന്നാണല്ലോ. എന്നാൽ ബീജഗണിതത്തിൽ വില നിശ്ചയമില്ലാത്ത അക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ടു ക്രിയചെയ്യുമ്പോൾ 'വലിയ' എന്ന പദത്തിനു അങ്കഗണിതത്തിലുള്ളപോലെ ഒരർത്ഥം ഉണ്ടാകുവാൻ തരമില്ല. ബീജഗണിതത്തിൽ രണ്ടു പദങ്ങളുടേയോ, രണ്ടു രാശിമാലകളുടേയോ ഉത്തമഭാജകം എന്നു പറഞ്ഞാൽ ആ പദങ്ങളുടേയോ, രാശിമാലകളുടേയോ ഏററവും ഉയർന്ന കൃതിയുള്ള പൊതുഘടകം എന്നാണു് അർത്ഥമാക്കേണ്ടതു്.

ഉദാഹരണം 1.

1. $a^2, a^3$ ഇവയുടെ ഉത്തമഭാജകം $a^2$
2. $x^2y, xy^2$ ............ $xy$
3. $8a^2bc, 12b^2c$ ............ $4bc$
4. $(a+1)^2, (a+1)^3$ ............ $(a+1)^2$
5. $(a+1)^2, (a^2-1)$ ............ $a+1$
6. $12(a-1)^2, 9(a^2-1)$ ............ $3(a-1)$
7. $(x+1)(x+2), (x+2)(x-3)$ ............ $x+2$
8. $(x+3)(2x+1), x(y+3)(2x+1)$ ............ $2x+1$
9. $a^2b(3a-2)(c+5), abc(3a-2)(c+1)$ ............ $ab(3a-2)$

## അഭ്യാസം 28.

ഉത്തമഭാജകം കാണുക:

1. $ab, a^2b$ 2. $abc, ab^2d$ 3. $2xy, 3yz$
4. $10p^2q^2, 15p^2q^2$ 5. $x(x+1), y(x+1)$
6. $x^2(y+1), x(z+1)$ 7. $xyz(x^2-3), xy^2(x-3)$
8. $(a+b)(b+c), (c+d)(c+b)$
9. $(m+n)(m+2n), (n+m)(m+3n)$
10. $(2m+3n)(3m+2n)(m+n), 3(m+n)(m+2n)$
11. $(x+2)(x-3)(x+1), (1+x)(2+x)(x-5)$
12. $x(2x-1)(x+3), x^2y(3+x)(3x-1)$

13. $2(a-b), 3(b-a)$
14. $15(x^2+y^2)(x-y), 20(y^2+x^2)(y-x)$
15. $12(x+y)^2(a-b), 8(b-a)(y+x)^2$
16. $27(m-n)^2(2m-n), 36(n-2m)(n-m)^2$

ഉദാഹരണം 2.

$6x^2+6x, 2x^2-2, 2x^2+4x+2$ ഇവയുടെ ഉത്തമഭാജകം കാണുക.

$$6x^2+6x=6x(x+1)$$
$$2x^2-2=2(x+1)(x-1)$$
$$2x^2+4x+2=2(x^2+2x+1)=2(x+1)^2$$

$\therefore$ ഉത്തമഭാജകം $=2(x+1)$

## അഭ്യാസം 29.

ഉത്തമഭാജകം കാണുക.

1. $4x+8y, 3x+6y$ 2. $x^2+xy, xy+y^2$
3. $x^2y-xy^2, x^2-2xy+y^2$
4. $6a^2-12ab+6b^2, 9a^2-9b^2$
5. $m^4-n^4, m^2+2mn+n^2$
6. $a^2-2ab, a^2-4b^2, 4a-8b$
7. $x^2+3x+2, x^2+5x+6$
8. $x^2+4x-5, x^2+5x-6$
9. $2x^2-x-1, 2x^2-13x-7$
10. $6x^2+17x+5, 3x^2+13x+4$
11. $x^3+3x^2+2x, 2x^2y-xy-3y$
12. $8x^4-2x^3-x^2, 2x^3-x^4-3x^5$
13. $p^3q+2p^2q^2+pq^3, p^4-p^2q^2$
14. $p^4-q^4, p^4+2q^2q^2+q^4$
15. $6m^5+m^4-m^3, 2m^2n^2-5mn^2-3n^2$
16. $5m^3-2m^2-3m, 11m^3-5m^2-6m^4$

---

ഉത്തരം. 1. $x+2y$ 2. $x+y$ 3. $x-y$ 4. $3(a-b)$ 5. $m+n$ 6. $a-2b$ 7. $x+2$ 8. $x-1$ 9. $2x+1$ 10. $3x+1$ 11. $x+1$ 12. $x^2$ 13. $p(p+q)$ 14. $p^2+q^2$ 15. $2m+1$ 16. $m(m-1)$.

## പാഠം 2.

# ലഘുഗുണകം.

അങ്കഗണിതത്തിൽ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ലഘുഗുണകം എന്നു പറഞ്ഞാൽ ആ സംഖ്യകൾകൊണ്ടു നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഏററവും ചെറിയ സംഖ്യ എന്നാണല്ലോ നാം മനസ്സിലാക്കുന്നതു്. എന്നാൽ ബീജഗണിതത്തിൽ അക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ടു ക്രിയചെയ്യുമ്പോൾ അവയുടെ വില നിശ്ചിതമല്ലാത്തതിനാൽ 'ചെറിയ' എന്ന പദത്തിനു അർത്ഥമുണ്ടാകാൻ തരമില്ലല്ലോ. രണ്ടു പദങ്ങളുടെയൊ രാശിമാലകളുടേയൊ ലഘുഗുണകം ആ പദങ്ങൾകൊണ്ടോ രാശിമാലകൾകൊണ്ടോ നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്ന ഏററവും കുറഞ്ഞ കൃതിയുള്ള പദമോ രാശിമാലയോ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 3.

**1.** $2x, 3x$ ഇവയുടെ ലഘുഗുണകം $6x$

**2.** $ax^2, bx^3$ .................................. $abx^3$

**3.** $4abc^2, 8a^2bc$ .................................. $8a^2bc^2$

ഉദാഹരണം 4.

$x^2-x, x^2-1, x^2-2x+1$ ഇവയുടെ ലഘുഗുണകം കാണുക.

$$x^2-x=x(x-1)$$
$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$
$$x^2-2x+1=(x-1)^2$$
$$\therefore \text{ ലഘുഗുണകം}=x(x+1)(x-1)^2$$

ഉദാഹരണം 5.

$2a^2-a-1, a^2+2a-3, 3a^2+7a-6$ ഇവയുടെ ലഘുഗുണകം കാണുക.

$$2a^2-a-1=(2a+1)(a-1)$$
$$a^2+2a-3=(a+3)(a-1)$$
$$3a^2+7a-6=(3a-2)(a+3)$$
$$\therefore \text{ ലഘുഗുണകം}=(2a+1)(a-1)(a+3)(3a-2)$$

## അഭ്യാസം 30.

ലഘുഗുണകം കാണുക:

**1.** $x^2-x-6, x^2-2x-3$

**2.** $a^2+4a-5, a^2+2a-3$

3. $p^2+7p+12,\ p^2-7p+12$
4. $2m^2-3m-2,\ 3m^2-8m+4$
5. $3-2q^2+q,\ 16q-15-4q^2$
6. $10x^2-11x-6,\ 8x^2-14x+3$
7. $10x^2+5x-15,\ 12x^2+6x-18$
8. $8y^2-40y+48,\ 3y^2-6y-9$
9. $m^3+2m^2-3m,\ m^3+m^2-6m$
10. $k^3-3k^2-10k, hk^2+7kh+10h$
11. $6p^3-7p^2-3p, 6p^2q+17pq+5q$
12. $12ab^2+5ab-2a,\ 12b-b^2-6b^3$
13. $x^3-x, x^4-1,\ x^2-2x+1$
14. $a^2+4a+4,\ a^3-4a,\ a^3+2a^2$
15. $3p^2+18p+27, 4ap-12a, 8pb+24b$
16. $5k^2-10k-5,\ 6k^2-24, 10k^2+20k+10$
17. $x^2-4x-5, x^2-x-12,\ x^2-9x+20$
18. $a^2-4a-21, 5a-6-a^2, 10a-a^2-21$
19. $6y^2+7y+2, 20y^2-y-1, 15y^2+13y+2$
20. $6z^2-13z+6, 6z^2-z-5, 3z^2-5z+2$
21. $10ab^2+17ab+3a, 20b^3-b^2-b; 8ab^2+10ab-3a$
22. $5x^4-5x^2, x^4y^2+3x^3y^2+2x^2y^2,\ x^2y^2z^2-y^2z^2$
23. $x^3+8,\ x^2-4$
24. $x^4y-xy^4, x^4y^2-x^2y^4$
25. $x^2+x-6, 2x^2+7x+3,\ 2x^2-3x-2$
26. $x^2-1, x^2+x-2, x^2+2x-3$

---

ഉത്തരം. **1.** $(x+1)(x+2(x-3)$ **2.** $(a+5)(a+3)(a-1)$ **3.** $(p+4)(p-4)(p+3)(p-3)$ **4.** $(3m-2)(m-2)(2m+1)$ **5.** $(1+q)(2q-5)(3-2q)$ **6.** $(5x+2)(4x-1)(2x-3)$ **7.** $30(2x+3)(x-1)$ **8.** $24(y-3(y+1)(y-2)$ **9.** $m(m+3)(m-1)(m-2)$ **10.** $hk(k+5)(k-5)(k+2)$ **11.** $pq(3p+1)(2p+5)(2p-3)$ **12.** $ab(3b+2)(4b-1)(4-3b)(3+2b)$ **13.** $x(x-1)^2(x^2+1)(x+1)$ **14.** $a^2(a-2)(a+2)^2$ **15.** $24ab(p+3)^2(p-3)$ **16.** $30(k^2-2k-1)(k+2)(k-2)(k+1)^2$

**17.** $(x-5)(x+1)(x-4)(x+3)$ **18.** $(a-3)(a-7)(a+3)(2-a)$ **19.** $(3y+2)(2y+1)(4y-1)(5y+1)$ **20.** $(2z-3)(3z-2)(z-1)(6z+5)$ **21.** $ab(2b+3)(5b+1)(4b-1)$ **22.** $5x^2y^2z^2(x+1)(x-1)(x+2)$ **23.** $(x-2)(x^2+8)$ **24.** $x^2y^2(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)$ **25.** $(x+3)(2x+1)(x-2)$ **26.** $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$

---

## അദ്ധ്യായം 7.

# സമവാക്യങ്ങൾ.

(തുടർച്ച)

ഒന്നാം കൃതിയിലുള്ളതും, ഒന്നോ രണ്ടോ അജ്ഞാതസംഖ്യയുള്ളതുമായ സമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നാം പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ നാം പഠിക്കുന്നതു് ഒരു അജ്ഞാതസംഖ്യയുള്ള ദ്വികൃതിസമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണമാണു്. ദ്വികൃതിസമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണത്തിൽ ഉപയോഗിക്കുന്ന തത്വം താഴെക്കാണുന്ന വിധത്തിൽ ചുരുക്കിപ്പറയാവുന്നതാണു്.

1. $xy=0$ എങ്കിൽ, ഒന്നുകിൽ $x=0$, അല്ലെങ്കിൽ $y=0$.

2. $xy$ പൂജ്യമല്ലെങ്കിൽ $x$, $y$ ഇവയുടെ വിലയെപ്പററി നിശ്ചിതമായി ഒന്നും പറയുവാൻ നിവൃത്തിയില്ല.

3. $(x+a)(x+b)=0$ എങ്കിൽ, ഒന്നുകിൽ $x+a=0$, അല്ലെങ്കിൽ $x+b=0$. അപ്പോൾ ഒന്നുകിൽ $x=-y$, അല്ലെങ്കിൽ $x=-b$.

4. $m$ പൂജ്യമല്ലാതിരിക്കെ $m(x+a)(x+b)=0$ എങ്കിൽ, ഒന്നുകിൽ $x=-a$, അല്ലെങ്കിൽ $x=-b$.

### അഭ്യാസം 13.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക:

**1.** $x(x-3)=0$ **2.** $(x+6)(x-1)=0$
**3.** $(x-5)(x+9)=0$ **4.** $(x+2)(x+3)=0$
**5.** $7x(x-7)=0$ **6.** $(2x+1)(x-1)=0$
**7:** $(4x-1)(5-2x)=0$ **8.** $(x-5)^2=0$
**9.** $(y+2)^2=0$ **10.** $9(5-3x)^2=0$
**11.** $(4x-9)(7y+6)=0$ **12.** $(2x+3)(10-7x)=0$

## പാഠം 1.

## ദ്വികൃതിസമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം ഘടകക്രിയാരീതി.

ഉദാഹരണം 1.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $x^2-5x+6=0$.

$$x^2-5x+6=0$$

ഘടകങ്ങളാക്കുമ്പോൾ, $(x-3)(x-2)=0$

ആയതിനാൽ ഒന്നുകിൽ $x-3=0$, അല്ലെങ്കിൽ $x-2=0$

$\therefore x=3$ അല്ലെങ്കിൽ $2$

ഉദാഹരണം 2.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $6x^2+x-12=0$

$$6x^2+x-12=6x^2+9x-8x+12$$
$$=3x(2x+3)-4(2x+3)$$
$$=(2x+3)(3x-4)$$

ആയതിനാൽ, $(2x+3)(3x-4)=0$

$\therefore$ ഒന്നുകിൽ $2x+3=0$, അല്ലെങ്കിൽ $3x-4=0$

$\therefore x=-\frac{3}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{4}{3}$

ഉദാഹരണം 3.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $4x^2-\frac{27}{8}=\frac{3}{2}x$

ഭിന്നസംഖ്യ മാററുമ്പോൾ, $32x^2-27=12x$

പക്ഷാന്തരീകരണം, $32x^2-12x-27=0$

ഘടകങ്ങളാക്കുമ്പോൾ, $32x^2-36x+24x-27=0$

$$4x(8x-9)+3(8x-9)=0$$
$$(8x-9)(4x+3)=0$$

ആയതിനാൽ, ഒന്നുകിൽ $8x-9=0$, അല്ലെങ്കിൽ $4x+3=0$

$\therefore x=\frac{9}{8}$ അല്ലെങ്കിൽ $-\frac{3}{4}$.

## അഭ്യാസം 32.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക:

**1.** $x^2-x-2=0$ **2.** $x^2+x-12=0$

**3.** $x^2-13x+42=0$ **4.** $2x^2+x=3$

5. $3x^2+13x-10=0$
6. $6x^2+1+5x=0$
7. $22x=8+15x^2$
8. $16x+4+15x^2=0$
9. $15+12x^2=29x$
10. $1=2x+35x^2$
11. $19x+12x^2+4=0$
12. $4x^2=4x+35$
13. $20x^2+89x+99=0$
14. $x^2+\cdot1x-\cdot3=0$
15. $x^2+\cdot1=\cdot7x$

---

ഉത്തരം. **1.** 2, −1 **2.** −4, 3 **3.** 6, 7 **4.** $-\frac{3}{2}$, 1 **5.** $-5, \frac{2}{3}$ **6.** $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ **7.** $\frac{4}{5}, \frac{2}{3}$ **8.** $-\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}$ **9.** $\frac{5}{3}, \frac{3}{4}$ **10.** $-\frac{1}{5}, \frac{1}{7}$ **11.** $-\frac{4}{3}, -\frac{1}{4}$ **12.** $3\frac{1}{2}, -2\frac{1}{2}$ **13.** $-2\frac{1}{4}, -2\frac{1}{5}$ **14.** ·5, −·6 **15.** ·5, ·2.

---

## പാഠം 2.

$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ എന്ന സർവ്വസമവാക്യങ്ങളം ഉപയോഗിച്ചു് വർഗ്ഗപൂർത്തീകരണം ചെയ്തു് നിർദ്ധാരണം.

ഉദാഹരണം 4.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $2x^2+x-5=0$

$$2x^2+x-5=0$$

$x^2$ ന്റെ ഗുണോത്തരംകൊണ്ടു് ഹരിക്കുമ്പോൾ,

$$x^2+\tfrac{1}{2}x-\tfrac{5}{2}=0$$

പക്ഷാന്തരീകരണം $x^2+\frac{1}{2}x=\frac{5}{2}$

ഇടത്തുവശത്തു വർഗ്ഗപൂർത്തീകരണം ചെയ്യുമ്പോൾ,

$$x^2+\tfrac{1}{2}x+(\tfrac{1}{4})^2=\tfrac{5}{2}+(\tfrac{1}{4})^2$$

അതായതു്, $(x+\frac{1}{4})^2=\frac{5}{2}+\frac{1}{16}=\frac{41}{16}$

$$\therefore x+\tfrac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{41}}{4}$$

$$\therefore x=\frac{\sqrt{41}}{4}-\frac{1}{4} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -\frac{\sqrt{41}}{4}-\frac{1}{4}$$

$$\simeq \underline{1{\cdot}351} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } \underline{-1{\cdot}851}$$

## അഭ്യാസം 33.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക:

(കരണികം ഉള്ള ഉത്തരങ്ങൾ വർഗ്ഗമൂലം കാണുന്നതിനുള്ള ക്രിയചെയ്യാതെ ഇട്ടിരുന്നാൽ മതിയാകും)

1. $2x^2-5x-3=0$
2. $4-11x+6x^2=0$
3. $4x^2-21x=18$
4. $1+3x=10x^2$
5. $6-36x^2+19x=0$
6. $7+41x=6x^2$
7. $x^2-5x+3=0$
8. $2x^2+5x+3=0$
9. $3x^2+8x+5=0$
10. $8-9x+2x^2=0$
11. $x+5=3x^2$
12. $-4x^2-6x-2=0$

---

ഉത്തരം. **1.** $3, -\frac{1}{2}$ **2.** $1\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ **3.** $6, -\frac{3}{4}$ **4.** $-\frac{1}{5}, \frac{1}{2}$ **5.** $\frac{3}{4}, -\frac{2}{9}$ **6.** $7, -\frac{1}{6}$ **7.** $2\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{13}$ **8.** $-1, -1\frac{1}{2}$ **9.** $-1, -\frac{5}{3}$ **10.** $\frac{1}{4}(9\pm\sqrt{17})$ **11.** $\frac{1}{6}(1\pm\sqrt{61})$ **12.** $-1, -\frac{1}{2}$.

---

## പാഠം 3.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ എന്ന സർവ്വസമവാക്യം ഉപയോഗിച്ചു് വർഗ്ഗപൂർത്തീകരണം ചെയ്തു നിർദ്ധാരണം.

### ഉദാഹരണം 5.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $3x^2-7x+4=0$

$x^2$ ന്റെ ഗുണോത്തരംകൊണ്ടു് ഹരിക്കുമ്പോൾ, $x^2-\frac{7}{3}x+\frac{4}{3}=0$

$x^2$ ന്റെ ഗുണോത്തരത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗ്ഗം കൂട്ടുകയും, കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ, $x^2-\frac{7}{3}x+(\frac{7}{6})^2-(\frac{7}{6})^2+\frac{4}{3}=0$

അതായതു്, $(x-\frac{7}{6})^2-(\frac{1}{6})^2=0$

$\therefore \quad (x-\frac{7}{6}+\frac{1}{6})(x-\frac{7}{6}-\frac{1}{6})=0$

അതായതു്, $(x-1)(x-\frac{4}{3})=0$

$\therefore$ ഒന്നുകിൽ $x-1=0$, അല്ലെങ്കിൽ $x-\frac{4}{3}=0$

$\therefore x=\underline{1}$ അല്ലെങ്കിൽ $\underline{\frac{4}{3}}$.

## അഭ്യാസം 34.

1. $3x^2-2x-8=0$
2. $2x^2+15x+7=0$
3. $6x^2+1=5x$
4. $15+11x=4x^2$
5. $x^2-3x+1=0$
6. $3x^2+9x+6=0$
7. $2x^2+x-9=0$
8. $2x+3=4x^2$
9. $7-x-2x^2=0$
10. $2x=5-3x^2$
11. $2x^2+1=7x$
12. $1+3x-5x^2=0$

---

ഉത്തരം. **1.** $2, -\frac{4}{3}$ **2.** $-7, -\frac{1}{2}$ **3.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ **4.** $-1, 3\frac{3}{4}$ **5.** $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$ **6.** $-1, -2$ **7.** $\frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{73})$ **8.** $\frac{1}{4}(1\pm\sqrt{13})$ **9.** $\frac{1}{4}(-1\pm\sqrt{57})$ **10.** $1, -\frac{5}{3}$ **11.** $\frac{1}{4}(7\pm\sqrt{41})$ **12.** $\frac{1}{10}(3\pm\sqrt{29})$

---

## പാഠം 4.

## നിർദ്ധാരണത്തിനുള്ള വാക്യം.

ദ്വികൃതിസമവാക്യത്തിന്റെ മാതൃകാരൂപമായ $ax^2+bx+c=0$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

എന്നു കിട്ടും. ഇതിന്റെ തെളിവ് ഇവിടെ പഠിക്കേണ്ടതില്ല.

മാതൃകാസമവാക്യത്തിന്റെ മൂലങ്ങളായി ഇവിടെ കിട്ടിയിരിക്കുന്ന രാശിമാലകളിൽ $a$, $b$, $c$ എന്ന അക്ഷരങ്ങൾക്ക പകരം ആ അക്ഷരങ്ങളുടെ വില (അക്കങ്ങൾ) പകരംവെച്ചു ലഘൂകരിച്ചാൽ സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്ത ഫലം കിട്ടുന്നതായിരിക്കും.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ എന്നുള്ളവാക്യം ഹൃദിസ്ഥമാക്കേണ്ടതാണ്.

## അഭ്യാസം 35.

വാക്യം ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക:

1. $x^2+x-6=0$
2. $x^2-x-30=0$
3. $x^2+21+10x=0$
4. $2x^2=5x+3$
5. $6x^2=6+5x$
6. $6x^2=25+5x$

7. $12+12x^2=25x$
8. $6-10x^2=11x$
9. $4-15x^2-17x=0$
10. $35=41x+24x^2$
11. $54+143x^2=177x$
12. $110+37x-28x^2=0$
13. $x^2+x=5$
14. $x^2=x+7$
15. $x^2-2x=1$
16. $x^2-3x-5=0$
17. $5=x+x^2$
18. $6+8x=x^2$
19. $9x+1=2x^2$
20. $10x-7-3x^2=0$
21. $3x^2+4x-9=0$
22. $5x^2+x=23$
23. $26=5x+5x^2$
24. $31-3x-14x^2=0$
25. $43x+51=17x^2$
26. $37x^2=61-47x$

---

ഉത്തരം. **1.** $2, -3$ **2.** $6, -5$ **3.** $-3, -7$ **4.** $3, -\frac{1}{2}$ **5.** $\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}$ **6.** $2\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}$ **7.** $\frac{4}{3}, \frac{3}{4}$ **8.** $\frac{2}{5}, -\frac{3}{2}$ **9.** $\frac{1}{5}, -\frac{4}{3}$ **10.** $\frac{5}{8}, -\frac{7}{3}$ **11.** $\frac{9}{13}, \frac{6}{11}$ **12.** $-\frac{10}{7}, \frac{11}{4}$ **13.** $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{21})$ **14.** $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{29})$ **15.** $1\pm\sqrt{2}$ **16.** $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{29})$ **17.** $\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{21})$ **18.** $4\pm\sqrt{22}$ **19.** $\frac{1}{4}(9\pm\sqrt{89})$ **20.** $1, 2\frac{1}{3}$ **21.** $\frac{1}{3}(-2\pm\sqrt{31})$ **22.** $\frac{1}{10}(-1\pm\sqrt{461})$ **23.** $\frac{1}{10}(-5\pm\sqrt{545})$ **24.** $\frac{1}{28}(-3\pm\sqrt{1745})$ **25.** $\frac{1}{34}(43\pm\sqrt{5317})$ **26.** $\frac{1}{74}(-47\pm\sqrt{11237})$

---

## പാഠം 5.

ലഘൂകരിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യേണ്ട സമവാക്യങ്ങൾ.

**ഉദാഹരണം 5.**

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $2x^2+14=(x+3)^2$

കോഷ്ഠങ്ങൾ മാററുമ്പോൾ, $2x^2+14=x^2+6x+9$

പക്ഷാന്തരീകരണം, $x^2-6x+5=0$

ഘടകങ്ങൾ ആക്കുമ്പോൾ, $(x-5)(x-1)=0$

$\therefore$ ഒന്നുകിൽ $x-5=0$, അല്ലെങ്കിൽ $x-1=0$

$\therefore \underline{x=5}$ അല്ലെങ്കിൽ $\underline{1}$

## അഭ്യാസം 36.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക:

1. $(x+1)(x+2)=56$
2. $(x-3)(x+5)=48$
3. $(x-1)(x-4)=10$
4. $(x-2)^2=2x^2+7$
5. $x^2=2(3x+8)$
6. $x(7-x)=-18$
7. $x(x+9)=220$
8. $x^2+(x-1)^2=\frac{1}{2}$
9. $(x-6)^2=\frac{5}{2}x+6$
10. $x+\frac{x^2}{8}=\frac{14}{9}$
11. $\frac{(x+\frac{1}{2})^2}{3}+\frac{x+\frac{3}{4}}{4}=\frac{7}{16}$
12. $(x-3)\left(\frac{2}{x}+3\right)=13\frac{1}{7}$

---

ഉത്തരം. **1.** 6, −9. **2.** 7, −9 **3.** 6, −1 **4.** −3 −1 **5.** 8, −2 **6.** 9, −2 **7.** 11, —20 **8.** $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ **9.** 12, $2\frac{1}{2}$ **10.** $-9\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{3}$ **11.** —2, $\frac{1}{4}$ **12.** 7, $-\frac{2}{7}$.

---

ഉദാഹരണം 7.

നേർഖണ്ഡം സമചതുരമായ ഒരു തടി (ആയതഘനം) യുടെ നീളം 6 അടിയും, അതിൻെറ വശങ്ങളുടെ ആകെ ക്ഷേത്രഫലം $12\frac{1}{2}$ ച. അടിയും ആയിരുന്നാൽ, തടിയുടെ വീതിയും കനവും കാണുക.

നേർഖണ്ഡത്തിൻെറ ഒരു വശം $x$ അടി എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ നേർഖണ്ഡങ്ങൾ രണ്ടിൻേറയും ആകെ ക്ഷേത്രഫലം $=2x^2$ ച. അടി.

ബാക്കിയുള്ള നാലുവശങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലം $=4\times 6x$ ച. അടി.

∴ ആകെ ക്ഷേത്രഫലം $=2x^2+24x$ ച. അടി.

ആയതിനാൽ, $2x^2+24x=12\frac{1}{2}$

ഭിന്നസംഖ്യമാററുമ്പോൾ, $4x^2+48x=25$

പക്ഷാന്തരീകരണം, $4x^2+48x-25=0$

ഘടകങ്ങളാക്കുമ്പോൾ, $4x^2+50x-2x-25=0$

അതായത്, $2x(2x+25)-(2x+25)=0$

,, $(2x+25)(2x-1)=0$

∴ ഒന്നുകിൽ $2x+25=0$ അല്ലെങ്കിൽ $2x-1=0$

∴ $x=\frac{1}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $-12\frac{1}{2}$

$-12\frac{1}{2}$ എന്നുള്ള സംഖ്യ ഋണാത്മകമാകയാൽ സ്വീകാര്യമല്ല.

∴ ആവശ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന അളവ് $=6$ ഇഞ്ച്.

## അഭ്യാസം 37.

**1.** ഒരു സംഖ്യയുടെ ഇരട്ടി ആ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തോടു സമമാണ്. എന്നാൽ ആ സംഖ്യയെന്ത്?

**2.** ഒരു സംഖ്യ അതിന്റെ വർഗ്ഗത്തോടു തുല്യമായിരിക്കുമോ? അങ്ങനെ തുല്യമായ ഒരു സംഖ്യയുണ്ടെങ്കിൽ അതെത്ര?

**3.** ഒരു ആയതക്ഷേത്രത്തിന്റെ നീളം അതിന്റെ വീതിയേക്കാരം 8 അടി കൂടുതലാണ്. അതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം 345 ച. അടിയാണെങ്കിൽ, നീളവും വീതിയും കാണുക.

