GENERAL MATHEMATICS

BOOK II FOR FORM V

(*According to the Syllabus issued in July 1950*)

Approved as a Text-Book by the Madras Text-Book Committee
Vide Fort St. George Gazette, Part I-B, page 69
dated May 19, 1954.

J. Pavamani, B. A., L. T.
Headmaster, B. E. M. High and Training School, Tellicherry.

സാമാന്യഗണിതശാസ്ത്രം

രണ്ടാം പുസ്തകം—5-ാം ഫോറത്തിന്നു.

(1950 ജൂലായിമാസം പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ പാഠ
പദ്ധതിക്കനുസരിച്ചെഴുതിയതു്).

37170
510
PAV/S

...BLISHED BY THE
...SSION BOOK DEPOT
MANGALORE
1954

Price: Re. 1 As. 8]   [വില: 1ക. 8ണ.

GENERAL MATHEMATICS

BOOK II FOR FORM V

(*According to the Syllabus issued in July 1950*)

Approved as a Text-Book by the Madras Text-Book Committee
Vide Fort St. George Gazette, Part I-B, page 69
dated May 19, 1954.

J. Pavamani, B. A., L. T.
Headmaster, B. E. M. High and Training School, Tellicherry.

സാമാന്യഗണിതശാസ്ത്രം

രണ്ടാം പുസ്തകം—5-ാം ഫോറത്തിന്നു.

(1950 ജൂലായിമാസം പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ പാഠ
പദ്ധതിക്കനുസരിച്ചെഴുതിയത്).

PUBLISHED BY THE
BASEL MISSION BOOK DEPOT
MANGALORE
1954

Price: Re. 1 As. 8] [വില: 1ക. 8ണ.

First Edition. . . . 1952
Reprint . . . . . . 1954.

PRINTED AT THE
BASEL MISSION PRESS, MANGALORE, S.K.

മുഖവുര

4-ാം ഫോറത്തിന്നു വേണ്ടി എഴുതിയ ഒന്നാംപുസ്തകത്തെപ്പോലെ ഈ പുസ്തകവും 1950 ജൂലായി 18-ാംനു- പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ സാമാന്യഗണിതശാസ്ത്രപാഠപദ്ധതിക്കനുസരിച്ചാണ് എഴുതിയിട്ടുള്ളതു്.

ഗണിതശാസ്ത്രപഠനം ദൈനംദിനജീവിതത്തിൽ ഉപയോഗപ്രദമാകണം എന്നു നിഷ്കർഷയുള്ളതുകൊണ്ടാണ് പുതിയ പാഠപദ്ധതിയിൽ സ്റ്റോക്കും, ഓഹരിയും, ഇൻഷ്യൂറൻസ്, കമ്മിഷൻ, നികുതികൾ മുതലായ വിഷയങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ളതു്. ഇവസംബന്ധിച്ചു വർത്തമാനക്കടലാസ്സുകളിലുണ്ടാവുന്ന വിവരങ്ങൾ മനസ്സിലാകത്തക്കവണ്ണമാണ് വിവരണങ്ങൾ കൊടുത്തിട്ടുള്ളതു്.

കണക്കു ചെയ്യുന്നതിലുള്ള ശീഘ്രതയും, സൂക്ഷ്മതയും വളരെ മുഖ്യമായതുകൊണ്ടു ഗുരുനാഥൻ അവയെ പരിശോധിപ്പാൻ ഇടക്കിടെ പരീക്ഷനടത്തുകയും, അതിന്റെ ഫലം വിദ്യാർത്ഥി ഒരു പുസ്തകത്തിൽ കുറിക്കുകയും വേണം. ഈ ആവശ്യാർത്ഥം ചില ചോദ്യക്കടലാസ്സുകൾ ഈ പുസ്തകത്തിന്റെ ഒടുവിൽ ചേർത്തതായി കാണാം.

ഗവമ്മെണ്ടു പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ സാങ്കേതികപദങ്ങൾമാത്രമാണ് ഈ പുസ്തകത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ളതു്. ഒന്നാംപുസ്തകത്തിൽ ഉപയോഗിച്ച പദങ്ങൾക്കു പുറമെ ഈ പുസ്തകത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ള സാങ്കേതികപദങ്ങളുടെ ഒരു പട്ടിക പുസ്തകത്തിന്റെ ഒടുവിൽ കാണാം.

മദിരാശി S. S. L. C. പരീക്ഷാചോദ്യങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുത്തു യുക്തമായ സ്ഥലത്തു ചേർത്തിട്ടുണ്ടു്. പരീക്ഷാചോദ്യങ്ങളുടെ ശേഷം കാണുന്ന സംഖ്യകൾ പരീക്ഷനടന്ന കൊല്ലങ്ങളാണ്.

ഒന്നാംപുസ്തകത്തിന്റെ മുഖവുരയിൽ പ്രസ്താവിച്ചപ്രകാരം ഈ പുസ്തകവും 30 കൊല്ലത്തിൽപരം ഹൈസ്കൂൾ ക്ലാസ്സുകളിൽ ഗണിതശാസ്ത്രം പഠിപ്പിച്ചതിൽനിന്നു എനിക്കു സിദ്ധിച്ച പരിചയത്തിന്റെ ഫലമാണ്. ഇതിന്നുമുമ്പു ഞാൻ പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ പ്രാഥമികഗണിതശാസ്ത്രത്തെപ്പോലെതന്നെ പുതിയ പാഠപദ്ധതിക്കനുസരിച്ചു, 4-ാം ഫോറത്തിന്നുവേണ്ടി എഴുതിയ പുസ്തകവും ജനസമ്മതമായി തീർന്നതിലുള്ള സന്തോഷം ഈ പുസ്തകവും എഴുതുവാനായി എന്നെ പ്രേരിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. വിദ്യാർത്ഥിനീവിദ്യാർത്ഥികളുടെ ബുദ്ധിവികാസത്തിന്നും പ്രായോഗികമായ ഇടപാടുകളിൽ ആവശ്യമായ ജ്ഞാനസമ്പാദനത്തിന്നും ഈ എന്റെ എളിയ ഉദ്യമവും പ്രയോജനകരമായിത്തീരുമെന്ന വിശ്വാസത്തോടും പ്രതീക്ഷയോടും കൂടി ഇതിനെ ഞാൻ അവർക്കു സമർപ്പിക്കുന്നു.

തലശ്ശേരി, 20-10-1951.

ജെ. പാവമണി.

വിഷയവിവരം

അദ്ധ്യായം		ഭാഗം.
1.	സ്ഥൂലഗണനം. ചുരുക്കവഴികൾ	1
2.	ചില സാമാന്യ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം	14
3.	1. സ്റ്റോക്കും ഓഹരിയും 2. ഇൻഷ്യൂറൻസ് 3. കമ്മിഷൻ 4. നികുതികൾ 5. ദീപാളി	16
4.	കൂട്ടുപലിശ	31
5.	വർഗ്ഗമൂലം	38
6.	പൈത്താഗൊറസ്സിന്റെ പ്രമേയം	52
7.	വൃത്തം	60
8.	വൃത്തങ്ങളുടെ ചില ഗുണങ്ങൾ	71
9.	ത്രികോണനിർമ്മാണം	78
10.	*a*. തോതനുസരിച്ചു വരക്കൽ *b*. ദിശകൾ. *c*. മേൽനോട്ടക്കോണും കീഴ്നോട്ടക്കോണും *d*. കോണമാനി.	82
11.	ചില ചതുർഭുജക്ഷേത്രങ്ങളുടെ നിർമ്മാണവും ക്ഷേത്രഫലവും	92
12.	ഏകകാലികസമവാക്യങ്ങൾ.	102
13.	ഏകകാലികസമവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്യാവുന്ന കണക്കുകൾ	113
14.	സരളരേഖാലേഖാചിത്രങ്ങൾ	122
15.	പരീക്ഷക്കടലാസ്സുകൾ	125
	സാങ്കേതികപദങ്ങൾ	132
	ഉത്തരങ്ങൾ	134

അദ്ധ്യായം 1.

സ്ഥൂലഗണനം. (Approximation).

ഒരു രാജ്യത്തിലെ ജനസംഖ്യ കൃത്യമായി ഗണിക്കുവാൻ ആക്കും സാധിക്കുന്നതല്ല. കാരണം ജനസംഖ്യയുടെ കണക്കെടുക്കുന്നതിന്നിടയിൽ തന്നെ ജനനമരണങ്ങളുണ്ടാവാം. ചില ആളുകൾ രാജ്യം വിട്ടുവെന്നും, മററു ചിലർ രാജ്യത്തേക്കു വന്നുവെന്നും വരാം. ഇങ്ങിനെ കൃത്യമായി ഗണിക്കുവാൻ കഴിയാത്ത സംഖ്യകളെ സുമാറായിട്ടാണ് പറയാറുള്ളത്.

കൃത്യമായി അറിഞ്ഞാൽകൂടി വലിയ സംഖ്യകളെ സുമാറായിട്ടാണ് പറയാറുള്ളത്. മദിരാശിസംസ്ഥാനത്തിലെ നിലനികുതി ഇത്ര ഉറുപ്പിക എന്നു പറയുന്നതിന്നു പകരം ലക്ഷങ്ങളോ, ആയിരങ്ങളോ ആയിട്ടാണ് പറയാറുള്ളത്. ഇങ്ങിനെ പറയുമ്പോഴാണ് കേൾവിക്കാക്കു അതിൻെറ വലിപ്പത്തെപ്പററി ഒരു ബോധമുണ്ടാകുന്നത്. നികുതി 51,75,32,378 ഉറുപ്പികയും ചെലവ് 55,60,87,914 ഉറുപ്പികയും എന്നു പറയുന്നതിന്നു പകരം നികുതി 5175 ലക്ഷം ഉറുപ്പികയെന്നും, ചെലവ് 5561 ലക്ഷം ഉറുപ്പികയെന്നും പറയുമ്പോഴാണ് ഈ സംഖ്യകളെ ഓക്കുവാനും അവയെപ്പററി ആലോചിക്കുവാനും എളുപ്പമാകുന്നത്.

നാം സുമാറായിട്ടു പറയുമ്പോൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന മാത്ര (Unit of Measurement) സംഖ്യയുടെ വലിപ്പത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും. ഒരു വൻകരയിലെ ജനസംഖ്യയെ കോടിയായും, ഒരു രാജ്യത്തിലേതു ലക്ഷമായും, ഒരു പട്ടണത്തിലേതു ആയിരമായും, ഒരു ഗ്രാമത്തിലേതു നൂറായും ആണ് പറയുന്നത്.

35,739 ജനങ്ങളുള്ള ഒരു പട്ടണത്തിലെ ജനസംഖ്യ ആയിരമായിട്ടു പറയുന്നുവെന്നു വിചാരിക്കുക. 35 മുഴു ആയിര

ങ്ങളും, 739 ഒന്നുകളും ആകുന്നു. ഈ സംഖ്യയെ 35 ആയിരം എന്നു പറയുന്നതിലുള്ള സ്ഖലിതം (Error) 739 ആണു. 36 ആയിരമെന്നു പറയുന്നതായാൽ സ്ഖലിതം 261 മാത്രമാണ്. അതുകൊണ്ടു ആയിരങ്ങളായി പറയുമ്പോൾ 36 ആയിരമെന്നു പറയുന്നതാണ് അധികം ശരി. ഇങ്ങിനെ അടുത്ത ആയിരത്തിൻെറ എണ്ണം പറയുന്നതാണെങ്കിൽ 34,500 മുതൽ 35,499 വരെയുള്ള എല്ലാ സംഖ്യകളേയും 35 ആയിരം എന്നു പറയാം. ഇങ്ങിനെ പറയുമ്പോൾ ഒരിക്കലും സ്ഖലിതം 500ൽ കവിയുകയില്ല.

ഒരു സാധനത്തിൻെറ വില 29ക. 3ണ.യാണെന്നു വിചാരിക്കുക. വില 29ക.യാണെന്നു പറയുന്നതായാൽ സ്ഖലിതം=3ണ. 30ക. എന്നു പറയുന്നതായാൽ സ്ഖലിതം=13ണ.

ഇങ്ങിനെ അടുത്തുള്ള എണ്ണം പറയുന്നതായാൽ സ്ഖലിതം ഒരിക്കലും മാത്രയുടെ പകുതിയിൽ കവിയുകയില്ലെന്നു ഈ രണ്ടു ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്നു തെളിയുന്നു. ഇങ്ങിനെ അടുത്തുള്ള വില പറയുന്നതിന്നു അതിൻെറ സുമാർവില (Approximate value) നിശ്ചയിക്കുക എന്നോ സ്ഥൂലഗണനം എന്നോ പറയുന്നു.

ഈ സമ്പ്രദായത്തെ വേറൊരു വിധത്തിൽ പറയാം. ഒരു മാത്രയുടെ ഭിന്നിതങ്ങൾ ഒരു സംഖ്യയിലുണ്ടെങ്കിൽ അതിൻെറ പകുതിയിൽ കുറഞ്ഞതിനെ വിട്ടുകളകയും പകുതിയേയും, പകുതിയിൽ അധികമായതിനേയും 1 ആയി ഗണിക്കുകയും ചെയ്യണം.

മേൽപറഞ്ഞ ജനസംഖ്യയെ നമുക്കു ആവശ്യമുള്ളത്ര കൃത്യമായി വ്യക്തമാക്കാം.

35739 — 3574 പത്തുകൾ
— 357 നൂറുകൾ
— 36 ആയിരങ്ങൾ

മേൽപറഞ്ഞ സംഖ്യകളിൽ മാത്ര മാറുന്നതോടുകൂടി അതിന്റെ എണ്ണവും മാറുന്നു. ഓരോ അവസരത്തിലും നാം അംഗീകരിച്ചിട്ടുള്ള മാത്രയുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന സംഖ്യകളെ ഗണ്യസംഖ്യകൾ (Significant figures) എന്നു പറയുന്നു.

35739നെ നൂറുകളായി പറയുമ്പോൾ 357 നൂറു എന്നു മാത്രമേ പറയുന്നുള്ളു. മാത്ര നൂറാണെന്നു ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തിക്കഴിഞ്ഞാൽ പിന്നെ 357 എന്നു മാത്രമേ പറയേണ്ടതുള്ളു. ആയിരങ്ങളായി പറയുമ്പോൾ ഗണ്യസംഖ്യ 36 ആണ്.

മരം തൂക്കുന്ന ഒരു തുലാസ്സ്, സ്വർണ്ണമോ ഔഷധങ്ങളോ തൂക്കുന്ന ഒരു തുലാസ്സിനോളം കൃത്യമായിരിക്കേണമെന്നില്ല. ഓരോ അവസരത്തിലും ആവശ്യമായ കൃത്യത നാം അളക്കുന്ന സാധനത്തിന്റെ വിലയേയോ സ്വഭാവത്തേയോ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും.

പാഷാണം തൂക്കുമ്പോൾ ഒരു ഔൺസിന്റെ 1000ൽ ഒരംശംവരെ കൃത്യമായി തൂക്കം കാണേണ്ടിവരും. ഒരു കപ്പലിന്റെ തൂക്കം ഇത്ര ആയിരം ടൺ എന്നു മാത്രമാണ് പറയുന്നതു. താഴെ എഴുതിയ ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്നു ഗണ്യസംഖ്യകൾ എന്താണെന്നു നല്ലവണ്ണം മനസ്സിലാക്കാം.

1. കോമറിൻ എന്ന കപ്പലിന്റെ തൂക്കം ...... =15,000 ടൺ
2. ഒരു ബസ്സിൽ കയററാവുന്ന സാധനങ്ങളുടെ തൂക്കം =2240 റാത്തൽ
3. ഒരു കത്തിന്റെ തൂക്കം ... ... =2 ഔൺസ്
4. ഒരു ഗുളികയിൽ ചേർത്തിട്ടുള്ള അവീനിന്റെ തൂക്കം =·007 ഉറുപ്പികത്തൂക്കം.

	മാത്ര	ഗണ്യസംഖ്യ
1.	1000ടൺ	15
2.	1 റാത്തൽ	2240
3.	1 ഔൺസ്	2
4.	·001 ഉറുപ്പികത്തൂക്കം	7

രണ്ടാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ 2240 എന്ന സംഖ്യയിൽ 0ന്നു വിലയുണ്ടു. നാലാമത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ ഗണ്യസംഖ്യ നിശ്ചയിച്ചതിന്നു ശേഷം ·007ൽ ഉള്ള പൂജ്യങ്ങൾക്കു വിലയില്ല. ഒരു സ്ഥലത്തു ഒരു ദിവസം പെയ്യുന്ന മഴയുടെ അളവു 1 അംഗുലത്തിന്റെ $\frac{1}{100}$ വരെ കൃത്യമായിട്ടാണു വർത്തമാനപത്രങ്ങളിൽ പ്രസിദ്ധം ചെയ്യുന്നതു. അതുകൊണ്ടു ·3 അംഗുലം മഴയെ ·30 എന്നാണ്

എഴുതുന്നതു. കാരണം മാത്ര ·01 ആയതുകൊണ്ടു ഗണ്യസംഖ്യ 30 ആണ്. 3 അല്ല. ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ 0ന്നു വിലയുണ്ടു.

1 അംഗുലം 10 സമഭാഗങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു അളവുകോൽ ഉപയോഗിച്ചു സാധനങ്ങളെ അളക്കുന്നുവെന്നു വിചാരിക്കുക. ഈ അളവുകോൽകൊണ്ടു ഒരു സാധനത്തെ അളന്നു അതിൻെറ നീളം 5·3 അംഗുലമാണെന്നു പറയുന്നതിൻെറ അർത്ഥം ആലോചിക്കുക. അതിൻെറ നീളം 5·3″ന്നും 5·4″ന്നും ഇടയിലാണു. സാധനത്തിൻെറ ഒററത്തെ സൂക്ഷിച്ചുനോക്കി അതു 3-ാമത്തെ കുറിയോടോ 4-ാമത്തെ കുറിയോടോ അധികം അടുത്തിരിക്കുന്നതെന്നു നിശ്ചയിക്കുന്നു. 3-ാമത്തെ കുറിയോടു അധികം അടുത്തിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ നീളം 5·3″ എന്നും 4-ാമത്തെ കുറിയോടാണു അധികം അടുത്തിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ 5·4″ എന്നും ഗണിക്കുന്നു.

അതിനാൽ നീളം 5·3″ എന്നു പറയുമ്പോൾ നീളം 5·25 അംഗുലത്തിന്നും 5·35″ന്നും ഇടയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു നീളമാവാം. അവയിൽ താഴെ പറയുന്ന 10 നീളങ്ങളും പെട്ടിരിക്കുന്നു.

5·25″; 5·26″; 5·27″; 5·28″; 5·29″; 5·30″; 5·31″; 5·32″; 5·33″; 5·34″. അതായതു നീളങ്ങളുടെ സീമകൾ (limits) 3·25″ ഉം 3·35″ഉം ആണ്.

ഉദാ: — (1) $\frac{3}{13}$ എന്ന ഭിന്നിതത്തെ ദശാംശഭിന്നിതമാക്കി അതിനെ 3ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

3ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണേണ്ടതുകൊണ്ടു 4-ാമത്തെ സ്ഥാനം കാണണം.

$\frac{3}{13} = \cdot 2307$

$= \underline{\underline{\cdot 231}}$ (3ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യം).

(2) 127 പുസ്തകത്തിന്നു 536ക. 8ണ. വിലയായാൽ 1 പുസ്തകത്തിൻെറ വില (i) പൈവരെ (ii) അണവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

1 പുസ്തകത്തിൻെറ വില=4ക. 3ണ. $7\frac{11}{127}$പ. $\frac{11}{127}$, $\frac{1}{2}$യെക്കാൾ ചെറുതാകകൊണ്ടു വിട്ടുകളയണം.

$7\frac{11}{127}$പ. $\frac{1}{2}$ണ.യെക്കാൾ വലുതാകകൊണ്ടു 1ണ.യായി കരുതണം.

∴ പുസ്തകത്തിൻെറ വില=4ക. 3ണ. 7പ. (പൈവരെ കൃത്യം)

=4ക. 4ണ.

(അണവരെ കൃത്യം)

അഭ്യാസം 1.

1. താഴേ കാണുന്ന സംഖ്യകളെ ആയിരംവരെ കൃത്യമായി എഴുതുക.
   46375; 809700; 1499682; 70101046.

2. ഭൂമിയിൽനിന്നു സൂര്യനിലേക്കുള്ള ദൂരം 93,142,357 നാഴികയാണ്. ഈ ദൂരത്തെ (*a*) ആയിരം (*b*) ലക്ഷം (*c*) മില്യൻ (*d*) കോടി നാഴികവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

3. താഴെ കാണുന്ന സംഖ്യകളെ (*a*) പൈ (*b*) അണ (*c*) ഉറുപ്പിക വരെ കൃത്യമായി എഴുതുക.
   (i) 21ക. 13ണ. $7\frac{1}{4}$പ. (ii) 9ണ. $3\frac{1}{3}$പ. (iii) 7ണ. $7\frac{3}{4}$പ.
   (iv) $11\frac{1}{2}$പ.

4. താഴേ കാണുന്ന സംഖ്യകളെ (*a*) പൂർണ്ണസംഖ്യവരെ (*b*) 1 ദശാംശ സ്ഥാനംവരെ (*c*) 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി എഴുതുക.
   (i) 23·045.
   (ii) 169·7375.
   (iii) 0·81542.
   (iv) 0·436099.

5. ഇന്ത്യയിലെ ജനസംഖ്യ 352,837,778 ആണ്. ഇത് (*a*) മില്യൻ ആയി 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ (*b*) കോടിയായി 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി എഴുതുക. (1939)

6. $\frac{2}{13}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{9}$ എന്നീ ഭിന്നിതങ്ങൾക്കു സമമായ ദശാംശഭിന്നിതങ്ങളുടെ വില (*a*) 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ (*b*) 3 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി എഴുതുക.

7. താഴേ കാണുന്ന സംഖ്യകളെ 3 ഗണ്യസംഖ്യകൾവരെ കൃത്യമാകത്തക്ക വണ്ണം എഴുതുക.
   60080; 7·5459; 0·043956; 0·0073281; $3\cdot\dot{7}$; $12\cdot\dot{2}\dot{7}$;
   $0\cdot0\dot{6}$; $3\cdot1\dot{2}$.

8. 2 ദശാംശസ്ഥാനങ്ങളുള്ള ഒരു സംഖ്യയെ ഒരു സ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി എഴുതിയാൽ അതു 12·9 ആകും. എന്നാൽ ആ സംഖ്യയുടെ വില എന്തെല്ലാമാവാം?

9. ഒരു ഔൺസിൻെറ $\frac{1}{100}$ വരെ കൃത്യമായി തൂക്കുവാൻ കഴിയുന്ന ഒരു തുലാസ്സിൽ തൂക്കിയ ഒരു കത്തിൻെറ തൂക്കം 1·72 ഔൺസ് ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ ഏററവും കവിഞ്ഞതും ഏററവും കുറഞ്ഞതുമായ തൂക്കം ഒരു ഔൺസിൻെറ 3 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

10. ഒരു ദിവസത്തിൽ പകലിന്റെ ദൈർഘ്യം മിനുട്ടുവരെ കൃത്യമായി ഗണിച്ചപ്പോൾ 12 മണിക്കൂർ 7 മിനുട്ടു എന്നു കണ്ടു. എന്നാൽ ആ ദിവസത്തിൽ പകലിന്റെ ഏററവും കവിഞ്ഞതും, ഏററവും കുറഞ്ഞതുമായ ദൈർഘ്യം സെക്കണ്ടുവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

11. ഒരു സാധനത്തിന്റെ വില ഒരു ഉറുപ്പികയുടെ 2 ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കൃത്യമായി ഗണിക്കുന്നതായാൽ 3·73ക.യായിരിക്കുമെങ്കിൽ അതിന്റെ ഏററവും കവിഞ്ഞതും ഏററവും കുറഞ്ഞതുമായ വില പൈവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

12. താഴേ പറയുന്ന സംഗതികളെ 3 ഗണ്യസംഖ്യകൾ ഉപയോഗിച്ചു കൃത്യമായി എഴുതുക. ഓരോന്നിലും സ്വീകരിച്ച മാത്ര എഴുതുക.

(i) ഒരു ജന്മിയുടെ സ്വത്ത് 1,99,524ക. വിലക്കുണ്ട്.

(ii) ഒരു പെട്ടിയിലുള്ള വായുവിന്റെ തൂക്കം ·02316 ഗ്രാം.

(iii) ഒരു കമ്പിയുടെ വ്യാസാർദ്ധം ·9243 അംഗുലം.

(iv) ഒരു മുറിയുടെ നീളം 43·765 അടി.

13. താഴേ എഴുതിയ സംഖ്യകൾ 4 ഗണ്യസംഖ്യകൾവരെ കൃത്യമാണെങ്കിൽ അവ ഏതു സീമകൾക്കി (Limits) ടയിലായിരിക്കുമെന്നു കാണുക.

(*a*) 10·29. (*b*) 0·4035. (*c*) 7·001. (*d*) 625000.

14. ഒരു ഭാരതീയഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായിരുന്ന ആര്യഭട്ടൻ $\pi = 3\frac{17}{120}$ എന്നാണ് ഗണിച്ചത്. π യുടെ വില 3·1415963 എന്നു കരുതുന്നതായാൽ അയാൾ ഗണിച്ച വിലക്കു സമമായ ദശാംശഭിന്നിതം ഈ വിലയോടു എത്ര ഗണ്യസംഖ്യകളോളം യോജിക്കും? (1935)

കൂട്ടൽ, കിഴിക്കൽ, പെരുക്കൽ, ഹരിക്കൽ എന്നീ ക്രിയകളുടെ ഫലം സുമാറായി കാണുന്ന ചുരുക്ക വഴികൾ (Contracted Methods)

കൂട്ടൽ (Addition).

235·87647, 4·504239, 1056·0396, 64·1405, 0·025698 ഇവയുടെ തുക 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണണമെന്നു വിചാരിക്കുക.

2-ാം ദശാംശസ്ഥാനത്തിലുള്ള അക്കങ്ങളുടെ തുക 5ൽ അധികമായാൽ 1-ാം സ്ഥാനത്തോടു 1 കൂട്ടേണ്ടതുകൊണ്ടു രണ്ടാം സ്ഥാനത്തെ വിട്ടുകളവാൻ പാടുള്ളതല്ല. ഇതേപ്രകാരം 3-ാം സ്ഥാനത്തിലുള്ള അക്കങ്ങളുടെ തുക 5ൽ അധികമാ

യാൽ 2-ാംസ്ഥാനം 1 കണ്ടു വൎദ്ധിക്കുകയും അതുനിമിത്തം ചിലപ്പോൾ 1-ാം സ്ഥാനം വൎദ്ധിക്കുകയും ചെയ്യാം. അതുകൊണ്ടു 3-ാംസ്ഥാനത്തേയും വിട്ടുകളവാൻ പാടുള്ളതല്ല. കൂട്ടേണ്ടുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം 10ൽ കവിയുന്നില്ലെങ്കിൽ 3-ാം സ്ഥാനത്തിൻെറ ശേഷമുള്ള സ്ഥാനങ്ങൾ 1-ാംസ്ഥാനത്തിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുകയെ വൎദ്ധിപ്പിക്കുന്നതല്ലെന്നു സ്പഷ്ടമാണ്. അതുകൊണ്ടു ആവശ്യപ്പെട്ട സ്ഥാനത്തിന്നു പുറമെ രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളും കൂടി എടുക്കുന്നതായാൽ ഉത്തരം ആവശ്യപ്പെട്ടത്ര കൃത്യമായിരിക്കും. 2 സ്ഥാനങ്ങൾ അധികം എടുക്കുന്നതിന്നു പകരം അവയിൽ ഒന്നാമത്തെ സ്ഥാനത്തെ കൃത്യമാക്കി (*b*)യിൽ കാണുന്ന പ്രകാരം ചേൎത്താലും മതി.

ക്രിയ താഴേ കാണിക്കുംപ്രകാരം ആവാം.

(*a*)		(*b*)		(*c*)
235·8	76	235·8	8	235·87647
4·5	04	4·5	0	4·504239
1056·0	39	1056·0	4	1056·0396
64·1	40	64·1	4	64·1405
0·0	25	0·0	3	0·025698
1360·5	84	1360·5	9	1360·586507

∴ തുക = 1360·6

സുമാറായി കണ്ട ഉത്തരങ്ങൾ 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുവാൻ എല്ലാ സ്ഥാനങ്ങളും എടുത്തു വലത്തു വശത്തു കൂട്ടിയിരിക്കുന്നു.

കിഴിക്കൽ (Subtraction).

314·072568ൽ നിന്നു 49·1980574 കിഴിച്ചു കിട്ടുന്ന ഫലത്തെ 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

3-ാം സ്ഥാനത്തെ കൃത്യമാക്കി എഴുതിയാൽ ഉത്തരം ആവശ്യപ്പെട്ടത്ര കൃത്യമായില്ലെന്നു വരാം. അതുകൊണ്ടു 2 സ്ഥാനങ്ങളും കൂടി അധികമെടുത്തു കിഴിക്കുക.

314·07	25	314·072568
49·19	80	49·1980574
264·87	45.	264·8745106

∴ കിഴിച്ചുകിട്ടുന്ന ഫലം = 264·87.

രണ്ടുത്തരങ്ങളേയും ഒത്തുനോക്കുക.

പെരുക്കൽ (Multiplication).

104·76153നെ 72·15496കൊണ്ടു പെരുക്കികിട്ടുന്ന ഗുണനഫലത്തെ 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

1. ഒന്നാമതായി ഗുണനഫലത്തിലെ പൂൎണ്ണസംഖ്യയിൽ എത്ര സ്ഥാനങ്ങൾ ഉണ്ടാകുമെന്നു നിശ്ചയിക്കുക. ഇതിന്നായി തമ്മിൽ ഗുണിക്കേണ്ടുന്ന സംഖ്യകളിൽ ഒന്നിനെ അതിൻെറ പൂൎണ്ണസംഖ്യയിൽ ഒരു സ്ഥാനം മാത്രം വരത്തക്ക വണ്ണം എഴുതുക. ഇങ്ങിനെ എഴുതുന്നതിന്നു പ്രമാണരൂപ (Standard Form)ത്തിൽ എഴുതുക എന്നു പറയുന്നു. ഇങ്ങിനെ എഴുതുന്നതു ഗുണനഫലത്തിൻെറ പൂൎണ്ണസംഖ്യയിൽ എത്ര സ്ഥാനങ്ങളുണ്ടെന്നു എളുപ്പത്തിൽ നിശ്ചയിക്കുവാനാണ്.

ഉദാഹരണമായി 72·15496നെ പ്രമാണരൂപത്തിൽ എഴുതുന്നതായാൽ അതു 7·215496 ആയ്തീരും.

ഗുണനഫലം $= 104{\cdot}76153 \times 72{\cdot}15496$

$= 1047{\cdot}6153 \times 7{\cdot}215496$

ഗുണനഫലം 1047 × 7നും 1048 × 8നും ഇടയിലായിരിക്കും. അതായതു ഗുണനഫലം 7329ൽ കവിഞ്ഞും 8384ൽ കുറഞ്ഞും ആയിരിക്കും. അതുകൊണ്ടു ഗുണനഫലത്തിൻെറ പൂൎണ്ണസംഖ്യയിൽ 4 സ്ഥാനങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

2. 1047·6153നെ ഗുണ്യമായി കരുതി ആവശ്യപ്പെട്ട 2 ദശാംശസ്ഥാനത്തിൻെറ ശേഷം ഒരു വര വരക്കുക.

1047·61	53
	7·215496
7333·30	7
209·52	3
10·47	6
5·23	8
41	9
9	4
	6
7559·06	3

∴ ഗുണനഫലം = 7559·06.

3. വരയുടെ നേരെ വലത്തായി ഗുണകാരനെ എഴുതുക.

4. 4-ാം ദശാംശസ്ഥാനത്തിലുള്ള 3നെ 7കൊണ്ടു പെരുക്കിയാൽ 21 കിട്ടും. ഇതിനെ 3-ാം സ്ഥാനംവരെ കൃത്യമാക്കിയാൽ 2 കിട്ടും. 3-ാം സ്ഥാനത്തിലുള്ള 5നെ 7കൊണ്ടു പെരുക്കിക്കിട്ടുന്ന 35നോടു 4-ാം സ്ഥാനത്തിൽനിന്നു കിട്ടിയ 2ഉം കൂട്ടി 7ന്റെ ചുവടെ 7 എന്നെഴുതുക. 7കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം പൂൎത്തിയാക്കുക.

5. പിന്നെ പെരുക്കേണ്ടതു 2കൊണ്ടാണു്. ഇതു 1-ാം ദശാംശസ്ഥാനത്തിലായതുകൊണ്ടു 3-ാം ദശാംശസ്ഥാനത്തിലുള്ള ഒരക്കം കിട്ടുവാൻ ഇതിനെക്കൊണ്ടു 2-ാം ദശാംശസ്ഥാനത്തിലുള്ള 1നെ പെരുക്കണം. 3-ാം സ്ഥാനത്തിലുള്ള 5നെ 2കൊണ്ടു പെരുക്കിക്കിട്ടുന്ന 10നെ, 3-ാം സ്ഥാനംവരെ കൃത്യമാക്കികിട്ടുന്ന 1നെ ആദ്യത്തെ ഗുണിതമായ 2നോടു കൂട്ടി തുകയായ 3നെ 3-ാം ദശാംശസ്ഥാനത്തു ചേൎക്കുക. 2കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം പൂൎത്തിയാക്കുക.

6. ഇതേപ്രകാരം ശേഷമുള്ള അക്കങ്ങളെക്കൊണ്ടു പെരുക്കുക. ക്രിയ ഉദാഹരണത്തിൽനിന്നു വ്യക്തമാകുന്നതാണു്.

7. എല്ലാ അക്കങ്ങളും എഴുതിപ്പെരുക്കുന്ന ക്രിയയും ഈ കുറുക്കുവഴിയും വിദ്യാൎത്ഥി ഒത്തുനോക്കണം.

മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ആവശ്യപ്പെട്ടതു കൃത്യമായി കാണുവാൻ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം ആവശ്യപ്പെട്ടതിലും ഒരു സ്ഥാനം അധികംവരെ കൃത്യമായി കണ്ടു അതിനെ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.

ഹരിക്കൽ (Division).

65134·4087നെ 397·523601കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന ഹരിതഫലത്തെ 2 ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കൃത്യമായി നിശ്ചയിക്കുക.

1. ഹരിതഫലത്തിന്റെ പൂൎണ്ണസംഖ്യയിൽ എത്ര സ്ഥാനമുണ്ടാകുമെന്നു നിശ്ചയിക്കുക.

ഇതിന്നായി ഹാരകത്തെ പ്രമാണരൂപത്തിലെഴുതുക.

$$\text{ഹരിതഫലം} = \frac{65134{\cdot}4087}{397{\cdot}523601} = \frac{651{\cdot}344087}{3{\cdot}97523601}$$

∴ ഹരിതഫലം $\frac{651}{4}$നും $\frac{652}{3}$നും ഇടയിലായിരിക്കും.

അതായതു ഹരിതഫലത്തിന്റെ പൂൎണ്ണസംഖ്യ 163നും 217നും ഇടയിലായിരിക്കും. പൂൎണ്ണസംഖ്യയിൽ 3 സ്ഥാനങ്ങളുണ്ടായിരിക്കും.

2. ഹരിതത്തെ 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണേണ്ടതുകൊണ്ടു

അതിൽ ആകെ 5 സ്ഥാനങ്ങൾ വേണം. ഉത്തരം 5 സ്ഥാനങ്ങൾ വരെ കൃത്യമായിരിപ്പാൻ 6 സ്ഥാനങ്ങൾ കാണണം.

3. ഹാരകത്തിൽ 6 സ്ഥാനം നിൎത്തി ശേഷമുള്ളവയെ വിട്ടുകളയുക.

4. ഈ ഹാരകത്തെക്കൊണ്ടു ഒരിക്കൽ ഹരിക്കാൻ ആവശ്യമുള്ളത്ര സ്ഥാനങ്ങൾ ഹാൎയ്യത്തിൽ നിൎത്തി ശേഷമുള്ളവയെ വിട്ടുകളയുക.

5. ഓരോ പ്രാവശ്യവും ഹരിച്ചശേഷം ഹാൎയ്യത്തിൽ പുതുതായി സ്ഥാനങ്ങൾ ചേൎക്കുന്നതിന്നു പകരം ഹാരകത്തിൽനിന്നു ഓരോ സ്ഥാനം നീക്കിക്കളയുക.

ക്രിയ താഴെ കാണുംപ്രകാരമായിരിക്കും.

```
           163·850
         ----------
3·975236 | 651·344
         | 397·524
         ----------
         | 253·820
         | 238·514
         ----------
         |  15·306
         |  11·926
         ----------
         |   3·380
         |   3·180
         ----------
         |    ·200
         |    ·199
         ----------
         |       1
         ==========
```

(*a*) 6നെ 1കൊണ്ടു പെരുക്കി അടുത്ത സ്ഥാനം വരെ കൃത്യമാക്കി കിട്ടുന്ന 1നെ 3×1നോടു ചേൎത്തു 4 എന്നെഴുതുക. (*b*) ഇതേപ്രകാരം നീക്കിക്കളയുന്ന ഓരോ അക്കത്തേയും പെരുക്കി അടുത്ത സ്ഥാനംവരെ കൃത്യമാക്കുക.

എല്ലാ അക്കങ്ങളും എഴുതി ഹരിക്കുന്ന ക്രിയയും താരതമ്യത്തിന്നായി താഴേ ചേൎക്കുന്നു.

```
                      163·850
           -------------------
397523601 | 651344 | 08700
          | 397523 | 601
          -------------------
          | 253820 | 4860
          | 238514 | 1606
          -------------------
          |  15306 | 32540
          |  11925 | 70803
          -------------------
          |   3380 | 617370
          |   3180 | 188808
          -------------------
          |    200 | 4285620
          |    198 | 7618005
          -------------------
          |      1 | 6667615
          ===================
```

അഭ്യാസം 2.

1. താഴെ എഴുതിയ സംഖ്യകളുടെ തുക (*a*) പൂൎണ്ണസംഖ്യവരെ (*b*) 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ (*c*) 3 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

(i) 5·210562, 4·370956, 18·86483, 0·409201, 15·67301.

(ii) 8·632454, 0·008458, 16·859249, 4·45625.

(iii) $5\cdot\dot{3}$, $3\cdot\dot{2}\dot{1}$, $0\cdot\dot{1}4285\dot{7}$, $1\cdot8\dot{4}\dot{5}$, $0\cdot0\dot{4}3\dot{2}$.

2. താഴെ എഴുതിയ സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം

(*a*) പൂൎണ്ണസംഖ്യവരെ (*b*) 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ (*c*) 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

(i) 4·5249, 7·4795.

(ii) 10·8629, 3·5432.

(iii) $1\cdot\dot{4}\dot{5}$, $3\cdot\dot{6}$.

3. 1·3456നെ 4, 12, 16 ഇവകൊണ്ടു ഗുണിച്ച ഗുണനഫലത്തെ 3 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി എഴുതുക.

4. താഴെ കാണുന്ന ഗുണനഫലങ്ങളെ രണ്ടു ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി എഴുതുക.

(i) 10·365 × 21·347.

(ii) 7·8193 × 0·2345.

(iii) 34·37093 × 12·75.

(iv) 319·784 × 0·003134.

5. ഗുണനഫലം ആവശ്യപ്പെട്ടത്ര കൃത്യമായി കാണുക.

(i) 41·381 × 0·0314 (3 ഗണ്യമായ അക്കംവരെ).

(ii) 0·0032758 × 0·120135 (2 ഗണ്യമായ അക്കംവരെ).

(iii) 53·48 × 8678·396 (ആയിരംവരെ).

(iv) 356·807 × 56794·78 (ലക്ഷംവരെ).

(v) 0·37642567 × 28·5631 (5 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ).

(vi) 0·0001 × 9·71 × 5·836 (5 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ).

(vii) 0·02 × 0·0203 × 0·123 (7 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ).

6. താഴേ എഴുതിയ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗം മൂന്നു ഗണ്യമായ അക്കംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

49·33; 4·978; 0·0317.

7. 2·93ൻെറ ത്രിഘാതം (cube) 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

8. ഹരിതഫലം ആവശ്യപ്പെട്ടത്ര കൃത്യമായി കാണുക.

(i) 56·9812÷47·87631 (4 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ).

(ii) 1378·03157÷35·3781 (2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ).

(iii) 756796·54÷4878·70563 (1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ).

(iv) 68327÷7836 (5 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ).

(v) 0·056068246÷8·0327 (3 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ).

(vi) താഴെയുള്ളവയെ 4 ഗണ്യസംഖ്യകൾവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

(*a*) 97·521÷·6543. (*b*) 19·41377÷1·34177.

(*c*) 583÷721. (*d*) 91·372153÷1·53276.

9. 3·203458612ൻെറ വ്യുൽക്രമ (reciprocal)ത്തെ 6 ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കൃത്യമായി കാണുക.

10. ഹരിതഫലത്തെ 3 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

(*a*) $8{\cdot}\dot{2}\dot{6}\div3{\cdot}1762$. (*b*) $1{\cdot}92\dot{7}\div3{\cdot}\dot{0}\dot{8}$.

11. ഓരോ സമത്വത്തിലും xൻെറ വില പൂർണ്ണസംഖ്യവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

(*a*) $2{\cdot}03x=1830{\cdot}26$. (*b*) $0{\cdot}0318973x=35{\cdot}78364$.

12. 1901, 1911 എന്നീ കൊല്ലങ്ങളിൽ മദ്രാസ് സംസ്ഥാനത്തിൽ നൂൽ നൂല്പിൽ ഏപ്പെട്ടവരുടെ എണ്ണം താഴേ ചേർക്കുന്നു:—

നൂലിൻെറ തരം	1901 ലെ എണ്ണം	1911 ലെ എണ്ണം	ശതമാനം വർദ്ധനവ് (+) ക്ഷയം (−)
പരുത്തി (കടയൽ)	24,089	32,553	
പരുത്തി (നൂല്പൽ)	623,783	580,321	
ചണ	533	2,428	
കയർ	42,376	58,794	
മററു നൂലുകൾ	7,886	9,252	
ആകത്തുക			

ശതമാനം കാണിക്കുന്ന കള്ളികളും, ആകത്തുകയുടെ വരിയും 1 ദശാംശ സ്ഥാനംവരെ കൃത്യമാക്കി പൂരിപ്പിക്കുക. (1914)

13. ഒരു കൊല്ലത്തിൽ ബ്രിട്ടനിൽ 22, 934, 523 പവൻ വിലക്കുള്ള 61,325,694 ശതത്തൂക്കം ഗോതമ്പം അന്യരാജ്യങ്ങളിൽനിന്നും 16,837, 425 പവൻ വിലക്കുള്ള 41,568, 705 ശതത്തൂക്കം ഗോതമ്പം ബ്രിട്ടീഷുരാജ്യങ്ങളിൽനിന്നും ഇറക്കുമതി ചെയ്തിരിക്കുന്നു.

എന്നാൽ (i) അന്യരാജ്യങ്ങളിൽനിന്നും (ii) ബ്രിട്ടീഷുരാജ്യങ്ങളിൽനിന്നും ഇറക്കുമതി ചെയ്ത ഒരു ശതത്തൂക്കം ഗോതമ്പത്തിന്നു എന്തു വിലയെന്നു പെനിവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

ബ്രിട്ടീഷുരാജ്യങ്ങളിൽനിന്നു ഇറക്കുമതി ചെയ്ത ഗോതമ്പിൻെറ വില ആകെ വിലയുടെ എത്ര ശതമാനമാണെന്നു, പൂർണ്ണസംഖ്യവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (1915)

14. ഇന്ത്യാഗവമ്മേണ്ടുവകയുള്ള തീവണ്ടിപ്പാതകളിൽനിന്നു രണ്ടു കൊല്ലങ്ങളിലുണ്ടായ വരവു താഴേ ചേക്കുന്നു:

കൊല്ലം	തീവണ്ടിപ്പാതകളുടെ നീളം	ആകെവരവു
1903	21,131 നാഴിക	36,00,82,035 ക.
1912	25,125 ,,	61,65,07,005 ക.

(i) ഓരോ കൊല്ലത്തിലും ഒരു നാഴിക വീതം വരവെത്രയെന്നു ഉറുപ്പികവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

(ii) 1903—12വരെയുള്ള കൊല്ലങ്ങളിൽ നാഴികവീതമുള്ള വരവ് എത്ര ശതമാനം വൎദ്ധിച്ചുവെന്നു 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (1922)

15. 1911, 1921 എന്നീ കൊല്ലങ്ങളിലെ കാനേഷുമാരി കണക്കുപ്രകാരം ഇന്ത്യയിലെ 5 സംസ്ഥാനങ്ങളിലുണ്ടായിരുന്ന ജനസംഖ്യ (ആയിരമായി) താഴേ ചേക്കുന്നു.

സംസ്ഥാനം	1911	1921
ബങ്കാൾ	45,483	46,696
മദ്രാസ്	41,405	42,319
ബോംബെ	19,626	19,348
ഐക്യസംസ്ഥാനങ്ങൾ	46,807	45,376
പഞ്ചാബ്	19,579	20,685

(*a*) ആദ്യത്തെ 3 സംസ്ഥാനങ്ങളിലെ ജനസംഖ്യയിലുണ്ടായിരുന്ന ക്ഷയ വൎദ്ധനവിന്റെ ശതമാനം.

(*b*) എല്ലാം സംസ്ഥാനങ്ങളിലേയും ജനസംഖ്യയിലുണ്ടായ വൎദ്ധനവിന്റെ ശതമാനം 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (1925)

അദ്ധ്യായം 2.

ചില സാമാന്യ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം

(Approximate equivalents for common units).

നാം സാധാരണ ഉപയോഗിച്ചുവരുന്ന അളവുകളും മെറ്റ്റിക്ക് (Metric) അളവുകളും തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം അറിയുന്നതു നന്നായിരിക്കും. 1 മീററർ $=39\cdot37079$ അംഗുലം എന്നു സ്വീകരിച്ചിട്ടുണ്ടു. ഇതിനെ 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി $39\cdot37''$ എന്നെഴുതാം. ഇതിൽനിന്നു $1''=\frac{1}{39\cdot37}$ മീററർ$=\frac{100}{39\cdot37}$സെ. മീ.$=2\cdot54$സെ.മീ. എന്നു ഗണിക്കാം.

$\therefore$ 1 അടി$=30\cdot48$സെ. മീ.

1 കിലോമീററർ$=1000$മീററർ$=39370\cdot79''=3280\cdot9$അടി (1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യം).

$\frac{5}{8}$ നാഴിക$=\frac{5280\times5}{8}$ അടി$=3300$അടി

അതുകൊണ്ടു എളുപ്പത്തിൽ ഓൎമ്മവാൻ 1കി. മീ.$=\frac{5}{8}$നാഴിക എന്നു കരുതാറുണ്ടു.

1 റാത്തൽ$=453\cdot60$ ഗ്രാം എന്നു സ്വീകരിച്ചിട്ടുണ്ടു. ഇതിൽനിന്നു 1 ഗ്രാം$=\cdot0353$ ഔൺസ് എന്നു ഗണിക്കാം.

1 കിലോഗ്രാം$=1000$ഗ്രാം$=35\cdot3$ ഔൺസ്$=2\cdot2$ റാത്തൽ (1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യം). 1 റാത്തൽ$=\cdot4536$കി. ഗ്രാം.

1 ശതത്തുക്കം$=453\cdot6\times112$ ഗ്രാം$=50\cdot8$കി. ഗ്രാം. (1ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യം).

1 ലീററർ = 1000ഘനസെൻറിമീററർ = 33·81 ദ്രാവകഔൺസ് എന്നു സ്വീകരിച്ചിട്ടുണ്ടു. ഇതിൽനിന്നു 1 ദ്രാവകഔൺസ് = 30·00ഘന സെ. മീ. (2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യം) എന്നു ഗണിക്കാം.

$6\frac{1}{4}$ ഗാലൻ = 1 ഘന അടി = 1728 ഘനാംഗുലം. ഇതിൽനിന്നു 1ഗാലൻ = 4·5460 ലീററർ എന്നു ഗണിക്കാം.

അഭ്യാസം 3.

1. എവറസ്റ്റ് കൊടുമുടിയുടെ ഉയരം 29002 അടിയാണ്. ഇതു മീററിന്നു കൃത്യമാക്കി എഴുതുക. 1 മീററർ = 39·37″.

2. 1 അംഗുലം = 2·54സെ. മീ. എന്നു കരുതി 1 ചതുരശ്ര അംഗുലം എത്ര ച. സെ. മീ.ന്നും 1 ഘനാംഗുലം എത്ര ഘ. സെ. മീ.ന്നും സമമാണെന്നു 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി എഴുതുക.

3. ഒരു ഇംഗ്ലീഷുകാരൻ 100 വാര 11 സെക്കണ്ടിലും ഒരു ഫ്രെഞ്ചുകാരൻ 100 മീററർ 12·5 സെക്കണ്ടിലും ഓടുമെങ്കിൽ 100 വാര ഓട്ടപ്പന്തയത്തിൽ ആർ ജയിക്കും? എത്ര സെക്കണ്ടുകൊണ്ടു? സെക്കണ്ടിൻെറ $\frac{1}{10}$ വരെ കൃത്യമായി ഗണിക്കുക. 1 മീററർ = 39·4″.

4. 1 വാര തുണിക്കു 4ഷി. 6പെ. വിലയായാൽ 1 മീററർ തുണിയുടെ വില ഫ്രെങ്കിന്നു കൃത്യമായി കാണുക. 1 ഫ്രെങ്ക് = 2 പെൻസ്. 100 മീററർ = 109 വാര.

5. ഭൂമിയുടെ ചുററളവു 40 മില്യൻ മീററർ എന്നും 1 വാര = ·91 മീററർ എന്നും കരുതുന്നതായാൽ ചുററളവു എത്ര നാഴികയാണെന്നു നാഴികയുടെ 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി ഗണിക്കുക.

6. 1 മീററർ = 39·37″. 1ചതുരശ്ര മീറററിൽ എത്ര (1) ച. അം. (2) ച. അ. (3) ച. വാര ഉണ്ടെന്നു 4 ഗണ്യസംഖ്യകൾവരെ കൃത്യമായി ഗണിക്കുക.

7. 1ച. മീ. = 1·196ച. വാര എന്നു കരുതി 1 ഏക്കർ എത്ര ച. കിലോമീറററിന്നു സമമാണെന്നു പൂർണ്ണസംഖ്യവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

8. ഒരു മോട്ടോർകാർ മണിക്കൂറിൽ 48·055കി. മീ. വീതം ഓടുന്നു. ഇതു സെക്കണ്ടിൽ എത്ര അടിക്കു സമമാണെന്നു അടിവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

9. 1 ലീററർ = 33·81 ദ്രാവകഔൺസ് എന്നും 1″ = 2·5സെ.മീ. എന്നും കരുതി 1 ഘനാംഗുലം എത്ര ദ്രാവകഔൺസിന്നു സമമാണെന്നു 3 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

10. 1 മീററർ=39·3708". എന്നാൽ 83 കിലോമീററവും 51 നാഴികയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എത്ര അടിയാണെന്നു അടിവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (1913)

11. 1 മീററർ=39·371". 1 കിലോഗ്രാം=2·2046 റാത്തൽ. 1 ഘന മീററർ വെള്ളത്തിൻെറ തൂക്കം=1000കി. ഗ്രാം. എന്നാൽ 1ഘ. അടി വെള്ളത്തിൻെറ തൂക്കം ഔൺസിൻെറ $\frac{1}{10}$ വരെ കൃത്യമായി കാണുക. (1924)

12. 1 മീററർ=39·37079 അംഗുലം. എന്നാൽ 5 നാഴികയും 8 കിലോമീററവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം വാരവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (1929)

അദ്ധ്യായം 3.

ബേങ്കുഇടപാടുകളേയും സെവിങ്ങ്സ് സർട്ടിഫിക്കെററുകളേയും പററി കഴിഞ്ഞ കൊല്ലം നിങ്ങൾ പഠിച്ചുവല്ലോ. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ പ്രായോഗികമായ ചില വിഷയങ്ങളെ കുറിച്ചു പഠിക്കാം.

1. സ്റ്റോക്കും ഓഹരിയും (Stocks and Shares).

വമ്പിച്ച വ്യവസായങ്ങൾക്കോ ഗവമ്മെണ്ടു, മുനിസിപ്പാലിററി മുതലായ പൊതു സ്ഥാപനങ്ങൾ വകയായുള്ള ചില പദ്ധതികൾക്കോ ആവശ്യമായ **മൂലധനം** (capital) പൊതുജനങ്ങളിൽനിന്നു കടമായിട്ടാണു വാങ്ങാറുള്ളതു. ഈ മൂലധനത്തെ മേല്പറഞ്ഞ സ്ഥാപനങ്ങളുടെ **സ്റ്റോക്ക്** (stock) എന്നു പറയുന്നു. ഒരു വ്യവസായത്തിന്നു മൂലധനമായി 1 ലക്ഷം ഉറുപ്പിക വേണമെന്നു വിചാരിക്കുക. അതിനെ സൌകയ്യത്തിന്നായി 10ഓ 100ഓ ഉറുപ്പിക വീതമുള്ള ഓഹരികളാ (shares)യി ഭാഗിക്കുന്നു. പണം മുടക്കുവാൻ നിശ്ചയിച്ചവർ തങ്ങളുടെ പ്രാപ്തിക്കനുസരിച്ചു ഓഹരികൾ എടുക്കുന്നു. 100ക.യുടെ ഓഹരിക്കു 100ക. തന്നെ വില വേണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി 1948ൽ നമ്മുടെ ഗവമ്മെണ്ടു വിററിരുന്ന 100ക.യുടെ കടപ്പത്രത്തിന്നു (Bond) 99ക. മാത്രമേ വിലയുണ്ടായിരുന്നുള്ളൂ. പ്രസ്തുത

പത്രത്തിന്മേൽ 3% പലിശ കൊടുക്കാമെന്നു ഗവൎമ്മെണ്ടു വാഗ്ദത്തം ചെയ്തിരുന്നു. അതുകൊണ്ടു അവയെ 3% പത്ര ങ്ങളെന്നോ ചുരുക്കി 3%ങ്ങൾ എന്നോ പറഞ്ഞാണ് അറി യപ്പെടുന്നതു.

ഓഹരികൾ 3 തരം ഉണ്ടു.

1. പ്രഥമാവകാശ ഓഹരികൾ (Preference Shares).

ഓരോ ഓഹരിക്കും ഇത്ര വീതം പലിശ കൊടുക്കുമെന്നു ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തിയ ഈ ഓഹരികൾക്കുള്ള പലിശ കൊടുത്ത ശേഷം മാത്രം വേറെ തരം ഓഹരികളുടെ പലിശ കൊടുക്കു ന്നതുകൊണ്ടാണ് അവക്ക് ഈ പേർ കൊടുത്തിട്ടുള്ളത്.

2. കടപ്പത്രങ്ങൾ (Debentures).

ചിലപ്പോൾ കമ്പനികളുടെ പ്രവൎത്തനത്തിന്നാവശ്യ മായ മൂലധനം പോരാതെ വരുമ്പോൾ കമ്പനിയുടെ സ്വത്തു പണയമായി കാണിച്ചു വില്ക്കുന്ന ഓഹരികളേ യാണ് കടപ്പത്രങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നതു. ഈ ഓഹരി കളുടെ പലിശ പ്രഥമാവകാശ ഓഹരികളുടെ പലിശയെ പ്പോലെതന്നെ ആദ്യം കൊടുക്കുന്നതായിരിക്കും. കമ്പനി യുടെ സ്വത്തുതന്നെ ഈ ഓഹരികൾക്കു പണയമായതു കൊണ്ടു ഈ ഓഹരികളാണ് ഏററവും ഉറപ്പുള്ളത്. ഇതേ കാരണത്താൽ ഇവയുടെ മേലുള്ള പലിശ മററു ഓഹരിക ളുടെ പലിശയേക്കാൾ കുറഞ്ഞിരിക്കും.

3. സാധാരണ ഓഹരികൾ (Ordinary Shares).

ആദ്യം പറഞ്ഞ 2 തരം ഓഹരികളുടെ പലിശ കൊടു ക്കുകയും ചരതമുതലി (Reserve Fund) ലേക്കും മററും പണം നീക്കുകയും ചെയ്തശേഷം ബാക്കിയാകുന്ന ആദായ ത്തെ ഇത്തരം ഓഹരിക്കാൎക്കു (share holders) വീതിച്ചു കൊടുക്കുന്നു. ഈ ആദായത്തെ ഓഹരി വീതം (Dividend)

എന്നു പറയുന്നു. ഈ ഓഹരിവീതം കമ്പനിയുടെ അഭിവൃദ്ധിയെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുമെന്നതു സ്പഷ്ടമാണല്ലോ. കമ്പനിയുടെ നടത്തിപ്പിന്നുള്ള അധികാരം ഈ ഓഹരിക്കാർക്കാണുള്ളത്. മിക്കവ്യവസായങ്ങളുടേയും മൂലധനത്തിൻെറ അധികഭാഗം ഇത്തരം ഓഹരികളാണ്.

4. നീക്കിവെച്ച ഓഹരികൾ (Deferred Shares).

ഇവയുടെ പലിശ പേരിന്നൊത്ത പ്രകാരം മററു ഓഹരികളുടെ പലിശ കൊടുത്തശേഷമേ കൊടുക്കാറുള്ളൂ.

ഒരു ഓഹരിയിൽനിന്നു കിട്ടുന്ന ആദായത്തിന്നനുസരിച്ചായിരിക്കും പൊതുജനങ്ങൾ അതിന്നു കൊടുക്കുവാൻ ഒരുമ്പെടുന്ന വില. അതുകൊണ്ടു സാധാരണ ചരക്കുകളെപ്പോലെതന്നെ ഓഹരികളുടെ വില മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കും. അതിനാൽ ഓഹരിക്കു 3 തരം വിലകളുണ്ട്.

1. മുഖവില (Face Value).

ഇതു ഓഹരിപത്ര (Share Certificate) ത്തിന്മേൽ അച്ചടിച്ച വിലയാണ്.

2. നാമമാത്രവില (Nominal Value).

ഉദാഹരണമായി മുമ്പു പ്രസ്താവിച്ച 1948ലെ ഗവമ്മെണ്ടു കടപ്പത്രങ്ങളെ 99ക.ക്കാണ് ആദ്യം വിററിരുന്നതു. ഈ വിലയെ ആ ഓഹരികളുടെ നാമമാത്രവിലയെന്നു പറയുന്നു. ചിലപ്പോൾ മുഖവിലയെ നാമമാത്രവിലയെന്നും പറയാറുണ്ടു.

3. അങ്ങാടിവില (Market Value).

100ക. ഓഹരിയിന്മേൽ കൊല്ലന്തോറും ഒരു കമ്പനി 5ക. ആദായം വീതിച്ചു കൊടുക്കുന്നുവെന്നു വിചാരിക്കുക. അന്നത്തെ പലിശനിരക്കു 100ന്നു 4ക. വീതമാണെങ്കിൽ ആ ഓഹരി 125ക.ക്കു വാങ്ങുന്നതു ന്യായമായിരിക്കും. ഇങ്ങിനെ റൊക്കംവില (Cash price) മുഖവിലയെക്കാൾ അധികമോ കറവോ ആകുമ്പോൾ ഓഹരിയെ യഥാക്രമം മെച്ചത്തിന്നോ (at a premium) കിഴിവിന്നോ (at a discount) വില്ക്കുന്നുവെന്നു പറയുന്നു. മുഖവിലക്കുതന്നെ ഓഹരി വില്ക്കുന്നതായാൽ അതിൻെറ വില തുല്യ വില (Par value) യാണെന്നു പറയുന്നു.

ഉദാ:—(1) 100ക.യുടെ $2\frac{1}{4}$% ഓഹരിയുടെ വില 75ക.യാണെങ്കിൽ യഥാൎത്ഥ പലിശവീതം കാണുക.

75ക. കൊടുത്താൽ കിട്ടുന്ന ഓഹരിയുടെ വില=100ക.

100ക. ഓഹരിമേൽ പലിശ=$2\frac{1}{4}$ക.

∴ 75ക.ക്കു യഥാൎത്ഥ പലിശ=$2\frac{1}{4}$ക.

∴ 100ക.ക്കു ,, ,, $=2\frac{1}{4}\times\frac{100}{75}$ക.

=3ക.

(2) $3\frac{1}{4}$% ഓഹരി 92ക.ക്കു വില്ക്കുമ്പോൾ ഞാൻ 3450ക.ക്കു സ്റ്റോക്ക് വാങ്ങുന്നതായാൽ എനിക്കു എത്ര സ്റ്റോക്ക് കിട്ടും? അതിൽനിന്നു കൊല്ലന്തോറുമുള്ള വരവെത്ര?

92ക.ക്കു കിട്ടുന്നതു=100ക. സ്റ്റോക്ക്.

∴ 3450 ,, ,, $=\frac{100ക.}{92}\times3450$,,

=3750ക. ,,

∴ വരവു $=\frac{3750}{100}\times3\frac{1}{4}$ക.=121ക. 14ണ.

ഓഹരികളുടെ വില ദിവസംതോറും മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നതുകൊണ്ടു അതു ക്രയവിക്രയംചെയ്തു ആദായം സമ്പാദിക്കുവാൻ ആളുകൾ ശ്രമിക്കുന്നു. ഇവരെ ദല്ലാളി(Brokers)കൾ എന്നും ഇവരുടെ ആദായത്തെ ദല്ലാൾ കമ്മിഷൻ (Brokerage) എന്നും പറയുന്നു.

ഇതു സാധാരണ 100ന്നു $\frac{1}{8}$ വീതമാണ്. 100ക.യുടെ ഓഹരിക്കു $92\frac{1}{4}$ക. വിലയാണെങ്കിൽ ദല്ലാളി അതിനെ $(92\frac{1}{4}-\frac{1}{8})$ക.ക്കു, $92\frac{1}{8}$ക.ക്കു വാങ്ങുകയും, $(92\frac{1}{4}+\frac{1}{8})$ക.ക്കു, $92\frac{3}{8}$ക.ക്കു, വില്ക്കുകയും ചെയ്യും. ഇങ്ങിനെ ഒരു ഓഹരി വാങ്ങി വില്ക്കുന്നതിനാൽ അയാൾക്കു 2 പ്രാവശ്യം $\frac{1}{8}$ക. വീതം $\frac{1}{4}$ക. ലാഭം കിട്ടുമെന്നു സ്പഷ്ടമാണല്ലോ.

സ്റ്റോക്കുകളുടെ വില താഴെ കാണുന്ന വിധത്തിലാണ് വൎത്തമാന പത്രികകളിൽ പ്രസിദ്ധം ചെയ്യുന്നതു. ഒരു കമ്പനിയുടെ ഓഹരിയുടെ വില: $103\frac{1}{8}-\frac{5}{8}$. ആ ഓഹരിയുടെ വില അന്നു 103ക. 2ണ.ക്കും 103ക. 10ണ.ക്കും ഇടയിലായിരിക്കും എന്നു പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു എന്നൎത്ഥം. വാങ്ങുന്ന ആൾ 103ക. 10ണ.+2ണ. ($\frac{1}{8}$%: ദല്ലാൾ കമ്മിഷൻ) അഥവാ 103ക. 12ണ. കൊടുക്കണം. വില്ക്കുന്ന ആൾക്കു 103ക. 2ണ.—2ണ. അഥവാ 103ക. കിട്ടും.

ഓഹരികൾ മുഴുവനായി മാത്രമേ വില്ക്കാറുള്ളു. ഒരു ഓഹരിയുടെ ഒരംശം

വാങ്ങുകയോ വില്ക്കുകയോ ചെയ്യാറില്ല. എന്നാൽ ഏതെങ്കിലും വിലക്കുള്ള സ്റ്റോക്ക് വാങ്ങുകയോ വില്ക്കുകയോ ചെയ്യാം.

ഉദാ: (3) $2\frac{1}{2}\%$ങ്ങൾ 93ന്നും 3%ങ്ങൾ 108ന്നും വില്ക്കുമ്പോൾ ഏതോഹരി വാങ്ങുന്നതാണ് അധികം ആദായകരം?

1-ാം ഓഹരി: 93ക. മേൽ പലിശ = 2ക. 4ണ.

2-ാം ,, : 108 ,, ,, ,, = 3ക.

,, ,, : 93 ,, ,, ,, $= \frac{93}{108} \times 3$ക.

= 2ക. 9ണ. 4പ.

∴ 2-ാം ഓഹരി വാങ്ങുന്നതാണ് അധികം ആദായകരം.

ഉദാ: (4) 4%ങ്ങൾക്കു 103 വിലയുള്ളപ്പോൾ എന്റെ കൈയിലുള്ള 4170ക. യുടെ ആ സ്റ്റോക്ക് വിററതിനാൽ എനിക്കു 4115ക.യുടെ 5% സ്റ്റോക്ക് കിട്ടിയെങ്കിൽ 5% ങ്ങളുടെ പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ വില കാണുക. ദല്ലാൾ കമ്മീഷൻ $= \frac{1}{8}\%$.

4115ക. സ്റ്റോക്കിന്റെ വില = 4170ക.യുടെ സ്റ്റോക്ക് വിററു കിട്ടുന്ന പണം.

$= \frac{4170 \times 102\frac{7}{8}}{100}$ക.

∴ 100ക. ,, ,, $= \frac{4170 \times 102\frac{7}{8}}{4115}$ക.

$= 104\frac{1}{4}$ക.

∴ പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ വില $= (104\frac{1}{4} - \frac{1}{8})$ക.

$= 104\frac{1}{8}$ക.

അഭ്യാസം 4.

1. ഇന്ത്യാഗവമ്മെണ്ടിന്റെ 3%ങ്ങൾക്കു $101\frac{1}{4}$ക. വിലയുള്ളപ്പോൾ 1700ക.യുടെ കടപ്പത്രത്തിന്നു എന്തു വില കൊടുക്കണം? അതിൽനിന്നു കൊല്ലന്തോറുമുള്ള വരവു കാണുക. യഥാൎത്ഥപലിശനിരക്കെത്രയാണ്?

2. ഒരു പരുത്തി മില്ലിന്റെ 4325ക. $3\frac{1}{2}\%$ സ്റ്റോക്ക് ഞാൻ 95ന്നു വില്ക്കുന്നതായാൽ എനിക്കെന്തു വില കിട്ടും? ദല്ലാൾകമ്മീഷൻ $\frac{1}{8}\%$ വീതം കൊടുക്കേണ്ടിവന്നാൽ എന്തു വില കിട്ടും?

3. മദ്ധ്യസംസ്ഥാന ഗവമ്മെണ്ടിന്റെ 3% കടപ്പത്രത്തിന്നു 99ക. വിലയുണ്ടു. തന്റെ മകൾക്കു കൊല്ലന്തോറും 100ക. കിട്ടത്തക്കവണ്ണം ഒരാൾ കടപ്പത്രങ്ങൾ വാങ്ങുന്നതായാൽ അവക്കു എന്തു വിലയാകും?

4. 3 മില്ലുകളുടെ ഓഹരികളുടെ വിലയും ഓഹരി വീതവും (dividend) താഴെ ചേൎത്തിരിക്കുന്നു. ഏതിൽ പണം മുടക്കുന്നതാകുന്നു ഏററവും ആദായകരം? ഓരോ ഓഹരിയിൽനിന്നുമുള്ള യഥാൎത്ഥ പലിശനിരക്കു കാണുക.

വില	ഓഹരിവീതം
135	6
78	$3\frac{1}{4}$
105	$4\frac{1}{2}$

5. 7250ക. 5% സ്റ്റോക്കിന്നു ഞാൻ 7431ക. 4ണ. കൊടുത്തെങ്കിൽ സ്റ്റോക്കിൻെറ അന്നത്തെ അങ്ങാടിവില കാണുക.

6. ഒരു ബേങ്കിൻെറ 10ക.യുടെ ഓഹരിക്കു 8ക. 12ണ. വിലയുണ്ടു. ബേങ്കുകാർ ഒരു കൊല്ലം $7\frac{1}{2}\%$ ഓഹരി വീതമായി കൊടുത്തപ്പോൾ ഒരാൾക്കു 53ക. 4ണ. കിട്ടിയെങ്കിൽ അയാൾ എത്ര ഓഹരി വാങ്ങിയിരിക്കണം? അതിന്നു അയാൾ എത്ര വില കൊടുത്തു? യഥാൎത്ഥ പലിശ നിരക്കെത്ര?

7. ഒരാളുടെ കൈയിൽ 3700ക. $3\frac{3}{4}\%$ സ്റ്റോക്കുണ്ടു. അതിന്നു $97\frac{1}{2}$ വിലയുള്ളപ്പോൾ വിററു 111ന്നുള്ള $4\frac{1}{2}\%$ സ്റ്റോക്ക് വാങ്ങുന്നതായാൽ അയാൾക്കു കൊല്ലന്തോറും എത്ര അധികം ആദായം ഉണ്ടാകും?

8. $3\frac{1}{2}\%$ ങ്ങൾക്കു $95\frac{1}{2}$ വിലയുള്ളപ്പോൾ എത്ര സ്റ്റോക്ക് വിററാൽ 2289ക. കിട്ടും? ദല്ലാൾ കമ്മിഷൻ $=\frac{1}{8}\%$.

9. 1075ക. മുടക്കി $6\frac{1}{2}\%$ങ്ങൾ $107\frac{3}{8}$ന്നു വാങ്ങുന്നതായാൽ ഒരു കൊല്ലത്തിലെ വരവു കാണുക. ദല്ലാൾ കമ്മിഷൻ $=\frac{1}{8}\%$.

10. 3% ങ്ങൾക്കു $95\frac{1}{4}$ വിലയുള്ളപ്പോൾ 7620ക.ക്കു ഒരാൾ സ്റ്റോക്ക് വാങ്ങി, വില $93\frac{1}{2}$ ആയപ്പോൾ $\frac{1}{4}$ ഭാഗം സ്റ്റോക്കും, വില 96 ആയപ്പോൾ 3600ക.യുടെ സ്റ്റോക്കും ബാക്കി സ്റ്റോക്കു മുഖവിലക്കും വില്ക്കുന്നതായാൽ അയാൾക്കു ആകെ ലാഭമോ, നഷ്ടമോ? എത്ര?

11. $3\frac{1}{2}\%$ ങ്ങളെ $87\frac{1}{2}$ക്കു വില്ക്കുമ്പോൾ ആ സ്റ്റോക്കിൽനിന്നു കൊല്ലത്തിൽ 73ക. 8ണ. വരവുണ്ടാവാൻ ഞാൻ എത്ര പണം മുടക്കണം? ദല്ലാൾ കമ്മിഷൻ $=\frac{1}{8}\%$.

12. ഒരാളുടെ കൈവശം 3% ങ്ങളുടെ 10000ക. സ്റ്റോക്കുണ്ടായിരുന്നു. അയാൾ അതു വിററു $87\frac{3}{8}$ വിലക്കു $3\frac{1}{2}\%$ങ്ങൾ വാങ്ങിയതിനാൽ അയാളുടെ കൊല്ലന്തോറുമുള്ള വരവു 10ക. വൎദ്ധിച്ചാൽ 3% ങ്ങളുടെ അങ്ങാടിവിലയെത്രയായിരുന്നു? ദല്ലാൾ കമ്മിഷൻ $=\frac{1}{8}\%$.

2. ഇൻഷൂറൻസ് (Insurance).

യന്ത്രങ്ങളുടെ ഉപയോഗം വൎദ്ധിച്ചുവരുന്ന ഈ കാലത്തു അത്യാഹിതങ്ങളും വൎദ്ധിക്കുന്നതുകൊണ്ടു ജീവനും വസ്തുക്കൾക്കും നാശം വരുന്നതു സാധാരണമായി തീൎന്നിരിക്കുന്നു. ഈ നാശങ്ങൾകൊണ്ടുള്ള നഷ്ടപരിഹാരത്തിന്നായി ചെയ്യുന്ന ഏൎപ്പാടിന്നു ഇൻഷൂറൻസ് (insurance) എന്നു പറയുന്നു. ഒരാൾ താൻ പെട്ടെന്നു മരിക്കുന്നതായാൽ തൻെറ അവകാശിക്കു ഒരു നിശ്ചിത സംഖ്യ കിട്ടത്തക്കവണ്ണം കൊല്ലംതോറുമോ വേറെ നിശ്ചയിച്ച കാലാവധിക്കോ ഗഡുക്കളാ (instalments)യി ഒരു സംഖ്യ ഇൻഷൂറൻസ് കമ്പനിയിൽ അടക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യക്ക് ഇൻഷൂറൻസ് വരി (Insurance premium) എന്നു പറയുന്നു. ഇതേപ്രകാരം ആകാശ വിമാനത്തിലോ, കപ്പലിലോ അയക്കുന്ന സാധനങ്ങൾ, അഗ്നിബാധകൊണ്ടു നഷ്ടപ്പെടാവുന്ന വസ്തുക്കൾ, മോട്ടോർ കാർ മുതലായവയുടെ വില തിരിച്ചുകിട്ടത്തക്കവണ്ണം കമ്പനികളിൽ പണം അടക്കാം. ഇങ്ങിനെ പണം അടക്കുന്ന ആളും കമ്പനിയും തമ്മിലുള്ള കരാർ എഴുതീട്ടുള്ള പത്രത്തിന്നു Insurance Policy എന്നു പറയുന്നു. പലതരം നഷ്ടങ്ങളും ആവശ്യങ്ങളും ഉള്ളതുകൊണ്ടു അവക്കു യോജിച്ച കരാറുകളും ഉണ്ടു. മുഖ്യമായ ചിലതിൻെറ പേർ മാത്രം ഇവിടെ പ്രസ്താവിക്കാം. Life, Fire, Marine, Motor, Provident, Educational Endowment, Old Age Endowment, Sickness Endowment എന്നീ ഇൻഷൂറൻസുകൾ ഉണ്ടു. ഇപ്രകാരം തങ്ങൾക്കു വരാവുന്ന നഷ്ടങ്ങൾക്കോ ആവശ്യങ്ങൾക്കോ ആയി കരുതൽ ചെയ്യുന്നതിന്നു ഇൻഷൂർ ചെയ്യുക (insure) എന്നു പറയുന്നു. ഓരോ കമ്പനിയും തങ്ങളുടെ ഇൻഷൂറൻസ് വരി കാണിക്കുന്ന പട്ടികകൾ പ്രസിദ്ധം ചെയ്തുവരുന്നു.