**4.** രണ്ടു സംഖ്യകരം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 5, അവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 233. എന്നാൽ സംഖ്യകരം ഏവ?

**5.** രണ്ടു ക്രമസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 265. എന്നാൽ സംഖ്യകരം കാണുക.

**6.** ഒരു ത്രിഭുജത്തിന്റെ ആധാരം അതിന്റെ ഉന്നതിയേക്കാരം 3 ഇഞ്ചു കുറവാണ്. ത്രിഭുജത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം 35 ച. ഇഞ്ചാണെങ്കിൽ, ആധാരം എത്ര ഇഞ്ച്?

**7.** $S=\frac{1}{2}n(n+1)$ എന്ന വാക്യത്തിൽ S എന്നതു ആദ്യത്തെ $n$ നിസർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ തുകയാണ്. തുക 630 ആണെങ്കിൽ $n$ എത്ര?

**8.** ഒരു സമലംബകത്തിന്റെ ഉന്നതി അതിന്റെ സമാന്തരവശങ്ങളിൽ ഒന്നിനോടു തുല്യമാണ്. മറേറ സമാന്തരവശം 10 ഇഞ്ചും ക്ഷേത്രഫലം 48 ച. ഇഞ്ചും ആണെങ്കിൽ ഉന്നതി കാണുക.

**9.** മൂന്നു ക്രമസംഖ്യകരം ഒരു സമകോണത്രിഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളുടെ അളവുകരം ആണെങ്കിൽ, ആ സംഖ്യകരം കാണുക.

**10.** ഒരാരംക്ക് 23 വർഷം മുമ്പുണ്ടായിരുന്ന വയസ്സിന്റെ വർഗ്ഗം, ഇനിയും 19 വർഷം കഴിയുമ്പോരം ഉള്ള വയസ്സിനോടു തുല്യമെങ്കിൽ, അയാളുടെ ഇപ്പോഴത്തെ വയസ്സെത്ര?

**11.** ഒരു ക്ളാസ്സിലുള്ള ഓരോ കുട്ടിയും ആ ക്ളാസ്സിലുള്ള ശേഷം കുട്ടികരം ഓരോരുത്തർക്കും ഒരെഴുത്തുവീതം എഴുതുന്നു. ആകെ എഴുത്തുകളുടെ എണ്ണം 240 എങ്കിൽ, കുട്ടികളുടെ എണ്ണം എത്ര?

**12.** ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആരം $r$, അതിൽ ഉള്ള ഒരു ജ്യാവിന്റെ നീളം $d$, അതിന്റെ ചാപത്തിന്റെ ഉന്നതി $h$, എന്നാൽ $(\frac{1}{2}d)^2=h(2r-h)$. $d=16, r=17$ എങ്കിൽ $h$ എത്ര?

**13.** $n$ വശങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുഭുജത്തിന്റെ കർണ്ണങ്ങളുടെ എണ്ണം $\frac{1}{2}n(n-3)$ ആകുന്നു. 65 കർണ്ണങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുഭുജത്തിനു എത്ര വശങ്ങളുണ്ട്.

**14.** 12 ഇഞ്ചു നീളമുള്ള ഒരു ഋജുരേഖ രണ്ടായി ഭാഗിക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. ഒരു ഭാഗത്തിന്മേലുള്ള സമചതുരം മറേറ ഭാഗത്തി

മേലുള്ള സമചതുരത്തിൻെറ അഞ്ചിരട്ടിയായിരിക്കണമെങ്കിൽ ഓരോ ഭാഗത്തിൻേറയും നീളം കണ്ടുപിടിക്കുക.

**15.** $x$ രു. വിലയുള്ള ഒരു സാധനം $x\%$ ലാഭത്തിനു വിററു. വിററവില 5 രു. 4 ണ. യാണെങ്കിൽ വാങ്ങിയവില കാണുക.

**16.** ഒരു ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ പരിധി 62 ഇഞ്ചും അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം 238 ച. ഇഞ്ചും ആണ്. ഇതിൽനിന്നു ഒരു ദ്വികൃതിസമവാക്യം ഉണ്ടാക്കി അതു നിർദ്ധാരണംചെയ്തു നീളവും വീതിയും നിർണ്ണയിക്കുക.

**17.** സമുദ്രനിരപ്പിൽനിന്നു $h$ മൈൽ ഉയരത്തിലുള്ള ഒരു സ്ഥലത്തുനിന്നു നോക്കിയാൽ ചക്രവാളം $\sqrt{7920h+h^2}$ മൈൽ ദൂരത്തിൽ കാണുന്നു ചക്രവാളം 89 മൈൽ ദൂരത്തിൽ കാണണമെങ്കിൽ എന്തുയരത്തിൽനിന്നു നോക്കണം?

**18.** ഒരു ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം 130 ച. സെൻറീമീററർ ആണ്. അതിൻെറ നീളം ഒരു സെ. മീ. കുറയ്ക്കുകയും വീതി രണ്ടു സെ. മീ. കൂട്ടുകയും ചെയ്താൽ അതു് ഒരു സമചതുരമാകുമെങ്കിൽ ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ നീളവും, വീതിയും കാണുക.

**19.** മൂന്നു ക്രമസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം അടുത്ത മൂന്നു ക്രമസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തേക്കാൾ 510 കുറവാണെങ്കിൽ ഈ ആറു സംഖ്യകളിൽ ഏററം ചെറിയ സംഖ്യ എത്ര?

**20.** രണ്ടു ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങളുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള സ്ഥലത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം ചെറിയ വൃത്തത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലത്തോടു തുല്യമാണ്. ചെറിയ വൃത്തത്തിൻെറ ആരം 3 ഇഞ്ചാണെങ്കിൽ വലിയ വൃത്തത്തിൻെറ ആരം കാണുക.

**21.** 100 രു. വിലയുള്ള ഒരു വാച്ച് $x\%$ നഷ്ടത്തിനു ഏ എന്നയാൾ ബിയ്ക്കു വിററു. ബി $x\%$ നഷ്ടത്തിനു ആ വാച്ച് തിരികെ ഏയ്ക്കു 81 രൂപയ്ക്കു വിററു. എന്നാൽ $x$ എത്ര?

**22.** ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിൻെറ ആകെയുള്ള ക്ഷേത്രഫലം 6 ഇ. ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലത്തോടു തുല്യമാണ്. ഗോളസ്തംഭത്തിൻെറ ഉന്നതി 7 ഇഞ്ചാണെങ്കിൽ അതിൻെറ ആരം കണക്കാക്കുക,

**23.** ഗോളസ്തംഭാകൃതിയിൽ 2 ഇ. വ്യാസമുള്ള ഒരു ലോഹക്കട്ടി അത്രയും നീളമുള്ളതും, ഗോളസ്തംഭാകൃതിയിലുള്ളതുമായ ഒരു കുഴൽ ആയി വാർത്തെടുക്കേണ്ടിയിരിക്കുന്നു. കുഴലിൻെറ ആന്തരവ്യാസം 4 ഇ. ആയിരിക്കണമെങ്കിൽ അതിൻെറ ലോഹത്തിൻെറ കനം എത്ര ഇഞ്ച് എന്നു കണക്കാക്കുക.

**24.** ഒരാൾ സമചതുരമായ ഒരു വയൽ ഏക്കറൊന്നിന് 1210 രു. വിലയ്ക്കു വാങ്ങി, അതിൻെറ ചുററും ഗജമൊന്നിന് 2 രു. വീതം ചെലവുചെയ്തു് മതിൽ പണിതു. അയാൾക്കു ആകെ

ചെലവായതു് 2640 രൂ. ആണെങ്കിൽ വയലിന്റെ ഒരു വശം എന്തു നീളമുണ്ടെന്നു കാണുക.

**25.** ആയതക്ഷേത്രാകൃതിയിലുള്ള ഒരു സ്ഥലം 100 ഗജം നീളവും, 50 ഗജം വീതിയും ഉള്ളതാണു്. ഇതിന്റെ നാലരികിലും ഒരേ വീതിയിൽ ഒരു പാതയ്ക്കു സ്ഥലം ഒഴിച്ചിട്ടശേഷം ബാക്കിയുള്ള ഭാഗം ഒരു തോട്ടമാകുന്നു. തോട്ടത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 3600 ച. ഗജമാണെങ്കിൽ പാതയുടെ വീതി കാണുക.

**26.** ഒരു വ്യാപാരി 1000 രൂ. വിലയുള്ള ചരക്കു് $x\%$ ലാഭത്തിനു് വേറൊരാൾക്കു വിററു. ഇതു വാങ്ങിയ ആൾ $x\%$ ലാഭത്തിനു തിരികെ ആ വ്യാപാരിക്കുതന്നെ ഈ ചരക്കു വിററു. ഈ ഏർപ്പാടിൽ വ്യാപാരിക്കു് 240 രൂ. നഷ്ടമുണ്ടായെങ്കിൽ $x$ എത്ര?

**27.** ഒരു ജോലിക്കാരന്റെ ശമ്പളം രണ്ടു തരത്തിൽ കൊടുക്കാവുന്നതാണു്. ഒന്നുകിൽ ആദ്യവസാനം മാസംതോറും 50 രൂ. വച്ചോ, അല്ലെങ്കിൽ മാസശമ്പളം 35 രൂ. എന്നു തുടങ്ങി മാസംതോറും 3 രൂ. വീതം എല്ലാ മാസത്തിലും ശമ്പളം വർദ്ധിപ്പിച്ചോ ആകാവുന്നതാണു്. എത്ര മാസം ജോലിചെയ്താൽ അയാൾക്കു ആകെ കിട്ടുന്ന പണം രണ്ടു വിധത്തിൽ കൂട്ടിനോക്കിയാലും ഒന്നുപോലെയിരിക്കും. [$35+38+41+\ldots\ldots$ എന്ന ശ്രേണിയുടെ ആദ്യത്തെ $n$ പദങ്ങളുടെ തുക $\frac{1}{2}n(3n+67)$ ആകുന്നു.]

**28.** നാലു വശത്തും ഒരേ വീതിയിൽ ചട്ടമുള്ള ഒരു പടത്തിന്റെ ആകെ (ചട്ടമുൾപ്പെടെ) നീളം 12 ഇഞ്ചും ആകെ വീതി 10 ഇഞ്ചും ആകുന്നു. പടത്തിന്റെ തനിച്ചുള്ള ക്ഷേത്രഫലം ചട്ടത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലത്തോടു തുല്യമെങ്കിൽ ചട്ടത്തിന്റെ വീതി കാണുക.

**29.** ആയതഘനമായ ഒരു മരക്കഷ്ണത്തിന്റെ നീളം 5 ഇഞ്ചും, വീതി 2 ഇഞ്ചും കുറച്ചാൽ അതു് ഒരു ഘനമായി തീരുകയും അതിന്റെ ഘനഫലം 93 ഘനയിഞ്ചു് കുറയുകയും ചെയ്യും. മരക്കഷണത്തിന്റെ കനം കണക്കാക്കുക.

**30.** പഞ്ചസാരയുടെ വില $x\%$ കുറഞ്ഞപ്പോൾ മുമ്പുപയോഗിച്ചുകൊണ്ടിരുന്നതിന്റെ $2x\%$ കൂടുതൽ ഒരാൾ ഉപയോഗിച്ചു. ഇക്കാരണത്താൽ അയാൾ മാസംതോറും പഞ്ചസാരയ്ക്കു ചെലവാക്കിക്കൊണ്ടിരുന്ന ആകെ സംഖ്യ 1 രൂ. 4 ണ. 10 സ. യിൽ നിന്നു് 1 ക. 6 ണ. 6 സ, ആയിവർദ്ധിച്ചു. എന്നാൽ $x$ എത്ര?

---

ഉത്തരം. **3.** 23 അടി, 15 അടി **4.** 8, 13 **5.** 11, 12 **6.** 7 ഇഞ്ചു് **7.** 35 **8.** 6 ഇഞ്ചു് **9.** 3, 4, 5 **10.** 30 വർഷം **11.** 16 കുട്ടികൾ **12.** 2, 32 **13.** 13 **14.** 3·7 ഇഞ്ചു് അല്ലെങ്കിൽ 8·3 ഇഞ്ചു് ഏകദേശം **15.** 5 രൂ. **16.** 17 ഇ, 14 ഇ.

**17.** 1 മൈൽ **18.** 13 സെ. മീ.; 10 സെ. മീ. **19.** 5, –10 **20.** $\sqrt{18} \simeq 4{\cdot}24$ ഇ. **21.** 10 **22.** 2 **23.** ·236 ഇ. ഏകദേശം. **24.** 88 ഗജം **25.** 5 ഗജം **26.** 20 **27.** 11 മാസം **28.** $\frac{1}{2}(11-\sqrt{61})$ ഇ. $\simeq$ 1·6 ഇ. **29.** 3 ഇ. **30.** 10 അല്ലെങ്കിൽ 40

---

## പാഠം 6.

## ഭിന്നങ്ങൾ ഉള്ള ദ്വികൃതിസമവാക്യങ്ങൾ.

ഉദാഹരണം 8.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $\frac{2x+3}{3x+8} = \frac{x+6}{5x+2}$

വജ്രഗുണനം, $(2x+3)(5x+2) = (x+6)(3x+8)$

അതായതു്, $10x^3+19x+6 = 3x^2+26x+48$

പക്ഷാന്തരീകരണം, $10x^2-3x^2+19x-26x+6-48=0$

അതായതു് $7x^2-7x-42=0$

,, $7(x^2-x-6)=0$

$\therefore$ $x^2-x-6=0$

ഘടകങ്ങളാക്കുമ്പോൾ, $(x-3)(x+2)=0$

$\therefore$ ഒന്നുകിൽ $x-3=0$, അല്ലെങ്കിൽ $x+2=0$

$\therefore$ $\underline{x=3}$ അല്ലെങ്കിൽ $\underline{-2}$.

ഉദാഹരണം 9.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $\frac{4}{x}+\frac{5}{2x-4}=\frac{15}{3x-7}$

ഛേദങ്ങളുടെ ലഘുഗുണകം $= x(2x-4)(3x-7)$

ഇതുകൊണ്ടു് ഗുണിക്കുമ്പോൾ

$$4(2x-4)(3x-7)+5x(3x-7)=15x(2x-4)$$

അതായതു്, $24x^2-104x+112+15x^2-35x=30x^2-60x$

പക്ഷാന്തരീകരണം, $24x^2+15x^2-30x^2-104x-35x+60x+112=0$

അതായതു്, $9x^2-79x+112=0$

ഘടകങ്ങളാക്കമ്പോഠം, $9x^2-63x-16x+112=0$

$$9x(x-7)-16(x-7)=0$$

$$(x-7)(9x-16)=0$$

$\therefore$ ഒന്നുകിൽ $x-7=0$, അല്ലെങ്കിൽ $9x-16=0$

$\therefore \underline{x=7}$ അല്ലെങ്കിൽ $\underline{\frac{16}{9}}$.

## അഭ്യാസം 38.

ഉത്തരങ്ങളിൽ കരണികഠം ഉണ്ടായിരുന്നാൽ അവ ക്രിയചെയ്തു് ലഘൂകരിക്കേണ്ടതില്ല.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക:

1. $x=\frac{1}{x}$ 2. $x+\frac{1}{x}=3$

3. $\frac{7}{3x}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{4}$ 4. $2\left(x-\frac{1}{x}\right)=3$

5 $x-\frac{x+1}{2x-3}=8\frac{1}{3}$ 6. $\frac{x}{3x-11}=\frac{x-3}{16}$

7. $\frac{4}{2x+3}=3x-7$ 8. $\frac{x-1\frac{1}{2}}{x+1}=\frac{x+1\frac{1}{2}}{4x-7}$

9. $\frac{x+1}{3}-\frac{3}{x+1}=\frac{4x}{15}$ 10. $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}+7\frac{1}{7}=0$

11. $x+\frac{3-x^3}{1+x^2}=1$ 12. $\frac{16}{x+3}+5x+1=2(6-x)$

13. $\frac{x+10}{x-10}=\frac{25(x-10)}{x+10}$ 14. $(x-3)\left(\frac{2}{x}+1\right)=5\frac{1}{7}$

15. $x\left(\frac{5}{x-3}+2\right)=42$ 16. $\frac{3x}{2x-1}+\frac{2x-1}{3x}=\frac{10}{3}$

17. $\frac{x+7}{3x}+\frac{x+4}{2x}=3$ 18. $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x}=0$

19. $\frac{2}{x^2-x-2}=\frac{1}{x^2-16}$ 20. $\frac{1}{x^2-2}+\frac{1}{x^2-3}=0$

21. ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയുടെ അംശം അതിൻെറ ഛേദത്തേക്കാഠം 3 കുറവാണു്. അംശത്തോടു പതിന്നാലും, ഛേദത്തോടു് അഞ്ചും

കൂട്ടിയാൽ ഭിന്നത്തിന്റെ വില ഇരട്ടിയാകും. എന്നാൽ ആ ഭിന്നസംഖ്യ കാണുക.

**22.** ഒരു പുസ്തകത്തിന്റെ കുറെ പ്രതികൾ 105 രൂപയ്ക്കു വാങ്ങി. വിലകൂടാതെ 5 പ്രതികൾകൂടെ കിട്ടിയിരുന്നെങ്കിൽ ഒരു പ്രതിയുടെ ശരാശരി വില 6 ണ. കുറയുമായിരുന്നു. ആദ്യം വാങ്ങിയതു് എത്ര പ്രതികൾ?

**23.** ഒരാൾ തന്റെ വീട്ടിൽനിന്നു് രണ്ടു മൈൽ ദൂരെയുള്ള ആഫീസിലേക്കു് പതിവായി പോയ്ക്കൊണ്ടിരുന്നു. ഒരു ദിവസം അയാളുടെ നടപ്പിന്റെ വേഗം മണിക്കൂറൊന്നിനു് ഒരു മൈൽ വർദ്ധിപ്പിക്കയും, അതിന്റെ ഫലമായി അന്നു് ആഫീസിൽ 10 മിനിട്ടു നേരത്തെ എത്തിച്ചേരുകയും ചെയ്തു. അയാൾ പതിവായി മണിക്കൂറിൽ എത്രമൈൽ വീതം നടന്നിരുന്നു?

**24.** ഒരു ഹോട്ടലിൽ 67 രു. 8 ണ. യ്ക്കു് കുറെ ആളുകൾക്കു ഭക്ഷണം തയ്യാറാക്കിയിരുന്നു. എന്നാൽ അവരിൽ മൂന്നുപേർ സമയത്തു വരാഞ്ഞതിനാൽ വന്നവരിൽ ഓരോരുത്തരും 1 രു. 2 ണ. വീതം കൂടുതൽ കൊടുക്കേണ്ടിവരുന്നു. എത്രപേർ വന്നിരുന്നു?

**25.** ഒരാൾ സൈക്കിളിൽ 15 മൈൽ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നു. വേറൊരുവൻ മണിക്കൂറിൽ 3 മൈൽ കൂടുതൽ വേഗത്തിൽ സവാരിചെയ്തു 50 മിനിട്ടു കുറച്ചു സമയം കൊണ്ടു 15 മൈൽ പോകുന്നു. ഇവർ രണ്ടുപേരുടേയും ഗതിവേഗങ്ങൾ കാണുക.

**26.** ഒരു ക്ലാസ്സിലുള്ള കുട്ടികളുടെ ആകെ വയസ്സു് 378 ആണു്. 18 വയസ്സുവീതമുള്ള മൂന്നു കുട്ടികൾ ആ ക്ലാസ്സിൽനിന്നു പോയപ്പോൾ, ഒരു കുട്ടിയുടെ ശരാശരി വയസ്സു് 6 മാസം കുറഞ്ഞു. ക്ലാസ്സിലുള്ള കുട്ടികളുടെ എണ്ണം എത്ര?

**27.** ഒരു വേലചെയ്യുന്നതിനു് ഏയ്ക്കു വേണ്ട സമയം ബീയ്ക്കു വേണ്ട സമയത്തേക്കാൾ ഒരു മണിക്കൂർ കുറവാണു്. ഏയും ബീയും കൂടി ഒന്നിച്ചു് ജോലി ചെയ്താൽ ആ വേല 3 മണിക്കൂർ 44 മിനിട്ടുകൊണ്ടു തീർക്കാം. ഏ തനിച്ചു ജോലി ചെയ്താൽ എന്തുസമയംകൊണ്ടു ആ വേലതീർക്കാം?

**28.** രണ്ടു കുഴലുകളിൽക്കൂടി ഒരേസമയത്തു വെള്ളം ഒഴുകി ഒരു തൊട്ടിയിൽ വീണാൽ, ആ തൊട്ടി $5\frac{5}{11}$ മിനിട്ടുകൊണ്ടു നിറയും. ഇവയിൽ ഒന്നിൽകൂടിമാത്രം ഒഴുകിയാൽ തൊട്ടി നിറയുന്നതിനു മറേറതിൽകൂടി മാത്രം ഒഴുകുന്നതിനേക്കാൾ രണ്ടു മിനിട്ടു കൂടുതൽ വേണം, ഓരോ കുഴൽമാത്രം തുറന്നുവെച്ചാൽ എന്തുസമയം വീതം വേണമെന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

**29.** ഒരു പെട്ടിയുടെ ഒരു ഷോപ്പിലെ വില മറെറാരു ഷോപ്പിലെ വിലയേക്കാൾ 12 ണ. കൂടുതലാണു്. 150 രൂപാ കൊടുത്താൽ രണ്ടാമത്തെ ഷോപ്പിൽനിന്നു മറേറതിൽനിന്നു വാങ്ങുന്നതിനേക്കാൾ

45 പെട്ടികൾ കൂടുതൽ വാങ്ങാം. ഓരോ ഷോപ്പിലും ഒരു പെട്ടിയുടെ വിലയെന്തു്?

**30.** മണിക്കൂറിൽ 2 മൈൽ വേഗത്തിൽ ഒഴുകുന്ന ഒരു നദിയിൽകൂടി ഒരാൾ 6 മൈൽ താഴോട്ടും അത്രയും ദൂരം ഒഴുക്കിനെതിരായും ആകെ 4 മണിക്കൂർ കൊണ്ടു് സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഒഴുക്കില്ലാത്ത ജലത്തിൽ മണിക്കൂറിൽ എത്ര മൈൽ വേഗത്തിൽ അയാൾ സഞ്ചരിക്കും?

**31.** ഒരാൾ ഒരു പുരയിടം 1080 രൂപയ്ക്കു പാട്ടത്തിനേൽക്കുന്നു. അതിൽ മൂന്നേക്കർ അയാൾതന്നെ കൃഷിചെയ്യുകയും ബാക്കിയുള്ള സ്ഥലം ഏക്കറൊന്നിനു് 10 രൂ. കൂടുതൽ പാട്ടത്തിനു മററാളുകൾക്കു് കൊടുക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഈ ബാക്കിയുള്ള സ്ഥലത്തിനു കിട്ടുന്ന പാട്ടം അയാൾ കൊടുക്കേണ്ട ആകെയുള്ള പാട്ടത്തിന്റെ $\frac{5}{6}$ ആണെങ്കിൽ ആ പുരയിടം എത്ര ഏക്കർ എന്നു കണ്ടുപിടിക്കുക.

---

ഉത്തരം. **1.** $\pm 1$ **2.** $\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$ **3.** $4, 2\frac{1}{3}$ **4.** $2, -\frac{1}{2}$ **5.** $9, 1\frac{1}{3}$ **6.** $11, 1$ **7.** $\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}$ **8.** $4\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ **9.** $4, -10$ **10.** $1\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2}$ **11.** $2, -1$ **12.** $1, -2\frac{3}{7}$ **13.** $15, 6\frac{2}{3}$ **14.** $7, -\frac{6}{7}$ **15.** $18, 3\frac{1}{2}$ **16.** $1, -\frac{1}{7}$ **17.** 2 **18.** 3 **19.** $5, -6$ **20.** $\pm\sqrt{2\frac{1}{2}}$ **21.** $\frac{7}{10}$ **22.** 35 **23.** മണിക്കൂറിൽ 3 മൈൽ **24.** 12 **25.** മണിക്കൂറിൽ 6 മൈൽ; മണിക്കൂറിൽ 9 മൈൽ **26.** 27 **27.** 7 മണിക്കൂർ **28.** 10 മി., 12 മി. **29.** 2 രൂ., 1 രൂ. 4 ണ. **30.** മണിക്കൂറിൽ 4 മൈൽ **31.** 12 ഏക്കർ.

---

## പാഠം 7.

## രണ്ടു അജ്ഞാതസംഖ്യകളുള്ള ദ്വികൃതി സമവാക്യങ്ങൾ.

ഉദാഹരണം 10.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $x+2y=9$ .... ....A

$2x^2-3y^2=38$ .... ....B

*A* യിൽനിന്നു്, $x=9-2y$ .... .... ....C

*B* യിൽ $x$-നു പകരം $9-2y$ വെച്ചാൽ,

$$2(9-2y)^2-3y^2=38$$

കോഷ്ഠങ്ങൾ മാററുമ്പോൾ, $162-72y+8y^2-3y^2=38$

പക്ഷാന്തരീകരണം, $5y^2-72y+124=0$

ഘടകങ്ങളാക്കിയാൽ, $5y^2-10y-62y+124=0$

$$5y(y-2)-62(y-2)=0$$

$$(y-2)(5y-62)=0$$

∴ ഒന്നുകിൽ $y-2=0$ അല്ലെങ്കിൽ $5y-62=0$

∴ $y=2$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{62}{5}$

$y$ യുടെ ഈ വിലകൾ $C$ യിൽ പകരം വെച്ചാൽ,

$x=9-4=5$, അല്ലെങ്കിൽ $x=9-\frac{124}{5}=\frac{79}{5}$

ആയതിനാൽ, സമവാക്യങ്ങളുടെ മൂലങ്ങൾ

$$\left.\begin{array}{l} x=5 \\ y=2 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} x=-15\frac{4}{5} \\ y=\ \ 12\frac{2}{5} \end{array}\right\}$$

## അഭ്യാസം 39.

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക:

**1.** $x+y=5$, $2x^2+y^2=17$  **2.** $x-y=6$, $x^2-3y^2=46$  **3.** $2x+y=2$, $x^2+y^2=8$

**4.** $y-3x=5$, $x+xy=9$  **5.** $5+y=x$, $xy+x^2=12$  **6.** $x-4=y$, $y^2+2xy=28$

**7.** $y-3x=2$, $xy=5$  **8.** $3(y-x)=\frac{1}{2}xy=3$  **9.** $x+y=\frac{5}{6}$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5$

**10.** $2x^2-3y^2=23$, $x-4y=-7$  **11.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5\frac{1}{2}$, $xy=\frac{1}{6}$  **12.** $\frac{2}{x}-\frac{3}{y}=3$, $2xy=\frac{6}{5}$

**13.** $3x+4y=2$, $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=11$  **14.** $2x-y=7$, $x^2+2y^2+xy=8$  **15.** $2x^2+y^2-3y=6$, $x-4y=5$

**16.** $2x-y=7$, $3x^2+4xy+y^2-3$  **17.** $2x^2=xy-x+50$, $x=3y-8$  **18.** $44=y+5x$, $3xy+x^2=y^2-y+52$

ഉത്തരം. **1.** 2, 3; $1\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{3}$ **2.** 11, 5; 7, 1 **3.** 2, −2; $-\frac{2}{5}$, $2\frac{4}{5}$ **4.** 1, 8; −3, −4 **5.** 4, −1; $-1\frac{1}{2}$, $-6\frac{1}{2}$ **6.** 6, 2; $-\frac{2}{3}$ $-4\frac{2}{3}$ **7.** 1, 5; $-\frac{5}{3}$, −3 **8.** 2, 3; −3, −2 **9.** $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ : $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ **10.** 5, 3; $-\frac{103}{29}$, $\frac{25}{29}$ **11.** $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$ : $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$ **12.** −1, $-\frac{3}{5}$; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{2}$ **13.** $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{11}$; $\frac{4}{11}$ **14.** 3, −1; $\frac{30}{11}$, $-\frac{17}{11}$ **15.** 1, −1; $-\frac{1}{3}$, $-1\frac{1}{3}$ **16.** 2, −3; $\frac{26}{15}$, $-\frac{53}{15}$ **17.** 6, $4\frac{2}{3}$ −5, 1 **18.** 9·007, −1·035; 5·659, 15·705.