ഒരാൾ മരിച്ചാൽ അയാളുടെ അവകാശിക്കോ അല്ലെങ്കിൽ അയാൾക്കു ഒരു

നിശ്ചിത വയസ്സു പൂർത്തിയാകുമ്പോഴേ 1000ക. കിട്ടത്തക്കവണ്ണം All India General Insurance Companyൽ അടക്കേണ്ടുന്ന സംഖ്യകൾ താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

ഒരു നിശ്ചിത കാലാവധിക്കോ ആൾ അതിന്നു മുമ്പു മരിക്കുന്നതായാൽ അപ്പോഴോ 1000ക. കിട്ടത്തക്കവണ്ണം അടക്കേണ്ടുന്ന കൊല്ലംതോറുമുള്ള വരികൾ.

എനിയത്തെ പിറന്നാളിന്നു വയസ്സ്	അവധി എത്തുമ്പോൾ ആളുടെ വയസ്സ് (കൊല്ലം)											
	65		60		55		50		45		40	
കൊല്ലം	ക.	ണ.	ക.	ണ.	ക.	ണ.	ക.	ണ.	ക.	ണ.	ക.	ണ.
20	28	6	30	7	33	10	38	6	45	7	56	5
21	29	1	31	4	34	10	39	11	47	4	59	5
22	29	13	32	2	35	11	41	1	49	4	62	10
23	30	9	33	1	36	13	42	9	51	8	66	5
24	31	6	34	0	38	1	44	4	54	0	70	6
25	32	4	35	0	39	6	46	1	56	12	74	15
26	33	3	36	1	40	12	48	0	59	12	80	2
27	34	3	37	3	42	4	50	2	63	1	86	2
28	35	3	38	7	43	13	52	7	66	13	93	4
29	36	4	39	13	45	9	54	15	71	0	101	13
30	37	6	41	4	47	7	57	11	75	10	112	3
31	38	9	42	12	49	7	60	11	80	14		
32	39	14	44	6	51	10	64	1	86	15		
33	41	4	46	2	54	0	67	14	94	2		
34	42	12	48	0	56	11	72	3	102	12		
35	44	6	50	0	59	10	77	0	113	3		
36	46	2	52	3	62	14	82	7				
37	47	15	54	9	66	7	88	11				
38	49	14	57	2	70	6	96	0				
39	51	15	59	15	74	12	104	11				
40	54	2	63	0	79	10	115	2				
41	56	8	66	6	85	2						
42	59	1	70	2	91	7						
43	61	15	74	5	98	14						
44	65	0	78	15	107	12						
45	68	6	84	1	118	9						
46	72	1	89	13								
47	76	1	96	6								
48	80	7	104	1								
49	85	5	113	2								
50	90	11	123	15								

ഉദാ: (1) ഒരാൾ ആകാശവിമാനത്തിൽ അയച്ച ആഭരണങ്ങളുടെ വിലയിന്മേൽ $\frac{3}{4}$% വീതം 64ക. 9ണ. ഇൻഷ്വൂറൻസ് വരി അടച്ചുവെങ്കിൽ ആഭരണങ്ങളുടെ വില കാണുക.

വരി $\frac{3}{4}$ക.യാണെങ്കിൽ ആഭരണങ്ങളുടെ വില $=100$ക.

,, 64ക. 9ണ. ,, ,, ,, $= \frac{64\text{ക. }9\text{ണ.}}{12\text{ണ.}} \times 100$ക.

$=8575$ക.

ചിലപ്പോൾ കച്ചവടക്കാർ തങ്ങൾ അടച്ച ഇൻഷ്വൂറൻസ് വരിയും കൂടി തിരിച്ചു കിട്ടത്തക്കവണ്ണം വരി അടക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി 21725ക. വിലക്കുള്ള ചരക്കുകൾ കപ്പൽവഴിയായി അയച്ച ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ താൻ അടക്കുന്ന വരിയും തിരിച്ചുകിട്ടത്തക്കവണ്ണം $1\frac{1}{4}$% വരി അടക്കുന്നതായാൽ വരി ഏതൊരു സംഖ്യയിന്മേൽ അടക്കണം?

വരി $=$ ആകെ സംഖ്യയുടെ $1\frac{1}{4}$%.

∴ ചരക്കുകളുടെ വില $=$,, ,, $98\frac{3}{4}$%

$=21725$ക.

∴ ആകെ സംഖ്യ $= \frac{21725\text{ക.} \times 100}{98\frac{3}{4}}$ക.

$=22000$ക.

അഭ്യാസം 5.

1. പട്ടിക നോക്കി താഴേയുള്ളവ കണക്കാക്കുക:

(*a*) 21 വയസ്സു കഴിഞ്ഞ ഒരാൾക്കു തന്റെ 55-ാം വയസ്സു പൂർത്തിയാകുന്ന ദിവസം 3000ക. കിട്ടുവാൻ അയാൾ കൊല്ലന്തോറും എത്ര പണം അടക്കണം?

(*b*) 30 വയസ്സു പൂർത്തിയായ ഒരാൾ തന്റെ മരണശേഷം തന്റെ അവകാശിക്കോ, തനിയ്ക്കു 65 വയസ്സാകുമ്പോഴോ 2500ക. കിട്ടുവാൻ കൊല്ലന്തോറും ഏതൊരു സംഖ്യ അടക്കണം? അണവരെ കൃത്യമാക്കി എഴുതുക.

(*c*) 40 വയസ്സായ ഒരാൾ തനിക്കു 60 വയസ്സാകുമ്പോൾ 1000ക. കിട്ടുവാൻ ആകെ എത്ര പണം അടക്കണം? ഈ സംഖ്യ തിരിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യയേക്കാൾ എത്ര അധികമാണ്?

(*d*) 27 വയസ്സായ ഒരാൾ തനിക്കു 50 വയസ്സാകുമ്പോഴോ, തന്റെ ഭാര്യക്കു തന്റെ മരണശേഷമോ 4000ക. കിട്ടത്തക്കവണ്ണം മേൽപറഞ്ഞ കമ്പനി

യിൽ പണം അടച്ചിരുന്നു. അയാൾ 36-ാം വയസ്സിൽ മരിച്ചുപോയെങ്കിൽ കമ്പനിക്കു എന്തു നഷ്ടം വരും? (അയാൾ അടച്ച സംഖ്യയിന്മേലുള്ള പലിശ ഗണിക്കേണമെന്നില്ല).

2. 11125ക. വിലയുള്ള ഒരു മോട്ടോർ കാറിന്മേൽ $3\frac{1}{4}\%$ പ്രകാരം ഇൻഷ്യൂറൻസ് വരി കാണുക.

3. ആകാശവിമാനത്തിൽ അയച്ച സാമാനത്തിൻെറ വില 87,500ക.യും അതിൻെറ ഇൻഷ്യൂറൻസ് വരി 656ക. 4ണ.യും ആണെങ്കിൽ വരി വിലയുടെ എത്ര ശ. മാ. ആണ്?

4. ഒരു കെട്ടിടത്തിൻെറ വിലയുടെ $\frac{3}{4}\%$ വീതമുള്ള ഇൻഷ്യൂറൻസ് വരി 289ക. 2ണ. ആണെങ്കിൽ കെട്ടിടത്തിൻെറ വില കാണുക.

5. കപ്പൽമാർഗ്ഗമായി അയച്ച ചരക്കുകളുടെ വിലയുടെ $\frac{2}{3}$ ഭാഗത്തിന്മേൽ $1\frac{1}{8}\%$ വീതം ഇൻഷ്യൂറൻസ് വരിയായി ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ 405ക. അടച്ചു. ചരക്കു നഷ്ടമായതിനാൽ കമ്പനി കരാറുപ്രകാരമുള്ള സംഖ്യ കച്ചവടക്കാരനു കൊടുത്താൽ അയാളുടെ യഥാർത്ഥ നഷ്ടം കാണുക.

6. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ തൻെറ ചരക്കുകളെ $2\frac{3}{4}\%$വീതം 148ക. 8ണ. വരി അടച്ചു ഇൻഷ്യൂർ ചെയ്തു. ചരക്കുകൾ നഷ്ടപ്പെട്ടപ്പോൾ അവയുടെ വിലയും അടച്ചവരിയും തിരിച്ചു കിട്ടിയെങ്കിൽ ചരക്കുകളുടെ വില കാണുക.

7. ഒരാൾ തൻെറ ഗുദാമിലുള്ള സാമാനങ്ങളെ അവയുടെ വിലയും $3\frac{1}{4}\%$ വീതമുള്ള ഇൻഷ്യൂറൻസ് വരിയും തിരിച്ചുകിട്ടത്തക്കവണ്ണം 43850ക.ക്കു ഇൻഷ്യൂർ ചെയ്യുന്നു. എന്നാൽ അടച്ച വരിയെത്ര? സാമാനങ്ങളുടെ വിലയെത്ര?

8. ഒരു ഫിലിം ഉണ്ടാക്കുവാൻ ഒരു കമ്പനിക്കു 73800ക. ചെലവായി. അതു കത്തിപ്പോയാൽ അതിൻെറ വിലയും $1\frac{3}{5}\%$ വീതം അടക്കുന്ന ഇൻഷ്യൂറൻസ്‌വരിയും തിരിച്ചുകിട്ടത്തക്കവണ്ണം അതിനെ ഏതൊരു സംഖ്യക്കു ഇൻഷ്യൂർ ചെയ്യണം?

3. കമ്മിഷൻ (Commission).

മോട്ടോർകാർ, ബൈസിക്കിൾ, റേഡിയോ മുതലായ യന്ത്രങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന കമ്പനിക്കാർ അവയെ നേരിട്ടു പൊതുജനങ്ങൾക്കു വില്ക്കാറില്ല. കാരണം അവ ഒരു രാജ്യത്തിൽ ഉണ്ടാക്കുന്നുവെങ്കിലും മററു രാജ്യങ്ങളിലേക്കു അയച്ച് അവയെ വില്ക്കേണ്ടിവരുന്നു. ഇതിന്നായി അവക്ക് പലസ്ഥല

ങ്ങളിലും വില്പനക്കാർ (sale agents) ആവശ്യമുണ്ടു. ഈ ഏജൻറുമാൎക്ക വിലയുടെ ഏതാനും ഭാഗം പ്രതിഫലമായി കൊടുക്കണം. ഈ പ്രതിഫലത്തെ കമ്മിഷൻ (Commission) എന്നു പറയുന്നു. സാധാരണമായി ഇതു വിലയുടെ ഒരു ശതമാനമായിട്ടാണ് പറയുന്നത്.

ഉദാ: Ford Motor Company ഒരു ഏജൻറിന്നു $7\frac{1}{2}\%$ കമ്മിഷൻ കൊടുക്കുന്നു. എന്നാൽ 12,500ക. വിലയുള്ള ഒരു കാർ വിററാൽ അയാൾക്കു എന്തു കമ്മിഷൻ കിട്ടും?

100ക. മേൽ കമ്മിഷൻ $= 7\frac{1}{2}$ക.

$\therefore$ 12,500ക. ,, ,, $= \frac{12500}{100} \times \frac{15}{2}$ക. $= 937\frac{1}{2}$ക.

അഭ്യാസം 6.

1. ഒരു സൈക്കിൾ ഏജൻറിന്നു വില്പനയിന്മേൽ $3\frac{1}{2}\%$ കമ്മിഷൻ കിട്ടുന്നു. അയാൾ മാസന്തോറും 275ക. വിലയുള്ള 11 സൈക്കിൾ വില്ക്കുന്നുവെങ്കിൽ അയാളുടെ മാസന്തോറുമുള്ള വരവു കാണുക.

2. ഒരു ജന്മി തന്റെ കാൎയ്യസ്ഥന്നു പാട്ടത്തിന്മേൽ $\frac{3}{4}\%$ കമ്മിഷൻ കൊടുക്കുന്നു. 75ക. കമ്മിഷൻ കിട്ടുവാൻ കാൎയ്യസ്ഥൻ എത്ര പാട്ടം പിരിക്കണം?

3. ഒരു റേഡിയോ ഏജൻറ് തന്റെ കമ്മിഷനിൽ പകുതി റൊക്കം വിലക്കു വാങ്ങുന്നവൎക്കു കിഴിവായി കൊടുക്കുന്നു. 375ക. വിലക്കുള്ള ഒരു റേഡിയോ അയാൾ 345ക. റൊക്കം വിലക്കു വില്ക്കുന്നുവെങ്കിൽ കമ്പനി അയാൾക്കു എത്ര ശ. മാ. കമ്മിഷൻ അനുവദിച്ചിരിക്കണം?

4. തനിക്കുള്ള $5\frac{1}{4}\%$ കമ്മിഷൻ കിഴിച്ചു ഒരു ഏജൻറ് സാധനങ്ങളുടെ വിലയായി 615ക. 14ണ. അടക്കുന്നുവെങ്കിൽ സാധനങ്ങളുടെ പരസ്യപ്പെടുത്തിയ വില കാണുക.

5. ഒരു കമ്പനി A എന്നൊരാളെ മാസത്തിൽ 100ക. ശമ്പളവും വില്പനയിന്മേൽ $1\frac{1}{2}\%$ കമ്മിഷനും കൊടുക്കാമെന്ന നിശ്ചയത്തിന്മേൽ ഒരു ഏജൻറായി നിയമിക്കുന്നു. B എന്ന ഏജൻറിന്നു ശമ്പളം ഇല്ലാതെ വില്പനയിന്മേൽ $2\frac{1}{4}\%$ കമ്മിഷൻ അനുവദിക്കുന്നു. ഒരു മാസത്തിൽ ഓരോ ആളും 8500ക.ക്കു സാമാനങ്ങൾ വിററാൽ ആൎക്കാണ് അധികം വരവു? എത്ര?

6. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ വിററ തുണികളുടെ വിവരം താഴെ ചേക്കുന്നു.

	വിററ വാര.	1 വാര തുണിയുടെ വില.	കമ്മിഷൻ.
മിൽ	420	1ക. 14ണ.	$8\frac{1}{3}$.
കൈത്തറി	125	2ക. 10ണ.	15.
വിദേശി	160	3ക. 2ണ.	$12\frac{1}{2}$.

a. ആകെ കിട്ടിയ കമ്മിഷൻ എത്ര?

b. മിൽതുണിയിൽനിന്നു കിട്ടിയത്ര കമ്മിഷൻ കിട്ടുവാൻ (1) കൈത്തറി തുണിയിന്മേൽ എത്ര ശ. മാ. കമ്മിഷൻ കിട്ടണം? (2) വിദേശത്തുണി എത്ര വാരകൂടി വില്ക്കണം?

7. ഒരു മൊത്ത വ്യാപാരി സാധനങ്ങളെ 10% ലാഭത്തിന്നു വില്ക്കുന്നു. ഒരു ചില്ലറവ്യാപാരി അവയെ 15% ലാഭത്തിന്നു വില്ക്കുന്നുവെങ്കിലും തൻെറ വില്പനയിന്മേൽ $4\frac{1}{8}$% കമ്മിഷൻ മൊത്തവ്യാപാരിയിൽനിന്നു വസൂൽചെയ്യുന്നു. എങ്ങിനെ വില്ക്കുന്നതാണ് മൊത്തവ്യാപാരിക്കു അധികം ആദായകരം? അങ്ങിനെ വില്ക്കുന്നതായാൽ 7500ക. മുതലുള്ള സാധനങ്ങളിന്മേൽ എത്ര അധികം ആദായം കിട്ടും?

8. ഒരു മൊത്തവ്യാപാരിയിൽനിന്നു ഒരു സൈക്കിൾ വാങ്ങുമ്പോൾ 20% കമ്മിഷൻ കിട്ടും. ഒരു ചില്ലറവ്യാപാരി തൻെറ വിലയിന്മേൽ 25% കമ്മിഷൻ അനുവദിക്കും. ചില്ലറവ്യാപാരിയുടെ വില മൊത്തവ്യപാരിയുടെ വിലയേക്കാൾ 15% അധികമാണെങ്കിൽ ആരിൽനിന്നു വാങ്ങുന്നതാണ് എനിക്കധികം ആദായകരം? 225ക. മുതലുള്ള ഒരു സൈക്കിൾ ഞാൻ വാങ്ങുന്നതായാൽ എനിക്കു എത്ര പണം ആദായപ്പെടുത്താം?

4. നികുതികൾ (Taxes).

ഗവമ്മെണ്ടു, മുനിസിപ്പാലിററി മുതലായവയുടെ ഭരണച്ചെലവു നിവ്വഹിക്കുന്നതു പൊതുജനങ്ങളിൽനിന്നു പിരിക്കുന്ന നികുതികളിൽനിന്നാണ്. കേന്ദ്രഗവമ്മെണ്ടിൻെറ നികുതികളിൽ മുഖ്യമായവ ആദായനികുതിയും എക്സൈസ് നികുതിയുമാണ്. സംസ്ഥാനഗവമ്മെണ്ടുകൾ നിലനികുതി വ്യാപാരനികുതി മുതലായവ പിരിക്കുന്നു. മുനിസിപ്പാലിററികൾ വീട്ടുനികുതി തൊഴിൽ നികുതി, വാഹനനികുതി മുതലായവ പിരിക്കുന്നു.

ഒരാളുടെ ഒട്ടാകെ വരവി (Gross Income) ൽനിന്നു നികുതികളും മററു ചെലവുകളും കിഴിച്ചു ബാക്കിയാകുന്ന വരവിനെ അയാളുടെ അസ്സൽ വരവു (Net income) എന്നു പറയുന്നു.

ആദായനികുതി സംബന്ധിച്ചുള്ള നിബന്ധനകൾ കൊല്ലന്തോറും മാറുന്നതുകൊണ്ടും നിരക്കുകൾ പല ഉപാധികൾക്കധീനപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതുകൊണ്ടും അതു കണക്കാക്കുന്ന ക്രമം ഇവിടെ ചേർക്കുന്നില്ല.

വീട്ടുനികുതി വാടകയുടെ ഒരു ശതമാനമായും തൊഴിൽനികുതി ഉറുപ്പികക്കു ഇത്ര പൈ എന്നും വാഹനനികുതി അരക്കൊല്ലത്തേക്കു ഇത്രയെന്നും ആണ് പറയാറുള്ളതു. വിവിധ മുനിസിപ്പാലിററികളിൽ പലവിധ നിരക്കുകൾ നടപ്പിലുള്ളതുകൊണ്ടു പൊതുവിൽ ഉപയോഗിക്കാവുന്ന ചില ക്രമങ്ങൾ അനുസരിച്ചുള്ള അഭ്യാസങ്ങൾ മാത്രമേ ഈ പുസ്തകത്തിൽ ചേർത്തിട്ടുള്ളു.

ഉദാഃ (1) ഒരാൾ അടക്കുന്ന നികുതികൾ ഉറുപ്പികക്കു 1ണ. 2പ. വീതം വരുന്നു. നികുതികൾ കിഴിച്ചുള്ള അസ്സൽ വരവു 400ക. 8ണ. ആണെങ്കിൽ അയാളുടെ ഒട്ടാകെ വരവെത്ര?

1ക.യിൽ നികുതി കഴിച്ചുള്ള വരവു = 14ണ. 10പ.

14ണ. 10പ. അസ്സൽ വരവുണ്ടെങ്കിൽ

ഒട്ടാകെ വരവു = 1ക.

$$\therefore 400\text{ക. }8\text{ണ. } \ldots = \frac{16}{14\frac{5}{6}} \times 400\tfrac{1}{2}\text{ക.}$$

$$= \underline{\underline{432\text{ക.}}}$$

അഭ്യാസം 7.

1. ഒരു റേഡിയോവിൻെറ വില 375ക. വില്പനനികുതി 1ക.ക്കു 6പ. എന്നാൽ അതിൻെറ ഒട്ടാകെ വില കാണുക.

2. ബിൽ തയ്യാറാക്കുക:—

ഡജന്നു 2ക. 1ണ. പ്രകാരം 40 നോട്ടുപുസ്തകം. ഗ്രോസ്സിന്നു 17ക. 4ണ. പ്രകാരം $1\frac{1}{2}$ ഗ്രോസ്സു പെൻസിൽ. റീമിന്നു 10ക. 6ണ. പ്രകാരം $5\frac{1}{2}$ റീം കടലാസ്സു. വില്പനനികുതി 1ക.ക്കു 3പ.

3. ഒരു മുനിസിപ്പാലിററിയിലെ വീട്ടുനികുതി വാടകയുടെ $7\frac{1}{2}\%$ ആണ്. ഒരു വീട്ടുടമസ്ഥൻ അരക്കൊല്ലത്തേക്കു 168ക. 12ണ. വീട്ടുനികുതി കൊടുക്കുന്നെങ്കിൽ 1 മാസത്തിൽ അയാൾ പിരിക്കുന്ന വാടക കണക്കാക്കുക.

4. ഒരു സ്കൂൾ ലൈബ്രെറിയിലേക്കു കുറെ പുസ്തകങ്ങൾ വാങ്ങി. വില്പനനികുതി 1ക.ക്കു 3പ. വീതം കൊടുത്തതിനാൽ ആകെ വില 429ക. 9ണ. 9പ. ആയാൽ പുസ്തകങ്ങളുടെ അസ്സൽ വില കാണുക.

5. ഒരു ഉദ്യോഗസ്ഥൻെറ നികുതികൾ ഉറുപ്പികക്കു 1ണ. 10പ. വീതം വരുന്നു. അയാളുടെ ഒരു കൊല്ലത്തെ നികുതി 467ക. 8ണ. ആണെങ്കിൽ അയാളുടെ മാസാന്തര ശമ്പളം കാണുക.

6. ചില വിശേഷ സാമാനങ്ങളിൻമേൽ കേന്ദ്രഗവമ്മെണ്ടു $27\frac{1}{2}\%$ നികുതി പിരിക്കുന്നു. ഒരു കച്ചവടക്കാരന്നു നികുതിയടക്കം 1912ക. 8ണ. വിലയായ സാമാനങ്ങളിന്മേൽ അയാൾ എത്ര നികുതി അടച്ചിരിക്കും?

7. മാസത്തിൽ 350ക. ശമ്പളമുള്ള ഒരു ഉദ്യോഗസ്ഥന്നു കൊല്ലത്തിൽ നികുതി കഴിച്ചുള്ള അസ്സൽ വരവു 3871ക. 14ണ. ആണെങ്കിൽ അയാൾ 1ക.ക്കു എത്ര വീതം നികുതി കൊടുക്കുന്നു?

5. ദീപാളി (Bankruptcy).

തൻെറ കടം മുഴുവൻ വീട്ടുവാൻ കഴിയാത്ത ആളെ ഒരു ദീപാളി (bankrupt) എന്നു പറയുന്നു. ഒരു കമ്പനിയുടേയോ ഒരു കച്ചവടക്കാരൻേറയോ മുതൽ (assets) ആകെ കടത്തേക്കാൾ കുറവാകുമ്പോൾ കടക്കാൎക്കു തങ്ങളുടെ കടത്തിൻെറ ഏതാനും ഭാഗം മാത്രമേ കിട്ടുകയുള്ളൂ. ഇതു സാധാരണമായി ഉറുപ്പികക്കു ഇത്ര അണവീതം എന്നാണു് കണക്കാക്കാറുള്ളതു്. ഇതിനെ ഓഹരി വീതം (dividend) എന്നു പറയുന്നു. ഒരു വലിയ കച്ചവടക്കാരൻ ദീപാളിയായാൽ ചിലപ്പോൾ ഗവമ്മേണ്ടു കടക്കാരുടെ ആവശ്യപ്രകാരം അയാളുടെ സ്വത്തു വിററു കടം തീൎപ്പാൻ ഒരു കാൎയ്യക്കാരനെ (Official receiver) നിയമിക്കുന്നു.

ഒരു കച്ചവടക്കാരന്നു 36000ക. കടവും 24000ക. വിലക്കുള്ള സ്വത്തും ഉണ്ടെന്നു വിചാരിക്കുക. കാൎയ്യക്കാരൻെറ ചെലവു 1500ക.യാണെങ്കിൽ വീതിക്കുവാനുള്ള സംഖ്യ = 22500ക.

∴ 1ക. കടത്തിന്മേൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ $= \frac{22500}{36000}$ക. $= \frac{5}{8}$ക.

$= 10$ണ

അഭ്യാസം 8.

1. 57,500ക. കടമുള്ള ഒരു വ്യാപാരിയുടെ കടക്കാർക്ക് ഉറുപ്പികക്കു 11ണ. 7പ. വീതം തിരിച്ചുകിട്ടിയെങ്കിൽ അയാളുടെ മുതലിൻെറ വില കാണുക.

2. ഒരു ബേങ്കിൻെറ കടം 2,10,000ക.യും സ്വത്തിൻെറ വില 87,500ക.യും ആണെങ്കിൽ കടക്കാർക്ക് 1ക.ക്കു എത്ര വീതം തിരിച്ചു കിട്ടും?

3. ഒരു മോട്ടോർ കമ്പനിയുടെ സ്വത്തുകൾ 1,75,726ക.ക്കു വിററതിനാൽ കടക്കാർക്ക് ഉറുപ്പികക്കു 13ണ. 8പ. വീതം കിട്ടിയെങ്കിൽ കമ്പനിയുടെ ആകെ കടമെത്രയായിരുന്നു? 5,000ക. കടം കൊടുത്ത ഒരാൾക്കു എത്ര നഷ്ടം വന്നു?

4. ഒരു ബേങ്കിൻെറ കെട്ടിടങ്ങളുടെ വില: 75,000ക. റൊക്കം പണം: 92,545ക. പുറമെനിന്നു ഈടാക്കിയ കടങ്ങൾ: 53,742ക. ഗവമ്മേണ്ടു നിശ്ചയിച്ച കാൎയ്യക്കാരൻെറ ശമ്പളവും മററുചെലവുകളും 8,387ക.യും ആകെ കടം 6,20,800ക.യും ആണെങ്കിൽ കടക്കാർക്ക് 1ക.മേൽ എത്ര വീതം തിരിച്ചു കിട്ടും?

5. ഒരു ദീപാളിക്കു 9750ക. വിലക്കുള്ള സാമാനങ്ങൾ ഉണ്ടു. അവ ആ വിലക്കുതന്നെ വില്ക്കുന്നതായാൽ കടക്കാർക്ക് ഉറുപ്പികക്കു 13ണ. വീതം കിട്ടും. എങ്കിലും അവയുടെ $\frac{2}{5}$ ഭാഗം മുതലിൽ $17\frac{1}{2}\%$ഉം, ബാക്കി $23\frac{3}{4}\%$ കുറച്ചു വില്ക്കേണ്ടിവന്നാൽ കടക്കാർക്ക് ഉറുപ്പികക്കു എത്ര വീതം കിട്ടും?

(Bom. Matric 1878)

6. 5,700ക. വിലക്കു മുതലുള്ള ഒരു ദീപാളി തൻെറ കടക്കാർക്ക് ഉറുപ്പികക്കു 7ണ. 6പ. വീതം കൊടുക്കാമെന്നു കണക്കാക്കി. ഒരു കടവുംകൂടി വെളിപ്പെട്ടതിനാൽ ഉറുപ്പികക്കു 6ണ. 4പ. വീതംമാത്രം കൊടുപ്പാൻ സാധിച്ചുവെങ്കിൽ പുതിയ കടം എത്രയാണ്?

7. ഒരു ദീപാളികുളിച്ചയാൾക്കു 480ക. കടമുണ്ടായിരുന്നു. അയാൾ ഉറുപ്പികക്കു 9ണ. 6പ. വീതം കൊടുത്തു. കുറച്ചുകഴിഞ്ഞപ്പോൾ അയാളുടെ സ്ഥിതി നന്നാവുകയും അയാൾ ബാക്കിയുണ്ടായിരുന്ന കടത്തിന്മേൽ 5ണ. 4പ. വീതം വീണ്ടും കൊടുക്കുകയും ചെയ്തു. അയാൾ ആകെ കൊടുത്തുതീൎത്ത സംഖ്യ എത്രയാണ്? രണ്ടു തവണയായി കൊടുത്തതു കൂട്ടിയാൽ ആകെയുണ്ടായിരുന്ന കടത്തിന്മേൽ ഉറുപ്പികക്കു എത്ര വീതമായി?

(Oct. 1948)

8. ഒരു പാപ്പർപുള്ളിയുടെ സ്വത്തിൽനിന്നു 4,500ക. കിട്ടുകയും, ആ പണത്തിൽനിന്നു $2\frac{1}{2}\%$ പിരിച്ചെടുത്ത ചെലവിലേക്കു കൊടുക്കുകയും ചെയ്തു. പാപ്പർപുള്ളിയുടെ കടം 7,020ക.യാണെങ്കിൽ അയാളുടെ കടക്കാർക്ക് ഉറുപ്പികക്കു എന്തു വീതം കിട്ടുമെന്നു കാണുക.

(Oct. 1949)

9. 1545ക. മുതലുള്ള ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ തൻെറ കടത്തിൻെറ $\frac{1}{3}$ന്മേൽ ഉറുപ്പികക്കു 10ണ. 3പ. വീതവും ബാക്കിയിന്മേൽ 7ണ. 9പ. വീതവും കൊടുത്തുവെങ്കിൽ അയാളുടെ ആകെ കടം കാണുക.

10. ഒരു ദീപാളിക്കു കിട്ടുവാനുള്ള സംഖ്യ അയാളുടെ കടത്തിന്നു സമമാണ്. ഇതിൽ 2000ക.മേൽ 11ണ. വീതമേ അയാൾക്കു കിട്ടിയുള്ളു. ഇതു പിരിക്കുവാൻ 100ക. ചെലവാകുകയും ചെയ്തു. തൻെറ കടക്കാൎക്കു 13ണ. 6പ. വീതം കൊടുക്കുവാൻ കഴിഞ്ഞെങ്കിൽ അയാളുടെ കടമെത്രയായിരുന്നു?

അദ്ധ്യായം 4.

കൂട്ടുപലിശ (Compound Interest).

നിങ്ങൾ ഒരു ബേങ്കിലോ മററൊ പണം സൂക്ഷിക്കുന്നതായാൽ ഒരു കൊല്ലം അവസാനിക്കുമ്പോൾ ബേങ്കുടമസ്ഥന്മാർ അവർ നിശ്ചയിച്ച നിരക്കനുസരിച്ചു നിങ്ങൾക്കു പലിശ തരുന്നതാണ്. നിങ്ങൾ പലിശ വാങ്ങാതെ ബേങ്കിൽതന്നെ സൂക്ഷിക്കുന്ന പക്ഷം അതു മുതലിനോടു കൂട്ടി രണ്ടുംകൂടി പുതിയ കൊല്ലത്തെ മുതലായി കരുതുന്നു. ഇങ്ങിനെ പലിശ കൂട്ടി കിട്ടുന്ന മുതലിന്മേലുള്ള പലിശക്കു കൂട്ടുപലിശ അല്ലെങ്കിൽ പലിശക്കു പലിശ (Compound Interest) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരാൾ 5% പലിശക്കു ഒരു ബേങ്കിൽനിന്നു 100ക. കടം വാങ്ങുന്നുവെന്നു വിചാരിക്കുക. ഒരു കൊല്ലത്തിൻെറ ഒടുവിൽ അയാൾ ബേങ്കിൽ 5ക. പലിശ അടക്കണം. അടക്കാത്തപക്ഷം പുതിയ കൊല്ലത്തെ മുതൽ 100ക.യും അതിന്മേൽ 1 കൊല്ലത്തെ പലിശയായ 5ക.യും കൂടി 105ക. ആയിത്തീരുന്നു. 2-ാം കൊല്ലത്തെ പലിശ 105ക. മേലാണ് കണക്കാക്കുന്നതു്.

∴ 2-ാം കൊല്ലത്തെ പലിശ $=105\times\frac{5}{100}$ക.$=5\frac{1}{4}$ക.

∴ 2 കൊല്ലങ്ങളിലെ കൂട്ടുപലിശ$=(5+5\frac{1}{4})$ക.$=10\frac{1}{4}$ക.

കൂട്ടപലിശ കാണുന്ന വഴി താഴേ ചേക്കുന്നു.

1-ാം കൊല്ലത്തെ മുതൽ = 100ക.
,, ,, പലിശ = 5ക.

2-ാം കൊല്ലത്തെ മുതൽ = 105ക.
,, ,, പലിശ = 5·25 ക.

∴ 2-ാം കൊല്ലത്തിൻെറ ഒടുവിൽ
പലിശയടക്കം മുതൽ = 110·25ക.

∴ കൂട്ടപലിശ=$(110\frac{1}{4}-100)$ക.=10ക. 4ണ.

∴ കൂട്ടപലിശയും സാധാരണ പലിശയും
തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം=10ക. 4ണ.—10ക.=4ണ.

ബേങ്കുകളിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്ന പണത്തിന്മേൽ സാധാരണമായി അരക്കൊല്ലംതോറും പലിശ കൂട്ടുന്നതാണ്. ഉദാഹരണമായി ഒരാൾ 625ക. 4% പലിശ പ്രകാരം ഒരു ബേങ്കിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നുവെന്ന് വിചാരിക്കുക. ഒരു കൊല്ലത്തിൻെറ ഒടുവിൽ അയാൾക്കു കിട്ടേണ്ടുന്ന സംഖ്യ താഴേ ചേൎത്ത പ്രകാരം കണക്കാക്കുന്നു.

1 കൊല്ലത്തെ പലിശ 4% ആയതുകൊണ്ട്
അരക്കൊല്ലത്തെ പലിശ = 2%.

ക.
1-ാമത്തെ അരക്കൊല്ലത്തെ മുതൽ = 625.
,, ,, പലിശ (2%) = 12·5

2-ാമത്തെ അരക്കൊല്ലത്തെ മുതൽ = 637·5
,, ,, പലിശ = 12·75

∴1 കൊല്ലത്തിൻെറ ഒടുവിൽ പലിശ
യടക്കം മുതൽ = 650·25

∴കൂട്ടപലിശ = 650ക. 4ണ. — 625ക. = 25ക. 4ണ.

ഈ കണക്കിലെപ്പോലെ കൊല്ലത്തിൽ 4% പ്രകാരം അരക്കൊല്ലന്തോറും പലിശ കൂട്ടുന്നതായാൽ അതു 4·04% ആണെന്നു കാണാം. ഇതിനെ യഥാൎത്ഥപലിശ നിരക്ക (Effective rate) എന്നു പറയാം.

പലിശയുടെ വീതം 100ൻെറ നിശ്ശേഷഹാരകമായി (Aliquot Part) മാററാവുന്നതാണെങ്കിൽ, ഉദാഹരണമായി

10%, 5%, $12\frac{1}{2}$%, $6\frac{1}{4}$%...... ആണെങ്കിൽ പലിശ എളുപ്പത്തിൽ കാണാം.

പലിശയുടെ വീതം 16 വരെയുള്ള ഏതെങ്കിലും പൂൎണ്ണസംഖ്യയാണെങ്കിൽ മുതലിനെ 100കൊണ്ടു മനസ്സിൽ ഹരിച്ച വീതത്തെ കുറിക്കുന്ന സംഖ്യകൊണ്ടു പെരുക്കി പലിശ കാണാം.

പലിശവീതം $7\frac{1}{2}$, 15, $13\frac{3}{4}$, $17\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{4}$ ...... എന്നിങ്ങനെയുള്ള സംഖ്യകളാകുമ്പോൾ അവയെ 100ൻെറ നിശ്ശേഷഹാരകങ്ങളായി പിരിക്കേണ്ടതാണ്.

ഉദാഹരണമായി, $7\frac{1}{2}$% = 5% + $2\frac{1}{2}$%.

$= \frac{1}{20} + \frac{1}{20}$ൻെറ $\frac{1}{2}$.

മുതൽ എപ്പോഴും മുഴു ഉറുപ്പികയോ, പവനോ ആയിരിക്കണമെന്നില്ല. അപ്പോൾ സംഖ്യയെ ഉറുപ്പികയുടെ ദശാംശഭിന്നിതമായി മാററണം. പലിശ പൈവരെയോ, പെനിവരെയോ കൃത്യമായി കാണേണ്ടതുകൊണ്ടു ഉത്തരം 3 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായിരിക്കണം. ഇതിന്നായി ഓരോ വരിയിലും സംഖ്യ 4 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക. ഒടുവിലത്തെ ഉത്തരത്തെ 3 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി എഴുതുക.

ഒരു സ്കൂളിലെ ഒരു വിനോദപ്രദൎശനത്തിൽനിന്നു പിരിഞ്ഞുകിട്ടിയ 720ക. 2ണ. 3% പലിശകൊടുക്കുന്ന ഒരു ബേങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ചാൽ 1 കൊല്ലത്തിൻെറ ഒടുവിൽ അതെത്രയായിത്തീരുമെന്നു കാണുക. ക.

1-ാമത്തെ അരക്കൊല്ലത്തെ മുതൽ			= 720·125
,, ,,	പലിശ	1% =	7·2013
		$\frac{1}{2}$% =	3·6006
2-ാമത്തെ അരക്കൊല്ലത്തെ മുതൽ			= 730·9269
,, ,,	പലിശ	1% =	7·3093
		$\frac{1}{2}$% =	3·6547
1 കൊല്ലത്തിൻെറ ഒടുവിൽ പലിശ			
		യടക്കം മുതൽ =	741·8909

741·891ക. (3 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യം)
= 741ക. 14ണ. 3പ.

പലിശ കാണാൻ ഒരു സൂത്രം ഉപയോഗിക്കാം:—

മുതൽ Pക.യും പലിശനിരക്കു r%വും പലിശയടക്കം മുതൽ Aക.യും ആണെന്നു വിചാരിക്കുക. എന്നാൽ ഓരോ കൊല്ലവും പലിശയടക്കം മുതൽ കൊല്ലാരംഭത്തിലുള്ള മുതലിൻെറ $(1+\frac{r}{100})$ ഇരട്ടിയാണെന്നതു വ്യക്തമാണല്ലോ.