---

## ഉദാഹരണം 11.

ആയതക്ഷേത്രമായ ഒരു സ്ഥലത്തിന്റെ പരിധി 72 ഗജവും, അതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം 315 ച. ഗജവും ആകുന്നു. എന്നാൽ അതിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക.

### വിധം 1.

നീളം $x$ ഗജവും, വീതി $y$ ഗജവും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

എന്നാൽ പരിധി $=2(x+y)$ ഗജം

ക്ഷേത്രഫലം $= xy$ ച. ഗജം

ആയതിനാൽ, $2(x+y)=72$ .... .... .... A

$xy=315$ .... .... .... B

A യിൽനിന്ന് $x+y=36$

$\therefore\ x=36-y$ .... .... .... C

$x$ ന്റെ ഈ വില B യിൽ പകരം വെച്ചാൽ,

$y(36-y)=315$

കോഷ്ഠങ്ങൾ മാറ്റുമ്പോൾ, $36y-y^2=315$

പക്ഷാന്തരീകരണം, $y^2-36y+315=0$

ഘടകങ്ങളാക്കുമ്പോൾ, $(y-21)(y-15)=0$

$\therefore\ y-21=0$ അല്ലെങ്കിൽ $y-15=0$

$\therefore\ y=21$ അല്ലെങ്കിൽ 15.

$y$ യുടെ ഈ വില C യിൽ പകരം വെച്ചാൽ,

$x=15$ അല്ലെങ്കിൽ 21

$\therefore$ നീളം $=21$ ഗജം

വീതി $=15$ ഗജം

വിധം 2.

നീളം $x$ ഗജം എന്നിരിക്കട്ടെ.
അപ്പോൾ, പരിധിയുടെ പകുതി 36 ആകയാൽ,
വീതി$=36-x$ ഗജം
$\therefore$ ക്ഷേത്രഫലം$=x(36-x)$ ച. ഗജം
ആയതിനാൽ, $x(36-x)=315$.
ഈ സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്തു ക്രിയ തുടരുക.
ഈ ഉദാഹരണത്തിലെ കണക്ക് മററു വിധത്തിലും ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

## അഭ്യാസം 40.

1. രണ്ടു സ്ഥാനമുള്ള ഒരു സംഖ്യയിൽ പത്തിൻെറ സ്ഥാനത്തെ അക്കം ഒന്നിൻെറ സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തേക്കാൾ 5 കൂടുതൽ ആണ്. രണ്ടക്കങ്ങളുടേയും ഗുണനഫലത്തിൻെറ നാലിരട്ടിയേക്കാൾ 13 കുറവാണ് സംഖ്യയെങ്കിൽ സംഖ്യ കാണുക.

2. ഒരു ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ നാലു ശീർഷങ്ങളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരച്ചിരിക്കുന്നു. ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ പരിധി 56 ഇഞ്ചും, വൃത്തത്തിൻെറ ആരം 10 ഇഞ്ചും ആയിരുന്നാൽ ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ നീളവും വീതിയും കാണുക.

3. ഒരു സമകോണത്രിഭുജത്തിൻെറ ശ്രവണം 39 സെ. മീററും, അതിൻെറ പരിധി 90 സെ. മീററും ആയാൽ ത്രിഭുജത്തിൻെറ ബാക്കി രണ്ടു വശങ്ങൾ കാണുക.

4. 6 അടി നീളമുള്ള ഒരു കമ്പി ഒരു ച. അടി ക്ഷേത്രഫലമുള്ള ഒരു ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ ആകൃതിയിൽ വളച്ചിരിക്കുന്നു. ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ നീളവും, വീതിയും കാണുക,

5. ഒരു ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ പരിധി 290 ഗജമാണ്. അതിൻെറ നീളം 15 ഗജവും, വീതി 5 ഗജവും വർദ്ധിപ്പിച്ചാൽ ക്ഷേത്രഫലം 1450 ച. ഗജം വർദ്ധിക്കുന്നു. ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ ആദ്യത്തെ നീളവും, വീതിയും കാണുക.

6. രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ ആരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 7 ഇഞ്ചും, അവയുടെ ക്ഷേത്രഫലങ്ങളുടെ തുക 770 ച. ഇഞ്ചുമാകുന്നു. വൃത്തങ്ങളുടെ ആരങ്ങൾ കാണുക. $(\pi=3\frac{1}{7})$

7. സമചതുരാകൃതിയിലുള്ള രണ്ടു വയലുകൾക്കു ചുററും വേലി കെട്ടുന്നതിന് ഗജത്തിനു 4 ണ. വെച്ച് 55 രൂ. ചെലവായി. ച. ഗജത്തിനു 4 ണ. വെച്ച് വയലുകൾ രണ്ടിനുംകൂടി ആകെ ചിലവ് 393 രൂ. 4 ണ. ആയാൽ വയലുകളുടെ വശങ്ങൾ കാണുക.

8. ഒരാൾ സൈക്കിളിൽ 16 മൈൽ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നതിനു പുറപ്പെട്ടു. ഒരു മണിക്കൂർ യാത്രചെയ്തപ്പോൾ സൈക്കിളിനു കേടുഭവിക്ക

യാൽ ബാക്കിയുള്ള ദൂരം $1\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർകൊണ്ടു് അയാൾ നടന്നു. 12 മൈൽ സൈക്കിളിൽ പോയശേഷം അതിനു കേടു ഭവിച്ചിരുന്നെങ്കിൽ 18 മിനിട്ടു നേരത്തെ ഉദ്ദിഷ്ടസ്ഥാനത്തു് എത്തുമായിരുന്നു. എന്നാൽ സൈക്കിൾ യാത്രയുടേയും, നടപ്പിന്റെയും ഗതിവേഗങ്ങൾ കാണുക.

---

ഉത്തരം. **1**. 83 **2**. 16 ഇ; 12 ഇ. **3**. 36 സെ. മീ; 15 സെ. മീ. **4**. 2·618 അടി, 382 അടി **5**. 80 ഗജം, 65 ഗജം **6**. 7 ഇ; 14 ഇ. **7**. 33 ഗജം, 22 ഗജം **8**. 10 മൈൽ, 4 മൈൽ, $8\frac{8}{11}$ മൈൽ, $4\frac{28}{33}$ മൈൽ.

---

## അഭ്യാസം 41.

## സമ്മിശ്രം

**1**. ഒരു സംഖ്യ മറ്റൊന്നിന്റെ അഞ്ചിരട്ടിയാണു്. അവയുടെ ഗുണനഫലം 45. എന്നാൽ സംഖ്യകൾ ഏവ?

**2**. രണ്ടു സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതസംഖ്യ 3:4. അവയുടെ ഗുണനഫലം 588. സംഖ്യകൾ കാണുക.

**3**. നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $6=x^2-x$.

**4**. രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക 11; അവയുടെ വർഗ്ഗങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 33. എന്നാൽ സംഖ്യകൾ കാണുക.

**5**. രണ്ടു ക്രമസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം 25 ആണെങ്കിൽ ആ സംഖ്യകൾ കാണുക.

**6**. നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $4y^2-12y-7=0$.

**7**. രണ്ടു സമചതുരങ്ങളുടെ പരിധികളുടെ തുക 52 ഇ. അവയുടെ ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 13 ച. ഇ. എന്നാൽ സമചതുരങ്ങളുടെ വശങ്ങൾ കാണുക.

**8**. $S=at+bt^2$ എന്ന വാക്യത്തിൽ $S=104$, $a=20$, $b=16$ എങ്കിൽ $t$ എത്രയെന്നു കാണുക.

**9**. നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $x^2-180x+7776=0$

**10**. $H=520B+B^2$ എന്ന വാക്യത്തിൽ $H$, 5300 ആണെങ്കിൽ $B$ എത്രയെന്നു കാണുക.

**11**. നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക:

$$4(2x+3)(2x+1)-100=(4x+9)(4x-9)+(2x+3)^2$$

**12**. $\frac{1}{2}(x-2)(x-3)$, $\frac{1}{7}(x+2)(3x-13)$ എന്നിവ രണ്ടു ക്രമസംഖ്യകളാകുന്നു. ഇവയിൽ വലുതു് ആദ്യത്തേതാണെങ്കിൽ സംഖ്യകൾ രണ്ടും കാണുക.

**13.** നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $\frac{3x-3}{2x+1}-\frac{2x}{\frac{1}{3}(x-2)}=6$

**14.** നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x-4}$

**15.** $x$ എത്രയായിരുന്നാൽ $\frac{5}{x+2}+\frac{3}{x}$ എന്നതു് $\frac{14}{x+4}$ നോടു തുല്യമായിരിക്കും?

**16.** നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $\frac{x+1}{x+3}+\frac{x-2}{x+2}=2.$

**17.** ഒരു കാർ ഒരേ ഗതിവേഗത്തിൽ 50 മൈൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അതിന്റെ വേഗം മണിക്കൂറിൽ 5 മൈൽ കൂട്ടിയാൽ ഈ യാത്രയ്ക്കു് അര മണിക്കൂർ സമയം കുറച്ചു മതിയാകും. കാറിന്റെ ഗതിവേഗം എന്തു്?

**18.** നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $\sqrt{2x+4}-\sqrt{2x-3}=1$

[സൂചന: $(2x+4)-(2x-3)=7$ എന്നു നമുക്കറിയാം. ഈ സമവാക്യത്തെ തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യംകൊണ്ടു് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്നതു്, $\sqrt{2x+4}+\sqrt{2x-3}=7$ എന്നാണു. ഈ സമവാക്യവും, തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യവും ഒന്നിച്ചു കൂട്ടുക. ക്രിയ തുടരുക.]

**19.** നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $\frac{x+1}{x+2}+\frac{3}{x+3}=\frac{x+2}{x}$

**20.** നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $\sqrt{x+6}=\sqrt{x-1}+1$

[സൂചന: രണ്ടു വശങ്ങളുടേയും വർഗ്ഗങ്ങൾ കാണുക.]

**21.** $x=t+1$, $y=t^2+t$. എന്നാൽ $y$, $x$ ന്റെ ഒരു ധർമ്മമായി പറയുക. $t$ എത്രയായിരുന്നാൽ $x$, $y$ എന്നിവ തുല്യമായിരിക്കും?

**22.** നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക:

$$\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}=0$$

**23.** $\frac{3}{x-3}=\frac{2x+3}{x(x-3)}-\frac{4}{x}$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്തു കിട്ടുന്ന ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു (സമവാക്യത്തിൽ പകരം വെച്ചു) പരിശോധിക്കുക. ഈ പരിശോധനയിൽനിന്നു് എന്തു മനസ്സിലാകുന്നു?

**24.** രണ്ടു തീവണ്ടിസ്റ്റേഷൻ തമ്മിലുള്ള അകലം 550 മൈൽ ആണു്. ഇവയ്ക്കിടയ്ക്കു സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു തീവണ്ടി മണിക്കൂറിൽ $2\frac{1}{2}$ മൈൽ കൂടുതൽവേഗത്തിൽ ഓടിയാൽ, യാത്രയ്ക്കുള്ള സമ

യം 2 മണിക്കൂർ കുറച്ചു മതിയാകും. കൂടിയ വേഗത്തിൽ ഈ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നതിന് എന്തു സമയം വേണം?

**25.** നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക:

$$\frac{x+4}{x+3}+\frac{x-12}{x-13}=\frac{x+3}{x+2}+\frac{x-11}{x-12}$$

[സൂചന: ഹരിച്ചെഴുതിയാൽ,

$$1+\frac{1}{x+3}+1+\frac{1}{x-13}=1+\frac{1}{x+2}+1+\frac{1}{x-12}$$

$$\therefore \frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-13}=\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x-12}$$ ഒരേ വശത്തുള്ള പദങ്ങൾ കൂട്ടി എഴുതുമ്പോൾ, $\frac{2x-10}{(x+3)(x-13)}=$............ ക്രിയ തുടരുക.]

**26.** നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{2}{x}$

**27.** $\frac{5}{x}-\frac{5}{x-1}+\frac{2}{x-2}=\frac{4}{x(x-1)(x-2)}$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്തു കിട്ടുന്ന ഉത്തരങ്ങൾ രണ്ടും സ്വീകാര്യമോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. സ്വീകാര്യമല്ലെങ്കിൽ എന്തുകൊണ്ട്?

**28.** ഒരാൾ 132 രൂപയ്ക്ക് ഒരു പുരയിടം പാട്ടത്തിനേററു. ഇതിൽ 3 ഏക്കർ അയാൾതന്നെ കൃഷി ചെയ്യുന്നതിനു എടുത്തശേഷം ബാക്കി സ്ഥലം ഏക്കർ ഒന്നിന് രണ്ടു രൂപാ കൂടുതൽ പാട്ടത്തിനു കൊടുത്തു് 112 രൂ. വാങ്ങുന്നു. പുരയിടം ആകെ എത്ര ഏക്കർ?

**29.** $\frac{x-3\cdot5}{2x+5}=\frac{3x-1\cdot5}{2x-1}$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്തു കിട്ടുന്ന ഉത്തരങ്ങൾ ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

**30.** നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $x^2+xy=36;\ y^2+xy=45.$

**31.** താഴെക്കാണുന്ന സമവാക്യങ്ങളിൽ $m$ പൂജ്യമായിരുന്നാൽ സമവാക്യങ്ങളെപ്പററി എന്തെങ്കിലും പറയുവാനുണ്ടോ? $m$ പൂജ്യവും, $a$, $b$ എന്നിവ തുല്യവും ആണെങ്കിൽ സമവാക്യങ്ങളുടെ മൂലങ്ങളെപ്പററി എന്തെങ്കിലും പറയുവാനുണ്ടോ?

$$x+y=a$$
$$x+(m+1)y=b$$

**32.** താഴെക്കാണുന്ന പ്രസ്താവനകൾ ശരിയോ, തെററോ എന്നു കാരണസഹിതം പറയുക.

1) $2x^3-3x^2+x=0$ എങ്കിൽ, $2x^2-3x+1=0$.

2) $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x+2}$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് മൂലമില്ല.

3) $a$, $b$ എന്നിവ എത്രയായിരുന്നാലും $ax=b$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് എല്ലായ്പോഴും ഒരു മൂലമുണ്ടായിരിക്കും.

4) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} = 0$ എങ്കിൽ $x = -1\frac{1}{2}$

5) $\frac{x-2}{x-3} + \frac{x-2}{x-4} = 0$ എങ്കിൽ $x=2$ അല്ലെങ്കിൽ $3\frac{1}{2}$

6) $x$ ന്റെ വില 2 ആയിരുന്നാൽ $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x+2}{x-2} = 0$ എന്ന സമവാക്യം ശരിയായിരിക്കും.

7) $\frac{x-5}{x+3} = \frac{6-x}{x+3}$ എങ്കിൽ $x = -3$ അല്ലെങ്കിൽ $5\frac{1}{2}$

**33.** നിർദ്ധാരണം ചെയ്ക:

$$\frac{6x+13}{2x+4} - \frac{8x-1}{4x-1} = \frac{9x+13}{3x+4} - \frac{10x-1}{5x-1}$$

[25-ാം ചോദ്യത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്ന രീതിക്കനുസരിച്ച് ചെയ്യുക. എത്ര ഉത്തരങ്ങൾ നിങ്ങൾക്ക് കിട്ടുന്നു?]

**34.** $x+4$, $2x-3$ ഇവ $6x^4 - 11x^3 - 121x^2 + 106x + 120$ എന്ന രാശിമാലയുടെ ഘടകങ്ങളാണെങ്കിൽ ശേഷം ഘടകങ്ങൾ കാണുക. ഈ രാശിമാല പൂജ്യത്തിനു തുല്യമാണെങ്കിൽ $x$ ന്റെ വിലകൾ എല്ലാം കാണുക.

---

ഉത്തരം **1.** 3, 15; −3, −15. **2.** 21, 28; −21, −29. **3.** 3, −2 **4.** 7,4 **5.** 12, 13; −13, −12 **6.** $3\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ **7.** 7 ഇ., 6 ഇ. **8.** $2, -3\frac{1}{4}$ **9.** 108, 72 **10.** 202° **11.** 4, 1 **12.** 90, 91; 2, 3 **13.** $-\frac{6}{7}$, 1 **14.** 3·6611, ·8134 (ഏകദേശം) **15.** $3, -1\frac{1}{3}$ **16.** $-2\frac{2}{3}$ **17.** മണിക്കൂറിൽ 20 മൈൽ **19.** $-1\frac{5}{7}$ **21.** ±1 **22.** 0 **24.** 20 മണിക്കൂർ **26.** $2ab/(a+b)$ **28.** 11 ഏക്കർ **30.** 4, 5; −4, −5 **34.** $5, -4, 1\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$.

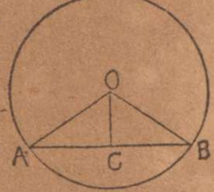
---

# ക്ഷേത്രഗണിതം

## സൂത്രം 32.

പ്രതിജ്ഞ:—

ഒരു വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു് ഒരു ജ്യാവിനെ സമഭാഗം ചെയ്യത്തക്കവണ്ണം വരയ്ക്കുന്ന ഋജുരേഖ ആ ജ്യാവിനു ലംബമായിരിക്കും.




സങ്കല്പം: $AB$ എന്നതു് $O$ കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ജ്യാവാകുന്നു. $OC$ ആ ജ്യാവിനെ $C$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ രണ്ടു തുല്യ ഭാഗമായി വിഭജിക്കുന്നു.

അനുമാനം: $OC$, $AB$ യ്ക്കു് ലംബമാകുന്നു.

## സൂത്രം 33.

പ്രതിജ്ഞ:—

ഒരു വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു് ഒരു ജ്യാവിനു ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന ഋജുരേഖ ആ ജ്യാവിന്റെ സമഭാജിയാകുന്നു.

(മുൻസൂത്രത്തിലെ ചിത്രം നോക്കുക)

സങ്കല്പം: $AB$ എന്നതു് $O$ കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ജ്യാവും, $OC$ എന്നതു് $AB$ യെ $C$ യിൽ സന്ധിക്കുന്ന ഒരു ലംബവും ആകുന്നു.

അനുമാനം: $AC=BC$.

കുറിപ്പു്: ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തെ അതിന്റെ ഏററവും നീളംകൂടിയ ജ്യാവെന്നോ, കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ജ്യാവെന്നോ പറയാറുണ്ടെങ്കിലും ഈ സൂത്രത്തെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം ജ്യാവു് എന്ന പദത്തിൽ വ്യാസം ഉൾപ്പെടുന്നില്ല.

ഒരു ജ്യാവിന്നു് ഒരു ലംബസമഭാജി മാത്രം ഉള്ളതിനാലും കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടി വരയ്ക്കുന്ന ലംബം ജ്യാവിന്റെ സമഭാജിയാകയാലും ഒരു ജ്യാവിന്റെ ലംബസമഭാജി വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടെ കടന്നുപോകുന്നു.

ഒരു ത്രിഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു ശീർഷങ്ങളിൽകൂടിയും കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തത്തിനു് അതിന്റെ പരിവൃത്തമെന്നും ആ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിനു് പരികേന്ദ്രമെന്നും പറയുന്നു.

# പ്രശ്നം 10.

## ഒരു ത്രിഭുജത്തിന്റെ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുക

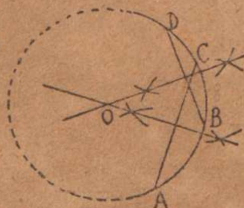
ഉപാത്തം: $ABC$ ഒരു ത്രിഭുജമാകുന്നു.

കരണീയം: $A,B,C$ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക,

നിർമ്മിതി: $AB,BC$ എന്നിവയുടെ ലംബസമഭാജികൾ വരച്ചു് $O$ യിൽ സംഘടിപ്പിക്കുക. $O$ കേന്ദ്രമായും, $OA$ ആരമായും ഒരു വൃത്തം വരച്ചാൽ അതു് $A, B, C$ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽകൂടെ കടന്നുപോകുന്നു.

മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രശ്നത്തിൽ ലംബസമഭാജികൾ രണ്ടും ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രമേ സംഘടിക്കുന്നുള്ളു. ബിന്ദുക്കൾ മൂന്നും ഒരേ ഋജുരേഖയിൽ ആയിരുന്നാൽ അവയിൽ മൂന്നിലുംകൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കയില്ല.

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ചാപംമാത്രം തന്നിരുന്നാൽ അതിന്റെ കേന്ദ്രം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതു് എങ്ങനെയെന്നു് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിൽനിന്നും മനസ്സിലാക്കാം.




$ABCD$ ഒരു ചാപമാകുന്നു. $AC$, $BD$ എന്ന സമാന്തരങ്ങളല്ലാത്ത രണ്ടു ജ്യാവു വരച്ചിരിക്കുന്നു, $AC,BD$ എന്നിവയുടെ ലംബസമഭാജികൾ $O$ യിൽ സംഘടിക്കുന്നു, അപ്പോൾ $ABCD$ എന്ന ചാപത്തിന്റെ വൃത്തകേന്ദ്രം $O$ ആണെന്നു വ്യക്തമാകുന്നു.

# സൂത്രം 34.

പ്രതിജ്ഞ:—

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ തുല്യനീളമുള്ള ജ്യാവുകൾ അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും തുല്യ അകലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

സങ്കല്പം: $AB$, $CD$ എന്നിവ $O$ കേന്ദ്രമായുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു തുല്യ ജ്യാവുകളാണ്. $OP$, $OQ$ എന്നിവ $O$ യിൽ നിന്നും യഥാക്രമം $AB$, $CD$ എന്നിവയ്ക്കു ലംബമായി വരച്ചിരിക്കുന്നു.

അനുമാനം: $OP=OQ$

# സൂത്രം. 35.

പ്രതിജ്ഞ:—

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും തുല്യ അകലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ജ്യാവുകൾ തുല്യമാകുന്നു.

(മുൻസൂത്രത്തിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം നോക്കുക)

സങ്കല്പം: $AB$, $CD$ എന്നിവ $O$ കേന്ദ്രമായുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ജ്യാവുകളാകുന്നു. $O$ യിൽനിന്നും യഥാക്രമം $AB$, $CD$ എന്നിവയിലേക്കുള്ള $OP$, $OQ$ എന്നീ ദൂരങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നു.

അനുമാനം: $AB=CD$.

## അഭ്യാസം 42.

1. ഒരു വൃത്തത്തിനു വെളിയിലായി വൃത്തപരിധിയിലുള്ള എല്ലാം ബിന്ദുക്കളിൽനിന്നും തുല്യ അകലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

2. ഒരു ഗോളം, സൂചീഘാതം, ഗോളസ്തംഭം എന്നിവയുടെ ഉപരിതലത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ?

3. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതലത്തിൽ വരയ്ക്കാവുന്ന എല്ലാം വൃത്തങ്ങളുടേയും ആരം സമമായിരിക്കുമോ?

4. ഒരു സൂചീഘാതത്തിന്റെയും ഒരു ഗോളസ്തംഭത്തിന്റെയും ഉപരിതലത്തിൽ തുല്യ വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കാമോ?

5. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ജ്യാവ് അതേ വൃത്തത്തിലെ മറെറാരു ജ്യാവിന്റെ സമഭാജിയായിരിക്കുമോ?

6. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസത്തെ ആ വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ജ്യാവിനു രണ്ടു സമഭാഗമായി വിഭജിക്കുവാൻ സാധിക്കുമോ?

7. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തെ അതിന്റെ ഒരു ജ്യാവ് രണ്ടു സമഭാഗമായി വിഭജിക്കുമോ?

8. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു ജ്യാവുകൾ അന്യോന്യം സമഭാജികളായിരിക്കാമോ? അതു സാധിക്കുമെന്നു സങ്കൽപ്പിച്ചാൽ നമുക്കു കിട്ടുന്ന അബദ്ധാനുമാനം എന്ത്?

9. രണ്ടു ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങൾ അന്യോന്യം സംഘടിക്കുന്നില്ല. ഇതിന്റെ വിപരീതസൂത്രം ശരിയാണോ?

10. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ജ്യാവ് മറ്റൊരു ജ്യാവിനു ലംബമായിരിക്കാമോ?

11. ഒരു ത്രിഭുജത്തിന്റെ പരികേന്ദ്രം എപ്പോഴും ത്രിഭുജത്തിനുള്ളിലായിരിക്കുമോ?

12. ഒരു ത്രിഭുജത്തിന്റെ പരികേന്ദ്രം ത്രിഭുജത്തിനു വെളിയിലാണെങ്കിൽ അതിന്റെ കോണങ്ങളെപ്പററി എന്തറിയാം?

13. ഒരു ത്രിഭുജത്തിന്റെ പരികേന്ദ്രം അതിന്റെ ഒരു ഭുജത്തിലായിരിക്കാമോ? ആയിരിക്കാമെങ്കിൽ ആ ത്രിഭുജത്തിന്റെ കോണങ്ങളെപ്പററി എന്തറിയാം?

14. തുല്യവും, സമാന്തരവുമായ എത്ര ജ്യാവുകൾ ഒരു വൃത്തത്തിലുണ്ടായിരിക്കാം?

15. ഒരു വൃത്തത്തിൽ തുല്യമായ എത്ര ജ്യാവുകൾ വരയ്ക്കാം?

16. ഏതെങ്കിലും മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടെ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കുമോ?

17. തുല്യമല്ലാത്ത രണ്ടു വൃത്തങ്ങളിൽ തുല്യമായ രണ്ടു ജ്യാവ് വരയ്ക്കാമോ? അതു അസാദ്ധ്യമാകുന്നതെപ്പോഴാണ്?

18. ഒരു സമചതുരം, ആയതക്ഷേത്രം, സമഭുജം, സമാന്തരികം, സമദ്വിഭുജസമലംബകം എന്നിവയുടെ നാലു ശീർഷങ്ങളിലുംകൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കാമോ?

19. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ജ്യാവിന്റെ നീളം അതിനു കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള അകലത്തിനോടു വിപരീതാനുപാതികമാണ് എന്നു പറയുന്നതു് ശരിയാണോ?

---

## അഭ്യാസം 43.

### അനുമാനം.

1. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു സമാന്തരജ്യാവുകളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഋജുരേഖ കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടെ കടന്നുപോകുന്നു.

2. ഒരു വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നതും, ഒരു സ്ഥിരനീളമുള്ളതുമായ ഒരു ജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

**3.** ഒരു വൃത്തത്തിലുള്ള സമാന്തരജ്യാവുകളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുപഥം എന്ത്? (ഉപപത്തി എഴുതുക)

**4.** ഒരു വൃത്തത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നതും, സ്ഥിരനീളമുള്ളതും ആയ ഒരു ജ്യാവിലുള്ള ഒരു നിശ്ചിതബിന്ദുവിന്റെ പഥം എന്ത്?

**5.** രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ $P, Q$ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സംഘടിക്കുന്നു. $A, B, C, D$ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ വൃത്തവുമായി സംഘടിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ $APB$; $CQD$ എന്നു രണ്ടു സമാന്തരരേഖകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. $AB=CD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

**6.** $C, D$ എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളായുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ $A, B$ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സംഘടിക്കുന്നു. $O$, $CD$ യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ്. $OA$ യ്ക്കു ലംബമായും, വൃത്തത്തെ $P, Q$ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സംഘടിക്കത്തക്കവണ്ണവും $PAQ$ വരച്ചിരിക്കുന്നു. $AP=AQ$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

---

സൂചന: 5: കേന്ദ്രങ്ങളിൽനിന്നും $AB, CD$ എന്നിവയ്ക്കു ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. 6. $R, S$ ഇവ യഥാക്രമം $AP, AQ$ എന്നിവയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാണെന്നും, $AP, AQ$ എന്നിവയുടെ ലംബസമഭാജികൾ $C, D$ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നു എന്നും സങ്കല്പിക്കുക. അപ്പോൾ $RA=AS$ (സൂത്രം 20) $AP=2RA$; $AQ=2AS$.

---

## അഭ്യാസം 44.

## നിർമ്മിതി.

**1.** രണ്ടു നിശ്ചിതബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി നിശ്ചിത ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

**2.** കേന്ദ്രം ഒരു നിശ്ചിതരേഖയിലായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം രണ്ടു നിശ്ചിതബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

**3.** ഒരു നിശ്ചിത വൃത്തപരിധിയിൽ കേന്ദ്രം ആയിരിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ രണ്ടു നിശ്ചിതബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

**4.** ഒരു ക്ഷേത്രഗണിതനിർമ്മിതിമൂലം ഒരു രൂപാ (നാണയം) യുടെ വ്യാസം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം?

**5.** ഒരു പരന്ന ലോഹത്തകിട് വൃത്താകൃതിയിലുള്ളതാണെന്നു തോന്നുന്നു. അതു ശരിയായ ഒരു വൃത്തമാണോ എന്നു എങ്ങനെ പരിശോധിക്കാം?

**6.** ഒരു ഇരുമ്പുചക്രത്തിന്റെ സാമാന്യം വലിപ്പമുള്ള ചാപാകാരമായ ഒരു ഭാഗം കിട്ടിയാൽ അതിന്റെ ആരം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാം?

7. വൃത്താകാരമായ ഒരു പൂന്തോട്ടത്തിന്റെ അതിരിന്റെ ഒരു ഭാഗം നഷ്ടപ്പെട്ടുപോയാൽ ആ ഭാഗം എങ്ങനെ അടയാളപ്പെടുത്താം?

8. $A, B, C, D$ എന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വൃത്തപരിധിയിലായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം താഴെപറയുന്ന അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ച് $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. $AB=3{\cdot}2$ സെ. മീ. $BC=5$ സെ. മീ. $CD=9{\cdot}8$ സെ, മീ. $\angle B=125°$. $AD$ യുടെ നീളം അളക്കുക.

9. വശങ്ങൾക്ക് $2{\cdot}4$ ഇ; $3$ ഇ; $3{\cdot}6$ ഇ. വീതം നീളമുള്ള ഒരു ത്രിഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു ശീർഷങ്ങളിൽകൂടിയും പോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരച്ച് അതിന്റെ ആരം അളക്കുക.

10. $AB=2$ ഇ; $BC=1{\cdot}5$ ഇ; $CD=1$ ഇ; $DA=2{\cdot}5$ ഇ; $\angle B=90°$. ഈ അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ച് $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജം വരച്ച് $A$ യിലും, $B$ യിലുംകൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തവും അതേ കേന്ദ്രത്തോടുകൂടി $C$ യിലും, $D$ യിലുംകൂടി കടന്നുപോകുന്ന വേറെ ഒരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുക.

11. $AB, CD$ ഇവ യഥാക്രമം $3{\cdot}2$ ഇഞ്ചും, $4{\cdot}4$ ഇഞ്ചും നീളമുള്ള രണ്ട് ഋജുരേഖകളാകുന്നു. $AB$ ഒരു വൃത്തത്തിന്റേയും, $CD$ മറെറാരു വൃത്തത്തിന്റേയും ജ്യാവായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം രണ്ട് ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

12. ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തിലുള്ള ഒരു നിശ്ചിതബിന്ദുവിൽകൂടി ആ ബിന്ദു മദ്ധ്യമായുള്ള ഒരു ജ്യാവു വരയ്ക്കുക.

13. ഒരു വൃത്തത്തിൽ അന്തർലിഖിതമായ ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം അളന്ന് അതു ശരിയാണോ എന്നു ഗണനംകൊണ്ടു പരിശോധിക്കുക.

14. ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തിൽ അന്തർലിഖിതമായ ഒരു സമത്രിഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശം അളന്ന് അതു ശരിയാണോ എന്നു ഗണനംകൊണ്ടു പരിശോധിക്കുക.

15. രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ ചാപങ്ങൾ സംഘടിച്ചുണ്ടായ ചന്ദ്രകലാരൂപത്തിലുള്ള ഒരു ചിത്രം തന്നിരിക്കുന്നു. വൃത്തകരണിയും, സ്കെയിലും മാത്രം ഉപയോഗിച്ച് ആ രൂപം വേറൊരിടത്തു പകർത്തുക.

16. $ABC$ ഒരു നിശ്ചിത ത്രിഭുജമാകുന്നു. ത്രിഭുജത്തിന്റെ മൂന്നുവശങ്ങളേയും ഛേദിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ജ്യാവ് നിശ്ചിത നീളമുള്ളവയായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

സൂചന: 10. $CD, AB$ എന്നിവയുടെ ലംബസമഭാജികൾ വരയ്ക്കുക. 11. മുൻ നിർമ്മിതിയിലെ വഴിതന്നെ ഉപയോഗിക്കുക. 12. ആ ബിന്ദുവിനെ കേന്ദ്രത്തോടു യോജിപ്പിക്കുക. ഒരു ലംബവും വരയ്ക്കുക. 15. നിർമ്മിതിമൂലം കേന്ദ്രങ്ങൾ കാണുക. 16. ആവശ്യ

പ്പെട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം ത്രിഭുജത്തിന്റെ അന്തഃകേന്ദ്രമാകുന്നു. അന്തഃകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും വശങ്ങളിലേക്കുള്ള ലംബങ്ങളുടെ പാദങ്ങൾ ജ്യാവുകളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാകുന്നു.

---

## അഭ്യാസം 45.

### ഗണനം.

**1.** 37 ഇ. ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ 24 ഇ. നീളമുള്ള ജ്യാവ് കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും എത്ര് അകലത്തിലായിരിക്കും?

**2.** ഒരിഞ്ച് ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ 1·2 ഇഞ്ചും, 1·6 ഇഞ്ചും നീളമുള്ള രണ്ടു ജ്യാവുണ്ട്. കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും അവ എത്ര് അകലത്തിലാണ്? ചിത്രം വരച്ച് അളവെടുത്ത് നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

**3.** വളഞ്ഞ ഒരു റയിൽപാത 200 ഗജം ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ചാപമാകുന്നു. ആ പാതയിൽ ഒരു സ്ഥാനത്തുനിന്ന് മറ്റൊരു സ്ഥാനത്തേക്കു നേരെ നടന്നു പോകണമെങ്കിൽ 240 ഗജം നീളമുണ്ട്. എന്നാൽ നടന്നു പോകാനുള്ള പ്രസ്തുത വഴിയിൽനിന്നും കേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള കുറഞ്ഞ ദൂരം എത്ര്?

**4.** ഒരു ഋജുരേഖ വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു പാതയെ കടന്നു പോകുന്നു. പാതയുടെ അകത്തേയും, പുറത്തേയും പരിധികളുടെ ആരം യഥാക്രമം 87 അടിയും, 100 അടിയും ആകുന്നു. അകത്തെ പരിധിക്കുള്ളിൽ ഋജുരേഖയ്ക്ക് 126 അടി നീളമുണ്ടെങ്കിൽ രണ്ടു പരിധികളുടേയും ഇടയ്ക്ക് ആ രേഖയ്ക്ക എത്ര നീളം ഉണ്ട്?

**5.** 17 ഇഞ്ചും, 10 ഇഞ്ചും ആരമുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ തമ്മിൽ സംഘട്ടിക്കുന്നു. അവയുടെ പൊതുജ്യാവിന് 16 ഇ. നീളം ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയുടെ കേന്ദ്രരേഖയുടെ എത്ര നീളം രണ്ടു ചാപങ്ങളുടെ ഇടയ്ക്കു ഉണ്ട്?

**6.** രണ്ടു തുല്യവൃത്തങ്ങളുടെ സംഘട്ടനഫലമായി ഒരു ചന്ദ്രക്കലയുടെ രൂപം ഉണ്ടാകുന്നു. അതിന്റെ രണ്ടഗ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 8 സെന്റിമീററും കേന്ദ്രരേഖയിൽക്കൂടെ അളക്കുമ്പോൾ ചാപങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 1·8 സെ. മീററും ആയാൽ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം കണക്കാക്കുക.

**7.** 50 സെ. മീററും, 41 സെ. മീററും ആരമുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ ചാപങ്ങൾ സംഘട്ടിച്ച് ഒരു ചന്ദ്രക്കലയുടെ രൂപം ഉണ്ടായിരിക്കുന്നു വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 39 സെ. മീററർ ആയാൽ അതിന്റെ അഗ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം എത്ര്?

**8.** P, Q എന്നിവ ഋജുവായ ഒരു റോഡിലുള്ള രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളാണ്‌ P, Q എന്നിവയിൽനിന്നും യഥാക്രമം 8610 ഗജവും 6750 ഗജവും അകലത്തിലുള്ള T എന്ന ഗോപുരം റോഡിൽനിന്നും 1890 ഗജം അകലത്തിലാണ്‌. P, Q എന്നീ സ്ഥാനങ്ങളിലുള്ള രണ്ടു വലിയ തോക്കുകളിൽനിന്ന്‌ യഥാക്രമം 10000 ഗജവും 9000 ഗജവും ദൂരത്തിൽ വെടിയുണ്ട എത്തുമെങ്കിൽ റോഡിന്റെ എന്തു നീളം, രണ്ടു തോക്കിൽനിന്നുമുള്ള വെടിയുണ്ട ചെന്നെത്തുന്നിടത്തു സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു?

**9.** ചാപാകൃതിയിലുള്ള ഒരു വളവിന്‌ 4 അടി ഉയരമുണ്ട്‌. വളവിന്റെ അഗ്രങ്ങൾ തമ്മിൽ 28 അടി അകലമുണ്ടെങ്കിൽ ചാപത്തിന്റെ ആരം കാണുക.

**10.** വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു നിലത്തിൽ 110 ഗജവും 50 ഗജവും നീളമുള്ള രണ്ടു റോഡുകൾ സമാന്തരമായി കിടക്കുന്നു. അവ തമ്മിലുള്ള അകലം 90 അടി ആയാൽ നിലത്തിന്റെ വ്യാസം കാണുക.

**11.** 6·5 സെ. മീ. ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ 11·2 സെ. മീ. അകലത്തിൽ സമാന്തരമായ രണ്ടു ജ്യാവുണ്ട്‌. അതിൽ വലിയ ജ്യാവിന്‌ 7·8 സെ. മീ. നീളമുണ്ടെങ്കിൽ മറ്റെ ജ്യാവിന്റെ നീളം കാണുക.

**12.** വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു തടാകത്തിന്റെ കരയിലുള്ള രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളിൽ നിന്നും രണ്ടു വള്ളം പുറപ്പെട്ട്‌ സമാന്തരമായി 300 ഗജവും 140 ഗജവും സഞ്ചരിച്ച്‌ മറുകരയിൽ എത്തുന്നു. തടാകത്തിന്റെ വ്യാസം 500 ഗജമായാൽ വള്ളങ്ങൾ സഞ്ചരിച്ച വഴികൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കാണുക.

---

സൂചന:—**5.** പൊതു ജ്യാവിനാൽ വിഭജിക്കപ്പെടുന്ന കേന്ദ്രരേഖയുടെ അംശങ്ങൾക്കുള്ള നീളം കണക്കാക്കുക. **6.** കേന്ദ്രരേഖ 1·8 സെ. മീ. നീളമുള്ളതും പൊതുജ്യാവിനാൽ രണ്ടു തുല്യഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ളതും ആകുന്നു. **7.** 39 സെ. മീ. ആധാരവും മററു രണ്ടു വശങ്ങൾ 50 സെ. മീററും 41 സെ. മീററും ആയുള്ള ത്രിഭുജത്തിന്റെ ഉന്നതി കണക്കാക്കുക. 30-ാം സൂത്രം ഉപയോഗിക്കുക. **8.** മുൻ 5-ാം ചോദ്യം ഉപയോഗിക്കുക. **9.** A യും B യും അഗ്രങ്ങളും, C ഏററം ഉയർന്ന ബിന്ദുവും O വൃത്തകേന്ദ്രവും ആയിരിക്കുകയും, OC, AB ഇവ D യിൽ സംഘടിക്കുകയും ചെയ്താൽ $OD^2+DB^2=OB^2$ അതായത്‌ $(OB-4)^2+14^2=OB^2$ **10.** കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും $x$ ഗജം അകലെയാണ്‌ നീളം കൂടിയ പാതയെങ്കിൽ $(90-x)^2+25^2=\text{ആരം}^2=x^2+55^2$. **11.** വലിയ ജ്യാവിനു കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ദൂരം $x$ സെ. മീ. ആ

യാൽ, $6{\cdot}5^2 - 3{\cdot}9^2 = x^2$, ചെറിയ ജ്യാവിൻെറ പകുതി $y$ സെ, മീ. ആയാൽ $6{\cdot}5^2 - (11{\cdot}2 - x)^2 = y^2$ **12.** കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും വഴികളിലേക്കുള്ള ദൂരം $x$ ഗ. $y$ ഗജവും ആയാൽ $250^2 - 150^2 = x^2$; $250^2 - 70^2 = y^2$.

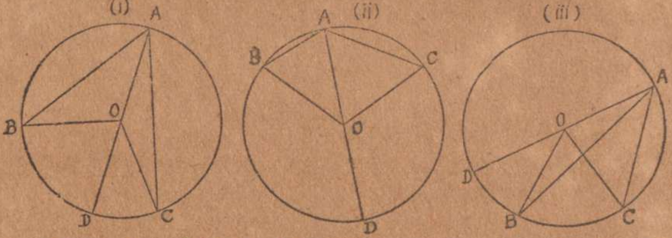
---

ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ ജ്യാവ് അതിൻെറ ചാപത്തിൽ എവിടെയെങ്കിലുമുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണത്തിന് വൃത്താംശകോണം, അല്ലെങ്കിൽ ആ വൃത്താംശത്തിലുള്ള കോണം എന്നു പറയുന്നു.

# സൂത്രം 36.

പ്രതിജ്ഞ:—

**ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ ചാപം കേന്ദ്രത്തിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണം, ശേഷം പരിധിയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണത്തിൻെറ ഇരട്ടിയാകുന്നു.**




സങ്കൽപ്പം:—BC, O കേന്ദ്രമായുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ ഒരു ചാപവും A, ശേഷം പരിധിയിൽ എവിടെയെങ്കിലുമുള്ള ഒരു ബിന്ദുവുമാകുന്നു.

അനുമാനം:— $\angle BOC = 2 \ \angle BAC$

നിർമ്മിതി:—AO യോജിപ്പിച്ച് D യിലേക്ക് നീട്ടുക.

ഉപപത്തി:—OAB എന്ന ത്രിഭുജത്തിൽ, AO=OB

$\therefore \angle OAB = \angle OBA$.

എന്നാൽ ബാഹ്യകോണം $BOD = \angle OAB + \angle OBA$

$\therefore \angle BOD = 2 \ \angle OAB$.

അതുപോലെതന്നെ, $\angle COD = 2 \ \angle OAC$

ആയതിനാൽ ഒന്നും രണ്ടും ചിത്രങ്ങളിൽ,

കൂട്ടുമ്പോൾ, $\angle BOC = 2\ \angle OAB + 2\ \angle OAC$
$= 2\ \angle BAC$

മൂന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ,

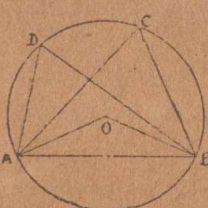
കുറയ്ക്കുമ്പോൾ, $\angle BOC = 2\ \angle OAC - 2\ \angle OAB$
$= 2\ \angle BAC.$

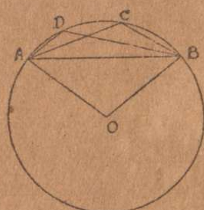
# സൂത്രം 37.

പ്രതിജ്ഞ:—

**ഒരേ വൃത്താംശത്തിലുള്ള എല്ലാം കോണങ്ങളും തുല്യമാകുന്നു.**

സങ്കല്പം:- $\angle ACB$ $\angle ADB$ ഇവ ABC എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ABCD എന്ന വൃത്താംശത്തിലുള്ള കോണങ്ങളാകുന്നു.




അനുമാനം:— $\angle ACB = \angle ADB$

നിർമ്മിതി:—A, B ഈ ബിന്ദുക്കളെ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമായ O യോടു് യോജിപ്പിക്കുക.

ഉപപത്തി:—AB എന്ന ചാപം പരിധിയിൽ ACB, ADB എന്ന കോണങ്ങളേയും, കേന്ദ്രത്തിൽ AOB എന്ന കോണത്തെയും സമ്മുഖമാക്കുന്നു.

$$\therefore\ \angle ACB = \tfrac{1}{2}\angle AOB$$
$$\angle ADB = \tfrac{1}{2}\angle AOB$$
$$\therefore\ \angle ACB = \angle ADB.$$

നാലോ അതിലധികമോ ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുക്കൾ ഏകചക്രീയം ആണെന്നു പറയുന്നു.

## സൂത്രം 38.

പ്രതിജ്ഞ:—

രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഒരു രേഖ അതിന്റെ ഒരേവശത്തുള്ള മററ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ തുല്യകോണങ്ങൾ സമ്മുഖമാക്കുന്നെങ്കിൽ ഈ നാലു ബിന്ദുക്കളും ഏകചക്രീയം ആകുന്നു.

സങ്കല്പം:—AB എന്ന ഋജുരേഖ, അതിന്റെ ഒരേ വശത്തുള്ള C. D എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ACB, ADB എന്ന തുല്യകോണങ്ങൾ സമ്മുഖമാക്കുന്നു.

അനുമാനം:-A, B, C, D, എന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏകചക്രീയമാകുന്നു.

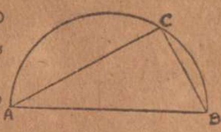
## സൂത്രം 39.

പ്രതിജ്ഞ:—

ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിലുള്ള കോണം സമകോണമാകുന്നു.

സങ്കല്പം:—AB വ്യാസമുള്ള ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് C.

അനുമാനം:— ∠ACB ഒരു സമകോണമാകുന്നു.




## സൂത്ര 40.

പ്രതിജ്ഞ:—

ഒരു സമകോണത്രിഭുജത്തിന്റെ ശ്രവണം വ്യാസമാക്കി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം അതിന്റെ വിപരീത ശീർഷത്തിൽക്കൂടെ കടന്നുപോകുന്നു.

(മുൻ സൂത്രത്തിലെ ചിത്രം കാണുക.)

സങ്കല്പം:—ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിൽ C എന്ന കോണം ഒരു സമകോണമാകുന്നു.

അനുമാനം:—AB വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം C യിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്നു.

## അഭ്യാസം 46.

1. ഈ ചിത്രത്തിൽ ഒരേ വലിപ്പമുള്ള കോണങ്ങളെ ഓരോ വകുപ്പായി തിരിച്ചാൽ എത്ര വകുപ്പുണ്ട്? ഓരോ വകുപ്പിലും എത്ര കോണങ്ങൾ ഉണ്ട്?

2. ഒരു അധികവൃത്താംശത്തിലെ കോണം ഏതു ജാതിയിലുള്ളതാണ്? ഒരു ലഘുവൃത്താംശത്തിലെ കോണം ഏതു ജാതിയിലുള്ളതാണ്?

3. PAB ഒരു ത്രികോണമാണ്. ഇതിൽ A, B എന്ന ബിന്ദുക്കൾ സ്ഥിരങ്ങളും, P, A യുടേയും, B യുടേയും തലത്തിൽ ∠APB സ്ഥിരമായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം സഞ്ചരിക്കുന്നതും ആകുന്നു. എന്നാൽ P യുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

4. മുകളിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ചോദ്യത്തിൽ ∠APB ഒരു സമകോണമാണെങ്കിൽ P യുടെ ബിന്ദുപഥം എന്ത്?

5. ഒരു നിശ്ചിത ഋജുരേഖ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഒരു നിശ്ചിതകോണം സമ്മുഖമാക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുപഥം എന്ത്?

## അഭ്യാസം 47.

### ഗണനം.

1. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരികേന്ദ്രം O, ത്രികോണത്തിനുള്ളിലാണ് ∠AOB = 100°, ∠AOC = 120° എങ്കിൽ ∠BAC എത്ര ഡിഗ്രിയെന്നു കാണുക.

2. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരികേന്ദ്രം O, ത്രികോണത്തിനു വെളിയിലാണ്, AB ഏററവും നീളംകൂടിയ ജ്യാവ് ആകുന്നു. ∠AOB = 130° യും, ∠AOC = 80° യും എങ്കിൽ ∠BAC എത്ര ഡിഗ്രിയെന്നു കാണുക.

3. PQ, RS എന്നിവ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ രണ്ടു ജ്യാവുകളാകുന്നു. ഇവ സമകോണത്തിൽ സംഘടിക്കുകയും, ∠PRS = 70° ആയിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ ∠RSQ എത്ര ഡിഗ്രിയെന്നു കാണുക.

4. ABCD എന്ന അർദ്ധവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം AB യാണ്. ∠BCD = 110° എങ്കിൽ ∠ABD എത്ര ഡിഗ്രിയെന്നു കാണുക.

5. ABC ഒരു ത്രികോണമാകുന്നു. AB യെ D യിലും, AC യെ E യിലും ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം B യിലും, C യിലുംകൂടി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ∠ABE = 30° യും, ∠A = 40° യും എങ്കിൽ ∠ADC എത്ര ഡിഗ്രിയെന്നു കാണുക.

6. A, B, C, D എന്നിവ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിൽ ക്രമത്തിനു കിടക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളാകുന്നു. AC, BD എന്നിവ O യിൽ

സംഘടിക്കുന്നു. $\angle AOB=120^\circ$, $\angle ADB=40^\circ$, $\angle ACD=35^\circ$ എന്നാൽ $\angle ABC$ എത്ര ഡിഗ്രിയെന്നു കാണുക.

7. OA, OB, OC എന്നിവ O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ മൂന്നു് ആരങ്ങളാകുന്നു. $\angle BOC=100^\circ$, $\angle AOB=200^\circ$ എന്നാൽ ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിന്റെ കോണങ്ങൾ കാണുക.

8. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ അന്തർലിഖിതസമദശഭുജത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു വശം ഒരു വിപരീതശീർഷത്തിൽ സമ്മുഖമാകുന്ന കോണം എന്തു്? ഈ കോണത്തിന്റെ വലിപ്പം ബഹുഭുജത്തിന്റെ ഭുജങ്ങളുടെ എണ്ണമോ, വശങ്ങളുടെ നീളമോ അനുസരിച്ചു് വ്യത്യാസപ്പെടുമോ?

9. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിൽ A,B,C,D എന്ന ബിന്ദുക്കൾ ക്രമത്തിനു കിടക്കുന്നു. $\angle AOB=120^\circ$, $\angle BOC=100^\circ$, $\angle COD=80^\circ$. എന്നാൽ ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണങ്ങൾ കാണുക.

## അഭ്യാസം 48.

### അനുമാനം.

1. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ AB, CD എന്ന ജ്യാവുകൾ O എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഘടിക്കുന്നുവെങ്കിൽ AOC, BOD എന്ന ത്രിഭുജങ്ങൾ സദൃശകോണത്രിഭുജങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

2. ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിൽ BE, CF എന്നിവ B യിൽ നിന്നു് യഥാക്രമം AC, AB എന്നിവയ്ക്കു ലംബമായി വരച്ചിരിക്കുന്നു. B, C, E, F എന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏകചക്രീയം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

3. C എന്ന ബിന്ദു AB എന്ന ഋജുരേഖയുടെ മദ്ധ്യമാകുന്നു. A യിലും, C യിലുംകൂടി ഒരു വൃത്തം വരച്ചിരിക്കുന്നു. AD ഈ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമാണെങ്കിൽ $AD=BD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

4. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ P, Q എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സംഘടിക്കുന്നു. വൃത്തപരിധിയിൽ അവസാനിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ APB, CPD എന്ന ഋജുരേഖകൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. AQB, CQD എന്നിവ സദൃശകോണത്രിഭുജങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

5. ABCDE എന്ന വൃത്തത്തിൽ ചാപം AB = ചാപം BC, ചാപം AE = ചാപം ED, എന്നാൽ AC, AD എന്നിവയുമായി BE തുല്യകോണങ്ങളിൽ സംഘടിക്കുന്നുവെന്നു തെളിയിക്കുക.

6. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ P, Q എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സംഘടിക്കുന്നു. വൃത്തങ്ങളുടെ പരിധിയിൽ അവസാനിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ P യിൽകൂടി AB എന്നൊരു ഋജുരേഖ വരച്ചിരിക്കുന്നു. AB യുടെ സ്ഥാനം എവിടെ ആയിരുന്നാലും $\angle AQB$ സ്ഥിരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

7. ഒരു ത്രിഭുജത്തിന്റെ ശീർഷകോണത്തിന്റെ സമഭാജി അതിന്റെ പരിവൃത്തവുമായി സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദു, ത്രിഭുജത്തിന്റെ ആധാരത്തിന്റെ രണ്ട് അഗ്രങ്ങളിൽനിന്നും തുല്യ അകലത്തിലാകുന്നു.

8. C, D എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സംഘടിക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ രണ്ടു വ്യാസങ്ങളാണ് DA, DB എന്നിവ. എന്നാൽ A, C, B എന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏകരേഖീയം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

9. ഒരു നിശ്ചിതരേഖ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഒരു സമകോണം സമ്മുഖമാക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിന്റെ പഥം എന്ത്?

10. O ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, P അതിനകത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവും ആകുന്നു. P യിൽക്കൂടി പോകുന്ന എല്ലാ ജ്യാവുകളുടേയും മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളുടെ പഥം OP വ്യാസമായുള്ള ഒരു വൃത്തമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

---

സൂചന:— 3. $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$ (സൂത്രം 5) 5. AB, AE എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക. $\angle CAB = \angle BEA$. $\angle ABE = \angle EAD$ 6. $\angle AQB = 180^\circ - (\angle A + \angle B) =$ സ്ഥിരം. (മുകളിൽ 4-ാം ചോദ്യം കാണുക). 8. CD യോജിപ്പിക്കുക.

---

## അഭ്യാസം 49.

## നിർമ്മിതി.

1. ശ്രവണവും, ഒരു വശവും നിശ്ചിത നീളമായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു സമകോണത്രിഭുജം വരയ്ക്കുക.

2. ശ്രവണവും, ശ്രവണത്തോടു ചേർന്ന ഒരു കോണവും നിശ്ചിത അളവിൽ ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു സമകോണത്രിഭുജം വരയ്ക്കുക.

3. ഒരു കർണ്ണവും, ഒരു വശവും നിശ്ചിത അളവിൽ ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു ആയതക്ഷേത്രം വരയ്ക്കുക.

4. BC=1·5 ഇഞ്ചും, AB=AC=2 ഇഞ്ചും ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം ABC എന്ന ഒരു സമദ്വിഭുജം വരയ്ക്കുക.

BC, D യിൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം AC വ്യാസമായി ഒരു അർദ്ധവൃത്തം വരയ്ക്കുക. BC യെ D ഏതു അനുപാതസംഖ്യയിൽ ഭാഗിക്കുന്നുവെന്നു കാണുക.

5. AB=8·5 സെ. മീ; BC=7·5 സെ. മീ; AC=6 സെ. മീ; CD=5 സെ. മീ; ∠D=90° ഈ അളവിൽ ABCD എന്ന ഒരു ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനം വരെ ശരിയായി കാണുക.