∴ 1-ാം കൊല്ലത്തിൻെറ ഒടുവിലുള്ള പലിശയടക്കം മുതൽ$=P(1+\frac{r}{100})$ക.

ഇതേപ്രകാരം 2-ാം കൊല്ലത്തിൻെറ ഒടുവിലുള്ള പലിശയടക്കം മുതൽ

$$=P(1+\frac{r}{100})(1+\frac{r}{100})$$

$$=P(1+\frac{r}{100})^2$$

ഈ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു 420ക.ക്കു $2\frac{1}{2}$% വീതം 2 കൊല്ലത്തേക്കുള്ള പലിശ കാണുക.

$$A=P(1+\frac{r}{100})^2=420(1+\frac{2\frac{1}{2}}{100})^2$$

$$=420\times\tfrac{41}{40}\times\tfrac{41}{40}=441{\cdot}2625$$

∴ പലിശയടക്കം മുതൽ = 441ക. 4ണ. 2പ. (പൈവരെ കൃത്യം).

പലിശ നേരിട്ടു കണ്ടു ഈ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

പലിശക്കു പലിശ കൂട്ടുന്നക്രമം (Compound Interest Law) അനുസരിച്ചു വദ്ധിക്കുകയോ കുറയുകയോ ചെയ്യുന്ന എല്ലാ സംഖ്യകളുടേയും വില മേൽപറഞ്ഞ ഉദാഹരണങ്ങളിലെപ്പോലെ ഗണിക്കാവുന്നതാണ്.

ഒരു മോട്ടോർകാറിൻെറ വില കൊല്ലംതോറും 15% കുറയുന്നെങ്കിൽ ഇപ്പോൾ 11,275ക. വിലയുള്ള ഒരു കാറിന്നു 2 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ എന്തു വിലയുണ്ടാകും?

	ക. ണ. പ.
ഇപ്പോഴത്തെ വില	= 11,275 – 0 – 0
ഒന്നാം കൊല്ലത്തിലെ കുറവു(15%)	= 1,691 – 4 – 0
2-ാം കൊല്ലാരംഭത്തിലെ വില	= 9583 – 12 – 0
,, കൊല്ലത്തിലെ കുറവു	= 1437 – 9 – 0
2-ാം കൊല്ലത്തിൻെറ ഒടുവിലുള്ള വില	= 8146 – 3 – 0

സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു ഈ കണക്കു ചെയ്യുമ്പോൾ 2 കൊല്ലത്തിൻെറ ഒടുവിലുള്ള വില $=11275(1-\frac{15}{100})^2$ക. എന്നു എഴുതണം.

അഭ്യാസം 9.

1. താഴേ പറയുന്ന സംഖ്യകളുടെ നേരെ എഴുതീട്ടുള്ള നിരക്കുപ്രകാരം കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്നതായാൽ അവ 2 കൊല്ലത്തിൻെറ ഒടുവിൽ എത്രയായി ത്തീരുമെന്നു ഗണിക്കുക. സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(*a*) 875ക. 5%. (*b*) 240ക. $6\frac{1}{4}$%.
(*c*) 117ക. 3ണ. 4%. (*d*) 175ക. $2\frac{1}{2}$%.
(*e*) 1250ക. $3\frac{1}{2}$%.

2. താഴേ പറയുന്ന നിരക്കുപ്രകാരം കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്നതായാൽ ഒരു സംഖ്യയെ എത്രകൊണ്ടു പെരുക്കിയാൽ 2 കൊല്ലത്തിൻെറ ഒടുവിലുള്ള പലിശയടക്കം മുതൽ കാണാം?

(*a*) 5%. (*b*) $6\frac{1}{4}$%. (*c*) 4%. (*d*) 3%. (*e*) $3\frac{3}{4}$%.

ഈ വഴി ഉപയോഗിച്ചു 10000ക. മേൽ 2 കൊല്ലത്തെ കൂട്ടുപലിശ കാണുക. നേരിട്ടു പലിശ കണ്ടു ഓരോ ഉത്തരവും ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

3. ഒരാൾ 8500ക. 5% സാധാരണ പലിശക്കു കടംവാങ്ങിയു ഉടനെ അതേ നിരക്കിന്നു 2 കൊല്ലത്തേക്കു കൂട്ടുപലിശക്കു കടം കൊടുത്താൽ അയാൾക്കു എത്ര ആദായം കിട്ടും?

4. 2 കൊല്ലത്തേക്കുള്ള കൂട്ടുപലിശ പൈവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

(*a*) 126ക.ക്കു 5% പ്രകാരം.

(*b*) 4500ക.ക്ക $4\frac{1}{4}\%$ പ്രകാരം.

(*c*) 710ക.ക്ക $7\frac{1}{2}\%$ പ്രകാരം.

(*d*) 561ക. 2ണ.ക്ക $7\frac{1}{2}\%$ പ്രകാരം.

5. 2 കൊല്ലത്തേക്കുള്ള സാധാരണ പലിശയും കൂട്ടുപലിശയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം പൈവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

(*a*) 225ക.ക്ക 4% പ്രകാരം.

(*b*) 250ക.ക്ക $4\frac{1}{2}\%$ പ്രകാരം.

(*c*) 1256ക. 8ണ.ക്ക 3% പ്രകാരം.

6. ഒരു ബേങ്ക് അരക്കൊല്ലംതോറും പലിശ മുതലിനോടു കൂട്ടുന്നുവെങ്കിൽ താഴേ പറയുന്ന സംഖ്യകളിന്മേൽ അവസ്സു നേരെ എഴുതിയ നിരക്കു പ്രകാരം 1 കൊല്ലത്തേക്കുള്ള കൂട്ടുപലിശ കാണുക. ഓരോ സംഖ്യയിന്മേലുമുള്ള കൂട്ടുപലിശ സാധാരണ പലിശയെക്കാൾ എത്ര അധികമാണ്? പൈവരെ കൃത്യമായി എഴുതുക.

(*a*) 488ക. 12ണ. 4%. (*b*) 712ക. 8ണ. 3%.

(*c*) 143ക. 4ണ. 6പ. $2\frac{1}{2}\%$. (*d*) 187ക. 14ണ. 3പ. $3\frac{1}{2}\%$.

7. ഒരു നഗരത്തിൽ 137325 ജനങ്ങളുണ്ടു. ഒരു കൊല്ലത്തിൽ ജനസംഖ്യയുടെ $2\frac{1}{2}\%$ ജനനവും $1\frac{3}{4}\%$ മരണവുമുണ്ടെങ്കിൽ 2 കൊല്ലത്തിന്റെ ഒടുവിൽ ഉണ്ടാവുന്ന ജനസംഖ്യ പൂർണ്ണസംഖ്യവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

8. 1951ലെ കാനേഷുമാരി പ്രകാരം ഇന്ത്യയിലെ ജനസംഖ്യ 3618 ലക്ഷമാണ്. ജനസംഖ്യ 10 കൊല്ലത്തിൽ 13% വീതം വർദ്ധിക്കുമെന്നു പ്രതീക്ഷിക്കപ്പെടുന്നു. ഈ തോതിൽ ജനസംഖ്യ വർദ്ധിക്കുന്നതായാൽ 1971ലെ ജനസംഖ്യ എത്രയായിരിക്കും? ആയിരംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

9. ചില വസ്തുക്കളുടെ ഇപ്പോഴുള്ള വിലയും കൊല്ലന്തോറും വിലയിലുള്ള കുറവും താഴെ കൊടുത്തിട്ടുണ്ടു. 2 കൊല്ലത്തിന്റെ ശേഷം ഓരോന്നിന്റേയും വില എത്രയായിരിക്കും? അണവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

	വില (ക.)	കുറവു (%)
School building	18800	4
Motor Bus	12750	12
Radio	925	$17\frac{1}{2}$
Typewriter	635	8

10. ഒരാൾ 4500ക. കൊല്ലത്തിൽ 5% പ്രകാരം കൂട്ടുപലിശക്കു കടം വാങ്ങുന്നു. ഒന്നാം കൊല്ലാവസാനത്തിൽ അയാൾ മുതലും പലിശയും വകയായി 2000ക. മടക്കികൊടുക്കുകയും രണ്ടാം കൊല്ലത്തിന്റെ അവസാനത്തിൽ ശേ

ക്ഷിച്ച കടം തീക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. രണ്ടാം കൊല്ലാവസാനത്തിൽ അയാൾ എത്ര സംഖ്യ മടക്കിക്കൊടുത്തിരിക്കണം? (1946)

11. ഒരു സവ്വകലാശാലയിൽ ആദായം നിവേതനങ്ങളായും സമ്മാനങ്ങളായും കൊടുക്കുവാനുള്ള $3\frac{1}{2}$ ലക്ഷം ക. ധനം കൊല്ലത്തിൽ $3\frac{1}{2}\%$ വീതം കൂട്ടുപലിശ കൊടുക്കുന്ന നിലയിൽ ഒരു ബേങ്കിൽ സൂക്ഷിച്ചിരിക്കുന്നു. ഓരോ കൊല്ലാവസാനത്തിലും ബേങ്കിൽനിന്നു സവ്വകലാശാല 10000ക. വീതം തിരിച്ചെടുക്കുന്നു. 2 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞ തിയ്യതിക്കു സവ്വകലാശാലയുടെ പേരിൽ എത്ര സംഖ്യയുണ്ടായിരിക്കും? (Oct. 1948)

12. 6 മാസന്തോറും പലിശ മുതലിനോടു കൂട്ടുന്നതായാൽ താഴേ പറയുന്ന നിരക്കുകളുടെ കൊല്ലത്തിലെ യഥാത്ഥ പലിശനിരക്കു (Effective rate) കാണുക.

(*a*) 10%   (*b*) 6%.   (*c*) 5%.   (*d*) 3%.

13. കൂട്ടുപലിശ പൈവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

(*a*) $1\frac{1}{2}$ കൊല്ലത്തേക്കു.

1. 6241ക. 12ണ. മേൽ $4\frac{1}{2}\%$ പ്രകാരം.
2. 3732ക. 8ണ. ,, $3\frac{1}{2}\%$,,
3. 1040ക. 10ണ. ,, $2\frac{1}{2}\%$,, .

(*b*) $1\frac{1}{4}$ കൊല്ലത്തേക്കു.

1. 173ക. 14ണ. മേൽ 4% പ്രകാരം.
2. 209ക. 9ണ. ,, 3% ,, .

(*c*) 1. 309ക. 11ണ. ,, $2\frac{1}{2}\%$,, 1കൊ. 2 മാസത്തേക്കു.
 2. 87ക. 3ണ. ,, $3\frac{3}{4}\%$,, 1കൊ. 5 മാസത്തേക്കു.

14. സാധാരണമായി ബേങ്കുകളിൽ ജൂൺ 30-ാംനു-യും ഡിസെമ്പർ 31-ാംനു-യും പലിശ മുതലിനോടു കൂട്ടുന്നു.

(*a*) എന്റെ പേരിൽ 1950 ജനുവരി 1-ാംനു- ഒരു ബേങ്കിൽ 594ക. 15ണ. ഉണ്ടായിരുന്നു. അതേ കൊല്ലം ഒക്ടോബർ 1-ാംനു- ഞാൻ പണം തിരിച്ചെടുത്തു. എന്നാൽ എനിക്കു കിട്ടിയ സംഖ്യ പൈവരെ കൃത്യമായി കാണുക. പലിശ നിരക്കു 3%.

(*b*) ഒരു വായനശാലയുടെ പേരിൽ 1950 ജൂലായി 1-ാംനു- ഒരു ബേങ്കിൽ 407ക. 7ണ. ഉണ്ടായിരുന്നു. 1951 ഫെബ്രുവരി 28-ാംനു- പണം തിരിച്ചെടുത്തെങ്കിൽ വായനശാലക്കു കിട്ടിയ സംഖ്യ അണവരെ കൃത്യമായി കാണുക. പലിശനിരക്കു $2\frac{1}{2}\%$.

അദ്ധ്യായം 5.

വർഗ്ഗമൂലം (Square Root).

$3\times 3=3^2=9$. ഒരു സംഖ്യയെ അതിനെക്കൊണ്ടുതന്നെ പെരുക്കി കിട്ടുന്ന ഗുണനഫലത്തെ ആ സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗം (square) എന്നും സംഖ്യയെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം (Square Root) എന്നും പറയുന്നു. 9, 3ന്റെ വർഗ്ഗവും, 3, 9ന്റെ വർഗ്ഗമൂലവുമാണ്. വർഗ്ഗമൂലത്തെ $\sqrt{}$ എന്ന അടയാളംകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി $\sqrt{36}$, 36ന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $\therefore \sqrt{36}=6$. $\sqrt{n^2}=n$.

1 മുതൽ 9 വരെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളെ പരിശോധിക്കുന്നതായാൽ അവയുടെ ഒടുവിലത്തെ അക്കങ്ങൾ 1, 4, 5, 6, 9 ആണെന്നു കാണാം. അതിനാൽ യാതൊരു സംഖ്യയുടേയും വർഗ്ഗം 2, 3, 7, 8 എന്ന അക്കങ്ങളിൽ അവസാനിക്കുന്നതല്ലെന്നു തെളിയുന്നു. 10ന്റെ വർഗ്ഗം 100 ആയതുകൊണ്ടു ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തിന്റെ ഒടുവിലുള്ള പൂജ്യങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇരട്ടയായിരിക്കണമെന്നു സ്പഷ്ടമാകുന്നു.

$7\times 7=49$. $\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{16}{25}$. $\cdot 2\times\cdot 2=\cdot 04$.

49, $\frac{16}{25}$, ·04 എന്നീ സംഖ്യകൾ ഒരു സംഖ്യയെ അതേ സംഖ്യകൊണ്ടു പെരുക്കി കിട്ടുന്ന ഗുണനഫലങ്ങളാകുന്നു; അതായതു അവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കൃത്യമായി നിർണ്ണയിപ്പാൻ സാധിക്കുന്നതാണ്. ഇങ്ങിനെ കൃത്യമായി വർഗ്ഗമൂലം നിർണ്ണയിപ്പാൻ കഴിയാത്ത അനേകം സംഖ്യകളുണ്ടു്. ഉദാഹരണമായി 2 എന്ന സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം ഇത്രയെന്നു നമുക്കു കൃത്യമായി പറവാൻ സാധിക്കുന്നതല്ല. കാരണം നാം അറിയുന്ന യാതൊരു സംഖ്യയേയും അതുകൊണ്ടുതന്നെ പെരുക്കിയാൽ 2 ഗുണനഫലമായി കിട്ടുന്നതല്ല.

ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലത്തെ കൃത്യമായി നിശ്ചയിപ്പാൻ സാധിക്കുന്നതാണെങ്കിൽ ആ സംഖ്യയെ ഒരു കൃത്യവർഗ്ഗം (Perfect Square) എന്നു പറയുന്നു. 1 മുതൽ 100 വരെയുള്ള പൂർണ്ണസംഖ്യകളിൽ 10 എണ്ണം മാത്രം കൃത്യവർഗ്ഗങ്ങളാണ്.

$\sqrt{9\times25}=\sqrt{225}=15$; $\sqrt{9}\times\sqrt{25}=3\times5=15$.

$\therefore \sqrt{9\times25}=\sqrt{9}\times\sqrt{25}$. ഇതേപ്രകാരം $\sqrt{4\times49}$ $=\sqrt{4}\times\sqrt{49}$. പൊതുവെ പറയുന്നതായാൽ

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$; $\sqrt{abc}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}$.

ഒരു സംഖ്യയെ അവിഭാജ്യ ഘടകങ്ങളാ (prime factors) യി പിരിക്കുന്നതിനാൽ അതിൻെറ വർഗ്ഗമൂലം കാണാമെന്നതു ഇതിൽനിന്നു സ്പഷ്ടമാണ്. ഉദാഹരണമായി 1225 ൻെറ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

$1225=5\times5\times7\times7=5^2\times7^2$

$\therefore \sqrt{1225}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{7^2}=5\times7=35$.

ഒരു കൃത്യവർഗ്ഗത്തിൻെറ അവിഭാജ്യ ഘടകങ്ങൾ ജോടികളായിരിക്കുമെന്നു അനുമാനിക്കാം.

588നെ ഘടകങ്ങളായി പിരിച്ചു അതു ഒരു കൃത്യവർഗ്ഗമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

$588=2\times2\times3\times7\times7=2^2\times7^2\times3$

$\therefore$ 588 ഒരു കൃത്യവർഗ്ഗമല്ല. അതിനെ 3കൊണ്ടു ഹരിക്കുകയോ, പെരുക്കുകയോ ചെയ്താൽ ഫലം ഒരു കൃത്യവർഗ്ഗമായിരിക്കും.

$10^2=100$; $100^2=10000$; $1000^2=1000000$.

ഇതിൽനിന്നു പൂജ്യത്തിൽ അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗത്തിൽ സംഖ്യയിലുള്ളതിൻെറ ഇരട്ടി പൂജ്യങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കുമെന്നു അനുമാനിക്കാം.

അഭ്യാസം 10 A. (വാങ്മൂലം).

1. സംഖ്യകളെ നോക്കി വർഗ്ഗമൂലം പറയുക.
   1600, 22500, 90000, 2560000, 1000000.

2. താഴേയുള്ള സംഖ്യകളിൽ കൃത്യവൎഗ്ഗങ്ങൾ ഏവ?

1960, 1210000, 4900, 20008, 14763.

3. താഴേയുള്ള സംഖ്യകളെ കുറഞ്ഞതു എന്തുകൊണ്ടു പെരുക്കിയാൽ ഗുണനഫലം കൃത്യവൎഗ്ഗമാകും?

2700, 338, 100000, 20000, 1500. ഗുണനഫലത്തിന്റെ വൎഗ്ഗമൂലം പറയുക.

4. ചില സമചതുരങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലം താഴേ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. അവയുടെ നീളം എത്ര?

625 ച. അടി. 4900 ച. വാര; 160000 ച. അം.; 16900 ച. സെ.മീ.

$\sqrt{400 \div 100} = \sqrt{4} = 2.$ $\sqrt{400} \div \sqrt{100} = 20 \div 10 = 2.$

$\therefore \sqrt{400 \div 100} = \sqrt{400} \div \sqrt{100}$

പൊതുവെ പറയുന്നതായാൽ $\sqrt{a \div b} = \sqrt{a} \div \sqrt{b}$

അഥവാ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$

അതുകൊണ്ടു ഒരു ഭിന്നിതത്തിന്റെ വൎഗ്ഗമൂലം അതിന്റെ അംശത്തിന്റെ വൎഗ്ഗത്തെ ഛേദകത്തിന്റെ വൎഗ്ഗമൂലം കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന ഫലമാണ്.

$\sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}} = \frac{4}{5}.$

$\sqrt{\frac{18}{98}} = \sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{49}} = \frac{3}{7}.$ ഇതിൽനിന്നു ഒരു ഭിന്നിതത്തെ ഏററവും ചുരുങ്ങിയ രൂപത്തിലേക്കു മാററണമെന്നു വ്യക്തമാകുന്നു.

മിശ്രസംഖ്യകളെ ഭിന്നിതരൂപത്തിലെഴുതണം.

$\sqrt{1\frac{17}{64}} = \sqrt{\frac{81}{64}} = \frac{9}{8} = 1\frac{1}{8}.$

അഭ്യാസം 10 B.

1. താഴേ കാണുന്ന സംഖ്യകളെ അവിഭാജ്യ ഘടകങ്ങളായി പിരിച്ചു അവയുടെ വൎഗ്ഗമൂലം കാണുക.

1089; 1936; 2304; 53361; 63504; 148225; 480249; 571536; 680625; 883600.

2. വർഗ്ഗമൂലം കാണുക. ആവശ്യമുള്ളേടത്തു ഭിന്നിതങ്ങളെ ഏററവും ചുരുങ്ങിയ രൂപത്തിലേക്കു മാററുക.

$\frac{1}{441}$, $\frac{12}{1875}$, $\frac{125}{605}$, $\frac{1458}{2048}$, $1\frac{7}{9}$, $2\frac{2}{49}$, $3\frac{1}{225}$, $7\frac{1453}{1521}$, $105\frac{91}{225}$, $19\frac{1453}{1764}$.

3. താഴെ വരുന്ന സംഖ്യകൾ ഓരോന്നും ഒരു കൃത്യവർഗ്ഗമാകുവാൻ അവയെ പെരുക്കേണ്ടുന്ന ഏററവും ചെറിയ സംഖ്യ കാണുക.

648, 605, 1584, 1083, 19845, 87846.

$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5;\quad \sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7.$

$\therefore\ \sqrt{16+9}$, $(\sqrt{16}+\sqrt{9})$ന്നു സമമല്ല.

പൊതുവെ പറയുന്നതായാൽ $\sqrt{a+b}$, $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ന്നു സമമല്ല.

$\sqrt{16-9}=\sqrt{7},\quad \sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3=1.$

$\therefore\ \sqrt{16-9}$, $(\sqrt{16}-\sqrt{9})$ന്നു സമമല്ല.

പൊതുവെ പറയുന്നതായാൽ $\sqrt{a-b}$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ന്നു സമമല്ല.

$1^2=1;\quad 9^2=81.\qquad 10^2=100;\quad 99^2=9801.$

$100^2=10000.\qquad 999^2=998001.$

ഇതിൽനിന്നു താഴെ പറയുന്ന സംഗതികൾ പ്രത്യക്ഷമാകുന്നു.

1 അക്കമുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തിൽ 1 ഓ, 2 ഓ അക്കങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.
2 അക്കങ്ങളുള്ള ,, ,, 3 ഓ, 4 ഓ ,, ,,
3 ,, ,, ,, 5 ഓ, 6 ഓ ,, ,,

സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗത്തിലുള്ള അക്കങ്ങൾ ആ സംഖ്യയിലുള്ള അക്കങ്ങളുടെ ഇരട്ടിയോ, ഇരട്ടിയിൽ ഒന്നു കുറവോ ആയിരിക്കുമെന്നു നമുക്കു ഇതിൽനിന്നു അനുമാനിക്കാം. ഇതിൽനിന്നു താഴെ പറയുന്ന സംഗതികളും അനുമാനിക്കാവുന്നതാണ്.

1ഓ 2ഓ അക്കങ്ങളുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലത്തിൽ 1 അക്കമുണ്ടായിരിക്കും.
3ഓ 4ഓ ,, ,, ,, ,, 2 അക്കങ്ങളുണ്ടായിരിക്കും.
5ഓ 6ഓ ,, ,, ,, ,, 3 ,,

ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുമ്പോൾ അതിലുള്ള അക്കങ്ങളുടെ എണ്ണം നിശ്ചയിക്കുന്നതു സംഖ്യയുടെ ഒന്നാം സ്ഥാനത്തിലുള്ള അക്കത്തിന്മേൽ ഒരു കുത്തും ഒന്നു ഇടവിട്ടു

ശേഷമുള്ള അക്കങ്ങളിന്മേൽ കുത്തുകൾ ഇടുന്നതിനാലു മാണ്.

ഉദാഹരണമായി 546121ൻെറ വൎഗ്ഗമൂലത്തിൽ 3 അക്കങ്ങളുണ്ടു. 2̇99̇29̇00̇ൻെറ വൎഗ്ഗമൂലത്തിൽ 4 അക്കങ്ങളുണ്ടു.

ഒരു സംഖ്യയെ ഘടകങ്ങളായി പിരിച്ചു അതിൻെറ വൎഗ്ഗമൂലം കാണാൻ നിങ്ങൾ പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. അതിലും എളുപ്പമായ വിധത്തിൽ വലിയ സംഖ്യകളുടെ വൎഗ്ഗമൂലം കാണാൻ ഇപ്പോൾ പഠിക്കാം.

ഉദാ: — (1) 1849ൻെറ വൎഗ്ഗമൂലം കാൺക: —

1̇84̇9ൻെറ വൎഗ്ഗമൂലത്തിൽ 2 അക്കങ്ങളുണ്ട്.

10-ാം സ്ഥാനത്തിലെ അക്കത്തിൻെറ വൎഗ്ഗം 18ൽ അടങ്ങീട്ടുള്ള ഏററവും വലിയ വൎഗ്ഗമായ 16 ആയിരിക്കണം.

∴ 10-ാം സ്ഥാനത്തിലെ അക്കം = 4

ഒന്നാം സ്ഥാനത്തിലെ അക്കം x എന്നു വിചാരിക്കുക.

$$\therefore 1849=(40+x)^2=40^2+2.\,40.\,x+x^2$$
$$=1600+80x+x^2$$
$$\therefore 249=x(80+x)$$
$$\therefore x=\frac{249}{80+x}$$

$x=3$ എന്നു ഊഹിക്കാം.

വൎഗ്ഗമൂലം കാണുന്നവിധം താഴേ ചേൎക്കുന്നു.

$$\begin{array}{r|l} & 43 \\ \hline 4 & \dot{1}8\dot{4}9 \\ & 16 \\ \hline 83 & \;249 \\ & \;249 \\ \hline \end{array}$$

വിവരണം.

(i) ഒന്നിൻെറ സ്ഥാനം മുതൽ ഓരോ അക്കം ഇട വിട്ടു കുത്തിടുക.

(ii) ഒന്നാമത്തെ കൂട്ടമായ 18ൽ അടങ്ങിയ ഏററവും വലിയ വൎഗ്ഗമായ 16 കിട്ടത്തക്കവണ്ണം 4 ഹാരകവും ഹരിതഫലവുമായി എഴുതുക. ശിഷ്ടം = 2.

(iii) രണ്ടാമത്തെ കൂട്ടമായ 49 ഇറക്കി ഇടുക.

(iv) ഹരിതഫലത്തെ 2കൊണ്ടു പെരുക്കി ഹാരകമായി എഴുതുക. മുമ്പു വിവരിച്ചപ്രകാരം ഊഹിച്ചു 3 ചേൎക്കുക. വൎഗ്ഗമൂലം = 43.

ഈ മാൎഗ്ഗം വ്യക്തമാകുവാൻ $a^2+2ab+b^2$ എന്ന വ്യഞ്ജകത്തിൻെറ വൎഗ്ഗമൂലം കാണുന്ന വഴി ഇവിടെ ചേൎക്കുന്നു.

$$
\begin{array}{r|l}
 & \;a+b \\
\hline
a & a^2+2ab+b^2 \\
 & a^2 \\
\cline{2-2}
2a+b & \quad +2ab+b^2 \\
 & \quad +2ab+b^2 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

വൎഗ്ഗമൂലത്തിൽ രണ്ടിലധികം സ്ഥാനങ്ങൾ ഉള്ളപ്പോഴും ക്രിയ മേൽകാണിച്ച പ്രകാരം തന്നെയാണ്. ഓരോ ഘട്ടത്തിലും അതുവരെയുള്ള ഹരിതഫലത്തെ 2കൊണ്ടു പെരുക്കി പുതിയ ഹാരകമായി ചേൎക്കണം.

ഉദാ:—(2) 10404ന്റെ വൎഗ്ഗമൂലം കാണുക:—

$$
\begin{array}{r|l}
 & 102 \\
\hline
1 & \dot{1}0\dot{4}0\dot{4} \\
 & 1 \\
\cline{2-2}
202 & \quad 404 \\
 & \quad 404 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

അഭ്യാസം 11.

A

വൎഗ്ഗമൂലം കാണുക:—

1. 1369.
2. 3136.
3. 6724.
4. 9801.
5. 10609.
6. 38025.
7. 13924.
8. 95481.
9. 107584.
10. 210681.
11. 231361.
12. 501264.
13. 1164241.
14. 2819041.
15. 1525225.
16. 13704804.
17. 40972801.
18. 64032004.
19. 89321401.
20. 259371025.
21. 18671041.
22. 231496225.
23. 3344771556.
24. 657836167041.
25. 10074538384.
26. 9999400009.

(3) ദശാംശഭിന്നിതങ്ങളുടെ വൎഗ്ഗമൂലം.

15·21ന്റെ വൎഗ്ഗമൂലം കാണുക:—

പൂൎണ്ണസംഖ്യകളുടെ വൎഗ്ഗമൂലം കാണാൻ ചെയ്തപ്രകാരം ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനമായ 5ന്റെ മേൽ ഒരു കുത്തിടുക. വലത്തോട്ടു ഒരു അക്കം വിട്ടു 1ന്മേൽ ഒരു കുത്തിടുക. അതുകൊണ്ടു വൎഗ്ഗമൂലത്തിന്റെ പൂൎണ്ണസംഖ്യയിൽ ഒരു സ്ഥാനവും ദശാംശഭിന്നിതത്തിൽ ഒരു സ്ഥാനവുമുണ്ടായിരിക്കും. ശേഷമുള്ള ക്രിയ പൂൎണ്ണസംഖ്യകളുടെ വൎഗ്ഗമൂലം നിശ്ചയിപ്പാൻ ചെയ്ത ക്രിയപോലെ തന്നെയാണ്.

```
      3·9
  3 | 15·21
    | 9
 69 |  6·21
    |  6·21
```

(4) 0·005625ന്റെ വൎഗ്ഗമൂലം കാണുക.

```
      ·075
  7 | ·005625
    |   49
145 |   725
    |   725
∴ വൎഗ്ഗമൂലം = ·075.
```

ഒന്നിന്റെ സ്ഥാനത്തു ഒരു കുത്തിടുന്നതായാൽ പിന്നീടു വേണ്ടതു വലത്തുവശത്തുള്ള രണ്ടാമത്തെ പൂജ്യത്തിന്മേലാണ്. പിന്നീടുള്ള കുത്തുകൾ 6ന്മേലും 5ന്മേലുമാണ് ഇടേണ്ടതു്. വൎഗ്ഗമൂലത്തിന്റെ ദശാംശഭിന്നിതത്തിൽ 3 സ്ഥാനങ്ങളുണ്ടു.

ഒരു ദശാംശഭിന്നിതത്തെ അതിനെക്കൊണ്ടു തന്നെ പെരുക്കിയാൽ കിട്ടുന്ന ഗുണനഫലത്തിൽ ഭിന്നിതത്തിലുള്ള ദശാംശസ്ഥാനങ്ങളുടെ ഇരട്ടി ദശാംശസ്ഥാനങ്ങളുണ്ടായിരിക്കും. അതുകൊണ്ടു ഒരു ദശാംശഭിന്നിതത്തിന്റെ വൎഗ്ഗത്തിൽ ഭിന്നിതത്തിലുള്ള ദശാംശസ്ഥാനങ്ങളുടെ ഇരട്ടി ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കുമെന്നും, ഒരു ദശാംശഭിന്നിതത്തിലെ ദശാംശസ്ഥാനങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യയല്ലെങ്കിൽ ആ ഭിന്നിതം ഒരു കൃത്യവൎഗ്ഗമായിരിക്കയില്ലെന്നും നമുക്കു അനുമാനിക്കാം.

B.

താഴെ കാണുന്ന ദശാംശഭിന്നിതങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

1. 73·96.
2. 10·7584.
3. 3·8025.
4. 0·9801.
5. 0·185761.
6. 25·5025.
7. 100·861849.
8. 4096·640025.
9. 0·00010201.
10. 0·0003418801.
11. 36·58193289.
12. 0·00139876.
13. 2704·416016.
14. 0·00203401.
15. 0·3486784401.
16. 0·0000164025.

ഉദാ:—(5) ഒരു തോട്ടത്തിൽ കുറെവരി തെങ്ങുകളുണ്ടു. വരികളുള്ളത്ര തെങ്ങുകൾ ഓരോ വരിയിലുമുണ്ടു. ആകെ 1225 തെങ്ങുകളുണ്ടെങ്കിൽ എത്ര വരികളുണ്ടു?

വരികളുടെ എണ്ണം x എന്നു വിചാരിക്കുക.

$\therefore$ ഓരോ വരിയിലുമുള്ള തെങ്ങുകൾ $= x$.

$\therefore$ ആകെ തെങ്ങുകളുടെ എണ്ണം $= x \times x = 1225$.

$\therefore x = \sqrt{1225} = 35$.

$\therefore$ വരികളുടെ എണ്ണം $= 35$.

(6) 73ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

ഇതു 3ൽ അവസാനിക്കുന്നതുകൊണ്ടു ഒരു കൃത്യവർഗ്ഗമല്ല. ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം 8ന്നും 9ന്നും ഇടയിലാണെന്നും സ്പഷ്ടമാണ്. കൃത്യവർഗ്ഗങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണാൻ നാം ഉപയോഗിച്ച മാർഗ്ഗം ഇതിന്റെ വർഗ്ഗമൂലവും കാണാൻ ഉപയോഗിക്കാം.

```
      | 8·544
      |----------------
    8 | 73·00000000
      | 64
      |----------------
  165 |  900
      |  825
      |----------------
 1704 |   7500
      |   6816
      |----------------
17084 |    68400
      |    68336
      |----------------
      |       64
```

8·5ന്റെ വർഗ്ഗവും 73ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 2-ാമത്തെ ശിഷ്ടമായ ·75 ആകുന്നു. 8·54നെ വർഗ്ഗമൂലമായി കരുതുന്നതായാൽ വ്യത്യാസം 3-ാമത്തെ ശിഷ്ടമായ ·0684 മാത്രമാണ്. 8·544നെ വർഗ്ഗമൂലമായി കരുതുന്നതായാൽ വ്യത്യാസം അതിലും കുറഞ്ഞു, ·000064 മാത്രമായിത്തീരുന്നു. ഇങ്ങിനെ അധികം സ്ഥാനങ്ങൾ കാണുമ്പോൾ ഉണ്ടാവുന്ന സംഖ്യയുടെ

വൎഗ്ഗവും 73ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കുറഞ്ഞുവരുന്നതല്ലാതെ ഒരിക്കലും തീരെ ഇല്ലാതാകുന്നില്ല. ഇങ്ങിനെ വൎഗ്ഗമൂലം കൃത്യമായി നിൎണ്ണയിപ്പാൻ കഴിയാത്ത സംഖ്യകളെ കരണീയുതസംഖ്യകൾ (Irrational Numbers) അല്ലെങ്കിൽ കരണികൾ (Surds) എന്നു പറയുന്നു.

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ എന്നിവയും കരണികളാണു.

$\sqrt{73}$ ഒരു കരണീയുതസംഖ്യയാണെങ്കിലും നമുക്കു ആവശ്യമുള്ളത്ര കൃത്യമായി അതിനെ നിൎണ്ണയിക്കുവാൻ സാധിക്കുന്നതാണ്.

73ൻെറ വൎഗ്ഗമൂലം 8·5 എന്നു കരുതുന്നതായാൽ വൎഗ്ഗമൂലം ഒരു ദശാംശസ്ഥാനത്തോളവും, 8·54 എന്നു കരുതുന്നതായാൽ 2 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളവും കൃത്യമാണ്.

$\sqrt{2}=1{\cdot}414$. ഇതിൽനിന്നു $\sqrt{200}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{\cdot 02}$, $\sqrt{\frac{2}{49}}$ അനുമാനിച്ചെഴുതുക.

$$\sqrt{200}=\sqrt{2\times10\times10}=\sqrt{2}\times10=1{\cdot}414\times10=14{\cdot}14.$$

$$\sqrt{50}=\sqrt{2\times5\times5}=\sqrt{2}\times5=1{\cdot}414\times5=7{\cdot}07.$$

$$\sqrt{\cdot 02}=\sqrt{\frac{2}{10\times10}}=\frac{\sqrt{2}}{10}=1{\cdot}414\div10=\cdot1414.$$

$$\sqrt{\frac{2}{49}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{49}}=\frac{\sqrt{2}}{7}=\frac{1{\cdot}414}{7}=\cdot202.$$

ഒരു ഭിന്നിതത്തെ സാധാരണ ഭിന്നിതമോ ദശാംശഭിന്നിതമോ ആയി കരുതി അതിൻെറ വൎഗ്ഗമൂലം കാണാവുന്നതാണ്.

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}}=\tfrac{1}{2}.\quad \tfrac{1}{4}=\cdot25 \;\therefore\; \sqrt{\tfrac{1}{4}}=\sqrt{\cdot25}=\cdot5=\tfrac{1}{2}.$$

$\frac{1}{2}$യുടെ വൎഗ്ഗമൂലം 3 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യമായി കാണുക.

$$\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

ഇതിൻെറ ഛേദകം ഒരു കൃത്യസംഖ്യയല്ല. അതുനിമിത്തം ഛേദകത്തെകൊണ്ടു ഹരിക്കുന്നതിനാൽ ഭിന്നിതത്തിൻെറ വില കൃത്യമായി കാണാൻ സാധിക്കുന്നതല്ല. ഛേദകത്തെ $\sqrt{2}$ കൊണ്ടു പെരുക്കുക.

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ഭിന്നിതത്തിൻെറ വില ആവശ്യമുള്ളത്ര കൃത്യമായി കാണത്തക്ക രൂപത്തിലാണ് അതിനെ ഇപ്പോൾ എഴുതീട്ടുള്ളതു.

ഉത്തരം 3ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യമായി കാണേണ്ടതുകൊണ്ടു $\sqrt{2}$ൻെറ വില 4 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യമായി കണ്ടു 2കൊണ്ടു ഹരിക്കുക.

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1{\cdot}4142}{2}={\cdot}7071=\underline{{\cdot}707.}$$

(3 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യം).

$\frac{1}{2}={\cdot}5.$ $\;{\cdot}5$ൻെറ വർഗ്ഗമൂലം 3 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യമായി കണ്ടു മേലെഴുതിയ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(7) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ൻെറ വർഗ്ഗമൂലം 2 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യമായി കാണുക.

$$\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{2{\cdot}449}{3}={\cdot}816=\underline{{\cdot}82.}$$

(2 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യം).