6. XY എന്ന ഒരു ഋജുരേഖ വരയ്ക്കുക. അതിൽനിന്നും 4 സെ. മീ. അകലെയായി A എന്ന ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. XY എന്ന രേഖയിൽനിന്നും, A എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നും 3 സെ. മീ. അകലെയായി B എന്ന വേറൊരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക. C എന്ന ബിന്ദു A യിൽനിന്നും 2 സെ. മീ. അകലത്തിലും, ∠ACB ഒരു സമകോണവും ആണെങ്കിൽ XY എന്ന രേഖയിൽനിന്നും C എന്തു് അകലത്തിലാണെന്നു കാണുക.

7. ABCD ചതുർഭുജാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തോട്ടമാകുന്നു. BC=20 ഗജം, AD=24 ഗജം, BD=32 ഗജം, ∠A=∠C=90° സ്കെയിലനുസരിച്ചു് ഒരു പ്ളാൻ തയ്യാറാക്കി ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

8. A, B എന്നിവ രണ്ടു നിശ്ചിതബിന്ദുക്കളും CD ഒരു നിശ്ചിത ഋജുരേഖയുമാകുന്നു. ∠APB ഒരു സമകോണമായിരിക്കത്തക്കവിധത്തിൽ CD യിൽ P എന്നൊരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക.

9. ഒരു നിശ്ചിത ത്രിഭുജത്തിൻെറ കോണങ്ങളോടു യഥാക്രമം തുല്യമായ കോണങ്ങളുള്ള ഒരു അന്തർലിഖിതത്രിഭുജം ഒരു നിശ്ചിത വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കുക.

## അഭ്യാസം 50.

### അനുമാനം (Harder)

1. C എന്ന ബിന്ദു PQR എന്ന ത്രിഭുജത്തിൻെറ പരികേന്ദ്രമാകുന്നു. ∠CQR+∠P=90° എന്നു തെളിയിക്കുക.

2. ABCD ഒരു സമചതുരമാകുന്നു. B, C എന്നിവ കേന്ദ്രമായും, സമചതുരത്തിൻെറ ഒരു വശം ആരമായും സമചതുരത്തിനകത്തു് E എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഘടിക്കത്തക്കവണ്ണം രണ്ടു ചാപങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ∠BDE=30° യും, ∠DBE=15° യും ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

3. ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിൽ AB=AC. D എന്ന ബിന്ദു BC നീട്ടിവരച്ച രേഖയിലാകുന്നു. AC=CD. AD പരിവൃത്തത്തെ E യിൽ ഛേദിക്കുന്നു. ∠ABE=∠D എന്നു തെളിയിക്കുക.

4. PQRS എന്ന വൃത്തത്തിൻെറ PQ, RS എന്ന ജ്യാവുകൾ O യിൽ സംഘടിക്കുന്നു. വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രം C ആണെങ്കിൽ ∠ROQ=½(∠PCS=∠RCQ) എന്നു തെളിയിക്കുക.

5. PQRS എന്ന വൃത്തത്തിലുള്ള PQ, RS ഈ ജ്യാവുകൾ സമാന്തരങ്ങളാണു് PR=QS എന്നു തെളിയിക്കുക.

6. ABC ഒരു ത്രിഭുജമാകുന്നു. AD, BF എന്ന അതിൻെറ ഉന്നതികൾ H എന്ന ബിന്ദുവിൽ സംഘടിക്കുന്നു. AD നീട്ടുമ്പോൾ പരിവൃത്തത്തെ E എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു. HD=ED എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. AB ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ ജ്യാവാണു്. AB വ്യാസമായി വരച്ചിരിക്കുന്ന അർദ്ധവൃത്തത്തിൻെറ പരിധിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണു് P. AP, BP എന്നിവ നീട്ടുമ്പോൾ വൃത്തത്തെ യഥാക്രമം C, D എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു. AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു E ആണെങ്കിൽ EP നീട്ടുന്നതു് DC യുമായി സമകോണത്തിൽ സംഘടിക്കുന്നുവെന്നു് തെളിയിക്കുക.

---

സൂചന: 1. CR യോജിപ്പിക്കുക. QR നു് ലംബമായി CS വരയ്ക്കുക. $\angle P = \angle QCS$. 2. $\angle ECB = 60°$. $\therefore \angle ECD = 30°$ 36-ാം സൂത്രം ഉപയോഗിക്കുക. 3. $\angle D = \frac{1}{2}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle ABC$. $\angle D = \angle EAC = \angle EBC$. $\therefore \angle EBC = \frac{1}{2}\angle ABC$ $\therefore \angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC$, 4. $\angle POS = \angle OQS + \angle OSQ$ 5. $\angle SQR = \angle SPR$; $\angle PQS = \angle QSR = QPR$. $\therefore \angle PQR = \angle QPS$. $\triangle PQR \equiv \triangle QPS$. (സൂത്രം 7) 6. DBH, FAH എന്നിവ സദൃശകോണത്രിഭുജങ്ങളാകുന്നു. $\angle HAF = \angle CBE$. $\triangle EBD \equiv \triangle HBD$. (സൂത്രം 7) 7. EP നീട്ടിയപ്പോൾ DC യെ F ൽ ഛേദിക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. $\angle FPC = \angle APE = \angle PAE = \angle CDB$. $\therefore \triangle PCD$, FPC എന്നിവ സദൃശകോണത്രിഭുജങ്ങളാകുന്നു. $\therefore \angle PFC = \angle DPC$.

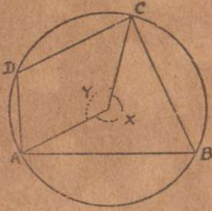
---

ഒരു ബഹുഭുജത്തിൻെറ എല്ലാ ശീർഷങ്ങളിൽക്കൂടിയും കടന്നുപോകത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാമെങ്കിൽ അതിനെ ഒരു ചക്രീയബഹുഭുജം എന്നു വിളിക്കുന്നു.

# സൂത്രം 41.

പ്രതിജ്ഞ:—

ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിൻെറ വിപരീതകോണങ്ങൾ അനുപൂരകങ്ങളാണു്.




സങ്കല്പ്പം:- $ABCD$ ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജമാകുന്നു.

അനുമാനം:- $\angle A+\angle C=2$ സമകോണം $\angle B+\angle D=2$ സമകോണം.

നിർമ്മിതി:- $ABCD$ എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിലേക്ക് $A$, $C$ എന്നിവയോജിപ്പിക്കുക.

ഉപപത്തി: $X, Y$ എന്നിവ $ABC$, $CDA$ എന്ന ചാപങ്ങൾ യഥാക്രമം കേന്ദ്രത്തിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണങ്ങളാണെന്ന് ഇരിക്കട്ടെ.

പരിധിയിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണം കേന്ദ്രത്തിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണത്തിന്റെ പകുതി ആയതിനാൽ,

$$\angle B=\tfrac{1}{2}\angle Y;\ \angle D=\tfrac{1}{2}\angle X$$

$$\therefore\ \angle B+\angle D=\tfrac{1}{2}(\angle Y+\angle X)$$

$$=\tfrac{1}{2}\times 4 \text{ സമകോണം.}$$

$$=2 \text{ സമകോണം.}$$

ഇതുപോലെ $B$, $D$ എന്ന ബിന്ദുക്കളെ കേന്ദ്രവും ആയി യോജിപ്പിച്ച് $\angle A+\angle C=2$ സമകോണമാണെന്നു തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

അനുസിദ്ധാന്തം 3.

ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു വശം നീട്ടിയാലുണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോണം അതിന്റെ വിപരീത ആന്തരകോണത്തോട് തുല്യമാകുന്നു.

---

# സൂത്രം 42.

പ്രതിജ്ഞ:—

ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ഒരു ജോഡി വിപരീതകോണങ്ങൾ അനുപൂരകങ്ങളാണെങ്കിൽ ആ ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണ്.

സങ്കല്പ്പം:- $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $\angle A+\angle C=2$ സമകോണമാണ്.

അനുമാനം:- $ABCD$ ചക്രീയമാണ്.

## അഭ്യാസം 51.

**1.** ABCD ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജമാകുന്നു. ∠A, ∠B, ഇവയുടെ വ്യത്യാസം ∠C, ∠D ഇവയുടെ വ്യത്യാസത്തോട് തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

**2.** ABCD ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജമാകുന്നു. AB, DC എന്നിവ O യിൽ സന്ധിക്കത്തക്കവണ്ണം നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ, OBC, ODA എന്നിവ സദൃശകോണത്രിഭുജങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

**3.** ABCD ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജവും AB ഒരു വ്യാസവും, ആകുന്നു. ∠ADC=125°, എങ്കിൽ ∠ABC, ∠BAC എന്നിവ കാണുക.

**4.** ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണങ്ങൾ ക്രമത്തിനു 78° യും, 86° യും, 102° യും, 94° യും വീതമാകുന്നു. നാലുകോണങ്ങളുടേയും സമഭാജികൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചതുർഭുജത്തിന്റെ കോണങ്ങൾ കാണുക.

**5.** ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിൽ AD, BE എന്നിവ A യിൽനിന്നും B യിൽനിന്നും, യഥാക്രമം BC, AC എന്ന വശങ്ങളിലേക്കു വരച്ചിട്ടുള്ള ലംബങ്ങളാകുന്നു. AD, BE എന്നിവ O യിൽ സംഘടിക്കുന്നുവെങ്കിൽ O, D, C, E എന്നിവ ഏകചക്രീയമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

**6.** ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിന്റെ അന്തഃകേന്ദ്രം I യും A എന്ന ശീർഷത്തിന്റെ എതിരെ കിടക്കുന്ന വ്യതികേന്ദ്രം P യും ആകുന്നു. B, P, C, I എന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏകചക്രീയമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

**7.** ഒരു സമദ്വിഭുജസമലംബകം ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

**8.** P, Q, R, S എന്നിവ ഒരു വൃത്തപരിധിയിൽ ക്രമത്തിനു കിടക്കുന്ന നാലു ബിന്ദുക്കളാകുന്നു. SPQ എന്ന കോണത്തിന്റെ സമഭാജി വൃത്തത്തെ T എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു. QR ന്റെയും, SR നീട്ടിയതിന്റെയും ഇടയ്ക്കുള്ള കോണത്തിന്റെ സമഭാജി RT യാണ് എന്നു തെളിയിക്കുക.

**9.** ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിന്റെ A എന്ന കോണത്തിന്റെ സമഭാജി അതിന്റെ പരിവൃത്തവുമായി D എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു. DM, ND എന്നിവ യഥാക്രമം AB, AC ഇവയ്ക്കു ലംബമായി വരച്ചിരിക്കുന്നു. AB+AC=2AM എന്നു തെളിയിക്കുക.

**10.** ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ നാലു കോണങ്ങളുടേയും സമഭാജികൾ ചേർന്നുണ്ടാകുന്ന ചതുർഭുജം ഏകചക്രീയമാകുന്നു.

സൂചന:— **8.** $TR, SR$ എന്നിവ യഥാക്രമം $V, Z$ ഈ ബിന്ദുക്കളിലേക്ക് നീട്ടിയെന്നിരിക്കട്ടെ $\angle VRQ = \angle QPT$. $\angle SRT = \angle SPT$. **9.** $\angle DBM = \angle DCN$. $DM = DN$. $\triangle BDM \equiv \triangle CDN$ (സൂത്രം 7). $BM = CN$. **10.** $ABCD$ എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $ASP, BPQ, CQR, DRS$ എന്ന സമഭാജികൾ ചേർന്ന് $PQRS$ എന്ന ചതുർഭുജം ഉണ്ടാകുന്നുവെങ്കിൽ $\angle SPQ = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$; $\angle SRQ = \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle D$.

---

## അഭ്യാസം 52.

## അനുമാനം (Harder)

**1.** $D, E, F$ എന്നിവ യഥാക്രമം $ABC$ എന്ന ത്രിഭുജത്തിന്റെ $BC, CA, AB$ എന്ന വശങ്ങളിലാകുന്നു. $AFE, BFD$ എന്ന വൃത്തങ്ങൾ $O$ യിൽ സംഘടിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $CDOE$ ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

**2.** $ABCD$ ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജമാണ്. $AB, BC$ എന്നിവ $E$ യിലും, $AD, BC$ എന്നിവ $F$ ലും നീട്ടുമ്പോൾ സന്ധിക്കുന്നു. $BCE, DCF$ എന്ന വൃത്തങ്ങൾ $G$ യിലും സംഘടിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $E, G, F$ എന്നിവ ഏകരേഖീയം ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

**3.** $ABCD$ ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജമാണ്. $AD, BC$ എന്നിവ $E$ യിലും, $AC, DC$ എന്നിവ $F$ ലും നീട്ടുമ്പോൾ സന്ധിക്കുന്നു. $E, F$ എന്ന കോണങ്ങളുടെ സമഭാജികൾ അന്യോന്യം ലംബങ്ങളാകുന്നുവെന്നു തെളിയിക്കുക.

**4.** ഒരു ത്രിഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു ശീർഷങ്ങളിൽനിന്നും വിപരീതവശങ്ങളിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങൾ സഹഗാമികളാകുന്നു.

**5.** ഒരു ത്രിഭുജത്തിന്റെ പരിവൃത്തപരിധിയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നും ത്രിഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളിലേക്കും വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങളുടെ പാദങ്ങൾ ഏകരേഖീയം ആകുന്നു.

---

സൂചന: **1.** $\angle OEC = \angle OFA$; $\angle ODC = \angle OFB$. **2.** $CG$ യോജിപ്പിക്കുക. $\angle EGC = \angle ABC$; $\angle FGC = \angle ADC$. **3.** $\angle F$ ന്റെ സമഭാജി $BC, AD$ എന്നിവയെ $P, Q$ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. സമഭാജികൾ $O$ യിൽ സംഘടിക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ $\angle FQE = \angle A + \angle AFQ$, $\angle EPQ = \angle BCF + \angle PFC$. എന്നാൽ $\angle BCF = \angle A \therefore \angle PQE$

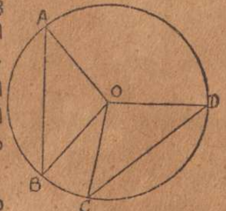
$=\angle QPE$. **4**. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ AC, AB എന്നിവയ്ക്കു യഥാക്രമം ലംബമായി BE, CF എന്നിവ വരയ്ക്കുക. അവ H ൽ സംഘടിക്കട്ടെ. AH യോജിപ്പിച്ചു നീട്ടി BC യെ D ൽ സന്ധിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ A, F, H, E ഏകചക്രീയമാണ്. $\therefore \angle FAH = \angle FEH$; B, F, E, C ഏകചക്രീയമാണ്. $\therefore \angle FEB = \angle FCB$. $\therefore \angle FAH = \angle HCD$. F, A, C, D ഏകചക്രീയമാണ്. $\therefore \angle ADC = \angle AFC = 90°$. **5**. O എന്ന ബിന്ദു, ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു വാണെന്നും OP, OQ, OR എന്നിവ യഥാക്രമം AB, BC, CA എന്നിവയ്ക്കു ലംബമാണെന്നും ഇരിക്കട്ടെ. PQ, QR എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക. അപ്പോൾ C, Q, O, R ഏകചക്രീയമാണ്. $\therefore \angle OCR = \angle OQR$; A, B, O, C ഏകചക്രീയമായതിനാൽ $\angle OCR = \angle OBP$ O, B, P, Q ഏകചക്രീയമായതിനാൽ $\angle OBP = \angle OQP$ ന്റെ അനുപൂരകം.

---

# സൂത്രം 43.

പ്രതിജ്ഞ:—

തുല്യ വൃത്തങ്ങളിലൊ, ഒരേ വൃത്തത്തിലൊ രണ്ടു ചാപങ്ങൾ കേന്ദ്രത്തിലൊ, പരിധിയിലൊ തുല്യ കോണങ്ങളെ സമ്മുഖമാക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ ചാപങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നു.




ഈ ചിത്രത്തിൽ AB, CD എന്നിവ കേന്ദ്രത്തിൽ തുല്യകോണങ്ങളെ സമ്മുഖമാക്കുന്നുവെങ്കിൽ ചാപം ABയും, ചാപം CDയും തുല്യമാണ്.

കേന്ദ്രത്തിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണം പരിധിയിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണത്തിന്റെ ഇരട്ടി ആകയാൽ പരിധിയിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണങ്ങൾ തുല്യമായാലും ചാപങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നു.

തുല്യങ്ങളായ വേറെ വേറെ വൃത്തങ്ങളിലായാലും ഈ പ്രസ്താവന ശരിയാണ്.

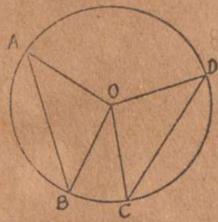
അനുസിദ്ധാന്തം:—

തുല്യ വൃത്തങ്ങളിലൊ, ഒരേ വൃത്തത്തിലൊ തുല്യമായ ജ്യാവുകൾ ഛേദിക്കുന്ന ചാപങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നു.

## സൂത്രം 44.

പ്രതിജ്ഞ:—

തുല്യ വൃത്തങ്ങളിലൊ, ഒരേ വൃത്തത്തിലൊ രണ്ടു ചാപങ്ങൾ തുല്യമാണെങ്കിൽ അവ കേന്ദ്രത്തിലൊ, പരിധിയിലൊ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നു.




ഈ ചിത്രത്തിൽ ചാപം AB = ചാപം CD എങ്കിൽ ∠AOB = ∠COD.

പരിധിയിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണം കേന്ദ്രത്തിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണത്തിന്റെ പകുതി ആയാൽ ചാപങ്ങൾ പരിധിയിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണങ്ങളും തുല്യമാകുന്നു.

തുല്യങ്ങളായ വേറെ വേറെ വൃത്തങ്ങളിലാണെങ്കിലും ഈ പ്രസ്താവന ശരിയാണ്.

അനുസിദ്ധാന്തം:—

തുല്യ വൃത്തങ്ങളിലൊ, ഒരേ വൃത്തത്തിലൊ തുല്യ ചാപങ്ങളുടെ ജ്യാവുകൾ തുല്യമാകുന്നു.

### അഭ്യാസം 53.

**1.** ഒരു വൃത്തത്തിൽ ചാപത്തിന്റെ നീളം ജ്യാവിന്റെ നീളത്തോടു അനുപാതികമാണോ?

**2.** ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു ചാപത്തെ എങ്ങനെ രണ്ടു തുല്യ ഭാഗമായി ഭാഗിക്കാം?

**3.** ഒരു വൃത്തത്തിൽ 1 സെ. മീ. നീളമുള്ള ഒരു ചാപം കേന്ദ്രത്തിൽ $10°$ ഉള്ള ഒരു കോണം സമ്മുഖമാക്കുന്നുവെങ്കിൽ 2 സെ. മീ. നീളമുള്ള ഒരു ചാപം കേന്ദ്രത്തിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

4. ഒരു വൃത്തത്തിൽ 1 ഇ. നീളമുള്ള ഒരു ജ്യാവ് കേന്ദ്രത്തിൽ $25°$ ഉള്ള ഒരു കോണം സമ്മുഖമാക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\frac{1}{2}$ ഇ. നീളമുള്ള ഒരു ജ്യാവ് സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണം കണ്ടുപിടിക്കാമോ?

5. A,B,C എന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വൃത്തപരിധിയിൽ ആകുന്നു. AB,BC,CA എന്ന ചാപങ്ങൾ 1:2:3 എന്ന അനുപാതസംഖ്യയിലാകുന്നു. ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിന്റെ കോണങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

6. ABCDE ഒരു ചക്രീയപഞ്ചഭുജമാകുന്നു. AB, BC, CD, DE, EA ഈ ചാപങ്ങൾ 1:2:3:4:5 എന്ന അനുപാതസംഖ്യയിലാകുന്നുവെങ്കിൽ പഞ്ചഭുജത്തിന്റെ കോണങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

## അഭ്യാസം 54.

### അനുമാനം.

1. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയെ വേണ്ടിടത്തോളം സമഭാഗമായി ഭാഗിച്ച് ഒരു അന്തർലിഖിതസമഭുജം എങ്ങനെ നിർമ്മിക്കാമെന്നു വിശദമാക്കുക.

2. AB ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ജ്യാവും, P, AB യുടെ ഒരു വശത്തുള്ള പരിധിയിലെ ഒരു ബിന്ദുവാകുന്നു. P യുടെ സ്ഥാനം എവിടെ ആയിരുന്നാലും $\angle APB$ യുടെ സമഭാജി പരിധിയിലുള്ള ഒരു സ്ഥിര ബിന്ദുവിൽകൂടി മാത്രമേ പോകുകയുള്ളു എന്നു തെളിയിക്കുക.

3. ഒരു വൃത്തം രണ്ടു സമാന്തര ഋജുരേഖകളാൽ ഛേദിക്കപ്പെട്ടാൽ സമാന്തരങ്ങളുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള ചാപങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നു.

4. ABCD എന്ന ചക്രീയചതുർഭുജത്തിൽ AD=BC യെങ്കിൽ $\angle A = \angle B$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

5. ഒരു ത്രിഭുജത്തിന്റെ പരിവൃത്തം വരച്ചാൽ ത്രിഭുജത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു കോണത്തിന്റെ സമഭാജി ആ കോണം സമ്മുഖമാക്കുന്ന ചാപത്തെ രണ്ടു തുല്യ ഭാഗമായി വിഭജിക്കുന്നു.

6. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിൽ AB എന്ന ഒരു വ്യാസവും, CD എന്ന ഒരു ജ്യാവും സമാന്തരമാകുന്നു. DOE എന്നതു് വേറെ ഒരു വ്യാസമാണെങ്കിൽ ചാപം AE = ചാപം AC എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ AB, CD എന്ന ജ്യാവുകൾ സമകോണത്തിൽ സംഘടിക്കുന്നു. BC, AD എന്ന ചാപങ്ങളുടെ തുക പരിധിയുടെ പകുതിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

8. P, Q, R, S ഇവ ഒരു വൃത്തപരിധിയിൽ ക്രമത്തിനു കിടക്കുന്ന നാലു ബിന്ദുക്കളാകുന്നു. PQ=QR=RS. PR, QS ഇവ

T യിൽ സംഘടിക്കുകയും, O കേന്ദ്രമായിരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ $\angle POQ = \angle PTQ$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

---

സൂചന:— 3. ABCD എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം O യും, AB, CD എന്നിവ രണ്ടു സമാന്തരജ്യാവുകളും ആണെങ്കിൽ $\angle AOC = 2\angle ABC = 2\angle BCD = \angle BOD$. 6. OC യോജിപ്പിക്കുക. സൂത്രം 2 ഉപയോഗിക്കുക. 7. $\angle ACD + \angle BAC = 90°$. 8. $\angle PRQ = \angle SQR$. $\angle PTQ = 2\angle PRQ = \angle POQ$.

---

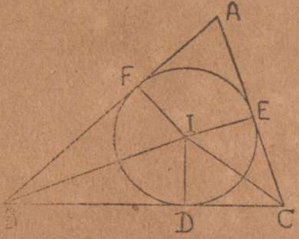
# പ്രശ്നം 11.

പ്രതിജ്ഞ:—

ഒരു ത്രിഭുജത്തിൽ ഒരു അന്തർലിഖിതവൃത്തം നിർമ്മിക്കുക.

ഉപാത്തം:— ABC ഒരു ത്രിഭുജമാകുന്നു.

കരണീയം:— ത്രിഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളേയും സ്പർശിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.




നിർമ്മിതി:— $\angle B$, $\angle C$ എന്നിവയുടെ സമഭാജികളായ BI, CI എന്നിവ വരയ്ക്കുക. I ൽ നിന്നും BC യ്ക്കു ലംബമായി BC യെ D യിൽ സന്ധിക്കത്തക്കവിധം ID വരയ്ക്കുക, I കേന്ദ്രമായി, ID ആരമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം ത്രിഭുജത്തിന്റെ മൂന്നു വശങ്ങളേയും സ്പർശിക്കുന്നു.

---

സ്പർശകം:—

ഒരു വൃത്തത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുകയും, ഇരുവശത്തേക്കു നീട്ടിയാലും വൃത്തത്തെ വീണ്ടും സന്ധിക്കാതിരിക്കയും ചെയ്യുന്ന ഒരു ഋജുരേഖയെ ആ വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശകം എന്നു പറയുന്നു. ഒരു സ്പർശകം ഒരു വൃത്തത്തെ ഏതു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നുവോ ആ ബിന്ദുവിന് സ്പർശകബിന്ദു എന്നു നാമകരണം

ചെയ്തിരിക്കുന്നു. ഒരു വൃത്തച്ഛേദകം എന്നു പറയുന്നതു് ഒരു വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ സംഘടിക്കുന്ന ഒരു ഋജുരേഖയാകുന്നു.

രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുകയും, ആ ബിന്ദുവിൽ അവയ്ക്കു ഒരു പൊതുസ്പർശകം ഉണ്ടായിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ ആ വൃത്തങ്ങൾ അന്യോന്യം സ്പർശിക്കുന്നതായി പറയുന്നു. അവ അന്യോന്യം ഏതു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നുവോ ആ ബിന്ദുവിനു് സ്പർശബിന്ദു എന്നും പറയുന്നു.

## സൂത്രം 45.

പ്രതിജ്ഞ:—

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിലുള്ള സ്പർശകവും, ആ ബിന്ദുവിൽകൂടിയുള്ള ആരവും അന്യോന്യം ലംബങ്ങളാകുന്നു.

സങ്കല്പം:- O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിലുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി PT എന്ന സ്പർശകം വരച്ചിരിക്കുന്നു.

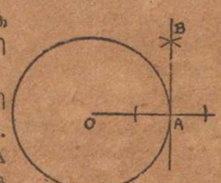
അനുമാനം:- OP, PT യ്ക്കു ലംബമാകുന്നു.

അനുസിദ്ധാന്തം:—

ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെ അഗ്രത്തിൽ അതിനു ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന ഋജുരേഖ ആ വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു സ്പർശകമാകുന്നു.

## പ്രശ്നം 12.

1. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയിലുള്ള ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽകൂടി ആ വൃത്തത്തിനു് ഒരു സ്പർശകം വരയ്ക്കുക.

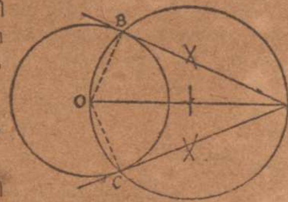



ഉപാത്തം:- O ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, A അതിന്റെ പരിധിയിലുള്ള ബിന്ദുവും ആകുന്നു.

കരണീയം:- A എന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി വൃത്തത്തിനു് ഒരു സ്പർശകം വരയ്ക്കുക.

നിർമ്മിതി:- OA യോജിപ്പിക്കുക. A യിൽകൂടി OA യ്ക്കു ലംബമായി BA വരയ്ക്കുക. ഈ AB യത്രെ വരയ്ക്കേണ്ട സ്പർശകം.

**2.** ഒരു വൃത്തത്തിന്ന വെളിയിലുള്ള ഒരു നിശ്ചിതബിന്ദുവിൽകൂടി ആ വൃത്തത്തിന്നു് ഒരു സ്പർശകം വരയ്ക്കുക.




ഉപാത്തം:- O ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, A വൃത്തത്തിന്ന വെളിയിലുള്ള ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവും ആകുന്നു.

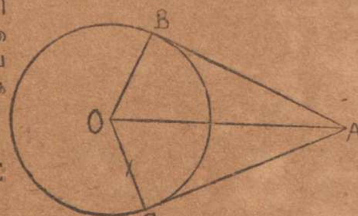
കരണീയം:- A യിൽനിന്നും വൃത്തത്തിന്ന ഒരു സ്പർശകം വരയ്ക്കുക.