$\frac{2}{3}={\cdot}\dot{6}$ $\quad\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\dot{6}}={\cdot}82$ (2 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യം).

(8) $\sqrt{\frac{5}{24}}$ $\quad 24=2^2\times2\times3.$ $\;\therefore$ 24നെ 2×3കൊണ്ടു പെരുക്കുന്നതിനാൽ ഒരു കൃത്യവർഗ്ഗം കിട്ടുന്നു.

$$\therefore \frac{5}{24}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{24}}=\frac{\sqrt{5}\times\sqrt{6}}{\sqrt{24}\times\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{30}}{12}=\frac{5{\cdot}477}{12}={\cdot}456=\underline{{\cdot}46.}$$

(2 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യം).

$\frac{5}{24}={\cdot}208\dot{3}$ $\quad\therefore\sqrt{\frac{5}{24}}=\sqrt{{\cdot}208\dot{3}}={\cdot}456={\cdot}46.$

(2 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യം).

(9) സമകോണചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു നിലത്തിൻെറ നീളം വീതിയുടെ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടിയാണ്. അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം 15 ഏക്കറാണെങ്കിൽ അതിൻെറ ചുററളവു കാണുക.

വീതി $2x$ വാരയാണെന്നു വിചാരിക്കുക.

എന്നാൽ നീളം $=2x\times1\frac{1}{2}$ വാര $=3x$ വാര.

$\therefore$ ക്ഷേത്രഫലം $=3x\times2x$ ച.വാര. $=6x^2$ ച. വാര.

$=4840\times15$ ച. വാര.

$$\therefore x^2=\frac{4840\times15}{6}=12100$$

$$\therefore x=\sqrt{12100}=110.$$

$\therefore$ ചുററളവു $=2(3x+2x)$വാര $=2\times5\times110$വാര.

$=\underline{1100}$വാര.

C

1. 308 അടി നീളവും 231 അടി വീതിയുമുള്ള സമകോണചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു വയലിന്റെ 3 ഇരട്ടി വലിപ്പമുള്ള ഒരു സമചതുരവയലിന്റെ നീളം കാണുക.

2. താഴേയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം 3 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യമായി കാണുക.

1. 3.	4. 290.	7. 0·007.
2. 5.	5. 3·256.	8. 0·1.
3. 10.	6. 12·1.	9. 0·000056.
		10. 0·081.

3. താഴേയുള്ളവയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

1. $\frac{1}{4761}$ 2. $7\frac{18}{49}$. 3. $65\frac{64}{81}$

4. $14\frac{21}{44} \times 2\frac{7}{55} \times \frac{9}{20}$ 5. $1\frac{43}{44} \div 3\frac{17}{33}$.

4. താഴേ എഴുതിയ സാധാരണ ഭിന്നിതങ്ങളുടേയും മിശ്രസംഖ്യകളുടേയും വർഗ്ഗമൂലം 3 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യമായി കാണുക. അവയുടെ ദശാംശഭിന്നിതങ്ങളാക്കി വർഗ്ഗമൂലം കണ്ടു ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

$\frac{1}{6}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{28}$, $4\frac{1}{12}$, $5\frac{3}{10}$.

5. $\sqrt{5}=2·2361$; $\sqrt{3}=1·7321$

ഇവയിൽനിന്നു താഴേയുള്ളവയുടെ വില അനുമാനിക്കുക.

300, 20, 125, 147, 27, 675, ·05, ·0003, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$.

6. സമകോണചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കളിസ്ഥലത്തിന്റെ നീളവും, വീതിയും 5 : 3 എന്ന സംബന്ധത്തിലാകുന്നു. അതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം 7935 ച. അടിയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ചുററളവു കാണുക.

7. 1 ഏക്കർ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നീളം (1) വാര (2) അടി (3) അംഗുലം വരെ കൃത്യമായി കാണുക.

8. ഒരു തോട്ടത്തിൽ റബ്ബർമരങ്ങൾ വരിയായി കുഴിച്ചിട്ടിട്ടുണ്ടു. ഓരോ വരിയിലുമുള്ള മരങ്ങളുടെ 5 ഇരട്ടി വരികളുണ്ടു. ആകെ 23120 മരങ്ങളുണ്ടെങ്കിൽ വരികളുടെ എണ്ണം കാണുക.

9. കുറെ പുരുഷന്മാരും അവരുടെ 4 ഇരട്ടി എണ്ണം സ്ത്രീകളും കൂടി വരിയിട്ടു 756ക. പിരിക്കുന്നു. ആകെ പുരുഷന്മാരുള്ളത്ര അണ ഓരോ പുരുഷനും, സ്ത്രീകളുള്ളത്ര പൈ ഓരോ സ്ത്രീയും വരിസംഖ്യയായി കൊടുക്കുന്നുവെങ്കിൽ സ്ത്രീപുരുഷന്മാരുടെ എണ്ണം വെവ്വേറെ കാണുക.

[Mad. F. A. 1877]

10. ഒരാൾ മണിക്കൂറിൽ 3 നാഴികവീതം നടക്കും. 16 ഏക്കർ 401 ച. വാര വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു സമചതുര വയലിന്റെ ചുറ്റും ഒരിക്കൽ നടപ്പാൻ അയാൾക്കു എത്ര സമയം വേണം? [Allahabad Entrance.]

11. രണ്ടു ചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം 1521 ; 1849 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണെങ്കിൽ അവയുടെ നീളം തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം കാണുക.

12. ഒരു കൃഷിക്കാരനു രണ്ടു നിലങ്ങളുള്ളതിൽ ഒന്നു 3564 വാര നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരവും, മറേറതു 1628 വാര നീളവും 891 വാര വീതിയുമുള്ള ഒരു സമകോണചതുരവുമാണ്. ഇവ കൊടുത്തു, പകരം അതേ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു സമചതുരനിലം അയാൾ വാങ്ങുന്നു. എന്നാൽ അതിന്റെ നീളവും അതിനു ചുറ്റും വേലി കെട്ടാൻ വാരക്കു 2ണ. വീതം എന്തു ചിലവാകുമെന്നും കാണുക. (1927)

13. സമകോണചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു വയലിന്റെ നീളം വീതിയുടെ 3 ഇരട്ടിയും വിസ്തീർണ്ണം 36·3 ഏക്കറുമാണ്. അതിന്റെ ചുറ്റും വേലി കെട്ടാൻ വാരക്കു 2ണ. വീതം എന്തു ചിലവാകും? (1928)

14. 6·4 ഏക്കർ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു സമചതുരനിലത്തിന്റെ ചുറ്റും $2\frac{1}{2}$ വാര വീതിയുള്ള ഒരു വഴിയുണ്ടു. ഈ വഴിയിൽ ചരലിടുവാൻ ച. വാരക്കു 3ണ. പ്രകാരം എന്തു ചിലവാകും? (1929)

15. ഒരു സമചതുര കളിസ്ഥലത്തിന്റെ ചുറ്റും ഒരേ വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ടു. പാതയുടെ വിസ്തീർണ്ണം 4719 ച. വാരയും, പാതക്കും കളിസ്ഥലത്തിനുംകൂടി വിസ്തീർണ്ണം 10 ഏക്കറുമാണെങ്കിൽ പാതയുടെ വീതി എത്ര അടിയാണ്? (1939)

പട്ടിക ഉപയോഗിച്ചു വർഗ്ഗമൂലം കാണൽ.

A

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
6·5	2·550	2·551	2·553	2·555	2·557	2·559	2·561	2·563	2·565	2·567
6·6	2·569	2·571	2·573	2·575	2·577	2·579	2·581	2·583	2·585	2·587
6·7	2·588	2·590	2·592	2·594	2·596	2·598	2·600	2·602	2·604	2·606
6·8	2·608	2·610	2·612	2·613	2·615	2·617	2·619	2·621	2·623	2·625
6·9	9·627	2·629	2·631	2·632	2·634	2·636	2·638	2·640	2·642	2·644

B

	·0	·1	·2	·3	·4	·5	·6	·7	·8	·9
65	8·062	8·068	8·075	8·081	8·087	3·093	8·099	8·106	8·112	8·118
66	8·124	8·130	8·136	8·142	8·149	8·155	8·161	8·167	8·173	8·179
67	8·185	8·191	8·198	8·204	8·210	3·216	8·222	8·228	8·234	8·240
68	8·246	8·252	8·258	8·264	8·270	8·276	8·283	8·289	8·295	8·301
69	3·307	8·313	8·319	8·325	8·331	8·337	8·343	8·349	8·355	8·361

സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം നേരിട്ടു വായിക്കത്തക്കവണ്ണം പട്ടികകൾ തയ്യാറാക്കീട്ടുണ്ടു. അവ ഉപയോഗിക്കുന്ന രീതി മനസ്സിലാക്കുവാൻ ഒരു പട്ടികയിൽനിന്നു ചില ഭാഗങ്ങൾ ഇവിടെ ഉദ്ധരിച്ചിരിക്കുന്നു.

A എന്ന പട്ടിക നോക്കി 6·57ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം വായിക്കുക. 2·563 ആണെന്നു കാണാം. വർഗ്ഗമൂലം ഗണിച്ചു ഇതു ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. 657ന്റേയും ·0657ന്റേയും വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ അനുമാനിക്കുക.

B എന്ന പട്ടിക നോക്കി 69·3ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം വായിക്കുക. ഗണിച്ചു 8·325 ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. ·693ന്റേയും 6930ന്റേയും വർഗ്ഗമൂലങ്ങൾ അനുമാനിക്കുക.

അഭ്യാസം (വാങ്മൂലം).

1. പട്ടിക നോക്കി താഴേയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം വായിക്കുക. ഗണിച്ചു നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

69·4, 6·83, 6·68, 65·7, 68·6, 6·79, 6·95, 67·1.

താഴെയുള്ള സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം അനുമാനിക്കുക.

·677, 677, 682, ·666, ·0651, ·0067.

അഭ്യാസം 11 D.

1. താഴെയുള്ള പട്ടിക നോക്കി 23, 89, 52 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗവും വർഗ്ഗമൂലവും വായിക്കുക. ഗണിച്ചും ഉത്തരങ്ങൾ കാണുക.

2. പട്ടികയിൽനിന്നു $\sqrt{12}$ കാണുക. അതു $2\sqrt{3}$ ആണെന്നുള്ള സത്യം ഉപയോഗിച്ചുള്ള വിലയും കാണുക. 2 വിലകളും സമമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

3. $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$ എന്ന സത്യം ഉപയോഗിച്ചു $\sqrt{2}$ന്റെ വിലയിൽനിന്നു $\sqrt{8}$, $\sqrt{72}$, $\sqrt{98}$, $\sqrt{50}$ അനുമാനിക്കുക. പട്ടിക നോക്കി നിങ്ങളുടെ അനുമാനം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

4. വർഗ്ഗമൂലങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചു പഠിച്ച താഴേ പറയുന്ന സത്യങ്ങൾ ശരിയാണെന്നു പട്ടികയിലെ വിലകൾ വായിച്ചു സ്ഥാപിക്കുക.

(1) $\sqrt{(a+b)}\neq\sqrt{a}+\sqrt{b}$. (2) $\sqrt{(a-b)}\neq\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

(3) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}$. (4) $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

ഉദാഹരണമായി $a=576$, $b=49$ എന്നു കരുതുക.

$$\sqrt{(a+b)}=\sqrt{(576+49)}=\sqrt{625}=25$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{576}+\sqrt{49}=24+7=31.$$

1 മുതൽ 100 വരെയുള്ള പൂർണ്ണസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗവും വർഗ്ഗമൂലവും; n ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

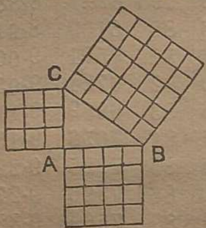
n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$	n	n^2	$\sqrt{n}$
1	1	1·000	26	676	5·099	51	2601	7·141	76	5776	8·718
2	4	1·414	27	729	5·196	52	2704	7·211	77	5929	8·775
3	9	1·732	28	784	5·291	53	2809	7·280	78	6084	8·832
4	16	2·000	29	841	5·385	54	2916	7·348	79	6241	8·888
5	25	2·236	30	900	5·477	55	3025	7·416	80	6400	8·944
6	36	2·449	31	961	5·568	56	3136	7·483	81	6561	9·000
7	49	2·646	32	1024	5·657	57	3249	7·550	82	6724	9·055
8	64	2·828	33	1089	5·745	58	3364	7·616	83	6889	9·110
9	81	3·000	34	1156	5·831	59	3481	7·681	84	7056	9·165
10	100	3·162	35	1225	5·916	60	3600	7·746	85	7225	9·220
11	121	3·317	46	1296	6·000	61	3721	7·810	86	7396	9·270
12	144	3·464	37	1369	6·083	62	3844	7·874	87	7569	9·327
13	169	3·606	38	1444	6·164	63	3969	7·937	88	7744	9·381
14	196	3·742	39	1521	6·245	64	4096	8·000	89	7921	9·434
15	225	3·873	40	1600	6·325	65	4225	8·062	90	8100	9·487
16	256	4·000	41	1681	6·403	66	4356	8·124	91	8281	9·539
17	289	4·123	42	1764	6·481	67	4489	8·185	92	8464	9·592
18	324	4·243	43	1849	6·557	68	4624	8·246	93	8649	9·644
19	361	4·359	44	1936	6·663	69	4761	8·307	94	8836	9·695
20	400	4·472	45	2025	6·708	70	4900	8·367	95	9025	9·747
21	441	4·583	46	2116	6·782	71	5041	8·426	96	9216	9·798
22	484	4·690	47	2209	6·856	72	5184	8·485	97	9409	9·849
23	529	4·796	48	2304	6·928	73	5329	8·544	98	9604	9·899
24	576	4·899	49	2401	7·000	74	5476	8·602	99	9801	9·950
25	625	5·000	50	2500	7·071	75	5625	8·660	100	10000	10·000

അദ്ധ്യായം 6.

പൈത്താഗൊറസ്സിൻെറ പ്രമേയം.

(Theorem of Pythagoras).

A ഒരു സമകോണായ ABC എന്നൊരു സമകോണ ത്രികോണം വരക്കുക; എന്നാൽ BC അതിൻെറ വിപുല രേഖയായിരിക്കും.



AB ഒരു ഭുജമായ സമചതുരത്തെ AB യിന്മേലുള്ള സമചതുരമെന്നും, അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലത്തെ ചുരുക്കി AB^2 എന്നും പറയുന്നു. നിങ്ങൾ വരച്ച സമകോണത്രികോണത്തിലുള്ള AB^2, AC^2, BC^2 എന്നീ ക്ഷേത്രഫലങ്ങളെ കണക്കാക്കുക. BC^2, AB^2+AC^2 എന്നീ ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ തമ്മിൽ വല്ല ബന്ധവും കാണുന്നുണ്ടോ? നിങ്ങൾ സൂക്ഷ്മമായി ഗണിക്കുന്നതായാൽ $BC^2=AB^2+AC^2$ എന്നു കാണാം. വേറെയും സമകോണത്രികോണങ്ങളെ വരച്ച ഇതേ പരീക്ഷണം ചെയ്യുക. ഈ പരീക്ഷണങ്ങളിൽനിന്നു താഴേ പറയുന്ന സത്യം അനുമാനിക്കാവുന്നതാണ്.

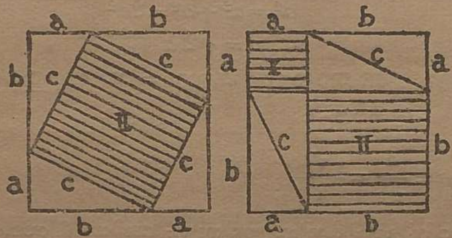
ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൻെറ വിപുലരേഖയിന്മേലുള്ള സമചതുരം മററു രണ്ടു ഭുജങ്ങളിന്മേലുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ തുകയോടു സമമാകുന്നു. ഈ ബന്ധം ഒന്നാമതായി കണ്ടുപിടിച്ചതു ഗ്രീക്കു ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ പൈത്താഗൊറസ്സ് ആയതുകൊണ്ടു ഇതിനെ പൈത്താഗൊറസ്സിൻെറ പ്രമേയം എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു കോൺ സമകോണല്ലാത്ത ത്രികോണങ്ങളും വരച്ച അവയുടെ ഭുജങ്ങൾ തമ്മിൽ മേല്പറഞ്ഞ ബന്ധം ഉണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ ഒരു ഭുജത്തിന്മേലുള്ള സമചതുരം മററു രണ്ടു ഭുജങ്ങളിന്മേലുള്ള സമചതുരങ്ങളുടെ തുകയോടു സമമാണെങ്കിൽ ഏററവും വലിയ ഭുജത്തിന്നെതിരായ കോൺ ഒരു സമകോണായിരിക്കും.

പൈത്താഗൊറസ്സിൻെറ പ്രമേയത്തെ താഴേ വിവരിച്ച പ്രകാരം എളുപ്പത്തിൽ തെളിയിക്കാം.

തടിച്ച കടലാസ്സെടുത്തു സൌകര്യമുള്ള വലിപ്പത്തിൽ $(a+b)''$ നീളമുള്ള



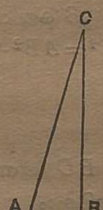
രണ്ടു സമചതുരങ്ങൾ വരക്കുക. ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചപ്രകാരം അവയെ ഭാഗിക്കുക.

ഇടത്തുവശത്തുള്ള സമചതുരത്തിലെ 4 സമകോണത്രികോണങ്ങളുടെ ഭുജങ്ങൾ a'', b'', c'' ആണ്. ബാക്കിയുള്ളതു വിപുലരേഖയിന്മേലുള്ള സമചതുരമാണ്.

വലത്തുവശത്തുള്ള സമചതുരത്തിലും a'', b'', c'' എന്നീ ഭുജങ്ങളുള്ള 4 സമകോണത്രികോണങ്ങൾ ഉണ്ടു; ബാക്കിയുള്ളതു a'', b'' നീളമുള്ള രണ്ടു സമചതുരങ്ങളാണ്. ഇടത്തും വലത്തും ഉള്ള സമചതുരങ്ങൾ സമമായതുകൊണ്ടു $c^2=a^2+b^2$ എന്നു തെളിയുന്നു. c, ചിത്രത്തിലുള്ള സമകോണത്രികോണത്തിൻെറ വിപുലരേഖയും a, b മററു ഭുജങ്ങളും ആകുന്നു.

ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൻെറ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ നീളം അറിയുന്നതായാൽ ഈ പ്രമേയം ഉപയോഗിച്ചു മൂന്നാമത്തെ ഭുജത്തിൻെറ നീളം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാ:—1. 25 അടി നീളമുള്ള ഒരു കോണിയുടെ ഒരററം ഒരു ചുവരിന്മേൽ 24 അടി ഉയരത്തോളം എത്തണമെങ്കിൽ അതിൻെറ അടിഭാഗം ചുവരിൽനിന്നു എത്ര ദൂരത്തായിരിക്കണം?



ചിത്രത്തിൽ $AB^2=AC^2-BC^2$

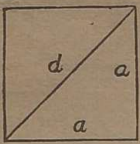
$=(25^2-24^2)$ ച. അടി.

$=49$ ച. അടി.

$\therefore AB=7$ അടി.

$\therefore$ ആവശ്യപ്പെട്ട ദൂരം $=7$ അടി.

2. (*a*) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ നീളം a സെ. മീ. ആകുന്നു. എന്നാൽ അതിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം നിർണ്ണയിക്കുക.



കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം d സെ. മീ. ആണെങ്കിൽ

$$d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

$$\therefore d = \sqrt{2}.a$$

അതായതു കർണ്ണം = സമചതുരത്തിന്റെ $\sqrt{2}$ ഇരട്ടി.

$$\sqrt{2}a = d. \quad \therefore a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d\sqrt{2}}{2}.$$

കർണ്ണത്തിന്റെ നീളത്തിൽനിന്നു ഈ സൂത്രം വഴിയായി സമചതുരത്തിന്റെ നീളം നിർണ്ണയിക്കാം. ഈ ആവശ്യാർത്ഥം $\sqrt{2} = 1{\cdot}414$ (സുമാർ) എന്നു ഓർക്കുന്നതു നന്നായിരിക്കും.

10 സെ. മീ. നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരം വരക്കുക. അതിന്റെ ഒരു കർണ്ണം അളക്കുക. നീളം ഗണിച്ചും കാണുക.

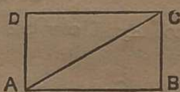
നീളം $= d$ സെ. മീ. $= \sqrt{2}a$ സെ. മീ. $= \sqrt{2} \times 10$ സെ. മീ.

$= 1{\cdot}414 \times 10$ സെ. മീ. $= 14{\cdot}14$ സെ. മീ. (2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യം).

ചില സമചതുരങ്ങളുടെ നീളം താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്നു. കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം അളന്നും ഗണിച്ചും കാണുക. 2 ഉത്തരങ്ങളും നീളയളവിന്റെ 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ സമമാണോ എന്നു നോക്കുക.

9 സെ. മീ.; 3″; 8 സെ. മീ.; 4″.

(*b*) ഒരു സമകോണചതുരത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം.



$ABCD$ എന്ന സമകോണചതുരത്തിൽ

$AB = l''$, $BC = b''$ എന്നു കരുതുക.

B ഒരു സമകോണായതുകൊണ്ടു

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = l^2 + b^2$$

$\therefore AC$ എന്ന കർണ്ണത്തിന്റെ നീളം d'' ആണെങ്കിൽ

$$d^2 = l^2 + b^2. \quad \therefore d = \sqrt{l^2 + b^2}$$

BD എന്ന കർണ്ണം ACക്കു സമമായതുകൊണ്ടു അതിന്റെ നീളവും നമുക്കു ഗണിക്കാം.

ഉദാ. 40′ നീളവും 9′ വീതിയുമുള്ള ഒരു വറാന്തയുടെ എതിർ മൂലകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം ഗണിക്കുക. തോതനുസരിച്ചു ഒരു പടം വരച്ചും ദൂരം കാണുക.

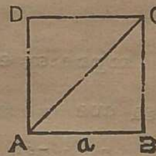
എതിർമൂലകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം=കർണ്ണത്തിൻെറ നീളം.

$\therefore d^2=40^2+9^2=1600+81=1681$

$\therefore d=\sqrt{1681}=41$ ∴ ആവശ്യപ്പെട്ട ദൂരം$=41'$.

നിങ്ങളുടെ ക്ലാസ്സുമുറികൾ, കളിസ്ഥലങ്ങൾ (Badminton, Basket ball, Tennikoit court) മുതലായവയുടെ നീളവും വീതിയും എതിർ മൂലകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരവും അളന്നു ഒരു പട്ടികയുണ്ടാക്കുക. ഗണിച്ചു കിട്ടുന്ന ദൂരങ്ങളുമായി ഒത്തു നോക്കുക. ക്ലാസ്സുമുറിയിലെ ഇരുമ്പിക, മേശ, blackboard, പുസ്തകങ്ങൾ ഇവയേയും അളന്നു മേല്പറഞ്ഞ പരീക്ഷണം ചെയ്യുക. മൂന്നു വിദ്യാർത്ഥികൾ ഒരുമിച്ചു പ്രവർത്തിക്കുന്നതു നന്നായിരിക്കും.

(c) ദ്വിസമഭുജസമകോണത്രികോണ (Isosceles right angled triangle) ത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം.



$AB=BC=a$ സെ. മീ. എന്നു കരുതുക.

$ABCD$ ഒരു സമചതുരമായതുകൊണ്ടു

$AB=BC$. B ഒരു സമകോൺ.

$\therefore ABC$ ഒരു ദ്വിസമഭുജത്രികോണമാകുന്നു.

അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം$=ABCD$യുടെ $\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$ ച. സെ. മീ.

ഇതിൽ $a=$ത്രികോണത്തിൻെറ സമഭുജങ്ങളുടെ നീളം.

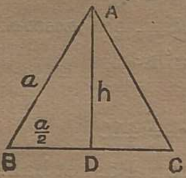
വേറൊരു വിധത്തിലും ഒരു ദ്വിസമഭുജസമകോണത്രികോണത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$\triangle ABC=\frac{1}{2}$ ആധാരം$\times$ഉന്നതി$=\frac{1}{2}AB\times BC.$

$=\frac{1}{2}a\times a$ ച. സെ. മീ.$=\frac{a^2}{2}$ ച. സെ. മീ.

ഭുജങ്ങളുടെ നീളത്തിൻെറ സംബന്ധം: $1:1:\sqrt{2}$ എന്നു ഓർക്കുക.

(d) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിൻെറ ഒരു ഭുജം aസെ.മീ. ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ ഉന്നതി നിർണ്ണയിക്കുക.



AD, BCക്കു ലംബമായതുകൊണ്ടു

$$BD = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2} \text{ സെ. മീ.}$$

$$AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$AD = h$ സെ. മീ. എന്നു വിചാരിക്കുക.

$$\therefore h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\therefore h = \frac{\sqrt{3}}{2} a.$$

അതായതു ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഉന്നതി = ഭുജത്തിന്റെ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ഇരട്ടി.

$\triangle ABC$ത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $= \frac{1}{2} BC \times AD$

$$= \frac{a}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a \text{ ച. സെ. മീ.}$$

$$= \frac{\sqrt{3}.a^2}{4} \text{ ച. സെ. മീ.}$$

അതുകൊണ്ടു ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം = ഭുജത്തിന്മേലുള്ള സമചതുരത്തിന്റെ $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ഇരട്ടി.

$\sqrt{3} = 1{\cdot}732$ (സുമാർ) എന്നു ഓർക്കുന്നതു നന്നായിരിക്കും.

(e) $\triangle ABD$ത്തിന്റെ കോണുകൾ $90°$, $60°$, $30°$യും അവക്കെതിരായ ഭുജങ്ങളുടെ നീളം $a, \frac{\sqrt{3}}{2} a, \frac{a}{2}$ സെ. മീ. ഉം ആണ്. ഈ ആകൃതിയുള്ള ത്രികോണങ്ങളുടെ ഭുജങ്ങൾ $2 : \sqrt{3} : 1$ എന്ന സംബന്ധത്തിലായിരിക്കും.

3. സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം രൂപങ്ങൾ വരച്ചു നിർണ്ണയിക്കാം.

(a) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഇരട്ടി വലിപ്പമുള്ള വേറൊരു സമചതുരം വരക്കുക. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്മേലുള്ള സമചതുരം സമചതുരത്തിന്റെ ഇരട്ടിയായതുകൊണ്ടു ആവശ്യപ്പെട്ട സമചതുരം സമചതുരത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്മേലുള്ള സമചതുരമാണ്.

(b) ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ 3 ഇരട്ടി വലിപ്പമുള്ള വേറൊരു സമചതുരം വരക്കുക.

$\triangle ABD$ത്തിൽ, $AD = \sqrt{3} BD$

$\therefore AD^2 = 3BD^2; \angle B = 60°$

ഈ സത്യം ഉപയോഗിച്ചു വഴി കണ്ടുപിടിക്കുക.

(c) ഒരു രൂപം വരച്ചു അതിൽനിന്നു $\sqrt{12}$ നിണ്ണയിക്കുക.

$2^2+3^2=13 \quad \therefore \sqrt{13}=\sqrt{2^2+3^2}$

ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൻെറ രണ്ടു ഭുജങ്ങൾ 2ഉം 3ഉം അംഗുലമാണെങ്കിൽ അതിൻെറ വിപുലരേഖ $\sqrt{13}$അം. ആയിരിക്കും.

ഏതു സംഖ്യയും രണ്ടു വഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയായിരിക്കണമെന്നില്ല.

അതുകൊണ്ടു സാധാരണമായി താഴേ പറയുന്ന വിധത്തിലാണു വഗ്ഗമൂലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതു.

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2=n$$

$$\therefore \sqrt{n}=\sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2-\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$$

വഗ്ഗമൂലം കാണേണ്ടുന്ന സംഖ്യ n എന്നു വിചാരിക്കുക $\frac{n+1}{2}$, $\frac{n-1}{2}$ നീള അളവുകൾ യഥാക്രമം വിപുലരേഖയും, ഒരു ഭുജവും ആയ സമകോണത്രികോണം നിമ്മിക്കുക. എന്നാൽ മൂന്നാമത്തെ ഭുജം $\sqrt{n}$ നീള അളവു ആയിരിക്കും.

$n=13$ ആണെങ്കിൽ, $\frac{n+1}{2}=7$, $\frac{n-1}{2}=6$.

സൌകര്യമുള്ള നീളം എടുത്തു സമകോണത്രികോണം നിമ്മിക്കുക.

അഭ്യാസം 12.

1. ഒരു സമകോണചതുരത്തിൻെറ നീളം 21 സെ.മീ.ഉം വീതി 20 സെ.മീ.ഉം ആണ്. എന്നാൽ അതിൻെറ കണ്ണത്തിൻെറ നീളം കാണുക.

2. കോണമാപകം ഉപയോഗിക്കാതെ ഒരു ത്രികോണം സമകോണത്രികോണമാണോ എന്നു നിങ്ങൾ എങ്ങിനെ പരിശോധിക്കും?

3. ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ ഭുജങ്ങളുടെ നീളം 3 : 4 : 5 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണെങ്കിൽ അതു ഒരു സമകോണത്രികോണമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

4. ഒരു സമചതുരവയലിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം 10 ഏക്കറാണ്. അതിൻെറ ഒരു മൂലയിൽനിന്നു എതിർമൂലയിലേക്കുള്ള ദൂരം വാരവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

5. സമകോണചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു വയലിൻെറ നീളവും വീതിയും 15 : 8 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണ്. അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം 95767·5 ച. വാരയാണെങ്കിൽ അതിൻെറ കണ്ണത്തിൻെറ നീളം കാണുക. (1938)

6. 2″ നീളമുള്ള AB എന്നൊരു ആധാരത്തിന്മേൽ അതിൻെറ ഇരുവശത്തും ABC, ABD എന്ന രണ്ടു സമഭുജത്രികോണങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ CDയുടെ നീളം അംഗുലത്തിൻെറ ദശാംശംവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (1936)

7. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിൻെറ ഭുജത്തിൻെറ നീളം 5സെ.മീ. ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം ച.സെ.മീ.ൻെറ ശതാംശം വരെ കൃത്യമായി കാണുക.

8. ഒരു സമചതുരത്തിൻെറ കണ്ണത്തിന്മേലുള്ള സമചതുരം സമചതുരത്തിൻെറ ഇരട്ടിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

9. ഒരു സമചതുരത്തിൻെറ കണ്ണത്തിൻെറ നീളം 2·6 ചങ്ങലയാണ്. എന്നാൽ സമചതുരത്തിൻെറ നീളം ഒരു കണ്ണിവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

10. 26′ നീളമുള്ള ഒരു കോണി ഒരു ചുവരിനോടു ചാരിവെച്ചിരിക്കുന്നു. കോണിയുടെ അഗ്രം 24′ ഉയരത്തിലാണെങ്കിൽ അതിൻെറ അടി ചുവരിൽനിന്നു എത്ര ദൂരെയാണ്? കോണിയുടെ അടി 2′ വഴുതിയാൽ അതിൻെറ അഗ്രം എത്ര അടി താഴും? ഒരു പടം വരച്ചു നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

11. ഒരു തെരുവിൻെറ ഇരുവശത്തും ചുവരുകളുണ്ടു. $32\frac{1}{2}$ അടി നീളമുള്ള ഒരു കോണി ഒരുവശത്തുള്ള ചുവരിന്മേൽ ചാരിവെച്ചപ്പോൾ അതിൻെറ അഗ്രം 28 അടി ഉയരത്തിലായിരുന്നു. ചുവടിളക്കാതെ മറുവശത്തുള്ള ചുവരിന്മേൽ ചാരിവെക്കുന്നതായാൽ കോണിയുടെ അഗ്രം $31\frac{1}{2}$ അടി ഉയരത്തിലായിരിക്കുമെങ്കിൽ തെരുവിൻെറ വീതി കാണുക. ഒരു പടം വരച്ചു നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

12. രണ്ടു തൂണുകളുടെ ഉയരം 12ഉം 32ഉം അടിയും അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരം 15 അടിയും ആണെങ്കിൽ അവയുടെ അഗ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം ഗണിക്കുക. പടം വരച്ചും കാണുക.

13. ഒരു സമചതുരവയലിൻെറ മദ്ധ്യത്തിൽ ഒരു കമ്പിത്തൂണുണ്ടു. വയലിൻെറ നീളം 20 വാരയും, തൂണിൻെറ ഉയരം 30അടിയും ആണെങ്കിൽ വയലിൻെറ ഒരു മൂലയിൽനിന്നു തൂണിൻെറ അഗ്രത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം അംഗുലംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

14. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിൻെറ ഉന്നതി 2·5″ ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ ഭുജത്തിൻെറ നീളം അംഗുലത്തിൻെറ ദശാംശംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

15. സമകോണചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു മുററത്തിൻെറ വീതി 3 വാരയും

അതിൻെറ കണ്ണത്തിൻെറ നീളം $9\frac{1}{4}$ വാരയും ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ ക്ഷേത്ര ഫലം എത്ര?

16. ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ ഭുജങ്ങൾ 4″, 2·9″, 2·9″ ആകുന്നു. എന്നാൽ അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. രൂപം വരച്ചും ക്ഷേ. ഫ. കാണുക.

17. ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൻെറ വിപുലരേഖയുടെ നീളം 18സെ. മീ. ഉം, ശേഷമുള്ള ഭുജങ്ങളിലൊന്നു മറേറതിൻെറ $\frac{3}{4}$ഉം ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ ക്ഷേ. ഫ. കാണുക.

18. ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൻെറ ഒരു ഭുജത്തിൻെറ നീളം 12സെ. മീ. ഉം, വിപുലരേഖ ശേഷമുള്ള ഭുജത്തേക്കാൾ 9സെ. മീ. അധികവുമാണെങ്കിൽ വിപുലരേഖയുടെ നീളം കാണുക.

19. ഒരു തുറമുഖത്തുനിന്നു രണ്ടു കപ്പലുകൾ ഒരേ സമയത്തു പുറപ്പെടുന്നു. ഒന്നു തെക്കോട്ടു മണിക്കൂറിൽ $18\frac{2}{3}$ നാഴികയും, മറേറതു കിഴക്കോട്ടു മണിക്കൂറിൽ 11 നാഴികയും വീതം പോകുന്നതായാൽ അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരം എപ്പോൾ 65 നാഴികയാകും?

20. ഒരു വേലിയിൽനിന്നു 15′ അകലെയായി നാട്ടീട്ടുള്ള ഒരു കററിയോടു ഒരു ആട്ടിനെ കെട്ടിയിരിക്കുന്നു. ആട്ടിന്നു 23′ ദൂരത്തോളം മേയാമെങ്കിൽ വേലിയുടെ എത്ര നീളത്തോളം അതിന്നു മേയാമെന്നു അടിവരെ കൃത്യമായി ഗണിക്കുക. തോതനുസരിച്ചു ഒരു പടം വരക്കുക. (1911)

21. ഒരു കാളവണ്ടിയുടെ കൂട് വൃത്താകൃതിയിലാണ്. വണ്ടിയുടെ വീതി 3′ഉം, ഉയരം 4′ഉം കൂടിൻെറ ഉയരം 5′ഉം ആണെങ്കിൽ കൂടിൻെറ വ്യാസം കാണുക.

22. ഒരു പാലത്തിൻെറ രണ്ടു തൂണുകൾ തമ്മിൽ 28′ ദൂരമുണ്ടു. ഈ തൂണുകളിന്മേൽ നില്ക്കുന്ന ഒരു കമാനത്തിൻെറ ഏററവും കൂടിയ ഉയരം 4′ ആണെങ്കിൽ കമാനം ഒരു ചാപമായിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക. (1914)

23. 30′ ഉയരമുള്ള ഒരു കവുങ്ങു മുറിഞ്ഞു അതിൻെറ അഗ്രം മുരട്ടിൽനിന്നു 15′ ദൂരത്തായി നിലത്തു കുത്തുന്നു. മുറിഞ്ഞ ഭാഗം തടിമരം വിടാതെ നില്ക്കുന്നുവെങ്കിൽ എവിടെവെച്ചാണ് കവുങ്ങു മുറിഞ്ഞതു?

24. താഴേ കാണുന്ന ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ ഉള്ള സമചതുരങ്ങൾ വരക്കുക:—

5ച. അം., 10ച. അം.. 15ച. അം., 8ച. സെ. മീ., 12ച. സെ. മീ., 17ച. സെ. മീ.

25. താഴേ കാണുന്ന സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം പടം വരച്ചു നിർണ്ണയിക്കുക. ഗണിച്ചുകിട്ടുന്ന ഉത്തരവുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തുക:—

3, 7, 19, 20, 31, 43, 59.

26. താഴേ പറയുന്ന നീളങ്ങളുള്ള സരളരേഖകൾ വരക്കുക:—
$\sqrt{14}$സെ.മീ., $\sqrt{18}$അം., $\sqrt{27}$സെ.മീ., $\sqrt{11}$അം., $\sqrt{33}$സെ.മീ., $\sqrt{6}$അം.

27. 2" നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരം വരക്കുക. അതിൻെറ (*a*) ഇരട്ടി, (*b*) 3 ഇരട്ടി (*c*) പകുതി (*d*) $\frac{1}{3}$ വലിപ്പമുള്ള സമചതുരം നിൎമ്മിക്കുക.