നിർമ്മിതി:- AO യോജിപ്പിക്കുക. OA വ്യാസമായി, തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തെ B, C എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സന്ധിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. AB, AC എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക. അപ്പോൾ AB, AC എന്നിവ വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശകങ്ങളാകുന്നു.

## സൂത്രം 46.

പ്രതിജ്ഞ:—

ഒരു വൃത്തത്തിന്ന വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു് ആ വൃത്തത്തിലേക്കു് വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശകങ്ങൾ തുല്യങ്ങളാകുന്നു.




സങ്കല്പം:- AB, AC എന്നിവ O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തെ B, C എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കത്തക്കവണ്ണം വരച്ചിരിക്കുന്ന രണ്ടു സ്പർശകങ്ങളാണു്.

അനുമാനം:- AB=AC.

നിർമ്മിതി:- OA, OB, OC എന്നിവ യോജിപ്പിക്കുക.

ഉപപത്തി:- B, C എന്നിവ സ്പർശകബിന്ദുക്കളാകയാൽ B, C എന്ന കോണങ്ങൾ സമകോണങ്ങളാകുന്നു.

ആയതിനാൽ, OAB OAC എന്ന സമകോണത്രിഭുജങ്ങളിൽ ശ്രവണം OA പൊതുവാണു്,

BO=OC (ഒരേ വൃത്തത്തിന്റെ ആരങ്ങൾ)

$\therefore \triangle OAB \equiv OAC$

$\therefore AB=AC.$

## അഭ്യാസം 55.

### അനുമാനം.

**1.** ഒരു വ്യാസത്തിന്റെ അഗ്രങ്ങളിൽ വൃത്തത്തിനു് സ്പർശകങ്ങളായി വരയ്ക്കുന്ന ഋജുരേഖകൾ സമാന്തരങ്ങളാകുന്നു.

**2.** O എന്ന ബിന്ദു ഒരു നിശ്ചിതഋജുരേഖയെ സ്പർശിക്കുന്നതും ഒരു നിർദ്ദിഷ്ട ആരമുള്ളതുമായ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാകുന്നു. O യുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

**3.** അന്യോന്യം സംഘടിക്കുന്ന രണ്ടു ഋജുരേഖകളെ സ്പർശിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

**4.** ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിനെ അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തോടു യോജിപ്പിക്കുന്ന ഋജുരേഖയുടെയും, ആ ബിന്ദുവിൽനിന്നും വൃത്തത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശകങ്ങളുടേയും ഇടയ്ക്കുള്ള കോണങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നു.

**5.** P, O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വെളിയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു ബിന്ദുവാകുന്നു. P യിൽനിന്നും വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശകങ്ങൾ വൃത്തത്തെ Q, R എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. QOR, QPR എന്ന കോണങ്ങൾ അനുപൂരകങ്ങളാകുന്നു.

**6.** ഒരു ജ്യാവിന്റെ രണ്ടു് അഗ്രങ്ങളിലും വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശകങ്ങളുടേയും,, ആ ജ്യാവിന്റെയും ഇടയ്ക്കുള്ള കോണങ്ങൾ തുല്യമാകുന്നു.

**7.** ഒരു നിശ്ചിത ഋജുരേഖയെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

**8.** ഒരു ബഹുഭുജത്തിനകത്തു് ഒരു അന്തർലിഖിതവൃത്തം വരയ്ക്കാമെങ്കിൽ ആ ബഹുഭുജത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം ആ ബഹുഭുജത്തിന്റെ ചുററളവിന്റെയും അന്തർലിഖിതവൃത്തത്തിന്റെ ആരത്തിന്റെയും ഗുണനഫലത്തിന്റെ പകുതിയോടു തുല്യമാകുന്നു.

**9.** AB ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസവും, AC അതിന്റെ ഒരു ജ്യാവും ആകുന്നു. AD, C യിൽനിന്നുള്ള സ്പർശകത്തിനു ലംബമായി വരച്ചാൽ, $\angle BAC = \angle CAD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

**10.** A, B ഇവ കേന്ദ്രങ്ങളായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ C യിൽ സമകൗണികമായി സംഘടിക്കുന്നു. $AB^2 = AC^2 + BC^2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

[രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ സംഘടിക്കുമ്പോൾ സംഘടനാബിന്ദുക്കളിൽ ആ വൃത്തങ്ങൾക്കു വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശകങ്ങൾ സമകോണത്തിൽ സംഘടിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ വൃത്തങ്ങൾ സമകൗണികമായി സംഘടിക്കുന്നുവെന്നു പറയുക]

സൂചന:— 8. ബഹുഭുജത്തിൻെറ ശീർഷങ്ങളെ കേന്ദ്രത്തോടു യോജിപ്പിക്കുക. അപ്പോൾ കിട്ടുന്ന ത്രിഭുജങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. ത്രിഭുജത്തിൻെറ ഓരോന്നിൻെറയും ആധാരം ബഹുഭുജത്തിൻെറ വശങ്ങളും ഉന്നതി അന്തർലിഖിതവൃത്തത്തിൻെറ ആരവുമാണ്. 9. സൂത്രങ്ങൾ 8, 2 ഇവ ഉപയോഗിക്കുക.

---

## അഭ്യാസം 56.

## ഗണനം.

**1.** 3 സെ. മീ. ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 5 സെ. മീ. അകലത്തിൽ ഒരു ബിന്ദുവുണ്ട്. ആ ബിന്ദുവിൽനിന്നും ആ വൃത്തത്തിലേക്കു വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശകങ്ങളുടെ നീളം കാണുക.

**2.** ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് 13 സെ. മീ. അകലത്തിൽ ഒരു ബിന്ദുവുണ്ട്. ആ ബിന്ദുവിൽ നിന്നും വൃത്തത്തിലേക്കു വരച്ചിരിക്കുന്ന സ്പർശകത്തിൻെറ നീളം 12 സെ. മീ. ആണെങ്കിൽ ആ വൃത്തത്തിൻെറ ആരത്തിനു എന്തു നീളമുണ്ട്?

**3.** 8 സെ. മീ. ആരമായുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലേക്ക് വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നും വരച്ചിരിക്കുന്ന സ്പർശകത്തിൻെറ നീളം 15 സെ. മീ. ആണെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിനു കേന്ദ്രത്തിൽനിന്ന് എന്ത് അകലമുണ്ട്?

**4.** (1) ഭൂമിയുടെ ശരാശരി ആരം R ഏകകവും, ഒരു കുന്നിൻെറ പൊക്കം $h$ ഏകകവും ആണെങ്കിൽ ആ കുന്നിൻെറ മുകളിൽനിന്നും നോക്കിയാൽ കാണുന്ന ചക്രവാളം കുന്നിൻെറ മുകളിൽനിന്നു എന്ത് അകലത്തിലായിരിക്കും?

(2) കുന്നിൻെറ പൊക്കം $x$ അടിയും, ഭൂമിയുടെ ആരം 3960 മൈലുമാണെങ്കിൽ ചക്രവാളത്തിൻെറ ഏകദേശമായ ദൂരം എന്ത്? ($x$ താരതമ്യേന വളരെ ചെറുതാകയാൽ $x^2$ തള്ളിക്കളയാം)

(3) 1350 അടി ഉയരത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു കാണാവുന്ന ചക്രവാളത്തിൻെറ ഏകദേശമായ ദൂരം എന്ത്?

## അഭ്യാസം 57.

## നിർമ്മിതി.

**1.** ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽകൂടി കടക്കുകയും, ഒരു നിശ്ചിതരേഖയെ സ്പർശിക്കുകയും ചെയ്യത്തക്കവണ്ണം ഒരു നിശ്ചിത ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

2. AB എന്ന ഋജുരേഖയിൽനിന്നും 0·8 ഇ. അകലെയായി P യിൽ ഒരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. AB യെ സ്പർശിക്കുകയും, P യിൽകൂടി കടക്കുകയും ചെയ്യത്തക്കവണ്ണം 1 ഇ. ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

3. അന്യോന്യം സംഘടിക്കുന്ന രണ്ടു ഋജുരേഖകളെ സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു നിശ്ചിത ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

4. രണ്ടു സമാന്തരരേഖകളെ സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിലും, അവയുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽകൂടി കടക്കത്തക്ക വിധത്തിലും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

5. ഒരു നിശ്ചിത ആരമുള്ള വൃത്താകാരമായ ഒരു മേശയെ കൃത്യമായി മൂടുന്ന ഒരു സമചതുരമായ മേശവിരിയുടെ ഒരു വശത്തിന്റെ നീളം ഒരു നിർമ്മിതിമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുക.

6. ഒരു നിശ്ചിതരേഖയ്ക്കു സമാന്തരമായി ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തിന് ഒരു സ്പർശകം വരയ്ക്കുക.

7. ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തിന് രണ്ടു സ്പർശകങ്ങൾ വരയ്ക്കണം. അവയുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള കോണം ഒരു നിശ്ചിതകോണത്തോടു തുല്യമായിരിക്കുകയും വേണം.

---

സൂചനകൾ: 6. നിശ്ചിതരേഖയ്ക്കു ലംബമായി കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും ഒരു ഋജുരേഖ വരയ്ക്കുക. 7. ഇടയ്ക്കുള്ള കോണം തന്നിരിക്കുന്ന കോണത്തിന്റെ അനുപൂരകമാകത്തക്ക രണ്ട് ആരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഈ ആരങ്ങളുടെ അഗ്രങ്ങളിൽ സ്പർശകങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

---

## അഭ്യാസം 58.

## അനുമാനം (Harder)

1 O ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും, PQ അതിന്റെ ഒരു വ്യാസവും, PR അതിന്റെ ഒരു ജ്യാവും ആകുന്നു. Q ൽ വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശകം PR നീട്ടിയതിനെ S ൽ സന്ധിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\angle ORQ = \angle RSQ$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

2. ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിൽ AB, AC യേക്കാൾ വലുതാണ്. അതിന്റെ അന്തർലിഖിതവൃത്തം BC യെ D യിൽ സന്ധിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $AB - AC = BD - CD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

3. ഒരു ചതുർഭുജത്തിൽ ഒരു അന്തർലിഖിതവൃത്തം വരയ്ക്കുവാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ ആ ചതുർഭുജത്തിന്റെ വിപരീതവശങ്ങളുടെ തുകകൾ തുല്യമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

4. ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിൻെറ അന്തർലിഖിതവൃത്തം BC, CA, AB എന്നിവയെ D, E, F എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സന്ധിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\angle FDE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

5. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ രണ്ടു സ്പർശകങ്ങളാണ് PA, PB എന്നിവയെങ്കിൽ $\angle P = 2\angle OAB$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

6. ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിൻെറ അന്തർലിഖിതവൃത്തം BC, CA, AB എന്നീ വശങ്ങളെ യഥാക്രമം D, E, F എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സന്ധിക്കുകയും, $2s = (a+b+c)$ ആയിരിക്കുകയും ചെയ്താൽ $AE = AF = s - a$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിൻെറ വശങ്ങൾ $a, b, c$ എന്നിവയും, $2s = a+b+c$ യും ആണെങ്കിൽ ഈ ത്രിഭുജത്തിൻെറ അന്തർലിഖിതവൃത്തത്തിൻെറ ആരം = ത്രിഭുജത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം $\div s$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

---

സൂചനകൾ:— 1. PRQ, PQS എന്ന സമകോണത്രിഭുജങ്ങളുടെ കോണങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക. 2. അന്തർലിഖിതവൃത്തം CA, AB ഇവയെ യഥാക്രമം E, F ൽ സന്ധിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $AB - AC = (AF + FB) - (AE + EC) = BF - CE$. 4. E, F എന്നിവയെ അന്തഃകേന്ദ്രം O യുമായി യോജിപ്പിക്കുക. $\angle FOE = 180^\circ - \angle A$ 5. $\angle AOB + \angle P = 180^\circ = \angle AOB + \angle OAB + \angle OBA \therefore \angle P = \angle OAB + \angle OBA = 2\angle AOB$ 6. $(AF+FB)+(BD+CD)+(CE+EA)=2s \therefore AF+BD+CE=s \therefore AF+BC=s$ 7. $r$ അന്തർലിഖിതവൃത്തത്തിൻെറ ആരമാണെങ്കിൽ $\Delta ABC = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = \frac{1}{2}r(a+b+c) = rs$.

---

## അഭ്യാസം 59.

## നിർമ്മിതി (Harder)

1. 8 സെ. മീ. നീളത്തിൽ MN എന്ന ഒരു ഋജുരേഖ വരയ്ക്കുക. അതിൻെറ മദ്ധ്യബിന്ദുവായ P കണ്ടുപിടിക്കുക. MN ന് ലംബമായി NR 3 സെ. മീ. നീളത്തിൽ വരയ്ക്കുക. MN നെ P യിൽ സ്പർശിക്കയും R ൽക്കൂടി കടന്നുപോകയും ചെയ്യത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

2. ഒരു നിശ്ചിത ഋജുരേഖയെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുകയും ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടക്കുകയും ചെയ്യത്തക്കവണ്ണം ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

3. AB=3·6 സെ. മീ; BC=1·5 സെ. മീ; AC=3·9 സെ. മീ; DC=3·3 സെ. മീ; AD=5·4 സെ. മീ. ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം ABCD എന്ന ചതുർഭുജം വരയ്ക്കുക. AB, BC, CD ഇവയെ സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

4. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തം അന്തർലിഖിതവൃത്തമായിരിക്കുകയും, ഒരു നിശ്ചിത ത്രിഭുജത്തിന്റെ കോണങ്ങളോടു യഥാക്രമം തുല്യമായ കോണങ്ങളുണ്ടായിരിക്കുകയും ചെയ്യുത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു ത്രിഭുജം വരയ്ക്കുക.

5. 2 സെ. മീ. ആരമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം അന്തർലിഖിതവൃത്തമായും, കോണങ്ങൾ 43°, 61°, 76° വീതമായും ഇരിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു ത്രിഭുജം വരയ്ക്കുക.

6. 2·5 സെ. മീ. ആരമായുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും 7·4 സെ. മീ. അകലത്തിൽ P എന്നൊരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക. AB എന്ന ജ്യാവിന്റെ നീളം 4 സെ. മീ. ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം PAB എന്ന വൃത്തച്ഛേദകം Pയിൽകൂടി വരയ്ക്കുക. PB യുടെ നീളം അളക്കുക.

---

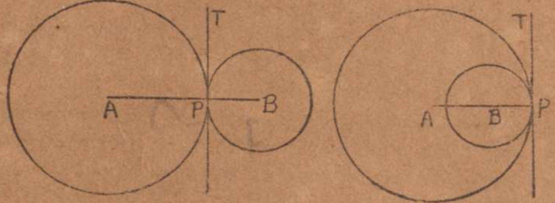
സൂചനകൾ:— 3. B, C എന്ന കോണങ്ങളുടെ സമഭാജികൾ സംഘടിക്കുന്ന ബിന്ദു കേന്ദ്രമായി വൃത്തം വരയ്ക്കുക. 4. തന്നിരിക്കുന്ന കോണങ്ങളുടെ അനുപൂരകങ്ങൾ കേന്ദ്രത്തിൽ ഉണ്ടാകത്തക്കവണ്ണം ആരങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഈ ആരങ്ങളുടെ അഗ്രങ്ങളിൽനിന്നു സ്പർശകങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. 5. നാലാം ചോദ്യത്തിനു ഉപയോഗിച്ച വഴിതന്നെ ഉപയോഗിക്കുക. 6. 4 സെ. മീ. നീളത്തിൽ ഒരു ജ്യാവു വരയ്ക്കുക. ഈ ജ്യാവിനെ സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തോടു ഏകകേന്ദ്രമായി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. P യിൽനിന്നും ഈ പുതിയ വൃത്തത്തിനു ഒരു സ്പർശകം വരയ്ക്കുക.

---

## സൂത്രം 47.

പ്രതിജ്ഞ:—

രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ അന്യോന്യം സ്പർശിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങളും സ്പർശകബിന്ദുവും ഒരേ ഋജുരേഖയിലായിരിക്കും.



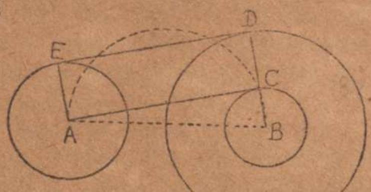

സങ്കൽപ്പം:— A, B എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ അന്യോന്യം P യിൽ സ്പർശിക്കുന്നു.

അനുമാനം:— A, P, B എന്നിവ ഒരേ ഋജുരേഖയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

## 1. ഏകപാർശ്വ സ്പർശകനിർമ്മിതി.

A, B എന്നിവ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളാകുന്നു.

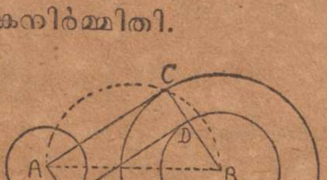
ഈ വൃത്തങ്ങൾക്കു ഒരു ഏകപാർശ്വസ്പർശകം വരയ്ക്കണം.




ഇവയിൽ ചെറിയ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം A ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. B കേന്ദ്രമാക്കി ഈ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടേയും ആരങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം ആരമാക്കി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ പുതിയ വൃത്തത്തിനു A യിൽനിന്നു് ഒരു സ്പർശകം വരയ്ക്കുക. ഈ സ്പർശകം വൃത്തത്തെ C യിൽ സ്പർശിക്കുന്നുവെന്നിരിക്കട്ടെ. BC യോജിപ്പിച്ചു B കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തെ D യിൽ സന്ധിക്കത്തക്കവണ്ണം നീട്ടുക. BD യ്ക്കു സമാന്തരമായി AE വരച്ചു് A കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തെ E യിൽ സന്ധിപ്പിക്കുക. DE യോജിപ്പിക്കുക. അപ്പോൾ DE തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ ഏകപാർശ്വസ്പർശകം ആയിരിക്കും.

## 2. ദ്വിപാർശ്വസ്പർശകനിർമ്മിതി.

B കേന്ദ്രമാക്കി വരച്ച വൃത്തത്തിന്റെ ആരം തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ ആരങ്ങളുടെ തുകയായിരുന്നാൽ മേൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന നിർമ്മിതി പ്രകാരം തന്നെ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന വിധത്തിൽ ഒരു ദ്വിപാർശ്വസ്പർശകവും വരയ്ക്കാവുന്നതാണു്.



## അഭ്യാസം 60.

### അനുമാനം.

**1.** രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അവയുടെ ആരങ്ങളുടെ തുകയോടു തുല്യമാകുന്നു.

**2.** രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ ആന്തരമായി സ്പർശിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവയുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അവയുടെ ആരങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തോടു തുല്യമാകുന്നു.

**3.** ഒരു നിശ്ചിത വൃത്തത്തെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളുടെ ബിന്ദുപഥം എന്താണ്?

**4.** ഒരു നിശ്ചിത വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുന്നതും, ഒരു നിശ്ചിത ആരമുള്ളതുമായ വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളുടെ ബിന്ദുപഥം എന്താണ്?

**5.** രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ പൊതുസ്പർശകങ്ങളുടെ (അവ ഏകപാർശ്വമോ, ദ്വിപാർശ്വമോ ആയിരുന്നാലും) സ്പർശകബിന്ദുക്കളുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള നീളം തുല്യമായിരിക്കും.

**6.** R എന്ന ബിന്ദുവിൽ ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങളെ ഒരു ഏകപാർശ്വസ്പർശകം P, Q എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. PQ വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം R ൽ കൂടി കടന്നുപോകുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

**7.** A, B എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ അന്യോന്യം സ്പർശിക്കുന്നു. A കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തെ D യിലും, B കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തെ E യിലും സംഘടിക്കത്തക്ക വിധത്തിലും, DE എന്നൊരു ഋജുരേഖ സ്പർശബിന്ദുവിൽകൂടി വരച്ചിരിക്കുന്നു. AD, BE ഇവ സമാന്തരങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

**8.** P, Q, R എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളായ മൂന്നു വൃത്തങ്ങൾ ഓരോന്നും മററു രണ്ടിനേയും A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നു. Q കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തെ AB, AC എന്നിവ നീട്ടിയപ്പോൾ D, E എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ സംഘടിക്കുന്നു. D, Q, E എന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏകരേഖീയമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

---

സൂചനകൾ:- **6.** PQ നെ S ൽ സന്ധിക്കത്തക്കവണ്ണം R എന്ന ബിന്ദുവിൽ RS എന്ന പൊതുസ്പർശകം വരയ്ക്കുക. അപ്പോൾ SP = RS = SQ. **7.** C സ്പർശകബിന്ദുവാകുന്നുവെങ്കിൽ ∠D = ∠ACD = ∠BCE = ∠E. **8.** മുകളിലത്തെ ചോദ്യം ഉപയോഗിക്കുക. AR, EQ ഇവയും, AP, QD ഇവയും സമാന്തരങ്ങളാണ്.

## അഭ്യാസം 61.

## നിർമ്മിതി.

1. ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിലും കേന്ദ്രം ഒരു നിശ്ചിത ഋജുരേഖയിലായിട്ടും, ഒരു നിശ്ചിത ആരം ഉപയോഗിച്ചും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

2. ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തെയും ഒരു നിശ്ചിത ഋജുരേഖയേയും സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു നിശ്ചിത ആരം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

3. ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിലും ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടക്കത്തക്കവണ്ണവും ഒരു നിശ്ചിത ആരമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

4. AB, CD എന്നിവ രണ്ടു സമാന്തര ഋജുരേഖകളാകുന്നു. CD യെയോ, CD നീട്ടിയതിനെയോ സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിലും, A യിലും B യിലുംകൂടി കടന്നുപോകത്തക്കവണ്ണം ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

5. ABC, ഒരു സമകോണമാകുന്നു. D, E എന്നിവ AB യിലുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാകുന്നു. BC യെ സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിലും, E, D എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകത്തക്കവണ്ണവും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

6. രണ്ടു നിശ്ചിതവൃത്തങ്ങളെ (1) ബാഹ്യമായും (2) ആന്തരമായും സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു നിശ്ചിത ആരം ഉപയോഗിച്ചു ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

7. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തെ ആന്തരമായും, അന്യോന്യം ബാഹ്യമായും സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ നിശ്ചിത ആരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തത്തിനകത്തു വരയ്ക്കുക.

8. ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തെയും, രണ്ടു നിശ്ചിത സമാന്തരരേഖകളെയും സ്പർശിക്കത്തക്കവിധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

9. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു നിശ്ചിത വൃത്തത്തെ അതിൻെറ പരിധിയിലുള്ള ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിലും ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നുപോകത്തക്കവിധത്തിലും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

10. 2·5 ഇഞ്ച് അകലമുള്ള രണ്ടു കേന്ദ്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് 2 ഇഞ്ചും, 0·5 ഇഞ്ചും ആരങ്ങളുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവയ്ക്ക് ഒരു ഏകപാർശ്വസ്പർശകം വരച്ച് അതിൻെറ നീളം അളക്കുക.

സൂചനകൾ:—4. CD യെ E യിൽ സന്ധിക്കത്തക്കവണ്ണം AB യുടെ ലംബസമഭാജി വരയ്ക്കുക. A, B, E എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി വൃത്തം വരയ്ക്കുക. 5. DE യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവായ F കാണുക. D, E എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി BF ആരമായി രണ്ടു ചാപങ്ങൾ O യിൽ സംഘടിക്കത്തക്കവണ്ണം വരയ്ക്കുക. O കേന്ദ്രമാക്കി OD ആരമായി വൃത്തം വരയ്ക്കുക. 6. തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ A യും, B യും അവയുടെ ആരങ്ങൾ $a$ യും, $b$ യും തന്നിരിക്കുന്ന ആരം $c$ യും ആയിരിക്കട്ടെ. (1) A, B എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി. $(a+c)$. $(b+c)$ എന്നിവ യഥാക്രമം ആരങ്ങളായി വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. (2) A, B എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി, $(c-a)$, $(c-b)$ എന്നിവ യഥാക്രമം ആരങ്ങളായി വൃത്തം വരയ്ക്കുക. 7. രണ്ടു വൃത്തങ്ങളിൽ ഒന്നു വരച്ചതിന്റെ ശേഷം മുകളിലത്തെ ചോദ്യത്തിൽ ഉപയോഗിച്ച വഴി ഉപയോഗിക്കുക. 8. തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ആരം $r$ ഏകകവും, സമാന്തരങ്ങളുടെ അകലം $d$ ഏകകവും ആയിരിക്കട്ടെ. തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തോടു ഏകകേന്ദ്രമായി, $(r+\frac{1}{2}d)$, $(r-\frac{1}{2}d)$ എന്നിവ ആരങ്ങളാക്കി വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തങ്ങൾ സമാന്തരരേഖകളുടെ ഒത്ത മദ്ധ്യത്തിൽകൂടി പോകുന്ന സമാന്തരരേഖയെ സംഘടിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി വൃത്തം വരയ്ക്ക. 9. തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഋജുരേഖയുടെ ലംബസമഭാജിയുമായി സംഘടിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും സ്പർശകബിന്ദുവുംകൂടി യോജിപ്പിച്ചു നീട്ടുക.

---

## അഭ്യാസം 62.

### ഗണനം.

1. A, B, C കേന്ദ്രങ്ങളായ മൂന്നു വൃത്തങ്ങൾ ഓരോന്നും മററവയെ രണ്ടിനേയും ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നു. AB = 9 സെ. മീ. BC = 7 സെ. മീ., CA = 8 സെ. മീ. എങ്കിൽ വൃത്തങ്ങളുടെ ഓരോന്നിന്റെ ആരങ്ങൾ എത്രയെന്നു കണക്കാക്കുക.

2. 2·5 ഇ., 1·6 ഇ. എന്നിവ ആരങ്ങളായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ അന്യോന്യം ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നു, അവയുടെ ഒരു ഏകപാർശ്വസ്പർശകത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

3. ഒരിഞ്ച്, 0·3 ഇ. എന്നിവ ആരങ്ങളായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ 2·5 ഇ. അകലത്തിലാണ്. അവയുടെ ഒരു ഏകപാർശ്വസ്പർശകത്തിന്റെ നീളം കണക്കാക്കുക.

4. C കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തം; A, B എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളെ ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നു. AB, BC യ്ക്കു

ലംബമാണ്. A, B എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളായ വൃത്തങ്ങളുടെ ആരങ്ങൾ യഥാക്രമം 4 സെ. മീ.. 3 സെ. മീ. ആണ്. AB യുടെ നീളം 10 സെ. മീ. ആണെങ്കിൽ, C കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ ആരം എന്ത്?

**5.** 24 ഇഞ്ച് നീളമുള്ള AB എന്ന വ്യാസത്തിൽ അർദ്ധവൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു ആർക്ക് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. C അതിന്റെ കേന്ദ്രമാണ്. AC, BC എന്നിവ വ്യാസങ്ങളായ അർദ്ധവൃത്താകൃതിയിലുള്ള വേറെ രണ്ടു ആർക്കുകൾ അതിനകത്തു സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. ഈ മൂന്നു ആർക്കുകളേയും സ്പർശിക്കുന്ന വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു വളയത്തിന്റെ ആരം എന്ത്?

---

സൂചനകൾ:— **1.** A, B, C എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളായ വൃത്തങ്ങളുടെ ആരങ്ങൾ യഥാക്രമം $a$, $b$, $c$ സെ. മീ. വീതമാണെങ്കിൽ $2a+2b+2c=9+7+8$ ആണ്. എന്നാൽ $a+b=9$. $b+c=7$ ആണ്. **2.** പൈതഗൊറസിന്റെ സൂത്രം ഉപയോഗിക്കുക. ശ്രവണം $=(2{\cdot}5+1{\cdot}6)$ ഇഞ്ച്. ഒരു വശം $=(2{\cdot}5-1{\cdot}6)$ **3.** കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട നീളം $x$ ഏകകം ആണെങ്കിൽ $2{\cdot}5^2=(1-{\cdot}3)^2+x^2$. **4.** കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ആരം $x$ ഏകകം ആണെങ്കിൽ $(x+4)^2=(x+3)^2+10^2$. **5.** കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട ആരം $x$ ഏകകം ആണെങ്കിൽ $(12-x)^2+6^2=(x+6)^2$.

---

## അഭ്യാസം 63.

## അനുമാനം (Harder)

**1.** A, B കേന്ദ്രങ്ങളായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ ബാഹ്യമായി അന്യോന്യം സ്പർശിക്കുന്നു. AB യുടെ ഒരു വശത്തുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാണ് P, R എന്നിവ. PAQ, RBS എന്നിവ രണ്ടു സമാന്തരവ്യാസങ്ങളാണ്. PS സ്പർശകബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടക്കുന്നുവെന്നു തെളിയിക്കുക.

**2.** ഒന്നാം ചോദ്യത്തിന്റെ ചിത്രത്തിൽ PS, RQ എന്നിവ സ്പർശകബിന്ദുവിൽ അന്യോന്യം സമകോണത്തിൽ സംഘടിക്കുന്നുവെന്നു തെളിയിക്കുക.

**3.** A, B കേന്ദ്രങ്ങളായ രണ്ടു തുല്യ വൃത്തങ്ങൾ C യിൽ ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നു. A കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൽ CL എന്ന ഒരു ജ്യാവും, മറ്റെ വൃത്തത്തിൽ CD യ്ക്കു ലംബമായി CE എന്നൊരു ജ്യാവും വരച്ചിരിക്കുന്നു. ABED ഒരു സമാന്തരികമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

**4.** C കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തം അന്യോന്യം ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നതും, A, B കേന്ദ്രങ്ങളായുള്ളവയും ആയ രണ്ടു വൃത്ത

ങ്ങളെ ആന്തരമായി സ്പർശിക്കുന്നു. AB+BC എന്നതു് A,C എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളായ വൃത്തങ്ങളുടെ ആരങ്ങളുടെ തുകയോടു തുല്യം എന്നു തെളിയിക്കുക.

**5.** A, B എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നു. PQ അവയുടെ ഒരു ഏകപാർശ്വസ്പർശകമാണു്. സ്പർശകബിന്ദുവിലുള്ള പൊതുസ്പർശകം PQ നെ R ൽ സന്ധിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ARB സമകോണമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

---

സൂചനകൾ:— **1.** സ്പർശകബിന്ദു O എന്നിരിക്കട്ടെ. OP, OS യോജിപ്പിക്കുക. ∠AOP= ∠APO= ഏകാന്തരകോണം ∠BSO = ∠BOS **2.** 1-ാം ചോദ്യവും, 39-ാം സൂത്രവും ഉപയോഗിക്കുക, **3.** ∠ACD+ ∠BCE=90° ∴ ∠ADC+ ∠BEC=90° ∴ ∠A+ ∠B =180°. **4.** ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്ന സ്പർശകബിന്ദു D ആണെങ്കിൽ AB+BC=AD+(BD+CB) **5.** സ്പർശകബിന്ദു O ആണെങ്കിൽ AR, ∠PRO ന്റെയും, RB, ∠QRO ന്റെയും സമഭാജിയാകുന്നു.

---

## അഭ്യാസം 64.

## നിർമ്മിതി (Harder)

**1.** ഒരു നിശ്ചിതഋജുരേഖയെ സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിലും ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തെ ഒരു നിശ്ചിതബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കത്തക്ക വണ്ണവും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

**2.** ഒരു നിശ്ചിത ഋജുരേഖയെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കത്തക്കവണ്ണവും, വേറെ ഒരു ഋജുരേഖയെ സ്പർശിക്കത്തക്കവണ്ണവും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

**3.** ഒരു നിശ്ചിതഋജുരേഖയെ ഒരു നിശ്ചിതബിന്ദുവിലും, ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തെ ബാഹ്യമായും സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

**4.** ഒരു നിശ്ചിതഋജുരേഖയെ ഒരു നിശ്ചിതബിന്ദുവിലും, ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തെ ആന്തരമായും സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

**5.** ഒരു നിശ്ചിതബിന്ദുവിൽ കൂടി കടക്കത്തക്ക വിധത്തിലും, ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിലും ഒരു നിശ്ചിത ആരം ഉപയോഗിച്ചു് ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

6. ഒരു നിശ്ചിതവൃത്തത്തെ ഒരു നിശ്ചിതബിന്ദുവിലും, മറെറാരു വൃത്തത്തേയും സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

7. A,B,C എന്നിവ കേന്ദ്രങ്ങളാക്കി ഓരോന്നും മററു രണ്ടിനേയും സ്പർശിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ മൂന്നു വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

---

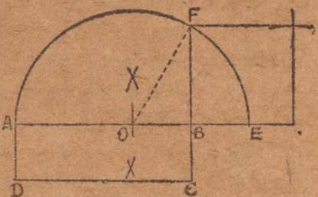
സൂചനകൾ:— 1 സ്പർശകബിന്ദുവായ A യിൽക്കൂടി നിശ്ചിതഋജുരേഖയെ B ൽ സന്ധിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു സ്പർശകം വരയ്ക്കുക. നിശ്ചിതരേഖയിൽ BA യ്ക്കു തുല്യമായി BD അടയാളപ്പെടുത്തുക. അപ്പോൾ D വേറെ ഒരു സ്പർശകബിന്ദുവാകുന്നു. 2. നിശ്ചിതബിന്ദുവിൽ ഒരു ലംബം വരച്ച് രേഖകളുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള കോണത്തിന്റെ സമഭാജിയെ സന്ധിക്കുക. 3. നിശ്ചിതരേഖയ്ക്കു ലംബങ്ങളായി നിശ്ചിതബിന്ദുവിൽക്കൂടിയും, നിശ്ചിതവൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടിയും ഋജുരേഖകൾ വരയ്ക്കുക. കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടി വരച്ച ലംബം വൃത്തത്തെ സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുവും നിശ്ചിതബിന്ദുവിൽക്കൂടി യോജിപ്പിക്കുക. ഈ രേഖ വൃത്തത്തെ C യിൽ സന്ധിക്കുന്നുവെങ്കിൽ കേന്ദ്രവും C യുംകൂടി യോജിപ്പിച്ച് നീട്ടി നിശ്ചിതബിന്ദുവിൽക്കൂടിയുള്ള ലംബത്തെ O യിൽ സന്ധിപ്പിക്കുക. O കേന്ദ്രമായി വൃത്തം വരയ്ക്കുക. 4. മുൻ ചോദ്യത്തിനു ഉപയോഗിച്ച വഴിതന്നെ ഉപയോഗിക്കുക. ലംബം വൃത്തത്തെ സംഘടിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന മറെറ ബിന്ദുവും നിശ്ചിതബിന്ദുവുംകൂടിയാണ് യോജിപ്പിക്കേണ്ടതു്. 5. നിശ്ചിതബിന്ദു കേന്ദ്രമാക്കി നിശ്ചിത ആരം ഉപയോഗിച്ചു ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തോടു ഏകകേന്ദ്രമായി നിശ്ചിത ആരത്തിന്റെയും, തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെയും ആരത്തിന്റെയും തുക ആരമാക്കി ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഇപ്പോൾ വരച്ച രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടേയും സംഘട്ടനബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട വൃത്തകേന്ദ്രമാണ്. 6. P കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിലുള്ള നിശ്ചിതബിന്ദു A യും, Q മറെറ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രവും ആയിരിക്കട്ടെ. AP യ്ക്കു സമാന്തരമായി QD എന്ന ആരം വരയ്ക്കുക. Q കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തെ B യിൽ സംഘടിക്കത്തക്ക വിധത്തിൽ AD യോജിപ്പിക്കുക. AP, BQ എന്നിവയുടെ സംഘട്ടനബിന്ദുവാണ് നമുക്കു കണ്ടുപിടിക്കേണ്ട വൃത്തകേന്ദ്രം 7. ABC എന്ന ത്രിഭുജത്തിന്റെ അന്തഃകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്നും വശങ്ങളിലേക്കു ലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

---

# പ്രശ്നം 14.

പ്രതിജ്ഞ:—

ഒരു നിശ്ചിത ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലത്തോടു തുല്യക്ഷേത്രഫലമുള്ള ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക.




ഉപാത്തം:—ABCD ഒരു നിശ്ചിത ആയതക്ഷേത്രമാകുന്നു.

കരണീയം:—ഈ ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലത്തോടു തുല്യക്ഷേത്രഫലമുള്ള ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

നിർമ്മിതി:— BE=BC ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം AB യെ E യിലേക്കു നീട്ടുക. AE വ്യാസമാക്കി ഒരു അർദ്ധവൃത്തം വരയ്ക്കുക. അർദ്ധവൃത്തത്തെ F ൽ സന്ധിക്കത്തക്കവണ്ണം CB നീട്ടുക. BF ഒരു വശമായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം സമചതുരം നിർമ്മിക്കുക.

## അഭ്യാസം 65.

1. വശങ്ങളുടെ നീളം 2·3 ഇഞ്ചും, 1·1 ഇഞ്ചും ആയിരിക്കത്തക്ക ഒരു ആയതക്ഷേത്രം വരയ്ക്കുക. ഈ ആയതക്ഷേത്രത്തോടു തുല്യമായ ഒരു സമചതുരം വരച്ച് അതിൻെറ ഒരു വശത്തിൻെറ നീളം അളന്നു കാണുക.

2. ഒരു നിശ്ചിത ചുററളവുള്ള ആയതക്ഷേത്രങ്ങളിൽ ഏററവും കൂടുതൽ ക്ഷേത്രഫലമുള്ളതു് ഒരു സമചതുരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

3. തുക (i) 14 (ii) s ആയുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലത്തിൻെറ മഹിഷ്ഠവിലയെന്തു്?

4. ഗുണനഫലം (i) 36 (ii) p ആയുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ അല്പിഷ്ഠവിലയെന്തു്?

5. മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രശ്നത്തിൻെറ ചിത്രത്തിൽ ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം 36 ച. ഇഞ്ചും, ചുററളവു് 26 ഇഞ്ചും ആണെങ്കിൽ ആയതക്ഷേത്രത്തിൻെറ വശങ്ങളുടെ നീളം ഒരു നിർമ്മിതിമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുക.

6. തുക 20, ഗുണനഫലം 64 ആയിരിക്കത്തക്ക രണ്ടു സംഖ്യകൾ ഒരു നിർമ്മിതിമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുക.

7. ഒരു ഋജുരേഖയെ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളായി ഭാഗിക്കണം. ആ രണ്ടു ഭാഗങ്ങൾ വശങ്ങളായുള്ള ആയതക്ഷേത്രത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം ഒരു നിശ്ചിത സമചതുരത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലത്തോടു തുല്യമായിരിക്കയും വേണം.

8. 2·9 ച. ഇ. ക്ഷേത്രഫലമുള്ള ഒരു സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

9. ഒരു നിർമ്മിതി ഉപയോഗിച്ച് 5 ച. സെ. മീ. ക്ഷേത്രഫലമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം കണ്ടുപിടിക്കുക. അതുപയോഗിച്ച് ആ സമചതുരത്തോടു തുല്യക്ഷേത്രഫലമുള്ളതും, 8·2 സെ. മീ. ചുററളവുള്ളതുമായ ഒരു ആയതക്ഷേത്രം വരയ്ക്കുക.

10. ഒരു നിശ്ചിത ത്രിഭുജത്തോടു് തുല്യ ക്ഷേത്രഫലമുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

11. ഒരു നിശ്ചിത ചതുർഭുജത്തോടു് തുല്യ ക്ഷേത്രഫലമുള്ള സമചതുരം വരയ്ക്കുക.

12. 14-ാം പ്രശ്നത്തിന്റെ നിർമ്മിതി ഉപയോഗിച്ച് $x^2 - 13x + 36 = 0$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

13. $x^2 - 7x + 12 = 0$ എന്ന സമവാക്യം ഒരു ക്ഷേത്രഗണിത നിർമ്മിതി ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

---

സൂചനകൾ:—8. 3·9 ഇഞ്ച് വ്യാസമുള്ള ഒരു അർദ്ധവൃത്തം വരയ്ക്കുക. $2·9 \times 1 = (\sqrt{2·9})^2$. 9. $5 = 2^2 + 1^2$; 8·2 സെ. മീ. നീളമുള്ള വ്യാസത്തിന്മേൽ ഒരു അർദ്ധവൃത്തം വരയ്ക്കുക. 12. തുക 13, ഗുണനഫലം 36 ആയുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകൾ കണ്ടുപിടിക്കുക. മുകളിൽ 5-ാം ചോദ്യം ഉപയോഗിക്കുക. $(x-9)(x-4) = 0$. 13. മുകളിൽ 12-ാം ചോദ്യം ഉപയോഗിക്കുക. $12 = 4^2 - 2^2$.

---

# ശരാശരി

## (ആവർത്തനം)

### അഭ്യാസം 66.

1. നാല്പതു കുട്ടികളുള്ള ഒരു ക്ലാസ്സിൽ ഒരു കുട്ടിയുടെ ശരാശരി വയസ്സ് 14·25-ം, 32 കുട്ടികളുള്ള മറെറാരു ക്ലാസ്സിലെ ശരാശരി വയസ്സ് 12·75-ം ആണ്. എന്നാൽ രണ്ടു ക്ലാസ്സുകളിലെയും കുട്ടികളുടെ ശരാശരി വയസ്സ് ഒന്നിച്ചു കണക്കാക്കിയാൽ ശരാശരി വയസ്സെത്ര?

**2.** മുന്നൂറു കുട്ടികളുള്ള ഒരു സ്കൂളിലെ ഒരു കുട്ടിയുടെ ശരാശരി വയസ്സ് $10\frac{3}{4}$ ആയിരുന്നു. അവിടെ പത്തു കുട്ടികളെ പുതുതായി ചേർത്തു. ഈ പത്തുപേരുടെ ശരാശരി വയസ്സ് $9\frac{1}{2}$ ആണെങ്കിൽ ഇവരെ ചേർത്തശേഷം സ്കൂളിലെ ശരാശരി വയസ്സ് എത്രയെന്ന് രണ്ടാം ദശാംശ സ്ഥാനംവരെ ശരിയായി കാണുക.

**3.** 1923 മുതൽ 1937 വരെ (രണ്ടുമുൾപ്പെടെ) ഒരാളുടെ ശരാശരി വാർഷികാദായം 3000 രൂ. ആയിരുന്നു. 1923-ലെ ആദായം 1800 രൂപായും, 1938-ലേതു് 5400 രൂപായും ആയിരുന്നെങ്കിൽ 1924 മുതൽ 1938 വരെ (രണ്ടുമുൾപ്പെടെ) അയാളുടെ ശരാശരി വാർഷികാദായം എത്രയായിരുന്നു?

**4.** ഒരു വ്യവസായശാലയിൽ 134 ജോലിക്കാർ ഉണ്ടു്. ഇവരിൽ 24 പേരുടെ ശരാശരി ദിവസക്കൂലി 1 രൂ. 4 ണ. 6 സ. ആണ്. ബാക്കിയുള്ളവരുടെ 60%ന് ദിവസം 7 ണ. 9 സ. വീതവും പിന്നെയും ശേഷിച്ചവരുടെ ആകെയുള്ള കൂലി 32 രൂ. 14 ണ. 4 സ. യും ആണെങ്കിൽ ആ ശാലയിലെ ഒരാളുടെ ശരാശരി ദിവസക്കൂലി എത്ര?

**5.** മുന്നൂറു് കുട്ടികളുള്ള ഒരു സ്കൂളിൽ ഒരു കുട്ടി കൊടുക്കുന്ന ശരാശരി ഫീസു് മാസമൊന്നുക്കു് 4·55 രൂപയാണ്. അവിടെ 60 പുതിയ കുട്ടികളെ ചേർത്തപ്പോൾ ശരാശരി ഫീസ് 4 രൂപയായി കുറഞ്ഞെങ്കിൽ, പുതിയ കുട്ടികളിൽ ഒരാളിന്റെ ശരാശരി ഫീസെത്ര?

**6.** ഒരു ശാലയിൽ 240 ജോലിക്കാർ ഉണ്ട്. കഴിഞ്ഞവർഷം അവരുടെ ശരാശരി മാസശമ്പളം 40 രൂപായായിരുന്നു. ഈ വർഷം അവരിൽ 20 പേർക്കു ശമ്പളക്കൂടുതൽ കിട്ടി. ശരാശരി ശമ്പളവർദ്ധനവ് (ഒരാളുടെ) മാസം 6 രൂപായാണെങ്കിൽ, ഈയാണ്ടിൽ ആ ശാലയിലെ ജോലിക്കാരുടെ ശരാശരി മാസശമ്പളം എത്ര?

---

ഉത്തരം. **1.** 13 വർഷം 7 മാസം. **2.** $10\frac{2}{3}\frac{2}{1}$. **3.** 3240 രൂ. **4.** 11 ണ. 5 സ. **5.** 2·15 രൂ. **6.** 40 രൂ. 8 ണ.

---

## അദ്ധ്യായം 10.

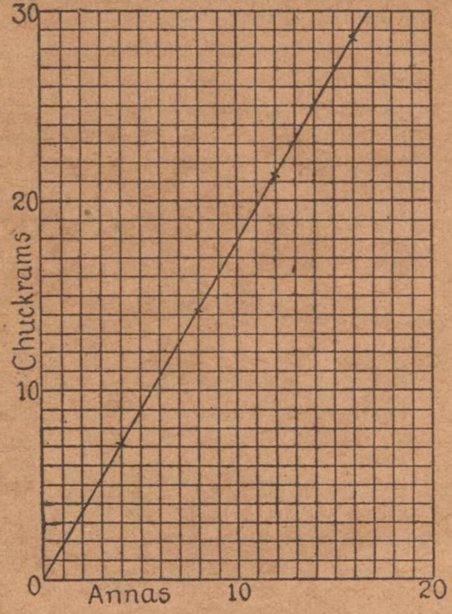
# ലേഖകൾ.

### പാഠം 1.

### പ്രശ്നചിത്രീകരണം.

അങ്കഗണിതത്തിലെ പ്രശ്നങ്ങൾ പലതും ലേഖകൾകൊണ്ട് ചിത്രീകരിക്കുകയും, അവ ഉപയോഗിച്ച് ഉത്തരം കണ്ടുപിടിക്കുകയും

ചെയ്യാവുന്നതാകുന്നു. താഴെ കാണുന്ന ലേഖകൾ ഇവയിൽ ചിലതിന്റെ ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.




ഉദാഹരണം 1.

ഇ. നാണയത്തിൽ (അണ, പൈസ) ഉള്ള ഒരു തുകയെ തിരുവിതാംകൂർ നാണയത്തിൽ (ചക്രം, കാശ്) ആക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കത്തക്ക ഒരു ലേഖ, (താഴെക്കാണുന്ന പട്ടികയിലെ സംഖ്യകൾകൊണ്ട്) വരയ്ക്കുക.

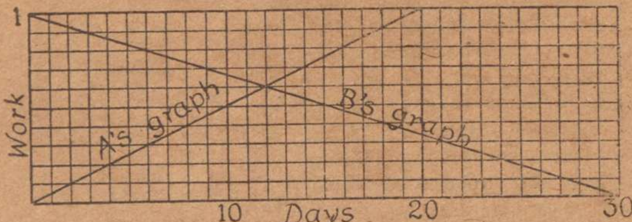
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| അണ | 2 | 4 | 8 | 16 |
| ച. കാ. | 3-9 | 7-2 | 14-4 | 28-8 |

ഇവിടെ തിരശ്ചീനരേഖയിൽ അണയും ലംബരേഖയിൽ ചക്രം കാശും കുറിച്ചിരിക്കുന്നു. പൈസകൂടി അടയാളപ്പെടുത്തത്തക്കവണ്ണം കുറേക്കൂടെ വലുതായി ഈ ലേഖ വരച്ചാൽ അണ പൈസയിലുള്ള ഏതു സംഖ്യയും അതിനു തുല്യമായ ചക്രം, കാശായി ലേഖയിൽ നോക്കി പറയാവുന്നതാണ്.

## ഉദാഹരണം 2.

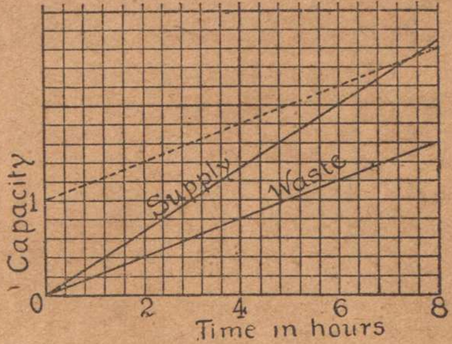
ഏ തനിച്ചു ജോലിചെയ്താൽ 20 ദിവസംകൊണ്ടും, ബി തനിച്ചാണെങ്കിൽ 30 ദിവസംകൊണ്ടും ഒരു വേലചെയ്തുതീർക്കാം. രണ്ടുപേരുംകൂടി ഒന്നിച്ചു ജോലിചെയ്താൽ എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു ആ വേല തീർക്കാമെന്നു ഒരു ലേഖ വരച്ചു് കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഇവിടെ തിരശ്ചീനരേഖയിൽ ദിവസങ്ങളും, ലംബരേഖയിൽ വേലയുടെ അളവും കുറിക്കുന്നു. ഏ യുടെ വേല കാണിക്കുന്ന ലേഖയും, ബിയുടെ വേല കാണിക്കുന്ന ലേഖയും സംഘടിക്കുന്ന ബിന്ദു രണ്ടുപേരുംകൂടി വേല തീർക്കുന്നതിനു് ആവശ്യമുള്ള സമയത്തെ കുറിക്കുന്നു.




## ഉദാഹരണം 3.

മൂന്നു മണിക്കൂർകൊണ്ടു് ഒരു കുഴൽവഴി വെള്ളം വന്നു് ഒരു തൊട്ടി നിറയുകയും, നിറഞ്ഞശേഷം 5 മണിക്കൂർകൊണ്ടു് വേറൊരു കുഴൽ വഴി ആ വെള്ളം മുഴുവൻ ഒഴുകിപ്പോകുകയും ചെയ്യുന്നു. തൊട്ടിയിൽ വെള്ളമില്ലാതിരിക്കുമ്പോൾ രണ്ടു കുഴലുകളും ഒരേസമയത്തു് തുറന്നിട്ടാൽ എത്ര സമയംകൊണ്ടു് ആ തൊട്ടി നിറയുമെന്നു് ഒരു ലേഖ വരച്ചു കണ്ടുപിടിക്കുക.

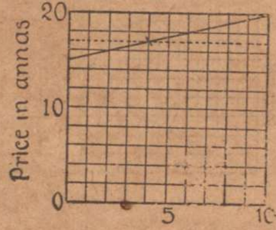


ഇവിടെ തിരശ്ചീനരേഖയിൽ സമയവും, ലംബരേഖയിൽ വെള്ളത്തിന്റെ അളവും കുറിച്ചിരിക്കുന്നു. നിറഞ്ഞ തൊട്ടിയുടെ അളവ് 1 എന്നു സങ്കല്പിച്ചിട്ട്, നിറയ്ക്കുന്ന കുഴലിന്റെയും പുറത്തേക്കു വിടുന്ന കുഴലിന്റെയും രേഖകൾ തമ്മിൽ ലംബമായി അളന്നാൽ വ്യത്യാസം 1 ഏതു സ്ഥാനത്തു വരുന്നുവെന്ന് ഒരു സമാന്തരരേഖ വരച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

## ഉദാഹരണം 4.

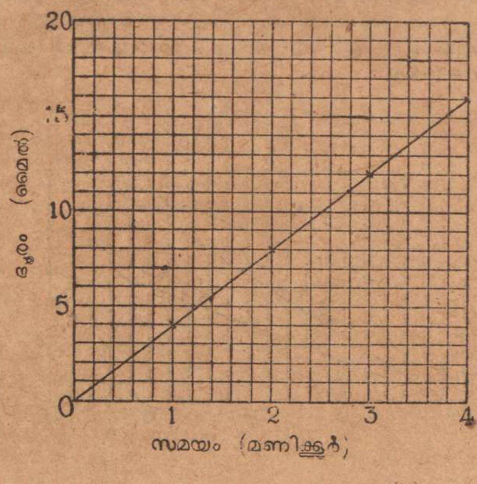
പൌണ്ടിന് യഥാക്രമം 15 ണ. യും, 1 രു. 4 ണ. യും വീതം വിലയുള്ള രണ്ടുതരം തേയില എന്ത് അനുപാതസംഖ്യയിൽ കലർത്തിയാൽ പൌണ്ടിന് 1 രു. 1 ണ. വിലയാകും?

തിരശ്ചീനരേഖയിൽ തൂക്കവും, ലംബത്തിൽ വില അണയാക്കിയും കുറിച്ചിരിക്കുന്നു. 15 ണ., 20 ണ. എന്നിവയെ കുറിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിക്കുക. ഈ ഋജുരേഖയും 17 ണ. യെ കുറിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടിയുള്ള തിരശ്ചീനരേഖയും സംഘടിക്കുന്ന ബിന്ദു ഇവിടെ ആവശ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന അനുപാതസംഖ്യയെ കാണിക്കുന്നു.




## ഉദാഹരണം 5.

ഒരു മണിക്കൂറിൽ 4 മൈൽ വേഗത്തിൽ നടന്നുപോകുന്ന ഒരാളുടെ ഗതിയെ കാണിക്കുന്ന ലേഖ വരയ്ക്കുക.



സമയം, ദൂരം ഇവയുടെ ഒരു പട്ടിക താഴെക്കാണുന്നപ്രകാരം തയ്യാറാക്കി ലേഖ വരയ്ക്കുക.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| സമയം (മണിക്കൂർ) | 1 | 2 | 3 | 4 |
| ദൂരം (മൈൽ) | 4 | 8 | 12 | 16 |

ഈ അളവുകൾ ഉപയോഗിച്ചു് ബിന്ദുക്കൾ അങ്കനം ചെയ്തു് യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്നതു് ഋജുരേഖയായിരിക്കും.

## പാഠം 2.

## ധർമ്മം, ആനുപാതികത്വം.

കഴിഞ്ഞ പാഠത്തിൽ അഞ്ചാം ഉദാഹരണത്തിൽ വരച്ചിരിക്കുന്ന ലേഖ, മണിക്കൂറിൽ 4 മൈൽവീതം സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരാളിന്റെ ഗതിയെ കാണിക്കുന്നതാണെന്നു് പറഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. അയാൾ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം $y$ മൈൽ എന്നും അതിനു് വേണ്ടിവരുന്ന സമയം $x$ മണിക്കൂർ എന്നും സങ്കല്പിച്ചാൽ, $y = 4x$ എന്നൊരു സമവാക്യം $x$, $y$. ഇവയെ ബന്ധിക്കുന്നതായി നമുക്കു് എഴുതാം. ചിത്രത്തിൽ ഒരു ഋജുരേഖയായും, അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു് ഒരു സമവാക്യം ($y=4x$) മായും നാം കാണുന്നതു് ഒരേ ആശയമാണു്. ആയതിനാൽ ഈ ഋജുരേഖ $y=4x$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ലേഖയെന്നും, $y = 4x$ എന്നതു് ഈ ലേഖയുടെ സമവാക്യമെന്നും പറയാവുന്നതാണു്.