28. 2, 3, 5സെ.മീ. നീളമുള്ള 3 സമചതുരങ്ങളുടെ തുകയോടു സമമായ ഒരു സമചതുരം വരക്കുക. അതിൻെറ നീളം അളക്കുക. ഗണിച്ചു ഉത്തരം കാണുക.

29. ഒരു സരളരേഖ വരക്കുക. അതിൻെറ (*a*) $\sqrt{2}$ (*b*) $\sqrt{3}$ ഇരട്ടി നീളമുള്ള സരളരേഖകൾ വരക്കുക.

അദ്ധ്യായം 7.

വൃത്തം (The Circle).

ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസവും പരിധിയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.

3, 5, 7 സെ. മീ. വ്യാസാൎദ്ധമുള്ള 3 വൃത്തങ്ങൾ വരക്കുക. അവയുടെ പരിധിയിൽ ഒരു അടയാളം ഇട്ടശേഷം വക്ര രേഖകളുടെ നീളം അളക്കുന്ന മാൎഗ്ഗം ഉപയോഗിച്ചു അവയുടെ പരിധി അളക്കുക. ഓരോ വൃത്തത്തിൻെറയും പരിധിയെ വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന സംഖ്യ സ്ഥിരമാണെന്നും അതു സുമാർ $3\frac{1}{7}$ ആണെന്നും കാണാം.

പരിധിയും വ്യാസവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കൃത്യമായി നിൎണ്ണയിക്കുവാൻ സാധിക്കുന്നതല്ല. അതുകൊണ്ടു $\frac{\text{പരിധി}}{\text{വ്യാസം}} = \pi$ എന്നെഴുതുന്നു. πയുടെ വില ആവശ്യമുള്ളത്ര കൃത്യമായി നിൎണ്ണയിക്കാം. സാധാരണമായി അതിനെ 3·1416 എന്നോ $3\frac{1}{7}$ എന്നോ ഗണിച്ചുവരുന്നു. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരിധി

യേയും വ്യാസത്തേയും c, d എന്ന അക്ഷരങ്ങൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നതായാൽ $\frac{c}{d}=\pi$.

$\therefore c=\pi d$.

വ്യാസാൎദ്ധം r ആണെങ്കിൽ $C=2\pi r$.

ഈ സൂത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു വൃത്തങ്ങളുടെ പരിധി നിൎണ്ണയിക്കാം.

ഉദാ:—(1) ഒരു ചക്രത്തിന്റെ വ്യാസം $10\frac{1}{2}''$ ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ പരിധി കാണുക.

$c=\pi d=3\frac{1}{7}\times 10\frac{1}{2}$.

$\therefore$ പരിധി$=33$ അംഗുലം.

(2) ഒരു കിണററിന്റെ ആൾമറയുടെ നീളം 22 അടിയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാസാൎദ്ധം എത്രയാണ്?

$$r=\frac{c}{2\pi}=\frac{22}{2\times 3\frac{1}{7}}.$$

$\therefore$ വ്യാസാൎദ്ധം$=\underline{3\frac{1}{2}}$ അടി.

അഭ്യാസം 13.

1. താഴേ പറയുന്ന വ്യാസങ്ങളുള്ള വൃത്തങ്ങളുടെ പരിധികളെത്ര?

(*a*) 35സെ. മീ. (*b*) 4വാ. 1അ. 5അം. (*c*) 23 ചങ്ങല 52 കണ്ണി.

2. താഴെ പറയുന്ന പരിധികളുള്ള വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാൎദ്ധങ്ങൾ കാണുക.

(*a*) 264അം. (*b*) 68വാ. 1അ. 4അം. (*c*) 7 ചങ്ങല 92 കണ്ണി.

3. ഒരു കമ്പി 7″ വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തമായി വളയ്ക്കാം. അതിനെ ഒരു ചതുരമാക്കുന്നതായാൽ ചതുരത്തിന്റെ നീളം എത്രയായിരിക്കും?

4. ഒരു വണ്ടിയുടെ ചക്രത്തിന്റെ വ്യാസം 30″ ആണ്. അതു 1400 പ്രാവശ്യം ചുററുമ്പോൾ എത്ര ദൂരം പോകും?

5. ഒരു വണ്ടിയുടെ രണ്ടു ചക്രങ്ങളുടെ വ്യാസങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 4″ ആണ്. ഒരു നാഴിക ദൂരം പോകുമ്പോൾ വലിയ ചക്രം 720 പ്രാവശ്യം ചുററുന്നെങ്കിൽ അതേദൂരം പോകുമ്പോൾ ചെറിയതു എത്ര പ്രാവശ്യം അധികം ചുററും?

6. ഒരു ഘടികാരത്തിന്റെ സൂചികളുടെ നീളം 3ഉം 4ഉം അംഗുലമാണ് എന്നാൽ സൂചികളുടെ അററങ്ങൾ 1 ദിവസത്തിൽ ചുററുന്ന ദൂരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമെത്ര?

7. വൃത്താകാരമായ ഒരു ഓട്ടക്കുളത്തിന്റെ വീതി 8 വാരയും അതിന്റെ അകമേയുള്ള പരിധിയുടെ നാലിരട്ടി 1 നാഴികയുമാണെങ്കിൽ പുറമേയുള്ള പരിധിയുടെ നീളം കാണുക. (1911)

8. വൃത്താകാരമായ ഒരു കുളത്തിന്നു ചുററും ഒരു നടയുണ്ടു. കുളത്തിന്റെ പുറത്തേപരിധി അകത്തേപരിധിയേക്കാൾ 55 അടി അധികമാണെങ്കിൽ നടയുടെ വീതി കാണുക.

9. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയും വ്യാസവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 6″ ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാസം കാണുക.

10. രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസങ്ങളുടെ സംബന്ധം 2 : 3 ആണെങ്കിൽ അവയുടെ പരിധികളുടെ സംബന്ധം കാണുക.

11. 6″ വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ വരക്കാവുന്ന ഏററവും വലിയ ചതുരത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

12. 25″ നീളമുള്ള ഒരു കമ്പികൊണ്ടു ഒരു ചതുരവും അതിൽ അടങ്ങിയ ഏററവും വലിയ വൃത്തവും ഉണ്ടാക്കാമെങ്കിൽ ചതുരത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

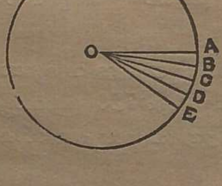
13. അൎദ്ധവൃത്താകൃതിയിലുള്ള ഒരു കിണററിന്നു ചുററും വാരക്കു 5ക. 11ണ. പ്രകാരം ആൾമറ കെട്ടുന്നതിന്നു 117ക. ചിലവാകുന്നെങ്കിൽ കിണററിന്റെ വ്യാസം കാണുക.

14. ഒരു ജനലിന്റെ ഒരററം ഒരു അൎദ്ധവൃത്തമാണ്. ജനലിന്റെ വീതി $3\frac{1}{2}$ അടിയും ഒട്ടാകെ ഉയരം 6 അടിയുമാണെങ്കിൽ ജനലിന്റെ ചട്ടത്തിന്റെ ആകെ നീളമെത്ര?

15. ഒരു കെട്ടിടത്തിന്റെ തറ ഒരു സമകോണചതുരവും അതിന്റെ രണ്ടററങ്ങളും അൎദ്ധവൃത്തങ്ങളുമാണ്. തറയുടെ ചുററളവു 200 അടിയും വീതി 21 അടിയുമാണെങ്കിൽ തറയുടെ ഒട്ടാകെ നീളമെത്ര?

16. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഭുജങ്ങളുടെ നീളം 4സെ. മീ. ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം നിൎണ്ണയിക്കുക.

വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം.



ഒരു വൃത്തത്തെ അനേകം വൃത്തകോണാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കാം. ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന വൃത്തത്തെ OAB, OBC, OCD, ... എന്നീ വൃത്തകോണാംശങ്ങളായി ഭാഗിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇവ ഓരോന്നും തീരെ ചെറുതാണെ

ങ്കിൽ OAB എന്ന വൃത്തകോണാംശത്തെ സുമാറായി AB ആധാരവും വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം ഉന്നതിയുമായ ഒരു ത്രികോണമായി കരുതാം.

വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം r ആണെന്നു വിചാരിക്കുക.

എന്നാൽ OAB എന്ന വൃത്തകോണാംശത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $\} = \frac{1}{2}AB \times r$

ഇതേപ്രകാരം OBC എന്ന വൃത്തകോണാംശത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $\} = \frac{1}{2}BC \times r$

,, OCD . . . . . $\} = \frac{1}{2}CD \times r$

$\therefore$ വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $= \frac{1}{2}(AB + BC + CD + \ldots)r$

$= \frac{1}{2} \times$ വൃത്തപരിധി $\times r$

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$

$= \pi r^2$.

ഈ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു വൃത്തങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലം ഗണിക്കാം.

ഉദാ:—(1) 7″ വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

$r = 3\frac{1}{2}$

$\therefore$ ക്ഷേത്രഫലം $= \pi r^2 = \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$ ച. അം.

$= 38\frac{1}{2}$ ച. അം.

(2) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം 616 ച. സെ. മീ. ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധമെത്ര?

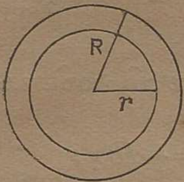
$\pi r^2 = 616$

$\therefore r^2 = \frac{616 \times 7}{22} = 196$

$\therefore r = 14$

$\therefore$ വ്യാസാർദ്ധം $= 14$ സെ. മീ.

(3) വൃത്താകാരമായ ഒരു കളത്തിന്നു ചുററും ഒരു നടയുണ്ടു. നടയുടെ അകത്തേയും പുറത്തേയും വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ r ഉം R ഉം വാരയാണെങ്കിൽ നടയുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.



നടയുടെ ക്ഷേത്രഫലം

$= \{\pi R^2 - \pi r^2\}$ ച. വാ.

$= \pi(R^2 - r^2)$ ച. വാ.

$= \pi(R+r)(R-r)$ ച. വാ.

അഭ്യാസം 14.

1. താഴേ പറയുന്ന വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുള്ള വൃത്തങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. 14 സെ. മീ., $17\frac{1}{2}$ അം., 5 മീററർ, 4·9 അടി.

2. താഴേ പറയുന്ന പരിധികളുള്ള വൃത്തങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. 33 അം., 73 വാ. 1 അടി, 12 സെ. മീ., 100 മീററർ.

3. താഴേ പറയുന്ന ക്ഷേത്രഫലങ്ങളുള്ള വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസം കാണുക. $38\frac{1}{2}$ ച. അം., 13·86 ച. സെ. മീ., $3\frac{1}{7}$ ച. ചങ്ങല, $\frac{35}{44}$ ഏക്കർ.

4. 1 ഏക്കർ ക്ഷേത്രഫലമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസമെത്ര? ക്ഷേത്രഫലം $\frac{1}{2}$ ഏക്കറാണെങ്കിൽ വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസം എത്രയായിരിക്കും? ഉത്തരം വാരയുടെ ദശാംശംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

5. ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിൻെറ ചുററളവു 1 വാരയാണെങ്കിൽ അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം എത്രയായിരിക്കും?

6. 7 വാര വ്യാസമുള്ള ഒരു കളത്തിന്നു ചുററും 1 വാര വീതിയുള്ള ഒരു നടയുണ്ടാക്കുവാൻ ച. അടിക്കു 2ണ. പ്രകാരം എന്തു ചിലവാകും?

7. ഏക കേന്ദ്രമായ (Concentric) രണ്ടു വൃത്തങ്ങളിൽ വലിയതിൻെറ വ്യാസം 21 അംഗുലവും വൃത്തങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള സ്ഥലത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം $192\frac{1}{2}$ ച. അംഗുലവും ആണെങ്കിൽ ചെറിയ വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസം കാണുക.

8. വൃത്താകാരമായ ഒരു കളത്തിന്നു ചുററും ഒരു നടയുണ്ടു. നടയുടെ അകത്തേയും പുറത്തേയും പരിധികൾ 100 ഉം 120 ഉം വാരയാണെങ്കിൽ നടയുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

9. 80 അടി വ്യാസമുള്ള ഒരു തോട്ടത്തിന്നു ചുററും ഒരു നടയുണ്ടു. നട

യുടേയും തോട്ടത്തിൻേറയും ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ സമമാണെങ്കിൽ നടയുടെ വീതി അടിയുടെ ദശാംശംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

10. 14″ നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിൽ വരക്കാവുന്ന ഏററവും വലിയ വൃത്തത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലമെത്ര? ആ വൃത്തത്തിൽ വരക്കാവുന്ന ഏററവും വലിയ സമചതുരത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലമെത്ര?

11. 44″നീളമുള്ള ഒരു കമ്പികൊണ്ടു ഒരു വൃത്തവുംഒരു സമചതുരവും ഉണ്ടാക്കുന്നതായാൽ ഏതായിരിക്കും അധികം വലിപ്പമുള്ളതു്? കിണറുകൾ വൃത്താകൃതിയിൽ ഉണ്ടാക്കുന്നതിന്നു ഒരു കാരണം ഈ ഉത്തരത്തിൽനിന്നു അനുമാനിക്കാമോ?

12. 12 സെ.മി. നീളവും 5 സെ.മി. വീതിയുമുള്ള ഒരു കടലാസ്സിൽനിന്നു മുറിച്ചെടുക്കാവുന്ന ഏററവും വലിയ വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസം എത്രയാണ്? അത്തരം എത്ര വൃത്തങ്ങൾ മുറിച്ചെടുക്കാം? ബാക്കിയാകുന്ന കടലാസ്സിൻെറ ക്ഷേത്രഫലമെത്ര?

13. ഒരു കഷ്ണം കടലാസ്സിൻെറ നീളം 18 അംഗുലവും വീതി 7 അംഗുലവുമാണ്. അതിൻെറ രണ്ടററങ്ങളും അർദ്ധവൃത്തങ്ങളാകണമെങ്കിൽ അതിൽനിന്നു കുറഞ്ഞതു എത്ര ച. അംഗുലം കടലാസ്സ മുറിച്ചെടുക്കണം?

14. ഒരു കഷ്ണം കടലാസ്സിൻെറ നീളം 12 സെ.മീ.ഉം വീതി 7 സെ.മീ.ഉം ആണ്. അതിൽനിന്നു മുറിച്ചെടുക്കാവുന്ന ഏററവും വലിയ അർദ്ധവൃത്തത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലമെത്ര? വീതി 5 സെ.മീ. ആണെങ്കിൽ അർദ്ധവൃത്തത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം എത്രയായിരിക്കും?

15. വൃത്താകാരമായ ഒരു കാപ്പിത്തോട്ടത്തിന്നു ചുററും ഇരിമ്പുവേലി കെട്ടുവാൻ വാരക്കു 1ക. 4ണ. പ്രകാരം 3025ക. ചിലവാകുന്നു. തോട്ടത്തിൽനിന്നു ഏക്കറിന്നു 284ക. വീതം വരവുണ്ടെങ്കിൽ ആകെ വരവു കാണുക.

16. രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസങ്ങൾ 3 : 4 എന്ന സംബന്ധത്തിലാണ്. എന്നാൽ അവയുടെ (*a*) പരിധികൾ (*b*) ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ ഏതു സംബന്ധത്തിലായിരിക്കും?

17. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം വേറൊരു വൃത്തത്തിൻെറ നാലിരട്ടിയാണ്. എന്നാൽ ഒന്നാമത്തേതിൻെറ പരിധി രണ്ടാമത്തേതിൻെറ എത്ര ഇരട്ടിയാണ്? ഒന്നാമത്തേതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം രണ്ടാമത്തേതിൻെറ പകുതിയാണെങ്കിൽ വ്യാസങ്ങൾ ഏതു സംബന്ധത്തിലാണ്?

18. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ ഇരട്ടി ക്ഷേത്രഫലമുള്ള ഒരു വൃത്തം നിങ്ങൾ എങ്ങിനെ വരക്കും?

19. രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധം 1ഉം 2ഉം അംഗുലമാണെങ്കിൽ രണ്ടും

കൂടിയത്ര ക്ഷേത്രഫലമുള്ള ഒരു വൃത്തം നിങ്ങൾ എങ്ങിനെ വരക്കും? അതിൻെറ വ്യാസാദ്ധം എത്രയാണു?

20. ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൻെറ ഭുജങ്ങളിന്മേൽ അവ വ്യാസങ്ങളായ അദ്ധവൃത്തങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഏററവും വലിയ അദ്ധവൃത്തത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം മററു രണ്ടിൻേറയും ക്ഷേത്രഫലങ്ങളുടെ തുകയോടു സമമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

21. വൃത്താകാരമായ ഒരു തോട്ടത്തിന്നു ചുററും 7 അടി വീതിയിൽ ഒരു നടയുണ്ടു. നടയുടെ ക്ഷേത്രഫലം 3674 ച. അടിയാണെങ്കിൽ തോട്ടത്തിൻെറ വ്യാസം കാണുക.

22. വൃത്താകാരമായ ഒരു കളത്തിൻെറ വ്യാസം d അടിയും അതിന്നു ചുററുമുള്ള ഒരു നടയുടെ വീതി a അടിയുമാണെങ്കിൽ നടയുടെ ക്ഷേത്രഫലം $\pi a (d+a)$ ച. അടിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

23. 4 അംഗുലം വ്യാസാദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ അന്തല്ലേഖനം ചെയ്ത (Inscribed) ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. (1938)

24. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിൻെറ ഭുജങ്ങളുടെ നീളം 3 സെ. മീ. ആണ്. എന്നാൽ അതിൻെറ പരിവൃത്തത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

വൃത്തകോണാംശങ്ങൾ (Sectors).

രണ്ടു വ്യാസാദ്ധങ്ങളാലും അവക്കിടയിലുള്ള ചാപത്താലും ചുററപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിൻെറ ഭാഗത്തിന്നു വൃത്തകോണാംശ(Sector)മെന്നു പേർ. വൃത്തകോണാംശത്തിൻെറ അതിരുകളായ രണ്ടു വ്യാസാദ്ധങ്ങൾക്കും ഇടയിലുള്ള കോണിനെ വൃത്തകോണാംശത്തിൻെറ കോൺ (Angle of the Sector) എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു കോണാംശത്തിൻെറ ചാപരേഖ അതിൻെറ കോണിന്നു ക്രമാനുപാതമായി മാറുന്നുവെന്നതു വ്യക്തമാണ്.

ഒരു മുഴു വൃത്തത്തെ ഒരു കോണാംശമായി കരുതുന്നതായാൽ അതിൻെറ ചാപരേഖ വൃത്തപരിധിയും അതിൻെറ കോൺ 360°ഉം ആയിരിക്കും.

∴ വൃത്തകോണാംശത്തിൻെറ കോൺ 1° ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ ചാപരേഖ = പരിധിയുടെ $\frac{1}{360}$.

കോൺ n° ആണെങ്കിൽ ചാപരേഖ = പരിധിയുടെ $\frac{n}{360}$. വ്യാസാദ്ധം r ആണെങ്കിൽ,

$$\text{ചാപരേഖ} = \frac{n}{360} \times 2\pi r.$$

ഇതേ ന്യായപ്രകാരം, വൃത്തകോണാംശത്തിൻെറ കോൺ n° ഉം വ്യാസാദ്ധം r ഉം ആണെങ്കിൽ കോണാംശത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം $= \frac{n}{360} \times \pi r^2$.

ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം നിണ്ണയിപ്പാൻ ഉപയോഗിച്ച ന്യായപ്രകാരം ഒരു വൃത്തകോണാംശത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം.

$$= \frac{\text{ചാപരേഖ} \times \text{വ്യാസാദ്ധം}}{2} \text{ എന്നു തെളിയിക്കാം.}$$

ഒരു കോണാംശത്തിൻെറ വ്യാസാദ്ധം r ഉം അതിൻെറ ചാപരേഖ l ഉം ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം,

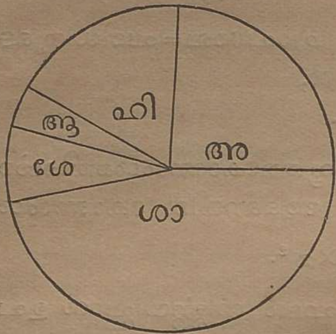
$$A = \frac{lr}{2}.$$

ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കോണാംശങ്ങളുടെ വലിപ്പം അവയുടെ കോണുകളുടെ വലിപ്പത്തിന്നു ക്രമാനുപാതമായതുകൊണ്ടു വിവിധ പരിമാണങ്ങളെ ചിത്രങ്ങൾ മുഖേന താരതമ്യപ്പെടുത്താം. ഉദാഹരണമായി ഭൂമിയിലെ സമുദ്രങ്ങളുടെ വിസ്തീണ്ണങ്ങളെ ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കോണാംശങ്ങളെക്കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കാം. സമുദ്രങ്ങളുടെ വിസ്തീണ്ണം മില്ല്യൻ ചതുരശ്രനാഴികയായി താഴേ ചേത്തിരിക്കുന്നു.

ശാന്തസമുദ്രം: 68; അത്ലാന്തിക്ക്: 35; ഹിന്ദുസമുദ്രം: 25;
ആർക്ടിക്ക്: 5·4; ശേഷമുള്ളവ: 11·6.

ആകെ വിസ്തീണ്ണമായ 145 മില്ല്യൻ ച. നാഴികയെ ഒരു വൃത്തംകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നതായാൽ ശാന്തസമുദ്രത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന കോണാംശത്തിൻെറ കോൺ $= \frac{68}{145} \times 360^\circ = 169^\circ$ (ഡിഗ്രി വരെ കൃത്യം).

ഇതേപ്രകാരം മററു കോണാംശങ്ങളുടെ കോണുകൾ യഥാക്രമം 87, 62 13, 29, ഡിഗ്രി ആയിരിക്കും.



5സെ. മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരച്ചു കേന്ദ്രത്തിൽ മേല്പറഞ്ഞ കോണുകളെ വരക്കുക.

ഓരോ കോണാംശത്തിന്മേലും അതു സൂചിപ്പിക്കുന്ന സമുദ്രത്തിൻെറ പേർ എഴുതുക. ഇങ്ങിനെ വരക്കുന്നതിനാൽ അവയുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാം.

9സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തകോണാംശത്തിൻെറ കോൺ$=140°$. എന്നാൽ അതിൻെറ ചാപരേഖയുടെ നീളവും ക്ഷേത്രഫലവും കാണുക.

ചാപരേഖയുടെ നീളം, $l=\frac{n}{360}\times 2\pi r$

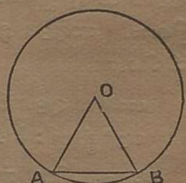
$=\frac{140}{360}\times 2\times\frac{22}{7}\times 9$സെ.മീ. $=22$സെ.മീ.

ക്ഷേത്രഫലം, $A=\frac{n}{360}\times\pi r^2=\frac{140}{360}\times\frac{22}{7}\times 9\times 9$ച.സെ.മീ.

$=99$ ച. സെ.മീ.

$A=\frac{lr}{2}$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു ഈ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

വൃത്തഖണ്ഡങ്ങൾ (Segments of Circles).



7 അംഗുലം വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ $3\frac{1}{2}$ അം. നീളമുള്ള ഒരു ജ്യാവു വരക്കുന്നതിനാലുണ്ടാവുന്ന ചെറിയ വൃത്തഖണ്ഡത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

വ്യാസാർദ്ധം $3\frac{1}{2}''$ ആയതുകൊണ്ടു

$OA=OB=AB$

$\therefore AOB$ ഒരു സമഭുജത്രികോണമാണ്. ചെറിയ ഖണ്ഡം$=AOB$ എന്ന കോണാംശം$-\triangle AOB$.

$$=\left(\frac{60}{360}\times\frac{22}{7}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{2}\right) \text{ച. സെ. മീ.}$$

$$=1\cdot11 \text{ ച. സെ. മീ. (2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യം.)}$$

വലിയ ഖണ്ഡം ഒരു കോണാംശത്തിൻേറയും ഒരു ത്രികോണത്തിൻേറയും തുകയായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 15.

1. താഴേ പറയുന്ന വൃത്തകോണാംശങ്ങളുടെ ചാപങ്ങളുടെ നീളവും ക്ഷേത്രഫലവും കാണുക.

(*a*) വ്യാസം 7സെ. മീ., കോൺ 72°.

(*b*) വ്യാസാർദ്ധം 9 അംഗുലം, കോൺ 35°.

(*c*) ,, 4 അടി, ,, 245°.

2. ഒരു വൃത്തകോണാംശത്തിൻെറ വ്യാസം 12·6സെ. മീ. ഉം ചാപം 11സെ. മീ. ഉം ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ കോൺ എത്ര ഡിഗ്രിയാണ്? ക്ഷേത്രഫലവും കാണുക.

3. ഒരു വൃത്തകോണാംശത്തിൻെറ കോൺ 60°യും, ചാപം 10 അംഗുലവും ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ വ്യാസമെത്രയാണ്?

4. ഒരേ ധ്രുവക (Meridian) ത്തിലുള്ള രണ്ടു പട്ടണങ്ങളുടെ അക്ഷാംശ (Latitude) ങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം 21° ആണെങ്കിൽ അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരം നാഴികവരെ കൃത്യമായി ഗണിക്കുക. (ഭൂമി 8000 നാഴിക വ്യാസമുള്ള ഒരു ഗോളമാണെന്നു കരുതുക).

5. 6സെ. മീ. വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരച്ചു അതിനെ 3 സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുക.

6. ഒരു സമ്മിശ്രലോഹത്തിൽ ചെമ്പു, നിക്കൽ, തുത്തനാകം എന്നീ ലോഹങ്ങൾ 55 : 24 : 21 എന്ന സംബന്ധത്തിൽ ചേർത്തിട്ടുണ്ടു. വൃത്തകോണാംശങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ ലോഹങ്ങളുടെ തൂക്കങ്ങൾക്കനുസരിച്ചാകത്തക്കവണ്ണം 2″ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തെ മൂന്നു അംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുക. ഓരോ കോണാംശത്തിൻേറയും കോണിൻെറ വലിപ്പം ഡിഗ്രിവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (1936)

7. ഒരു വൃത്തകോണാംശത്തിൻെറ വ്യാസം 3സെ. മീ. ഉം അതിൻെറ ചുററളവു 10സെ. മീ. ഉം ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലമെത്ര?

8. ഒരു വൃത്തകോണാംശത്തിന്റെ കോൺ 63°യും ക്ഷേത്രഫലം 55 ച. അംഗുലവുമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ചുററളവു കാണുക.

9. 40 അടി നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരവയലിന്റെ ചുററും വേലിയുണ്ട്. വയലിന്റെ ഒരു മൂലയിൽ നാട്ടിയ ഒരു കററിയോടു 21 അടി നീളമുള്ള ഒരു കയറുകൊണ്ടു വേലിക്കു പുറമെ കെട്ടിയ ഒരു പശുവിന്നു മേയാവുന്ന നിലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. വേലിക്കു 14 അടി നീളം മാത്രമേയുള്ളുവെങ്കിൽ അതിന്നു മേയാവുന്ന സ്ഥലം ഒരു പടം വരച്ചു കാണിക്കുക. നിലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

10. ഒരു മൈതാനത്തിലുള്ള ഒരു വീട്ടിന്റെ തറ 28 അടി നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരമാണ്. വീട്ടിന്റെ ഒരു മൂലയിലുള്ള ഒരു കററിയോടു 35 അടി നീളമുള്ള ഒരു കയറുകൊണ്ടു കെട്ടിയ ഒരു പശുവിന്നു മേയാവുന്ന നിലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. (1919)

11. 7സെ. മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലുള്ള ഒരു ജ്യാവിന്നെതിരായി കേന്ദ്രത്തിലുള്ള കോൺ (*a*) 60° (*b*) 90° (*c*) 120° ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ രണ്ടു ഖണ്ഡങ്ങളുടേയും ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. രണ്ടുംകൂട്ടി വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കിട്ടുന്നുവോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. (ഉത്തരം 1 ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കൃത്യമായി കാണുക.)

12. ഒരു ലവണത്തിൽ Sodium, Nitrogen, Oxygen എന്നിവയുടെ തൂക്കത്തിന്റെ സംബന്ധം 23 : 14 : 48 ആണെങ്കിൽ വൃത്തകോണാംശങ്ങൾ കൊണ്ടു ലവണത്തിന്റെ യോഗം സൂചിപ്പിക്കുക. കോണുകളുടെ വലിപ്പം ഡിഗ്രിയുടെ ദശാംശംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

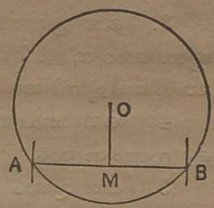
13. ഏഷ്യാ, യൂറോപ്പു, ആഫ്രിക്ക, ആസ്ത്രേലിയം, വടക്കെ അമേരിക്ക, തെക്കെ അമേരിക്ക എന്നീ വൻകരകളുടെ വിസ്തീർണ്ണം 17·0, 3·8, 11·4, 3·0, 8·0, 6·8, മില്യൻ ചതുരശ്ര നാഴിക ആകുന്നു. 3 അംഗുലം വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരച്ചു വൻകരകളുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ സംബന്ധം കോണാംശങ്ങൾകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുക. ഓരോ കോണാംശത്തിലും കോണിന്റെ വലിപ്പവും (ഡിഗ്രിവരെ കൃത്യമായി) അതു സൂചിപ്പിക്കുന്ന വൻകരയുടെ പേരും വൃത്തിയായി ചേർക്കുക. (1922)

അദ്ധ്യായം 8.

വൃത്തങ്ങളുടെ ചില ഗുണങ്ങൾ

(Some Properties of Circles).

O കേന്ദ്രമായി 5 സെ.മീ. വ്യാസാദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരക്കുക. അതിൽ 8 സെ.മീ. നീളത്തിൽ *AB* എന്നൊരു ജ്യാവ് വരക്കുക. *AB*യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തി അതിന്നു *M* എന്നു പേർ കൊടുക്കുക.



വേറെ വൃത്തങ്ങളും ജ്യാവുകളും വരച്ച് ഇതേ പരീക്ഷണം ചെയ്യുക. നിങ്ങൾ എന്തു അനുമാനിക്കുന്നു?

അനുമാനം— (1) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തേയും ഒരു ജ്യാവിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിനേയും കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന സരളരേഖ ആ ജ്യാവിന്നു ലംബമാണ്.

വൃത്തങ്ങളും ജ്യാവുകളും വരച്ച് താഴെ പറയുന്ന സംഗതികൾ അനുമാനിക്കാമോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(2) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു ഒരു ജ്യാവിലേക്കുള്ള ലംബരേഖ ആ ജ്യാവിനെ രണ്ടു സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു.

(3) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ജ്യാവുകളുടെ ദ്വിഭാജകലംബങ്ങൾ അതിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽകൂടി കടന്നുപോകുന്നു.

(4) ഒരേ നീളമുള്ള ജ്യാവുകൾ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു സമദൂരത്താണ്.

(5) ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു ഒരേ ദൂരത്തിലുള്ള ജ്യാവുകളുടെ നീളം സമമാണ്.

(6) രണ്ടു ജ്യാവുകൾ സമമല്ലെങ്കിൽ വലിയതു ചെറിയതിനെക്കാൾ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിനോടു അധികം അടുത്തിരിക്കും.

അഭ്യാസം 16.

1. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസം 8സെ.മീ. ആണ്. അതിലുള്ള രണ്ടു ജ്യാവുകളുടെ നീളം 6·4ഉം 4ഉം സെ.മീ. ആണെങ്കിൽ അവയിൽനിന്നു കേന്ദ്രത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം ഗണിക്കുക. വൃത്തം വരച്ചു നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു നോക്കുക.

2. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസാർദ്ധം 2″ ആകുന്നു. അതിൽ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു 1ഉം 1·5ഉം അംഗുലം അകലെയായി രണ്ടു ജ്യാവുകൾ വരച്ചു അവയുടെ നീളം അളക്കുക. നീളം ഗണിച്ചു അളന്നുകിട്ടിയ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു നോക്കുക.

3. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു 3സെ.മീ. അകലെയുള്ള ഒരു ജ്യാവിൻെറ നീളം 7 സെ.മീ. ആകുന്നു. എന്നാൽ വൃത്തം വരക്കുക. വ്യാസാർദ്ധം ഗണിച്ചു നിങ്ങൾ വരച്ച വൃത്തം ശരിയോ എന്നു നോക്കുക.

4. ഒരു ചാപരേഖ വരച്ചിട്ടുണ്ടു. ഈ ചാപരേഖ ഒരു അംശമായിട്ടുള്ള മുഴു വൃത്തം നിങ്ങൾ എങ്ങിനെ വരക്കും?

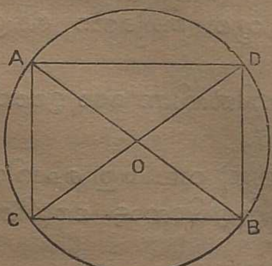
5. ഒരു വൃത്തം വരക്കുക. അതിൽ P എന്നൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക.

(a) P മദ്ധ്യബിന്ദുവായിട്ടുള്ള ജ്യാവു വരക്കുക.

(b) Pയിൽക്കൂടി വരക്കാവുന്ന ജ്യാവുകളിൽ ഏററവും നീളം കുറഞ്ഞതു ഏതാണ്?

6. ഒരു വൃത്തം വരച്ചു അതിൻെറ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു സമദൂരത്തായി രണ്ടു ജ്യാവുകൾ വരക്കുക. അവയുടെ നീളം താരതമ്യപ്പെടുത്തുക. ഇവയിലും അധികം ദൂരത്തായി വേറൊരു ജ്യാവു വരക്കുക. അതിൻെറ നീളവും ആദ്യം വരച്ച ജ്യാവുകളുടെ നീളവും താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

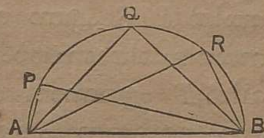
ഓരോന്നും മറേറതിനെ 2 സമഭാഗങ്ങളാക്കത്തക്കവണ്ണം AB, CD എന്ന 2 സമസരളരേഖകളെ വരക്കുക. അവയുടെ അററങ്ങളെ ക്രമത്തിൽ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്നതായാൽ ഒരു സമകോണചതുരം കിട്ടും. എന്തുകൊണ്ട്?



O കേന്ദ്രവും OA വ്യാസാർദ്ധവും ആയി ഒരു വൃത്തം വരക്കുന്നതായാൽ അതു B, C, D എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടികടന്നുപോകുന്നതായി കാണാം. AB ഈ വൃത്തത്തിൻെറ ഒരു വ്യാസമായതുകൊണ്ടു ADB ഒരു അർദ്ധവൃത്തമാണ്. ADB എന്ന കോൺ ഒരു സമകോ

ണാണെന്നതു വ്യക്തമാണല്ലോ. പടത്തിലുള്ള വേറെയും 3 അൎദ്ധവൃത്തങ്ങളേയും അവയിൽ അടങ്ങിയ കോണുകളേയും കണ്ടുപിടിക്കുക.

AB വ്യാസമായ ഒരു അൎദ്ധവൃത്തം വരക്കുക.



അതിൻെറ പരിധിയിന്മേൽ P എന്നൊരു ബിന്ദു അടയാളപ്പെടുത്തുക. AP, BP ചേൎക്കുക. എന്നാൽ APB എന്ന കോണിനെ അൎദ്ധവൃത്തത്തിലുള്ള കോൺ (angle in a semicircle) എന്നു പറയുന്നു.

ഇതിനെ അളക്കുക.

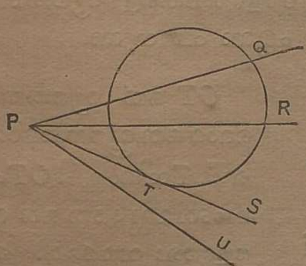
പടത്തിൽ കാണുന്നപ്രകാരമുള്ള അൎദ്ധവൃത്തത്തിലെ വേറെയും കോണുകളെ അളക്കുക. കോണുകളുടെ വലിപ്പം എത്രയാണ്? അവ സമകോണ($90°$)കളാണെന്നു കാണാം.

വിവിധ വ്യാസാൎദ്ധങ്ങളുള്ള കുറെ അൎദ്ധവൃത്തങ്ങൾ വരച്ചു അവയിലേയും കോണുകളെ അളക്കുക. നിങ്ങൾ എന്തു അനുമാനിക്കുന്നു?

ഒരു അൎദ്ധവൃത്തത്തിലെ കോൺ ഒരു സമകോണാകുന്നു.

സ്പൎശരേഖകൾ (Tangents).

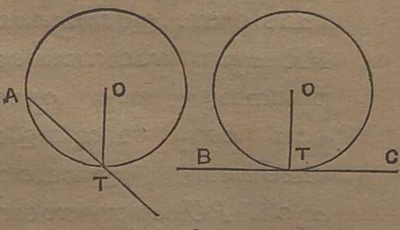
Pയിൽ കൂടിയുള്ള ഒരു സരളരേഖ P എന്ന ബിന്ദുവിനെ ചുററിക്കൊണ്ടു തിരിയുന്നുവെന്നു വിചാരിക്കുക. ആ സരളരേഖ Q എന്ന സ്ഥാനത്തിലെത്തുമ്പോൾ വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. ഇതേപ്രകാരം PR എന്ന സ്ഥാനത്തിലെത്തുമ്പോഴും അതു വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. ഇങ്ങിനെ ചുററി PU എന്ന സ്ഥാനത്തിലെത്തുമ്പോൾ അതു വൃത്തത്തിന്നു പുറത്താകുന്നു.