$y=4x$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ, $x$ എന്നതിനു് നമുക്കു് ഇഷ്ടമുള്ള വില മാറിമാറി സങ്കല്പിച്ചാൽ, അതനുസരിച്ചു് $y$ യുടെ വിലയും മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കും. ഇതുപോലെതന്നെ $y$ എന്നതിനു് ഒരു വില നിശ്ചയിച്ചാൽ അതനുസരിച്ചു $x$ നു് ഒരു വിലയുണ്ടായിരിക്കും. ഇങ്ങനെ $x$ ന്റെ വില $y$ യുടേതിനെ ആശ്രയിച്ചും $y$ യുടെ വില $x$ ന്റേതിനെ ആശ്രയിച്ചും ആണു് നില്ക്കുന്നതു്. ഇപ്രകാരം $x$, $y$ എന്ന രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വിലകൾ പരസ്പരാശ്രയത്തിൽ നില്ക്കുന്നെങ്കിൽ $x$ എന്നതു് $y$ യുടെ ധർമ്മമെന്നും $y$ എന്നതു $x$ ന്റെ ധർമ്മമെന്നും പറഞ്ഞുവരുന്നു,

$y = 4x$ എന്നതു് ഒരു യാത്രയുടെ വിവരണം വാക്യരൂപത്തിൽ നാം എഴുതിയതാണല്ലോ. ഗതിവേഗം 4 മൈൽ ആയിരിക്കുന്നിടത്തോളം കാലം ഇതിൽ 4 എന്ന അക്കം എല്ലായ്പോഴും 4 തന്നെയായിരിക്കും. എന്നാൽ $x$ സമയത്തെ കുറിക്കുന്ന അക്കവും $y$ ദൂരത്തെ കുറിക്കുന്ന അക്കവും ആയാൽ, യാത്രയുടെ വിവിധഘട്ടങ്ങളിൽ ഇവയ്ക്കു വിവിധവിലകൾ ഉണ്ടായിരുന്നേ മതിയാവൂ. ഇങ്ങനെ ഈ സമവാക്യത്തിൽ $x$, $y$ എന്നിവയുടെ വില അനിശ്ചിതം, അല്ലെങ്കിൽ എല്ലായ്പോഴും മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതും, 4 എന്ന അ

ക്കം താരതമ്യേന സ്ഥിരവും ആണ്. ഇവിടെ $x$, $y$, എന്ന രാശികൾക്ക് ചലാങ്കമെന്നും 4 ന് സ്ഥിരാങ്കമെന്നും പേര് പറയുന്നു.

$y=4x$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ ആദ്യം $x$ ന് ഒരു വില നിശ്ചയിച്ചാൽ അതിനനുയോജ്യമായി $y$ യ്ക്ക് ഒരു വിലയും കണ്ടുപിടിക്കാമല്ലോ. ഇപ്രകാരം $x$ ന്റെ വില ആദ്യം നിശ്ചയിക്കയാണെങ്കിൽ $x$ സ്വതന്ത്ര ചലാങ്കമെന്നും ഇതിനെ ആശ്രയിച്ചു $y$ യുടെ വില നിൽക്കുന്നതിനാൽ $y$ ആശ്രിതചലാങ്കമെന്നും പറയുന്നു. $y$ യുടെ വില ആദ്യം നിശ്ചയിച്ചിട്ടു പിന്നീട് $x$ നിർണ്ണയിക്കുകയാണെങ്കിൽ $y$ സ്വാതന്ത്ര്യവും $x$ ആശ്രിതവും ആയി വന്നുകൂടും. എന്നാൽ ബീജഗണിത വ്യവഹാരത്തിൽ $x$ എന്നുള്ളതു് എപ്പോഴും സ്വതന്ത്ര ചലാങ്കത്തിനും $y$ ആശ്രിതചലാങ്കത്തിനും ആണ് ഉപയോഗിച്ചുവരാറുള്ളതു്.

$y=4x$ എന്നുള്ളതു് ഗതിവേഗം 4 മൈൽ ആണെങ്കിൽ മാത്രം ഉപയോഗിക്കാവുന്ന ഒരു സമവാക്യമാണ്. എല്ലാ ഗതിവേഗങ്ങളെയും ഉൾപ്പെടുത്തി ഒരു പൊതു നിയമമായി പറയണമെന്നിരുന്നാൽ 4 എന്ന അക്കം മാററി അതിന് പകരം, ഏതു വിലയും കൊടുക്കാവുന്ന ഒരക്ഷരം തൽസ്ഥാനത്തു് ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരും. ഇതിന് സാധാരണ ഉപയോഗിക്കുന്ന അക്ഷരം $m$ ആണ്. $m$ എന്നുള്ളതു് അക്ഷരമാകയാൽ ഏതു വിലയും അതിന് കൊടുക്കാം എന്നിരുന്നാലും ആദ്യവസാനം ഒരേവേഗത്തിൽ പോകുന്ന ഒരു യാത്രയിൽ $m$ എന്നുള്ളതിന്റെ വില $x$, $y$, എന്നതിനേക്കാൾ സ്ഥിരമാണല്ലോ. അതുകൊണ്ടു് $y=mx$ എന്നതിൽ $x$, $y$, ചലാങ്കങ്ങളും $m$ സ്ഥിരാങ്കവും ആണ്.

സ്ഥിതിവിവര ലേഖകളെ സംബന്ധിച്ചു് പ്രസ്താവിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ, സ്വാതന്ത്ര്യസംഖ്യ (അതായതു് $x$) തിരശ്ചീനരേഖയിലും ആശ്രിതസംഖ്യ (അതായതു് $y$) ലംബരേഖയിലും ആണ് പതിവായി കുറിക്കാറുള്ളതു്. ഈ കാരണത്താൽ തിരശ്ചീനരേഖയ്ക്ക് $x$ അക്ഷമെന്നും ലംബരേഖയ്ക്ക് $y$-അക്ഷമെന്നും പറഞ്ഞുവരുന്നു. അക്ഷങ്ങൾ രണ്ടും സംഘടിക്കുന്ന സ്ഥാനത്തിന് മൂലബിന്ദുവെന്ന് പേരാകുന്നു.

$x$, $y$, എന്ന രണ്ടു രാശികൾ അന്യോന്യം ആനുപാതികമാണെങ്കിൽ $y/x=m$ എന്നോ $y=mx$ എന്നോ എഴുതാവുന്നതാണ്. ഇതിൽ $m$ ഒരു സ്ഥിരാങ്കമായിരിക്കും. $y=mx$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ലേഖ ഒരു ഋജുരേഖയാകയാൽ, അന്യോന്യം ആനുപാതികമായ രണ്ടു രാശികൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം, ഒരു ഋജുരേഖകൊണ്ടു് ചിത്രീകരിക്കാവുന്നതാണ്,

## അഭ്യാസം 67.

താഴെപ്പറയുന്ന ഓരോന്നിലും രാശികൾ തമ്മിൽ ധാർമ്മികബന്ധം ഉണ്ടോയെന്നും, ഉണ്ടെങ്കിൽ അതു് $y=mx$ എന്ന രൂപത്തിലാണോ എന്നും പറയുക.

1. ഒരു സാധനത്തിന്റെ തൂക്കവും അതിന്റെ വിലയും.

2. ഒരാളുടെ തൂക്കവും, അയാളുടെ വയസ്സും.

3. ആദായനികുതിയും, ആദായവും.

4. ഒരു രാജ്യത്തെ ജനസംഖ്യയും, സമയവും.

5. ആളുകളുടെ എണ്ണവും, അവർ ചെയ്യുന്ന ജോലിയുടെ അളവും

6. സ്ഥിരക്ഷേത്രഫലമുള്ള ഒരു ആയതക്ഷേത്രത്തിന്റെ നീളവും, വീതിയും.

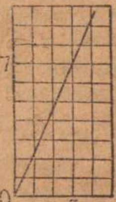
7. ഒരു കൈമാററച്ചീട്ടിന്റെ തുകയും, അതിന്റെ വട്ടവും.

8. നിഴലിന്റെ നീളവും, (പകൽ) സമയവും.

## അഭ്യാസം 68.

മുൻ പാഠത്തിൽ അഞ്ചാം ഉദാഹരണത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ $y=4x$ എന്നതിന്റെ ലേഖ വരയ്ക്കുക. അതേ അക്ഷങ്ങൾതന്നെ ഉപയോഗിച്ചു $y=3x$, $y=2x$, $y=x$, $y=\frac{1}{2}x$, $y=\frac{1}{4}x$ ഇവയുടെ ലേഖ വരയ്ക്കുക.

1. ഈ ലേഖകളിൽ ഏററം ചായ്‌വു കൂടിയതു് ഏതു്? ഏററം ചായ്‌വു കുറഞ്ഞതു് ഏതു്? $x$ ന്റെ ഗുണോത്തരം കൂടുന്തോറും ചായ്‌വു് എങ്ങനെ ഭേദപ്പെടുന്നു?




2. ലേഖയുടെ ചായ്‌വിനു് ഒരു അളവായി $x$ ന്റെ ഗുണോത്തരം എടുക്കാമോ?

3. ഈ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന ലേഖയുടെ സമവാക്യം എന്തു്? അതിൽ $m$ എത്ര?

4. $y=mx$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ ലേഖ മൂലബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുമോ?

5. മൂലബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു ഋജുരേഖയുടെ സമവാക്യം കാണുന്നതെങ്ങനെ?

## അഭ്യാസം 69.

കമ്പിവാർത്തകൾ അയയ്ക്കുന്നതിനുള്ള ചാർജ്ജ്:- വാക്കുകളുടെ എണ്ണം എട്ടോ എട്ടിൽ കുറവോ ആണെങ്കിൽ 9 ണ. എട്ടിൽ കൂടുതലുള്ളതാണെങ്കിൽ ഓരോ വാക്കിനും 1 ണ. $x$ അക്ഷത്തിൽ വാക്കുകളുടെ എണ്ണവും, $y$ അക്ഷത്തിൽ ചാർജ്ജും (അണയായി) കുറിച്ചു് ഒരു ലേഖ വരയ്ക്കുക.

1. ലേഖ ഋജുരേഖയാണോ? ചാർജ്ജും, വാക്കുകളുടെ എണ്ണവും ആനുപാതികമാണോ?

2. എണ്ണം $x$, ചാർജ്ജ് $y$ ണ. എന്നു സങ്കല്പിച്ചു് ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്ന ഒരു സമവാക്യം എഴുതുക.

3. ലേഖ, മൂലബിന്ദുവിൽകൂടി പോകുന്നുവോ?

4. വാക്കുകളുടെ എണ്ണവും ചാർജ്ജും തമ്മിൽ ധാർമ്മികബന്ധം ഉണ്ടോ?

5. നിങ്ങൾ വരച്ച ലേഖയുടെ സമവാക്യം എന്തു്? അതിൽ ഏതു സംഖ്യ സ്ഥിരമാണു്?

6. ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുരൂപം $x$, $y$, $m$, $c$ ഈ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു് എഴുതുക. ഈ ലേഖയിൽ $m$ എത്ര?

7. ഈ ലേഖ താഴോട്ടു നീട്ടിയാൽ ഏതക്ഷവുമായി സന്ധിക്കും? ഏതു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു? ഈ ബിന്ദുവിൽ $x$ എത്ര? $y$ എത്ര?

8. ഒരു ഋജുരേഖയുടെ സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുരൂപം $y=mx+c$ എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ $m$, $c$ ഇവയുടെ വിലകൾ രേഖയെ സംബന്ധിച്ചു് എന്തു കാണിക്കുന്നു?

---

## പാഠം 3.

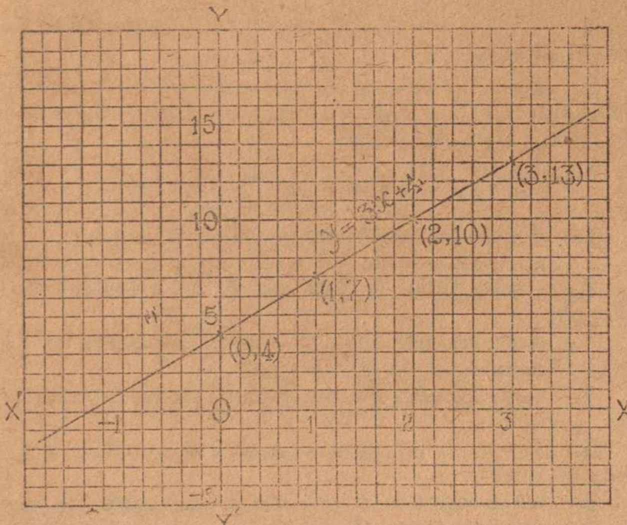
## ഏകഘാതധർമ്മങ്ങളുടെ ലേഖകൾ.

$3x+4$ എന്ന രാശിമാല $x$ ന്റെ ഒരു ധർമ്മമാണു്. എന്തെന്നാൽ $3x+4$ ന്റെ വില $x$ ന്റെ വിലയെ ആശ്രയിച്ചു നിൽക്കുന്നു. $x$ നു നാം എന്തെങ്കിലും ഒരു വില നിശ്ചയിച്ചാൽ അതിൽനിന്നും $3x+4$ നു് ഒരു വില നിർണ്ണയിക്കാം. $3x+4$ എന്ന ധർമ്മത്തിന്റെ ലേഖ വരയ്ക്കുക. എന്നുപറഞ്ഞാൽ $3x+4x$ ഇവയുടെ വിലകൾതമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്ന ലേഖവരയ്ക്കുക എന്നർത്ഥമാണു്. അതിനാൽ ലേഖവരയ്ക്കുന്നതിനുമുമ്പായി അതിന്നാവശ്യമുള്ള വിലകളുടെ ഒരുപട്ടിക തയാറാക്കണം,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x=$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
| $3x+4=$ | 4 | 7 | 10 | 13 |

$x$ ന്റെ വിലകൾ $x$ അക്ഷത്തിലും $3x+4$ ന്റെ വില $y$ അക്ഷത്തിലും കുറിച്ചിട്ടു് മേൽകാണുന്ന പട്ടികയിലെ വിലകൾകൊണ്ടു് 4 ബിന്ദുക്കൾ അങ്കനംചെയ്യുക ഈ നാലു ബിന്ദുക്കൾ യോജിപ്പിച്ചാൽ ഇവയെല്ലാം ഒരേ ഋജുരേഖയിൽ ആണെന്നുകാണാം. (താഴെയുള്ള ചിത്രം നോക്കുക) ഈ ഉദാഹരണത്തിലേപ്പോലെ ലേഖകൾ ഋജുരേഖകളായി വരുന്ന ധർമ്മങ്ങൾ ഏകഘാതമെന്നു പറയപ്പെടുന്നു.

ഒരു ബിന്ദു അങ്കനം ചെയ്യണമെങ്കിൽ രണ്ടളവുകൾ ആവശ്യമുണ്ടല്ലോ. ഇതിൽ ഒന്നു് $x$ അക്ഷത്തിനു സമാന്തരവും, മറേറതു് $y$ അക്ഷത്തിനു സമാന്തരവുമാണു്, $x$ അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായ അളവിനു തിരശ്ചീനമാനമെന്നും, $y$ അക്ഷത്തിനു സമാന്തരമായതിനു ലംബമാനമെന്നും പറയാം. ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ തിരശ്ചീനലംബമാനങ്ങൾ ചുരുക്കി എഴുതുന്നതിനു് ഒരു പ്രത്യേക രീതിയുണ്ടു്. ഉദാഹരണം. ബിന്ദു (5,4) എന്നുപറഞ്ഞാൽ തിരശ്ചീനമാനം 5-ം, ലംബമാനം 4-ം ആയ ബിന്ദുവെന്നു ധരിക്കേണ്ടതാണു്. ഈ അളവുകൾ രണ്ടും ഇടയ്ക്കു്




ഒരു 'കോമാ' ഇട്ടു ലഘുകോഷ്ഠങ്ങളിൽ എഴുതണം. ആദ്യം എഴുതുന്നതു' എല്ലായ്പ്പോഴും തിരശ്ചീനമാനം ആയിരിക്കയും വേണം.

മൂലബിന്ദു O എന്ന അക്ഷരംകൊണ്ടും, $x$ അക്ഷം XX' എന്നതുകൊണ്ടും, $y$ അക്ഷം YY' എന്നതുകൊണ്ടും ആണ് സാധാരണയായി ചിത്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്താറുള്ളതു്. മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നു വലത്തോട്ടു ($x$ അക്ഷത്തിൽ) അളക്കുന്നതു് $+1, +2, +3....$ എന്നും, ഇടത്തോട്ടു അളക്കുന്നതു് $-1, -2, -3....$ എന്നും ആണ് കണക്കാക്കാറുള്ളതു്. ഇതുപോലെതന്നെ മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നു മുകളിലോട്ടു് ($y$ അക്ഷത്തിൽ) $+1, +2, +3....$ എന്നും, താഴോട്ടു് $-1, -2, -3....$ എന്നും അളവുകളെ കുറിക്കുന്നു.

## അഭ്യാസം 70.

$2x+5$ എന്ന ധർമ്മത്തിന്റെ ലേഖ വരയ്ക്കുക.

1. ഈ ലേഖ $y$ അക്ഷവുമായി സംഘടിക്കുന്നതു് എവിടെ? ആ സ്ഥാനത്തു് $2x+5$ ന്റെ വില എന്തു്?

2. $2x+5$ ന്റെ വില 3 ആയിരിക്കുന്നതു് എവിടെ? ആ ബിന്ദുവിന്റെ തിരശ്ചീനമാനം (അതായതു് $x$) എത്ര?

3. ലേഖ $x$ അക്ഷവുമായി സംഘടിക്കുന്നതു് എവിടെ? ആ സംഘട്ടനബിന്ദുവിൽ ധർമ്മത്തിന്റെ വിലയെന്തു്?

4. $2x+5$ ൻെറ വില 0 ആണെങ്കിൽ $x$ എത്രയെന്നു ലേഖയിൽ നോക്കി പറയുക.

5. ഈ ധർമ്മത്തിൻെറ വില ഋണാത്മകമായിരിക്കാമോ? ആയിരിക്കാമെങ്കിൽ $2x+5$ ന് $-1$ എന്ന വിലയുള്ള സ്ഥാനം കണ്ടുപിടിക്കുക. അവിടെ $x$ എത്ര?

## അഭ്യാസം 71.

$3x-4$ എന്ന ധർമ്മത്തിൻെറ ലേഖ വരയ്ക്കുക.

1. $x$ എത്രയാകുമ്പോൾ ധർമ്മത്തിൻെറ വില 0 ആയിരിക്കും?

2. $x$ ൻെറ വില 0 ആയിരിക്കുമ്പോൾ ധർമ്മത്തിൻെറ വിലയെന്തു്?

3. അതേ അക്ഷങ്ങൾ വെച്ചും, അതേ സ്കെയിലിലും $2x+1$ എന്ന ധർമ്മത്തിൻെറ ലേഖ വരയ്ക്കുക.

4. ലേഖകൾ രണ്ടും സംഘടിക്കുന്നെങ്കിൽ സംഘട്ടനബിന്ദുവിൻെറ $y$ എത്ര?

5. $3x-4$, $2x+1$ എന്ന ധർമ്മങ്ങൾക്കു തുല്യവില എത്ര സ്ഥാനങ്ങളിൽ ഉണ്ടു്?

6. ധർമ്മങ്ങളുടെ വില തുല്യമാകുന്ന ബിന്ദുവിൽ $x$ എത്ര?

7. ഈ ധർമ്മങ്ങൾക്കു് ഒന്നിൽക്കൂടുതൽ സ്ഥാനങ്ങളിൽ തുല്യവില ഉണ്ടായിരിക്കാൻ സാദ്ധ്യമല്ലാത്തതു് എന്തുകൊണ്ടു്?

---

## പാഠം 4.

## ലഘുസമവാക്യങ്ങളുടെ ലേഖ്യനിർദ്ധാരണം.

**ഉദാഹരണം 1.**

$3x-4=2x+1$ എന്ന സമവാക്യം ലേഖ്യനിർദ്ധാരണം ചെയ്ക.

71-ാം അഭ്യാസത്തിൽ വരച്ച ചിത്രം നോക്കുക. അവിടെ $3x-4$, $2x+1$ എന്ന ധർമ്മങ്ങളുടേ ലേഖകൾ വരച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഈ ലേഖകളുടെ സംഘട്ടനബിന്ദുവിൽ ഈ ധർമ്മങ്ങളുടെ വില (അതായതു് ആ ബിന്ദുവിൻെറ ലംബമാനം) കൾ തുല്യമാകുന്നു. ധർമ്മങ്ങൾ തുല്യമാകുന്ന സ്ഥാനത്തു് $x$ എത്രയാണെന്നു ലേഖയിൽ നോക്കി നിർണ്ണയിക്കാം.

ഈ തിരശ്ചീനമാനം $3x-4$ എന്നതു് $2x+1$ നോടു് തുല്യമാകുമ്പോൾ $x$ നുള്ള വിലയാകയാൽ ഈ വില ലേഖയിൽനിന്നു് നിർണ്ണയിക്കുമ്പോൾ സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്തുകഴിഞ്ഞു.

ധർമ്മത്തിൻെറ വിലയെന്നു പറയുന്നതു് $y$ അക്ഷത്തിനു് സമാന്തരമായി എടുക്കുന്ന ലംബമാനമായതിനാൽ ധർമ്മത്തിനു പകരമോ തുല്യമായോ $y$ എന്നു എഴുതാവുന്നതാണു്. ആയതിനാൽ ലേഖ്യനിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിപ്രകാരമാണു്.

1. സമവാക്യം $3x-4=2x+1$ പിരിച്ചെഴുതി രണ്ടു സമവാക്യമാക്കുക. (i) $y=3x-4$ (ii) $y=2x+1$.

2. $y=3x-4$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ, അതായതു് $3x-4$ എന്ന ധർമ്മത്തിന്റെ, ലേഖ വരയ്ക്കുക.

3. $y=2x+1$ എന്നതിന്റെ, അതായതു് $2x+1$ എന്ന ധർമ്മത്തിന്റെ, ലേഖ വരയ്ക്കുക.

4. ലേഖകൾ രണ്ടിന്റെയും, സംഘട്ടനബിന്ദുവിന്റെ തിരശ്ചീനമാനം ($x$ ന്റെ വില) കാണുക.

ഉദാഹരണം 2.

ലേഖ്യനിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $3x-4=5$. ഇവിടെ $y=3x-4$ എന്നതിന്റെയും, $y=5$ എന്നതിന്റെയും ലേഖകളുടെ സംഘട്ടനബിന്ദുവാണ് കാണേണ്ടതു്. ഇതിൽ $y=3x-4$ എന്നതിന്റെ ലേഖമാത്രമേ ബിന്ദുക്കൾ അങ്കനം ചെയ്തു വരയ്ക്കേണ്ടതുള്ളൂ. $y=5$ എന്നതിന്റെ ലേഖ ലംബമാനം 5 ആയുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി $x$ അക്ഷത്തിനു് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന രേഖയാകുന്നു.

## അഭ്യാസം 72.

ലേഖ്യനിർദ്ധാരണം ചെയ്ക:

1. $3x+5=8$
2. $5x-9=-3$
3. $4x+1=0$
4. $\frac{1}{2}x-1=\frac{1}{2}$
5. $5x-3=x+1$
6. $3x-7=4x-2$
7. $\frac{1}{2}(x-3)=\frac{1}{3}(2x-5)$
8. $\frac{1}{3}(x+1)+1=\frac{2}{3}(2x-1)$

## അഭ്യാസം 73.

1. $x$ അക്ഷത്തിലെ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ലംബമാനം എത്ര? $y=0$, $x=0$ ഇവയുടെ ലേഖകൾ എന്തു്?

2. താഴെ കുറിച്ചിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഓരോന്നും അക്ഷങ്ങളുടെ ഏതു വശത്താണെന്നു പറയുക. $(5, 2)$, $(-3, 1)$, $(2, -4)$, $(1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, -1\frac{1}{2})$.

3. $y=3x+1$, $y=3x+4$, ഇവയുടെ ലേഖകൾ വരയ്ക്കുക. ഈ ലേഖകളെ സംബന്ധിച്ചു് പ്രത്യേകമായി വല്ല ലക്ഷണവും കാണുന്നുണ്ടോ? രണ്ടു ലേഖകൾക്കും പൊതുവിൽ ഒരു ബിന്ദുവുണ്ടോ? ഈ ലേഖകൾകൊണ്ടു് $3x+1=3x+4$ എന്ന സമവാക്യം ലേഖ്യനിർദ്ധാരണം ചെയ്യാമോ? സാധിക്കയില്ലെങ്കിൽ ഈ വാക്യത്തിനു് എന്തു ന്യൂനതയാണുള്ളതു്?

4. $y=3x+2$, $y=4x+2$ ഇവയുടെ ലേഖകൾ വരയ്ക്കുക. ഈ ലേഖകൾതമ്മിൽ എവിടെ സംഘടിക്കുന്നു? ഇവ ഉപയോഗിച്ചു് $3x+2=4x+2$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാമോ? $y=mx+c$ എ

ന്ന പൊതുരൂപത്തിലുള്ള രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളിൽ $c$ തുല്യവും, $m$ തുല്യമല്ലാതെയും ഇരുന്നാൽ അവയുടെ ലേഖകൾ എവിടെ സംഘടിക്കും?

**5.** ഒരേ അക്ഷങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചും, ഒരേ സ്കെയിലിലും $y+x=0$, $5y=3x$, $y=3x+12$ എന്ന സമവാക്യങ്ങളുടെ ലേഖകൾ വരയ്ക്കുക. ഈ ലേഖകൾ മൂന്നുംകൊണ്ടുണ്ടാകുന്ന ത്രിഭുജത്തിൻെറ ശീർഷങ്ങളുടെ തിരശ്ചീനലംബമാനങ്ങൾ എത്ര?

---

## പാഠം 5.

## ബഹുസമവാക്യങ്ങളുടെ ലേഖ്യനിർദ്ധാരണം.

### ഉദാഹരണം .1

ലേഖ്യനിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $4x-y=10; 2x-y=4$

ഇവിടെ രണ്ട് അജ്ഞാതരാശികൾ ഉള്ള രണ്ടു സമവാക്യങ്ങളാണ് തന്നിരിക്കുന്നത്. ഇവ താഴെക്കാണുന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതണം.

$$y=4x-10 \quad ; \quad y=2x-4$$

ഇതിൻെറശേഷം $y=4x-10$ എന്ന സമവാക്യത്തിൻെറ ($4x-10$ എന്ന ധർമ്മത്തിൻെറ) ലേഖയും $y=2x-4$ എന്നതിൻെറ ($2x-4$ എന്ന ധർമ്മത്തിൻെറ) ലേഖയും വരച്ച് ആ ലേഖകളുടെ സംഘട്ടനബിന്ദുവിൻെറ തിരശ്ചീനലംബമാനങ്ങൾ കാണണം. തിരശ്ചീനമാനം $x$ ൻെറ വിലയും, ലംബമാനം $y$ യുടെ വിലയും ആയിരിക്കും.

### ഉദാഹരണം 2.

ലേഖ്യനിർദ്ധാരണം ചെയ്ക: $4x+6y=24$ ; $2x+3y=6$

ഇവ താഴെക്കാണുന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതുക.

$$y=\frac{24-4x}{6}=\frac{12-2x}{3} ; \qquad y=\frac{6-2x}{3}$$

അനന്തരം ഇവയിൽ ഓരോന്നിൻെറയും ലേഖകൾ വരച്ചു ലേഖകളുടെ സംഘട്ടനബിന്ദുവിൻെറ തിരശ്ചീനമാനം $x$ ൻെറ വിലയായും ലംബമാനം $y$ യുടെ വിലയായും എഴുതുക.

## അഭ്യാസം 74.

ലേഖ്യനിർദ്ധാരണം ചെയ്ക:

**1.** $2x+3y=21$ ; $2x-5y=0$
**2.** $2x-3y=6$ ; $3x+2y=9$
**3.** $2x+3y=12$ ; $5x-y=4$
**4.** $2x+y-5=0$ ; $x-2y-10=0$
**5.** $3x-\frac{2}{3}y=10$ ; $\frac{3}{4}x-1\frac{1}{3}y+1=0$

---

MUNAVVIRUL ISLAM HIGH SCHOOL • ERNAKULAM •
Date..................