PR എന്ന സ്ഥാനത്തിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ട PU എന്ന

സ്ഥാനത്തിലെത്തുന്നതിലിടക്കു ചുററിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്ന സരളരേഖ വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കാതെ വൃത്തവുമായി സന്ധിക്കുന്ന ഒരു സ്ഥാനമുണ്ടു. ഇതു പടത്തിൽ PTS എന്ന സ്ഥാനമാണ്. സരളരേഖ ആ സ്ഥാനത്തിലിരിക്കുമ്പോൾ അതിന്നും വൃത്തത്തിന്നും പൊതുവിൽ T എന്നൊരു ബിന്ദുവുണ്ടു. ഇങ്ങിനെ ഒരു സരളരേഖ അതിനെ എത്രതന്നെ നീട്ടിയാലും ഒരു വൃത്തത്തെ ഛേദിക്കാതെ ഒരു ബിന്ദുവിൽമാത്രം അതിനോടു സന്ധിക്കുമ്പോൾ ആ സരളരേഖയെ വൃത്തത്തിന്റെ **സ്പൃശ്രേഖ (Tangent)** യെന്നും സരളരേഖ വൃത്തത്തെ **സ്പൃശിക്കുന്നു (Touch)**വെന്നും പറയുന്നു. സരളരേഖക്കും വൃത്തത്തിന്നും പൊതുവിലുള്ള ബിന്ദുവിനെ, അതായതു ഒരു സരളരേഖ ഒരു വൃത്തത്തെ ഏതു ബിന്ദുവിൽ സ്പൃശിക്കുന്നുവോ ആ ബിന്ദുവിനെ **സ്പൃശ്ബിന്ദു (Point of Contact)** വെന്നും പറയുന്നു.

പടത്തിൽ PS എന്ന സരളരേഖ വൃത്തത്തെ T എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പൃശിക്കുന്നു. PS വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു സ്പൃശ്രേഖയും T അവയുടെ സ്പൃശ്ബിന്ദുവുമാണ്. വൃത്തത്തെ ഛേദിക്കുന്ന PQ, PR എന്ന സരളരേഖകളെ വൃത്തത്തിന്റെ **ഛേദരേഖകൾ (Secants)** എന്നു പറയുന്നു.

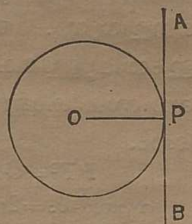


OT ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു വ്യാസാർദ്ധമാണ്. Tയിൽകൂടി OTക്കു ലംബമല്ലാത്ത ഒരു സരളരേഖ വരക്കുക. അതു വൃത്തത്തെ വേറൊരു ബിന്ദുവിലും കൂടി ഛേദിക്കുന്നതായി കാണാം. Tയിൽകൂടി OTക്കു ലംബമായി ഒരു സരളരേഖ വരക്കുക.

അതു വൃത്തത്തെ ഛേദിക്കുന്നില്ലെന്നും Tയിൽ അതിനെ സ്പൎശിക്കുന്നുവെന്നും കാണാം.

അതായതു ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരിധിയിലുള്ളൊരു ബിന്ദുവിൽകൂടി വ്യാസാൎദ്ധത്തിന്നു ലംബമായി വരച്ചിട്ടുള്ളൊരു സരളരേഖ ആ വൃത്തത്തിൻെറ ഒരു സ്പൎശരേഖയായിരിക്കും.

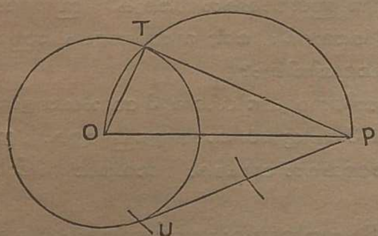
ഇതിൽനിന്നു ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരിധിയിലുള്ളൊരു ബിന്ദുവിൽകൂടി ഒരു സ്പൎശരേഖ വരക്കുന്ന മാൎഗ്ഗം അനുമാനിക്കാം.



O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരിധിയിലുള്ള P എന്നൊരു ബിന്ദുവിൽകൂടി ഒരു സ്പൎശരേഖ വരക്കണമെന്നു വിചാരിക്കുക.

OP എന്ന വ്യാസാൎദ്ധം വരക്കുക. OPക്കു ലംബമായി APB എന്ന സരളരേഖ വരക്കുക. എന്നാൽ APB വൃത്തത്തിൻെറ P എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പൎശരേഖയാണ്.

സ്പൎശരേഖകളുടെ മേൽപ്രസ്താവിച്ച ലക്ഷണത്തെ ആസ്പദമാക്കി ഒരു വൃത്തത്തിന്നു പുറമെയുള്ളൊരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു വൃത്തത്തിന്നു ഒരു സ്പൎശരേഖ വരക്കാം.



O വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രവും P അതിന്നു പുറമെയുള്ളൊരു ബിന്ദുവുമാണെന്നു വിചാരിക്കുക.

OP എന്ന സരളരേഖ വ്യാസമായി വൃത്തത്തെ Tയിൽ ഛേദിദിക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു അൎദ്ധവൃത്തം വരക്കുക. OT, PT എന്ന

സരളരേഖകൾ വരക്കുക. എന്നാൽ PT വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു സ്പൎശരേഖയായിരിക്കും.

$\angle OTP$ = ഒരു അൎദ്ധവൃത്തത്തിലെ കോൺ = 1 സമകോൺ. OT ഒരു വ്യാസാൎദ്ധമായതുകൊണ്ടു അതിന്നു ലംബമായ TP ഒരു സ്പൎശരേഖയായിരിക്കണം.

OP വ്യാസമായ വൃത്തം O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തെ വീണ്ടും U എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നതുകൊണ്ടു UPയും ഒരു സ്പൎശരേഖയാണ്. ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു ഒരു വൃത്തത്തിലേക്കു രണ്ടു സ്പൎശരേഖകൾ വരക്കാമെന്നു ഇതിൽനിന്നു തെളിയുന്നു. അവ സമമാണെന്നും അവയ്ക്കും OPയ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോണുകൾ സമമാണെന്നും കാണാം. OTP ഒരു സമകോണായതുകൊണ്ടു സ്പൎശരേഖയുടെ നീളം ഗണിക്കാം.

$$PT^2 = OP^2 - OT^2$$

വ്യാസാൎദ്ധം = 2·5 സെ.മീ.ഉം P എന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു 6·5 സെ.മീ. അകലെയാണെന്നും വിചാരിക്കുക.

എന്നാൽ $PT^2 = (6{\cdot}5^2 - 2{\cdot}5^2)$ ച. സെ.മീ. = 36 ച. സെ.മീ.

$\therefore PT = 6$ സെ.മീ.

പടം വരച്ചു സ്പൎശരേഖ അളക്കുക.

അഭ്യാസം 17.

1. 3″ വ്യാസമുള്ളൊരു വൃത്തത്തിൽ രണ്ടു വ്യാസങ്ങൾ വരക്കുക. വ്യാസങ്ങളുടെ അറ്റങ്ങളിൽക്കൂടി വൃത്തത്തിന്നു സ്പൎശരേഖകൾ വരക്കുക. സ്പൎശരേഖകളാൽ നിൎമ്മിതമായ ക്ഷേത്രം ഏതു തരമാണ്? രണ്ടു വ്യാസങ്ങളും പരസ്പരം ലംബങ്ങളാണെങ്കിൽ ക്ഷേത്രം ഏതുതരമായിരിക്കും?

2. 1″ വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ പരിധിയെ 3 സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കത്തക്കവണ്ണം പരിധിയിന്മേൽ 3 ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി വൃത്തത്തിന്നു സ്പൎശരേഖകൾ വരക്കുക. അവയാൽ നിൎമ്മിതമായ ക്ഷേത്രം ഏതുതരമാണ്?

3. ഒരു വൃത്തത്തിൽ OA, OB എന്ന രണ്ടു വ്യാസാൎദ്ധങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ 100°യാണ്. എന്നാൽ A, B എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി വരച്ച സ്പൎശരേഖകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ എത്ര ഡിഗ്രിയായിരിക്കും? (1935)

4. 3″ വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരക്കുക. അന്യോന്യം 90° ചരിഞ്ഞുള്ള രണ്ടു സ്പൎശരേഖകൾ വരക്കുക. സ്പൎശരേഖകൾക്കും വൃത്തത്തിന്നും ഇടയിലുള്ള സ്ഥലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം ച അംഗുലത്തിന്റെ 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.

5. 5സെ. മീ. വ്യാസാൎദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു 13സെ. മീ. അകലെയുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു വൃത്തത്തിലേക്കു രണ്ടു സ്പൎശരേഖകൾ വരക്കുക. അവയുടെ നീളം അളക്കുക. നീളം ഗണിക്കുക.

6. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാൎദ്ധം r സെ. മീ. ആണ്. വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു d സെ. മീ. അകലെയുള്ളൊരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു വൃത്തത്തിലേക്കു ഒരു സ്പൎശരേഖ വരക്കുന്നതായാൽ അതിന്റെ നീളം എത്രയായിരിക്കും?
$r=3$; $d=8$; $r=4$; $d=7$. എന്നാൽ നീളം കാണുക. സ്പൎശരേഖ വരച്ചു ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു നോക്കുക.

7. 2″ വ്യാസാൎദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിലേക്കു ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നുള്ള സ്പൎശരേഖയുടെ നീളം 2·1″ ആണെങ്കിൽ ആ ബിന്ദു കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു എത്ര അകലെയാണ്? സ്പൎശരേഖ വരച്ചു ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു നോക്കുക.

8. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു 9 സെ. മീ. അകലെയുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നു വൃത്തത്തിലേക്കുള്ള സ്പൎശരേഖയുടെ നീളം 6സെ. മീ. ആണെങ്കിൽ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസം കാണുക. വൃത്തം വരക്കുക.

9. 1·5″ വ്യാസാൎദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തം വരക്കുക. അതിന്നു (a) ഒരു സമചതുരം (b) ഒരു സമഭുജത്രികോണം പരിലേഖനം ചെയ്യുക. (circumscribe)

10. 3·5സെ. മീ. വ്യാസാൎദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്നു ഒരു സമഷഡ്കോണക്ഷേത്രം പരിലേഖനം ചെയ്യുക.

11. 2″ വ്യാസമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്നു ഒരു സമഅഷ്ടകോണക്ഷേത്രം പരിലേഖനം ചെയ്യുക.

12. 3·5സെ. മീ. വ്യാസാൎദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്നു അന്യോന്യം 60° ചരിഞ്ഞ രണ്ടു സ്പൎശരേഖകൾ വരക്കുക. സ്പൎശരേഖകൾക്കും വൃത്തത്തിന്നും ഇടയിലുള്ള സ്ഥലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം ച. സെ. മീ.ന്റെ 2 ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കൃത്യമായി കാണുക.

13. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഭുജങ്ങളുടെ നീളം 7ഉം 8ഉം 9ഉം സെ. മീ. ആണ്. അതിൽ ഒരു വൃത്തം അന്തൎല്ലേഖനം ചെയ്യുക. (Inscribe) അതിന്റെ വ്യാസാൎദ്ധം അളക്കുക.

14. ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ളൊരു പറമ്പിന്റെ അതിരുകളുടെ നീളം 92ഉം, 46ഉം, 68ഉം അടിയാണ്. ആ പറമ്പിൽ കുഴിക്കാവുന്ന ഏററവും വലിയ വൃത്താകാരമായ കിണറിന്റെ വ്യാസം കാണുക.

അദ്ധ്യായം 9.

ത്രികോണനിർമ്മാണം

(Construction of Triangles).

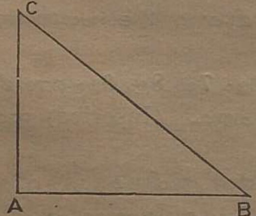
a. സമകോണത്രികോണം (Right angled Triangle).

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു കോൺ ഒരു സമകോൺ ആണെന്നറിഞ്ഞാൽ അതിന്നു പുറമെ ഏതെങ്കിലും 2 അംഗങ്ങ (elements) ളും അറിഞ്ഞിരുന്നാൽ ത്രികോണം നിർമ്മിക്കാം. ഇവയിൽ ഒന്നു ഒരു ഭുജമായിരിക്കണം. അതിനാൽ ഒരു സമകോണത്രികോണം നിർമ്മിക്കുവാൻ താഴെ പറയുന്ന നിർദ്ദിഷ്ടങ്ങൾ മതിയാകും.

1. സമകോണിന്റെ ഭുജങ്ങൾ.
2. സമകോണിന്റെ ഒരു ഭുജവും ഒരു കോണും.
3. വിപുലരേഖയും ഒരു കോണും (ന്യൂനകോൺ).
4. വിപുലരേഖയും ഒരു ഭുജവും.

1ഉം 2ഉം 3ഉം സാധാരണ ത്രികോണങ്ങളെ നിർമ്മിക്കുന്ന രീതിയിൽ പെട്ടവയായതുകൊണ്ടു 4-ാമത്തേതു മാത്രം ഇവിടെ ചിന്തിക്കേണ്ടതുള്ളു.

ഉദാ. 1. $\triangle ABC$ത്തിൽ $\angle A = 90°$, $AB = 2{\cdot}4''$, $BC = 3''$. ത്രികോണം നിർമ്മിച്ചു AC അളക്കുക.



നിർമ്മാണം. A ഒരു സമകോണായതുകൊണ്ടു $AC \perp AB$. അതിനാൽ $2{\cdot}4''$ നീളത്തിൽ AB വരച്ചു അതിന്നു ലംബമായി ഒരു സരള രേഖ വരക്കുക. ഈ സരള രേഖയെ Cയിൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം B കേന്ദ്രവും $3''$ വ്യാസാർദ്ധവുമായി ഒരു ചാപരേഖ വരക്കുക. എന്നാൽ ABC ആവശ്യപ്പെട്ട ത്രികോണമായിരിക്കും. AC അളക്കുക. പൈത്താഗൊറസ്സിന്റെ പ്രമേയം ഉപയോഗിച്ചു ACയുടെ നീളം ഗണിക്കുക.

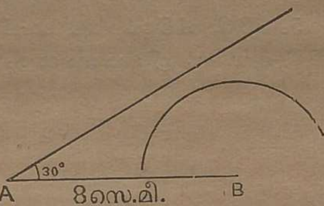
$AC^2 = BC^2 - AB^2 = (3^2 - 2{\cdot}4^2)$ ച.അം. $= (9 - 5{\cdot}76)$ ച. അം.
$= 3{\cdot}24$ ച.അം.

$\therefore\ AC = \sqrt{3{\cdot}24}$ അം. $= 1{\cdot}8$ അം.

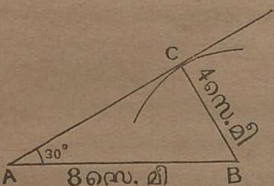
നിങ്ങൾ കൃത്യമായി വരക്കുന്നതായാൽ $AC = 1{\cdot}8''$ എന്നു കാണാം.

b. 2 ഭുജങ്ങളും അവയ്ക്കിടയിലല്ലാത്ത ഒരു കോണും തന്നാൽ നിൎമ്മിക്കാവുന്ന ത്രികോണത്തെപ്പററി ഇപ്പോൾ പ്രതിപാദിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി $AB = 8$സെ. മീ. $A = 30°$. $\triangle ABC$ നിൎമ്മിക്കണം. BCയുടെ നീളം താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഓരോന്നും ആകുമ്പോൾ നിൎമ്മിക്കാവുന്ന ത്രികോണങ്ങളെ പരിശോധിക്കുക. Bയിൽനിന്നു അതിന്നെതിരായ ഭുജത്തിലേക്കുള്ള ലംബരേഖയുടെ നീളം 4സെ.മീ. ആണ്.

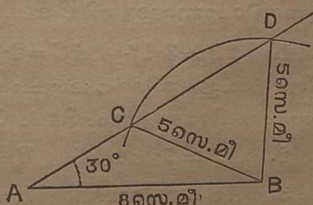


1. അതിനാൽ BCയുടെ നീളം 4സെ.മീ.ൽ കുറവാകുമ്പോൾ $\triangle ABC$ നിൎമ്മിക്കാവുന്നതല്ല.

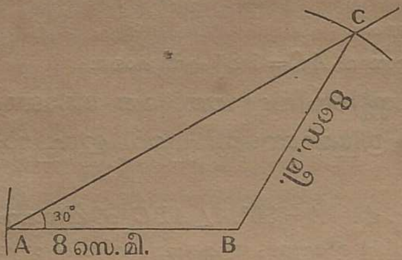


2. $BC = 4$സെ.മീ. ആണെങ്കിൽ B കേന്ദ്രവും 4സെ. മീ. വ്യാസാൎദ്ധവുമായി വരക്കുന്ന ചാപരേഖ Bക്കെതിരായ ഭുജത്തെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം കൂട്ടിമുട്ടുന്നതുകൊണ്ടു നിശ്ചിത അളവുകളുള്ള $\triangle ABC$ നിൎമ്മിക്കാം. ഇതു ഒരു സമകോണത്രികോണമായിരിക്കും. എന്തുകൊണ്ടു?

3. BC 4സെ. മീ.നേക്കാൾ വലിയതും ABയേക്കാൾ ചെറിയതും ആണെന്നു വിചാരിക്കുക. ഉദാഹരണമായി $BC = 5$സെ. മീ. എന്നു വിചാരിക്കുക. എന്നാൽ B കേന്ദ്രവും വ്യാസാൎദ്ധം 5സെ. മീ.ഉം ആയി വരക്കുന്ന ചാപരേഖ Bക്കെതിരായ ഭുജത്തെ 2 വ്യത്യസ്തപ്പെട്ട ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നുവെന്നും നിശ്ചിത അളവുകളുള്ള ABC എന്ന 2 ത്രികോണങ്ങൾ നിൎമ്മിക്കാമെന്നും കാണാം. ഇതിനെ സന്ദിഗ്ദ്ധസംഗതി (Ambiguous Case) എന്നു പറയുന്നു. രണ്ടു

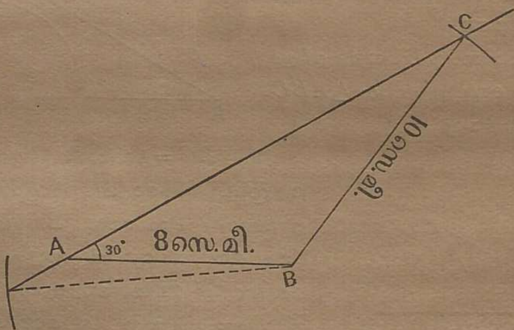


ത്രികോണങ്ങളിൽ ഒന്നു അധികകോണത്രികോണവും മറേറതു ന്യൂനകോണത്രികോണവും ആയിരിക്കും. അധികകോൺ അതിൻെറ സദൃശകോണിൻെറ പരിപൂരകമായിരിക്കും.



4. BC, ABക്കു സമമാകുമ്പോൾ ABC എന്ന ഒരു ത്രികോണം മാത്രം നിർമ്മിക്കാമെന്നും അതു ഒരു ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണമാണെന്നും കാണാം.

5. BC, ABയെക്കാൾ വലിയതാകുമ്പോൾ നിശ്ചിത അളവുകളുള്ള ABC എന്ന ഒരു ത്രികോണം മാത്രം നിർമ്മിക്കാമെന്നു കാണാം.



അഭ്യാസം 18.

A ഒരു സമകോണം താഴെ പറയുന്ന അളവുകൾ ഉള്ളതും ആയ ABC എന്ന ത്രികോണങ്ങളെ നിർമ്മിക്കുക.

1. $AB=3\cdot1''$. $AC=2\cdot7''$. വിപുല രേഖയുടെ നീളം അളക്കുക. നീളം (അംഗുലത്തിൻെറ ദശാംശംവരെ കൃത്യമായി) ഗണിച്ചു അളന്നു കിട്ടിയ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

2. $AB=7\cdot5$സെ.മീ. $B=37°$. ശേഷമുള്ള ഭുജങ്ങളെ അളക്കുക.

3. $AC=6\cdot2$സെ.മീ, $B=62°$. ശേഷമുള്ള ഭുജങ്ങളെ അളക്കുക.

4. $AB=2\cdot8''$. $BC=3\cdot2''$. ശേഷമുള്ള അംഗങ്ങളെ അളക്കുക.

ACയുടെ നീളം (അംഗുലത്തിന്റെ ദശാംശംവരെ കൃത്യമായി) ഗണിച്ചു അളന്നു കിട്ടിയ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

5. $a=2{\cdot}5''$. $b=2{\cdot}2''$. cയുടെ നീളം (അംഗുലത്തിന്റെ ദശാംശംവരെ കൃത്യമായി) ഗണിക്കുക. അളന്നു കിട്ടിയ ഉത്തരവുമായി ഒത്തു നോക്കുക.

6. $b=4{\cdot}8$സെ. മീ. $C=36°$. ശേഷമുള്ള ഭുജങ്ങളെ അളക്കുക.

7. $b=2{\cdot}3''$. $B=47°$. ശേഷമുള്ള ഭുജങ്ങളെ അളക്കുക.

8. $b=6{\cdot}3$സെ. മീ. $c=7{\cdot}5$സെ. മീ. aയുടെ നീളം അളന്നും ഗണിച്ചും കാണുക. ശേഷമുള്ള കോണുകളെ അളക്കുക.

9. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ 2 ബാഹ്യകോണുകളുടെ തുക 270° ആണെങ്കിൽ അതു ഒരു സമകോണത്രികോണമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

10. BC ആധാരമായി ABC എന്നൊരു സമഭുജത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക. $AD=BA$ ആകത്തക്കവണ്ണം BAയെ Dയിലേക്കു നീട്ടുക. DC ചേർക്കുക. BCD എന്ന കോണിന്റെ വലിപ്പമെത്രയാണ്? കാരണം പറയുക. ഈ നിർമ്മാണം ഉപയോഗിച്ചു AB എന്നൊരു സരളരേഖക്കു Bയിൽ കൂടി ഒരു ലംബരേഖ വരക്കുക.

11. തടിച്ച കടലാസ്സിൽ ഒരു ദ്വിസമഭുജത്രികോണം വരക്കുക. അതിനെ മുറിച്ചു അതിന്നു തുല്യമായ ഒരു സമകോണചതുരം ഉണ്ടാക്കുക.

12. A ഒരു സമകോണായ ABC എന്നൊരു ത്രികോണം വരക്കുക. അതിന്റെ വിപുലരേഖയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിനെ സമകോണിന്റെ ശീർഷത്തോടു ചേർക്കുക. ഈ സരളരേഖ വിപുലരേഖയുടെ ഏതൊരംശമാണ്? നിങ്ങളുടെ പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഫലം ഒരു വാക്യത്തിലെഴുതുക.

13. ഒരു ദ്വിസമഭുജ സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ സമഭുജങ്ങളുടെ നീളം$=2{\cdot}2''$. വിപുലരേഖയുടെ നീളം കഴിയുന്നത്ര കൃത്യമായി അളക്കുക. ഗണിച്ചു കിട്ടുന്ന ഉത്തരത്തോടു ഒത്തു നോക്കുക.

14. ഒരു ദ്വിസമഭുജ സമകോണത്രികോണത്തിന്റെ വിപുലരേഖ$=$ 8സെ. മീ. ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക. ഭുജങ്ങളുടെ നീളം അളക്കുക. ഗണിച്ചു കിട്ടിയ ഉത്തരവുമായി താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

15. നിങ്ങളുടെ ഒരു ചതുരമട്ടം ഒരു ദ്വിസമഭുജ സമകോണത്രികോണമാകുന്നു. അതിന്റെ ഭുജങ്ങൾ അളക്കുക. നിങ്ങൾ പഠിച്ച സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു അളന്നു കിട്ടിയ ഉത്തരങ്ങൾ ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

16. നിങ്ങളുടെ ഒരു ചതുരമട്ടത്തിന്റെ കോണുകൾ 90°, 60°, 30° ആകുന്നു. 15-ാം ചോദ്യത്തിൽ ചെയ്ത പരീക്ഷണം ഈ ചതുരമട്ടത്തേയും സംബന്ധിച്ചു ചെയ്യുക.

17. ഒരു സമകോണ ത്രികോണത്തിൻെറ ഒരു കോൺ$=30°$. വിപുല രേഖ$=7$സെ. മീ. മററു ഭുജങ്ങളുടെ നീളം അളക്കുക. ഗണിച്ചു നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. ഇതേ കോണുകളുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തിൽ $60°$ വലിപ്പമുള്ള കോണിന്നെതിരായ ഭുജത്തിൻെറ നീളം 4സെ. മീ. ആണ്. ത്രികോണം നിർമ്മിച്ച ശേഷമുള്ള ഭുജങ്ങളെ അളക്കുക. അവയുടെ നീളം ഗണിക്കുക. ഉത്തരങ്ങൾ 1മി. മീ.വരെ കൃത്യമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

18. ABC, DEF എന്ന 2 സമകോണത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വാംഗതുല്യമായിരിക്കേണമെങ്കിൽ അവയുടെ ഏതെല്ലാം അംഗങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കേണം? ഉത്തരം വ്യക്തമായി എഴുതുക.

2 സമകോണ ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വാംഗതുല്യമായിരിക്കുവാൻ ആവശ്യമായ ഉപാധികൾ ഇതിൽനിന്നു അനുമാനിച്ചെഴുതുക.

19. $A=35°$. $AB=4$സെ. മീ. BCയുടെ നീളം

$a)$ 3സെ. മീ. $b)$ 4സെ. മീ. $c)$ 5സെ. മി.

$d)$ 2·3സെ. മീ. $e)$ 2സെ. മീ. ആകുമ്പോൾ ABC എന്ന ത്രികോണങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുക. BCക്കു വിവിധ നീളങ്ങൾ ഉള്ളപ്പോൾ നിർമ്മിക്കാവുന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ എണ്ണവും അവ ഏതുതരം ത്രികോണങ്ങളാണെന്നും എഴുതുക. എപ്പോഴാണ് സന്ദിഗ്ദ്ധസംഗതി ഉണ്ടാവുന്നതു്?

20. താഴേ കാണുന്ന അളവുകളുള്ള ABC എന്ന ത്രികോണങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുക.

$a)$ $B=120°$. $AB=2''$. $AC=2{\cdot}5''$.

$b)$ $C=70°$. $AC=5$സെ. മീ. $AB=4{\cdot}9$സെ. മീ.

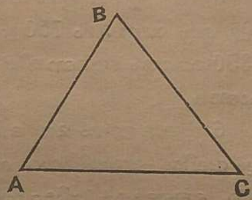
2 ത്രികോണങ്ങൾ നിർമ്മിക്കാമോ? നിർമ്മിക്കാമെങ്കിൽ അവ ഏതു തരമാണ്? അവയുടെ കോണുകൾ തമ്മിൽ വല്ല സംബന്ധവും കാണുന്നുണ്ടോ?

അദ്ധ്യായം 10.

a. തോതനുസരിച്ചു വരക്കൽ (Drawing to scale).

കഴിഞ്ഞ കൊല്ലം തോതുഭിന്നിതങ്ങളെപ്പററി നിങ്ങൾ പഠിച്ചുവല്ലോ. (ഒന്നാം പുസ്തകം 28 മുതൽ 32വരെയുള്ള ഭാഗങ്ങൾ നോക്കുക.) രാജ്യങ്ങളുടെ പടങ്ങൾ തോതനുസരിച്ചു വരക്കുന്ന പ്രകാരം തന്നെ ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള സ്ഥലങ്ങളുടെ ചില അളവുകൾ അറിഞ്ഞാൽ തോതനുസരിച്ചു പടംവരച്ചു ശേഷമുള്ള അംഗങ്ങളുടെ അളവുകൾ കണ്ടു പിടിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി ഒരു മുക്കോൺതുരുത്തി (delta)ന്റെ രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ നീളം 1000ഉം 1200ഉം വാരയും അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ 60°യും ആണെങ്കിൽ തുരുത്തിന്റെ ഒരു പടം സൌകര്യമുള്ള ഒരു തോതിൽ വരക്കാം. ഈ പടത്തിൽനിന്നു തുരുത്തിന്റെ 3-ാമത്തെ ഭുജത്തിന്റെ നീളവും അതു മററു 2 ഭുജങ്ങളോടു എത്ര ചരിഞ്ഞിരിക്കുന്നുവെന്നും കണ്ടുപിടിക്കാം. 1സെ. മീ. = 200വാര എന്നതു സൌകര്യമുള്ള ഒരു തോതായിരിക്കും. $AB = 5$സെ മീ., $AC = 6$സെ. മീ., $A = 60°$ ആയ ABC എന്നൊരു ത്രികോണം തുരുത്തിന്റെ ഒരു പ്ലാൻ (plan) ആയിരിക്കും. BCയെ അളക്കുക. സുമാർ 5·6 സെ. മീ. ആണെന്നു കാണാം.



∴ മൂന്നാമത്തെ ഭുജത്തിന്റെ സുമാർ നീളം $= 5{\cdot}6 \times 200$വാര.
$= 1120$വാര.

ഇതേ പ്രകാരം B, C എന്ന കോണുകളെ അളക്കുന്നതിനാൽ മൂന്നാമത്തെ ഭുജം മററു രണ്ടു ഭുജങ്ങളോടു എത്ര ചരിഞ്ഞിരിക്കുന്നുവെന്നും കാണാം.

പ്ലാനുകൾ തയ്യാറാക്കുന്നതിന്നു മുമ്പു ചോദ്യത്തിൽ നിർദ്ദേശിച്ചിട്ടുള്ള അളവുകൾ ആസ്പദമാക്കി ഒരു കരടുപടം വരക്കുന്നതു നന്നായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 19.

1. ത്രികോണാകൃതിയല്ലാത്ത ഒരു വയലിന്റെ 2 ഭുജങ്ങളുടെ നീളം 1320ഉം 1280ഉം അടിയും അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ 39°യും ആകുന്നു. വയലിന്റെ ഒരു പ്ലാൻ വരക്കുക. മൂന്നാമത്തെ ഭുജത്തിന്റെ നീളവും അതു മററു ഭുജങ്ങളോടു എത്ര ചരിഞ്ഞിരിക്കുന്നുവെന്നും കാണുക.

2. ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള ഒരു കാഡ്ബോഡ് കഷ്ണത്തിന്റെ വക്കുകളുടെ നീളം 1′ 6″, 2′ 6″, 2′ ആകുന്നു. ഏററവും നീളമുള്ള വക്കിലേക്കു എതിർ മൂലയിൽനിന്നുള്ള ദൂരം കാണുക.

3. ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തോട്ടത്തിന്റെ ഒരു ഭുജത്തിന്റെ നീളം 75 വാരയാണ്. ഈ ഭുജം മററു 2 ഭുജങ്ങളോടു 47ഉം 68ഉം ഡിഗ്രി ചരിഞ്ഞിരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ തോട്ടത്തിന്റെ ഒരു പ്ലാൻ വരച്ചു ഏററവും നീളം കുറഞ്ഞ ഭുജത്തിന്റെ നീളവും അതിൽനിന്നു അതിന്നെതിരായ ശീർഷത്തിലേക്കുള്ള ദൂരവും കാണുക.

4. 2 നേർ നിരത്തുകൾ പരസ്പരം Aയിൽ ലംബമായി ഛേദിക്കുന്നു. ഈ നിരത്തുകളിന്മേലുള്ള B, C എന്ന രണ്ടു കമ്പിത്തൂണുകളുടെ അടികൾ തമ്മി

ലുള്ള ദൂരം 460 വാരയും Aയിൽനിന്നു Bയിലേക്കുള്ള ദൂരം 260 വാരയും ആണെങ്കിൽ ഒരു പ്ലാൻ വരച്ചു ACയുടെ നീളം കാണുക. ഗണിച്ച ഈ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

5. P, Q, R മൂന്നു വീടുകളാകുന്നു. Pയിൽനിന്നു Qവിലേക്കും Rലേക്കുമുള്ള ദൂരം യഥാക്രമം 750ഉം 1100ഉം വാരയും Qവിൽനിന്നു Rലേക്കുള്ള ദൂരം 1350 വാരയും ആണെങ്കിൽ Pയിൽനിന്നു QR എന്ന പാതയിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക.

6. ഒരു ഗ്രാമം ഒരു ദ്വിസമഭുജ സമകോണ ത്രികോണമാകുന്നു. ഏററവും വലിയ ഭുജത്തിൻെറ നീളം 1320 അടിയാണെങ്കിൽ ഒരു പ്ലാൻ വരച്ചു മററു ഭുജങ്ങളുടെ നീളം കാണുക. ഗണിച്ച നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

7. ABC എന്നൊരു ത്രികോണ വയലിൻെറ ഒരു പ്ലാൻ വരക്കുവാൻ ഒരു സർവ്വേക്കാരൻ (Surveyor) താഴെ പറയുന്ന അളവുകൾ എടുത്തു.

$AB = 500$കണ്ണി. $B = 55°$. $AC = 460$ കണ്ണി. ഈ അളവുകൾ മതിയോ? മതിയാകുന്നില്ലെങ്കിൽ കാരണമെഴുതുക.

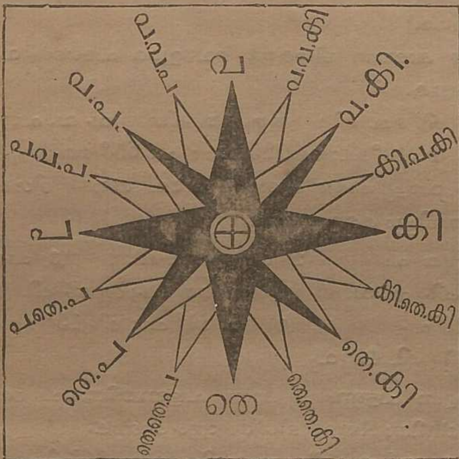
b. ദിശകൾ (Directions).

ഒരു സമുദ്രദിശിക (Mariner's compass)യുടെ മുഖത്തിൻെറ ചിത്രമാണ് ഇവിടെ കാണുന്നത്.

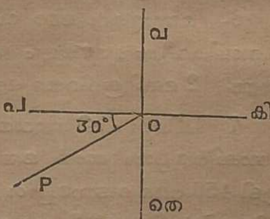
വടക്ക, കിഴക്ക, തെക്ക, പടിഞ്ഞാറു ഇവ നാലും മുഖ്യദിശകൾ (Cardinal Directions) ആണ്. ഇവക്കിടയിലുള്ള കോണുകൾ ഓരോന്നും ഒരു സമകോണാകുന്നു. വടക്കിന്നും കിഴക്കിന്നും മദ്ധ്യേയുള്ള, അതായതു വടക്കിൽനിന്നും കിഴക്കിൽനിന്നും 45° ചരിഞ്ഞുള്ള ദിശക്ക വടക്കുകിഴക്ക എന്നു പേർ പറയുന്നു. ഇതേപ്രകാരം നാലു മുഖ്യ ദിശകൾക്കു മദ്ധ്യേയുള്ള ദിശകളെ തെക്കുകിഴക്ക, തെക്കുപടിഞ്ഞാറു, വടക്കുപടിഞ്ഞാറു എന്നു പറയുന്നു.

വടക്കിന്നും വടക്കുകിഴക്കിന്നും മദ്ധ്യേയുള്ള, അതായതു ഈ രണ്ടു ദിശകളിൽനിന്നും $22\frac{1}{2}°$ ചരിഞ്ഞുള്ള ദിശക്കു വടക്കു വടക്കുകിഴക്കു (വ. വ. കി.) എന്നു പേർ പറയുന്നു. കിഴക്കിന്നും വടക്കുകിഴക്കിന്നും മദ്ധ്യേയുള്ള ദിശക്കു കിഴക്കു വടക്കുകിഴക്കു (കി. വ. കി.) എന്നു പേർ പറയുന്നു. ചിത്രം സൂക്ഷിച്ചു നോക്കു

ന്നതായാൽ ഓരോ ദിശയുടേയും പേർ നിശ്ചയിക്കുന്ന രീതി എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാം.

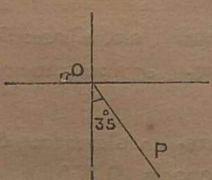


ഇവക്കുടാതെയുള്ള ദിശകൾക്കു മുഖ്യദിശകളിൽനിന്നുള്ള ചരിവനുസരിച്ചു പേരിടുന്നു. ഉദാഹരണമായി പടിഞ്ഞാറിൽനിന്നു 30° തെക്കോട്ടു ചരിഞ്ഞ ദിശക്കു പടിഞ്ഞാറു 30° തെക്കു (പ.30°തെ.) എന്നു പേർ പറയുന്നു. ചിത്രം നോക്കുക.



ഈ ദിശ തെക്കിൽനിന്നു 60° പടിഞ്ഞാറോട്ടു ചരിഞ്ഞതായതുകൊണ്ടു ഇതിനെ തെക്കു 60° പടിഞ്ഞാറു (തെ. 60°പ.) എന്നു പറയാം.

O എന്നൊരു സ്ഥലത്തുനിന്നു അതേ സമതലത്തിലുള്ള P എന്നൊരു സ്ഥലത്തിൻെറ ദിഗ്സ്ഥാനം (Bearing) നിശ്ചയിക്കാം.



ഉദാഹരണമായി O ഇൽനിന്നു തെക്ക് 35° കിഴക്കാ (തെ. 35° കി.)ണ് P കിടക്കുന്നതു്.

അഭ്യാസം 20.

[ദൂരങ്ങൾ ചോദ്യത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടുള്ള നീളത്തിന്റെ 1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക.]

1. താഴേ കാണുന്ന ദിശകളെ വെവ്വേറെ പടങ്ങൾ വരച്ചു അവയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

വ. പ.: കി. തെ. കി; തെ. തെ. കി.; വ. വ. പ.; പ. വ. പ.; കി. 40° വ.; വ. 40°കി.; തെ. 25° പ ; പ. 65° തെ.

2. പടം വരച്ചു താഴേ പറയുന്ന ഒരോ ജോടി ദിശകൾക്കിടയിലുള്ള കോണിന്റെ വലിപ്പം കണക്കാക്കുക.

(1) കി.; തെ. പ. (2) വ പ.; വ. കി. (3) പ.; തെ. തെ. കി.
(4) തെ. കി.; പ. വ. പ. (5) തെ. തെ. പ.; വ. വ. കി. (6) പ. 20° വ.; വ. 20°പ. (7) തെ. 81° പ.; കി. 15° തെ.
(8) വ. കി.; കി. 40° വ.

3. B എന്ന പട്ടണം A എന്ന പട്ടണത്തിന്നു പ. തെ. പ. ആണ്, എന്നാൽ Bയിൽനിന്നു Aയുടെ ദിഗ്സ്ഥാനം കാണുക.

4. ഒരു തോണി ഒരു ദീപസ്തംഭത്തിന്റെ വ. 20°കി. ആണ്. തോണിയിൽനിന്നു നോക്കുന്ന ഒരാൾ ദീപസ്തംഭത്തെ ഏതു ദിശയിലാണ് കാണുക?

5. ഒരാൾ വ. കിഴക്കായി 3 നാഴിക നടന്നശേഷം വ. പടിഞ്ഞാറായി 6 നാഴിക കൂടി നടന്നു. എന്നാൽ ഇപ്പോൾ അയാൾ പുറപ്പെട്ട സ്ഥലത്തുനിന്നു എത്ര നാഴിക ദൂരത്താണ്?

6. രണ്ടാളുകൾ ഒരേ സ്ഥലത്തുനിന്നു പുറപ്പെട്ടു. ഒരാൾ മണിക്കൂറിൽ 4 നാഴികവീതം തെക്കോട്ടും മറ്റെയാൾ 3 നാഴികവീതം തെ. കിഴക്കോട്ടും നടക്കുന്നു. 2 മണിക്കൂറിന്റെ ഒടുവിൽ അവർ തമ്മിലുള്ള ദൂരമെത്ര?

7. കിഴക്കു പടിഞ്ഞാറായി കിടക്കുന്ന ഒരു നിരത്തിൽ ഒരു സ്ഥലത്തുനിന്നു നോക്കിയപ്പോൾ ഞാൻ ഒരു വീടു തെക്കുകിഴക്കായിക്കണ്ടു. നിരത്തിന്മേൽ കൂടി 450 വാര നടന്നപ്പോൾ ആ വീടു തെക്കു പടിഞ്ഞാറായി കണ്ടു. എന്നാൽ നിരത്തിൽനിന്നു വീട്ടിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക.

8. ഒരാൾ ഒരു ഗോപുരം കി. 10° വടക്കായി കണ്ടു. തെ. കിഴക്കായി 500 വാര നടന്നശേഷം ഗോപുരം വ. കിഴക്കായി കണ്ടു. എന്നാൽ അയാൾ ഇപ്പോൾ ഗോപുരത്തിൽനിന്നു എത്ര ദൂരത്താണ്?

9. ഒരാൾ രണ്ടു കോട്ടകൾ നേരെ തെക്കായി കണ്ടു. പടിഞ്ഞാറോട്ടു 6 നാഴിക നടന്നശേഷം ഒരു കോട്ട കി. 50° തെക്കും, മറ്റേതു കി 55° തെക്കു

മായി കണ്ടു. എന്നാൽ ഓരോ അവസരത്തിലും അയാൾ കോട്ടകളിൽനിന്നു എത്ര ദൂരത്തായിരുന്നു?

10. A, B, C മൂന്നു ഗ്രാമങ്ങളാണ്. A, Bയിൽനിന്നു 7 നാഴിക വ. കിഴക്കും B, Cയിൽനിന്നു $11\frac{1}{4}$ നാഴിക വ.പടിഞ്ഞാറും ആണെങ്കിൽ Cയിൽനിന്നു Aയുടെ ദൂരവും ദിഗ്സ്ഥാനവും കാണുക.

11. ഒരു കപ്പൽ A എന്നൊരു സ്ഥലത്തെത്തിയപ്പോൾ വ. 60° കിഴക്കായി B എന്നൊരു ദീപസ്തംഭവും തെ.കിഴക്കായി C എന്ന വേറൊരു ദീപസ്തംഭവും കണ്ടു. 10 നാഴിക കിഴക്കോട്ടു പോയ ശേഷം ഇവയെ യഥാക്രമം വ. 50° പടിഞ്ഞാറായും തെ. 60° പടിഞ്ഞാറായും കണ്ടു. എന്നാൽ ദീപസ്തംഭങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാണുക.

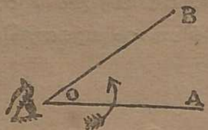
12. തെ. വടക്കായി ഒഴുകുന്ന ഒരു പുഴയുടെ ഒരു കരയിൽ 5000 അടി അകലെയായി രണ്ടു വീടുകളുണ്ട്. മറുകരയിലുള്ള ഒരു വൃക്ഷം ഈ വീടുകളിൽനിന്നു പ. 57° വടക്കും, പ. 43° തെക്കും ആണെങ്കിൽ പുഴയുടെ വീതി കാണുക. (പുഴയുടെ കരകൾ സമാന്തരരേഖകളാണെന്നു കരുതുക.)

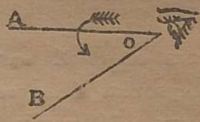
13. A എന്നൊരു സ്ഥലത്തുനിന്നു നോക്കിയപ്പോൾ ഒരാൾ ഒരു വൃക്ഷം തെക്കു $33\frac{3}{4}°$ കിഴക്കായി കണ്ടു. അയാൾ പ. $33\frac{3}{4}°$ തെക്കായി 1000 വാര നടന്നശേഷം വൃക്ഷം നേരെ കിഴക്കു കണ്ടു. എന്നാൽ Aയിൽനിന്നു വൃക്ഷത്തിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക.

14. കിഴക്കുപടിഞ്ഞാറായി കിടക്കുന്ന ഒരു കടൽക്കരയിൽ A, B എന്ന രണ്ടു ദീപസ്തംഭങ്ങൾ ഉണ്ടു. ഒരു കപ്പൽ Aക്കു നേരെ തെക്കും Bക്കു തെ.പടിഞ്ഞാറുമാണ്. കപ്പൽ 10 നാഴിക കി. വ. കിഴക്കായി പോയശേഷം Bക്കു നേരെ തെക്കാണെങ്കിൽ ദീപസ്തംഭങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാണുക.

15. A എന്നൊരു കപ്പൽ ഒരു തുറമുഖത്തിൽനിന്നു പുറപ്പെട്ടു മണിക്കൂറിൽ 8 നാഴിക വീതം തെ. കിഴക്കായി യാത്ര ചെയ്യുന്നു. A തുറമുഖം വിട്ടപ്പോൾ B എന്നൊരു കപ്പൽ തുറമുഖത്തുനിന്നു തെ. പടിഞ്ഞാറു 10 നാഴിക അകലെയായിരുന്നു. B 2 മണിക്കൂറിൽ Aയിനോടൊപ്പം എത്തുന്നെങ്കിൽ B ഏതു ദിശയിലേക്കാണ് യാത്രചെയ്യുതു?

c. മേൽനോട്ടക്കോണും കീഴ്നോട്ടക്കോണും (Angles of Elevation and Depression).





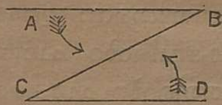
O ഒരാളുടെ കണ്ണിനേയും *OA* ഒരു അനുപ്രസ്ഥ രേഖയേയും *B* അയാളുടെ കണ്ണിനെക്കാൾ ഉയരത്തിലുള്ള ഒരു വസ്തുവിനേയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. *O, A, B* എന്നിവ ഒരേ ലംബതലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. *B* എന്ന വസ്തുവിനെ അയാൾ നോക്കുമ്പോൾ *OB* അയാളുടെ ദൃഷ്ടിപഥം (Line of sight)വും $\angle AOB$, *B* എന്ന വസ്തുവിൻെറ മേൽനോട്ടക്കോണും (Angle of Elevation) ആണ്.

ഒരാൾ തൻെറ കണ്ണിനേക്കാൾ ഉന്നതമായ ഒരു വസ്തുവിനെ നോക്കുമ്പോൾ അയാളുടെ കണ്ണിൽക്കൂടിയുള്ള ഒരു അനുപ്രസ്ഥരേഖക്കും (Horizontal line) ദൃഷ്ടിപഥത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോണിനെ ആ വസ്തുവിൻെറ മേൽനോട്ടക്കോണെന്നു നിർവ്വചിക്കാം.

B എന്ന വസ്തു അയാളുടെ കണ്ണിനേക്കാൾ താഴെയാണെങ്കിൽ $\angle AOB$ അതിൻെറ കീഴ്നോട്ടക്കോൺ (Angle of Depression) ആകുന്നു.

ഒരാൾ തൻെറ കണ്ണിനേക്കാൾ താഴെയുള്ള ഒരു വസ്തുവിനെ നോക്കുമ്പോൾ അയാളുടെ കണ്ണിൽക്കൂടിയുള്ള ഒരു അനുപ്രസ്ഥരേഖക്കും ദൃഷ്ടിപഥത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോണിനെ ആ വസ്തുവിൻെറ കീഴ്നോട്ടക്കോണെന്നു നിർവ്വചിക്കാം.

പർവ്വതശിഖരങ്ങളുടേയും മററും ഉയരം കണക്കാക്കുന്നതു അവയുടെ മേൽനോട്ടക്കോൺ കാണുന്നതിനാലാണ്.



ABയും CDയും രണ്ടു അനുപ്രസ്ഥരേഖകളാണ്. അതുകൊണ്ടു അവ സമാന്തരങ്ങളും ABC, DCB എന്ന കോണുകൾ സമവും ആണ്.

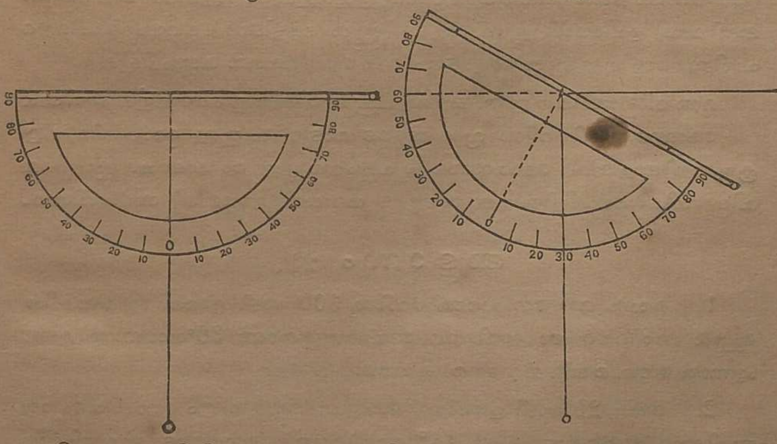
Cയിൽനിന്നു നോക്കുന്നതായാൽ Bയുടെ മേൽനോട്ടക്കോൺ $= \angle DCB$.

Bയിൽനിന്നു നോക്കുന്നതായാൽ Cയുടെ കീഴ്നോട്ടക്കോൺ $= \angle ABC$.

$\therefore$ Cയിൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ Bയുടെ മേൽനോട്ടക്കോൺ $= B$യിൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ Cയുടെ കീഴ്നോട്ടക്കോൺ.

d. കോണമാനി (The Clinometer).

വസ്തുക്കളുടെമേൽ നോട്ടക്കോൺ എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിപ്പാൻ വളരെ ലഘുവായ ഒരു ഉപകരണമുണ്ടു. അതു ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന പ്രകാരം കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു ഒരു ലംബസൂത്രം തൂക്കീട്ടുള്ള ഒരു കോണമാപകമാകുന്നു. കോണമാപകത്തിൻെറ നേർവക്കു അനുപ്രസ്ഥമായിരിക്കുമ്പോൾ ലംബസൂത്രത്തിൻെറ ചരടു O എന്നു അടയാള



ത്തിന്മേലായിരിക്കും. വസ്തുവിനെ വ്യക്തമായി കാണ്മാൻ നേർവക്കിനോടു ഒരു കുഴൽ പിടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. വസ്തുവിനെ കാണ്മാൻ കുഴലിനെ തിരിക്കുമ്പോഴും ചരടു ലംബ

മായിതന്നെ ഇരിക്കുന്നതാകയാൽ അനുപ്രസ്ഥത്തിൽനിന്നു കുഴലിന്റെ ചരിവു കോണമാപകത്തിന്മേൽ ലംബസൂത്രത്തിന്റെ ചരടിന്റെ നേക്കുള്ള അംശാങ്കനത്തിൽ (graduation)നിന്നു നേരിട്ടു വായിക്കാവുന്നതാണ്.

ഈ കോൺ മേൽനോട്ടക്കോണിന്നു സമമായിരിക്കുമെന്നു 2-ാം ചിത്രത്തിൽനിന്നു അനുമാനിക്കാം. കീഴ്നോട്ടകോണുകളും കണ്ടുപിടിപ്പാൻ ഈ ഉപകരണം ഉപയോഗിക്കാം എന്നു ഇതിൽനിന്നു വ്യക്തമാണല്ലോ.

ഇതിനെ കോണമാനി എന്നൎത്ഥമുള്ള Clinometer എന്നു പറയുന്നു. ഈ പദം inclinometer എന്നതിന്റെ ഒരു ചുരുക്കം മാത്രമാണ്.

തടിച്ച കടലാസ്സുകൊണ്ടു 1 അടി വ്യാസമുള്ള ഒരു കോണമാപകം ഉണ്ടാക്കുക. അതിന്റെ നേർവക്കിന്മേൽ ഒരു കടലാസ്സുകുഴൽ പിടിപ്പിക്കുക. കുത്തനെയുള്ള ഒരു മരക്കാലിന്മേൽ (wooden stand) ഒരു ആണി തറച്ചു അതിൽനിന്നു കോണമാപകവും ലംബസൂത്രവും തൂക്കുക. ഇതിനെ ഒരു കോണമാനിയായി ഉപയോഗിച്ചു നിങ്ങളുടെ സ്കൂൾ കെട്ടിടത്തിന്റെയും അതിന്റെ പരിസരങ്ങളിലുള്ള വൃക്ഷങ്ങളുടെയും മേൽനോട്ടക്കോൺ കണ്ടുപിടിക്കുക.

മൂന്നു വിദ്യാൎത്ഥികൾ വീതം ഒരുമിച്ചു പ്രവൎത്തിക്കുന്നതു സൌകൎയ്യമായിരിക്കും. കോണമാനിയിൽനിന്നു വൃക്ഷങ്ങളുടെ അടിയിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരം കഴിയുന്നത്ര കൃത്യമായി അളക്കുക. തോതനുസരിച്ചു പടം വരച്ചു ഉയരം കാണുക. ക്ലാസ്സിലെ വിദ്യാൎത്ഥികൾക്കു കിട്ടിയ ഉത്തരങ്ങളുടെ ശരാശരി ഉയരമായി സ്വീകരിക്കുക.

അഭ്യാസം 21.

1. ഒരാൾ ഒരു ഗോപുരത്തിൽനിന്നു 300 അടി ദൂരെനിന്നു നോക്കിയപ്പോൾ അതിന്റെ അഗ്രത്തിന്റെ മേൽനോട്ടക്കോൺ 30°യാണെന്നു കണ്ടു. എന്നാൽ ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

2. ഒരാൾ 20 അടി ഉയരമുള്ള ഒരു തൂണിന്റെ അഗ്രം നോക്കിയപ്പോൾ അതിന്റെ മേൽനോട്ടക്കോൺ 43° ആയിക്കണ്ടു. അയാളുടെ കണ്ണു നിലത്തുനിന്നു 5 അടി ഉയരത്തിലായിരുന്നെങ്കിൽ എത്ര ദൂരത്തുനിന്നായിരുന്നു അയാൾ നോക്കിയിരുന്നതു? തൂണിന്റെ അടുക്കലേക്കു 6 അടി നടന്നശേഷം അതിന്റെ അഗ്രത്തിന്റെ മേൽനോട്ടക്കോൺ എത്ര ഡിഗ്രിയായി കാണും?

3. സൂൎയ്യന്റെ മേൽനോട്ടക്കോൺ 23° ആകുമ്പോൾ ഒരു കമ്പിക്കാലിന്റെ നിഴലിന്റെ നീളം 50അടി ആണെങ്കിൽ കമ്പിക്കാലിന്റെ ഉയരം കാണുക.

4. 120 അടി ഉയരമുള്ള ഒരു ദീപസ്തംഭത്തിന്മേൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ ഒരു തോണിയുടെ കീഴ്നോട്ടക്കോൺ 20° യാണെന്നു കാണുന്നു. എന്നാൽ സ്തംഭത്തിൽനിന്നു തോണിയിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക.

5. ഒരു സ്ഥലത്തുനിന്നു നോക്കിയപ്പോൾ ഒരു കുന്നിന്റെ മേൽനോട്ടക്കോൺ 35°യെന്നു കണ്ടു. കുന്നിന്റെ അടുക്കലേക്കു 150 അടി നടന്നപ്പോൾ അതിന്റെ മേൽനോട്ടക്കോൺ 40°യെന്നും കണ്ടു. എന്നാൽ കുന്നിന്റെ ഉയരം കാണുക.

6. ഒരു വൃക്ഷത്തിന്റെ നേരെ കിഴക്കും പടിഞ്ഞാറുമുള്ള രണ്ടു സ്ഥലങ്ങളിൽനിന്നു നോക്കിയപ്പോൾ അതിന്റെ മേൽനോട്ടക്കോൺ 37ഉം 43ഉം ഡിഗ്രിയായിക്കണ്ടു. രണ്ടു സ്ഥലങ്ങൾക്കും തമ്മിലുള്ള ദൂരം 200 അടിയാണെങ്കിൽ വൃക്ഷത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

7. കടലിൽനിന്നു 200 അടി ഉയരത്തിൽ പറന്നുകൊണ്ടിരുന്ന ഒരു ആകാശക്കപ്പലിൽനിന്നു നോക്കിയപ്പോൾ അതിന്റെ നേരെ പടിഞ്ഞാറായിക്കിടന്നിരുന്ന രണ്ടു തോണികളുടെ കീഴ്നോട്ടക്കോണുകൾ 37ഉം 52ഉം ഡിഗ്രിയായിക്കണ്ടു. എന്നാൽ തോണികൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം എത്രയാണ്?

8. ഒരു ഗോപുരത്തിൽനിന്നു നോക്കിയപ്പോൾ അതിന്നു നേരെ തെക്കുള്ള രണ്ടു സ്ഥലങ്ങളുടെ കീഴ്നോട്ടക്കോണുകൾ 54ഉം 33ഉം ഡിഗ്രിയായിക്കണ്ടു. രണ്ടു സ്ഥലങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ദൂരം 100 അടിയാണെങ്കിൽ ഗോപുരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

9. ഒരാകാശവിമാനം 500 അടി ഉയരത്തിലുള്ളപ്പോൾ അതിൽനിന്നു ഒരാൾ ഒരു നാഴികക്കല്ലിന്റെ കീഴ്നോട്ടക്കോൺ 41° ആണെന്നു കണ്ടു. കുറെ ദൂരം നേരെ മേൽപ്പോട്ടു പോയശേഷം അതേ നാഴികക്കല്ലിന്റെ കീഴ്നോട്ടക്കോൺ 62° ആണെന്നും കണ്ടു. എന്നാൽ അതു 500 അടിയിൽനിന്നു എത്ര ഉയൎന്നിരിക്കണം?

10. ഒരു വൃക്ഷത്തിന്റെ ഉയരം അതിന്മേൽ കയറാതെ എങ്ങിനെ നിൎണ്ണയിക്കാമെന്നു ഒരു പടം വരച്ചു കാണിക്കുക. Clinometer ഉപയോഗിച്ചു നിങ്ങളുടെ സ്കൂൾപറമ്പിലെ ഒരു തെങ്ങിന്റെ ഉയരം കാണുക.

11. Clinometer ഉപയോഗിച്ചു നിങ്ങളുടെ സ്കൂൾ കെട്ടിട്ടത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക. ക്ലാസ്സിലെ വിദ്യാൎത്ഥികൾ 3 വീതമുള്ള വിഭാഗങ്ങളായി പ്രവൎത്തിച്ചു വിവിധ വിഭാഗങ്ങൾക്കു കിട്ടിയ ഉത്തരങ്ങളുടെ ശരാശരി കാണുക. സ്കൂളിൽ വെച്ചിട്ടുള്ള സ്കൂൾ കെട്ടിടത്തിന്റെ പ്ലാനിൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ഉയരം നിങ്ങളുടെ ശരാശരിയിൽനിന്നു എത്ര വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നുവെന്നു കാണുക.

അദ്ധ്യായം 11.

ചില ചതുർഭുജങ്ങളുടെ നിർമ്മാണവും ക്ഷേത്രഫലവും
(Some Quadrilaterals: their Construction and areas).

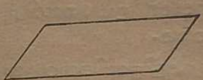
കഴിഞ്ഞ കൊല്ലം സൈദ്ധാന്തിക ക്ഷേത്രഗണിത പാഠത്തിൽ വിവിധതരം ചതുർഭുജങ്ങളുടെ നിർവ്വചനവും പ്രമേയങ്ങൾ മൂലം അവയുടെ ചില ഗുണങ്ങളേയും നിങ്ങൾ പഠിച്ചുവല്ലോ. (ഒന്നാം പുസ്തകം 218 മുതൽ 227 വരെയുള്ള ഭാഗങ്ങൾ നോക്കുക.)

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ താഴേ പറയുന്ന തരം ചതുർഭുജങ്ങളെ നിർമ്മിക്കുവാനും അവയുടെ ക്ഷേത്രഫലം കണ്ടുപിടിക്കുവാനും പഠിക്കാം. പ്രായോഗികമായ പരീക്ഷണങ്ങൾ മൂലം അവയുടെ ഗുണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

(1) സമാന്തരചതുഷ്കോണം (Parallelogram).
(2) സമകോണചതുരം (Rectangle).
(3) സമചതുരം (Square).
(4) സമചതുർഭുജം (Rhombus).

1. സമാന്തരചതുഷ്കോണം.

നിർവ്വചനം: എതിർഭുജങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളായ ചതുർഭുജക്ഷേത്രത്തിന്നു സമാന്തരചതുഷ്കോണം എന്നു പേർ.



രണ്ടു സമാന്തര രേഖകളെ വരക്കുക. ഇവയെ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം വേറെ രണ്ടു സമാന്തര രേഖകളേയും വരക്കുക. ഇവയാൽ നിർമ്മിതമായ ചതുർഭുജക്ഷേത്രത്തിൻെറ എതിർഭുജങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളായതുകൊണ്ടു ഇതു ഒരു സമാന്തരചതുഷ്കോണമാകുന്നു.

1. അതിൻെറ എതിർഭുജങ്ങളേയും എതിർകോണുകളേയും അളക്കുക.

2. കർണ്ണങ്ങളെ വരച്ച് അവ തമ്മിൽ ഛേദിക്കുന്നതിനാലുണ്ടാവുന്ന അംശങ്ങളെ അളക്കുക.

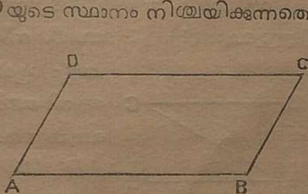
3. ഒരു കർണ്ണം സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തെ അംശിക്കുന്ന ഭാഗങ്ങളെ മുറിച്ചെടുത്തു അവയിൽ ഒന്നിനെ മറേറ അംശത്തിന്മേൽ വെക്കുക.

ഓരോ വിദ്യാർത്ഥിയും വേറെയും 2 സമാന്തരചതുഷ്കോണങ്ങളെ മേല്പറഞ്ഞ വിധത്തിൽ വരച്ച് ഈ പരീക്ഷണങ്ങൾ ചെയ്യട്ടെ. ഒരു ക്ലാസ്സിലുള്ള എല്ലാ വിദ്യാർത്ഥികളുടേയും പരീക്ഷണങ്ങളിൽനിന്നു ഒരു സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തിന്നു താഴെ പറയുന്ന ഗുണങ്ങൾ ഉണ്ടെന്നു അനുമാനിക്കാം:—

1. എതിർഭുജങ്ങൾ സമമാണ്.
2. എതിർകോണുകൾ സമമാണ്.
3. ഓരോ കർണ്ണവും മറേറ കർണ്ണത്തെ രണ്ടു സമാംശങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു.
4. ഓരോ കർണ്ണവും സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തെ രണ്ടു സർവ്വാംശതുല്യങ്ങളായ ത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു.

ഉദാ:—1. $ABCD$ എന്നൊരു സമാന്തര ചതുഷ്കോണത്തിൽ $AB=6$ സെ.മീ. $BC=3$ സെ.മീ. $B=120°$. ക്ഷേത്രം നിർമ്മിക്കുക.

നിർമ്മാണം:—6 സെ.മീ. നീളത്തിൽ AB വരക്കുക. ABയോടു $120°$ ചരിഞ്ഞു 3 സെ.മീ. നീളത്തിൽ BC വരക്കുക. Dയുടെ സ്ഥാനം നിശ്ചയിക്കുന്നതെങ്ങിനെ? $AD=BC$. $\therefore$ D, Aയിൽനിന്നു 3 സെ.മീ. അകലെയാണ്. ഇതേ പ്രകാരം D, Cയിൽനിന്നു 6 സെ.മീ. അകലെയാണ്. എന്തുകൊണ്ട്? അതിനാൽ Aയും Cയും കേന്ദ്രങ്ങളും 3ഉം 6ഉം സെ.മീ. യഥാക്രമം വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുമായി തമ്മിൽ Dയിൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം 2 ചാപരേഖകൾ വരക്കുക. AD, DC ചേർക്കുക. എന്നാൽ $ABCD$ ആവശ്യപ്പെട്ട സമാന്തര ചതുഷ്കോണമായിരിക്കും.



കോണുകളുടെ വലിപ്പം അനുമാനിക്കുക. അളന്നു നിങ്ങളുടെ അനുമാനം

ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. കണ്ണങ്ങൾ അളക്കുക. നിങ്ങൾ വരച്ച സമാന്തര ചതുഷ്കോണത്തിന്നു ഒരു സമാന്തര ചതുഷ്കോണത്തിൻെറ എല്ലാ ഗുണങ്ങളും ഉണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. വേറേയും കൂട്ടം അളവുകൾ തന്നിരുന്നാൽ സമാന്തര ചതുഷ്കോണങ്ങളെ നിമ്മിക്കുന്നതു അഭ്യാസങ്ങളായി താഴേ ചേർത്തിരിക്കുന്നു.

സൂചനം: ഓരോ അഭ്യാസത്തിലേയും നിട്ടിക്കുങ്ങൾ ആസ്പദമാക്കി ഒരു കരടുപടം വരക്കുക. സമാന്തര ചതുഷ്കോണങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങളിൽനിന്നു നിമ്മാണരീതി അനുമാനിക്കുക.

2. സമകോണചതുരം.

നിവ്വചനം: ഒരു കോൺ സമകോണായ സമാന്തര ചതുഷ്കോണത്തിന്നു സമകോണചത്തുരം എന്നു പേർ.

ഒരു സമകോണചതുരം ഒരു സമാന്തരചതുഷ്കോണവും ആയതുകൊണ്ടു അതിന്നു ഒരു സമാന്തര ചതുഷ്കോണത്തിൻെറ എല്ലാ ഗുണങ്ങളും ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇവയ്ക്കു പുറമെ താഴേ പറയുന്ന ഗുണങ്ങളും ഉണ്ടെന്നു പരിക്ഷണങ്ങളുടെ ഫലമായി അനുമാനിക്കാം:—

1. എല്ലാ കോണുകളും സമകോണുകളാണ്.
2. കണ്ണങ്ങൾ സമമാണ്.

ഉദാ:—2. ഒരു സമകോണചതുരത്തിൻെറ നീളം 7 സെ. മീ. വീതി 4 സെ. മീ. ചതുരം നിമ്മിക്കുക.

നിമ്മാണം:—7 സെ.മീ. നീളത്തിൽ AB വരക്കുക. ABക്കു ലംബമായി (എന്തുകൊണ്ടു?) 4 സെ.മീ. നീളത്തിൽ BC വരക്കുക. Aയും Cയും കേന്ദ്രങ്ങളും വ്യാസാദ്ധങ്ങൾ യഥാക്രമം 4ഉം 7ഉം സെ. മീ.ഉം ആയി തമ്മിൽ Dയിൽ ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം 2 ചാപരേഖകൾ വരക്കുക. ഇങ്ങിനെ വരക്കുവാൻ കാരണമെന്തു? AD, DC ചേക്കുക. എന്നാൽ $ABCD$ ആവശ്യപ്പെട്ട സമകോണചതുരമായിരിക്കും. ഇതിന്നു ഒരു സമകോണചതുരത്തിൻെറ എല്ലാ ഗുണങ്ങളും ഉണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ഈ നിമ്മാണം ഏതൊരു സംഗതിയിൽ മാത്രം സമാന്തര ചതുഷ്കോണനിമ്മാണത്തിൽനിന്നു വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു?

കെട്ടിടങ്ങൾ, മുറികൾ, തോട്ടങ്ങൾ, വയലുകൾ എന്നിവ സമകോണ ചതുരങ്ങളായതുകൊണ്ടു തോതനുസരിച്ചു അവയുടെ പ്ലാൻ വരക്കുന്നതു ഒരു മുഖ്യമായ അഭ്യാസമാകുന്നു.

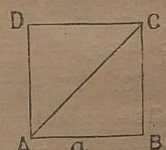
3. സമചതുരം.

നിർവ്വചനം: രണ്ടു സമീപഭുജങ്ങൾ സമമായ സമകോണ ചതുരത്തിന്നു സമചതുരം എന്നു പേർ.

ഒരു സമചതുരം ഒരു സമകോണ ചതുരവും ആയതുകൊണ്ടു അതിന്നു ഒരു സമകോണ ചതുരത്തിന്റെ എല്ലാ ഗുണങ്ങളും ഉണ്ടായിരിക്കും. ഇവയ്ക്കു പുറമെ താഴെ പറയുന്ന ഗുണങ്ങളും ഉണ്ടെന്നു പരീക്ഷണങ്ങളുടെ ഫലമായി അനുമാനിക്കാം:—

1. ഭുജങ്ങൾ സമമാണ്.
2. കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമാണ്.
3. ഓരോ കർണ്ണവും സമചതുരത്തിന്റെ കോണുകളെ രണ്ടു സമഭാഗമാക്കുന്നു.

ഉദാ:—3. 5സെ. മീ. നീളമുള്ള $ABCD$ എന്നൊരു സമചതുരം നിർമ്മിക്കുക. ഈ നിർമ്മാണം ഒരു സമകോണചതുരത്തിന്റെ നിർമ്മാണത്തിൽനിന്നു ഏതൊരു സംഗതിയിൽ മാത്രം വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു?



സമചതുരത്തിന്റെ ഗുണങ്ങളെ ആസ്പദമാക്കി അതിനെ പല വിധത്തിൽ നിർമ്മിക്കാമെന്നു കാണാം. വിദ്യാർത്ഥി കഴിയുന്നത്ര വിധത്തിൽ സമചതുരത്തെ നിർമ്മിക്കണം. ഓരോ നിർമ്മാണത്തിലുമുള്ള ക്രിയകളും അവയുടെ ന്യായവും എഴുതുക. കർണ്ണങ്ങളുടെ നീളം അളന്നും ഗണിച്ചും കാണുക. $d=a\sqrt{2}$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിക്കുക.

നിങ്ങൾ വരച്ച ഒരു സമചതുരത്തിന്നു സമചതുരങ്ങളുടെ എല്ലാം ഗുണങ്ങളും ഉണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

4. സമചതുർഭുജം.

നിർവ്വചനം:—എല്ലാ ഭുജങ്ങളും സമമായ ചതുർഭുജക്ഷേത്രത്തിന്നു സമചതുർഭുജം എന്നു പേർ. ഇതിന്റെ കോണുകൾ

സമമല്ലാത്തതുകൊണ്ടു ഇതിന്നു സമചതുരത്തിൻെറ എല്ലാ ഗുണങ്ങളും ഉണ്ടായിരിപ്പാൻ പാടില്ല.

1. കൎണ്ണങ്ങൾ സമമല്ല.

2. എതിർ കോണുകൾ മാത്രം സമമാണ്.

ഉദാ:—4. ഒരു സമചതുൎഭുജത്തിൻെറ ഭുജത്തിൻെറ നീളം = 1·8″. ഒരു കോൺ = 110°. സമചതുൎഭുജം നിൎമ്മിക്കുക. ഈ നിൎമ്മാണം ഒരു സമാന്തര ചതുരശ്രത്തിൻേറയും ഒരു സമചതുരത്തിൻേറയും നിൎമ്മാണത്തിൽനിന്നു ഏതൊരു സംഗതിയിൽ മാത്രം വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു? എന്തുകൊണ്ടു? നിങ്ങൾ വരച്ച സമചതുൎഭുജത്തിന്നു ഒരു സമചതുൎഭുജത്തിൻെറ എല്ലാ ഗുണങ്ങളും ഉണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ഏതെങ്കിലും ഒരു കൎണ്ണത്തിൻെറ നീളം അളന്നു മറേറ കൎണ്ണത്തിൻെറ നീളം ഗണിക്കുക. ഇങ്ങിനെ ഗണിക്കുവാൻ ഏതൊരു പ്രമേയം നിങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കും? ഒരു സമചതുൎഭുജത്തിൻെറ ഏതൊരു ഗുണങ്ങൾ ആസ്പദമാക്കിയാണ് നിങ്ങൾ ഗണിക്കുന്നതെന്നു എഴുതുക.

അഭ്യാസം 22.

1. 6സെ. മീ. നീളമുള്ള ഒരു സമചതുരം വരച്ചു അതിൻെറ കൎണ്ണങ്ങളുടെ നീളം അളക്കുക. നീളം ഗണിച്ചും കാണുക. സമചതുരത്തിൻെറ 4 ശീൎഷങ്ങളിലും കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരക്കുക.

2. ഒരു സമചതുരത്തിൻെറ കൎണ്ണത്തിൻെറ നീളം = 10സെ. മീ. സമചതുരം വരച്ചു അതിൻെറ ഭുജം അളക്കുക. നീളം ഗണിക്കുക.

3. 2″ വ്യാസാൎദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരിധിയിന്മേൽ ശീൎഷങ്ങൾ കിടക്കത്തക്കവണ്ണം ഒരു സമചതുരം വരക്കുക. അതിൻെറ നീളം അളന്നും ഗണിച്ചും കാണുക.

4. 7·2സെ. മീ. നീളവും 6·5സെ. മീ. വീതിയുമുള്ള ഒരു സമകോണചതുരം വരച്ചു അതിൻെറ കൎണ്ണങ്ങൾ അളക്കുക. നീളം ഗണിച്ചു അളന്നു കിട്ടിയ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു നോക്കുക. സമകോണചതുരത്തിൻെറ ശീൎഷങ്ങളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരക്കുക.

5. ഒരു സമകോണചതുരത്തിൻെറ ഒരു കൎണ്ണത്തിൻേറയും ഒരു ഭുജത്തിൻേറയും നീളം 8·9ഉം 3·9ഉം സെ. മീ. ആണ്. സമകോണചതുരം വരച്ചു ശേഷമുള്ള ഭുജത്തിൻെറ നീളം അളന്നും ഗണിച്ചും കാണുക.

6. ഒരു സമകോണചതുരത്തിൻെറ ഒരു കണ്ണത്തിൻെറ നീളം = 10സെ. മീ. കണ്ണങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ = 40°. സമകോണചതുരം വരച്ച അതിൻെറ ഭുജങ്ങളെ അളക്കുക.

7. ഒരു സമചതുർഭുജത്തിൻെറ ഒരു ഭുജം = 2″; ഒരു കോൺ = 30°. ക്ഷേത്രം നിർമ്മിച്ച അതിൻെറ കണ്ണങ്ങളേയും ശേഷമുള്ള കോണുകളേയും അളക്കുക. കണ്ണങ്ങളുടെ അളന്നുകിട്ടിയ നീളത്തിൽനിന്ന ഭുജത്തിൻെറ നീളം ഗണിക്കുക. യഥാൎത്ഥ നീളവുമായി ഒത്തുനോക്കുക. കോണുകളുടെ വലിപ്പം അനുമാനിച്ച അളന്ന കിട്ടിയ വലിപ്പവുമായി ഒത്തുനോക്കുക.

8. ഒരു സമചതുർഭുജത്തിൻെറ കണ്ണങ്ങളുടെ നീളം 6ഉം 6·3ഉം സെ. മീ. ആണ്. ക്ഷേത്രം വരച്ച അതിൻെറ ഭുജവും കോണുകളും അളക്കുക.

9. ഒരു സമചതുർഭുജത്തിൻെറ ഒരു കോൺ = 60°. ആ കോണിൻെറ ശീൎഷത്തിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന കണ്ണത്തിൻെറ നീളം = 9സെ. മീ. സമചതുർഭുജം നിർമ്മിച്ച അതിൻെറ ഭുജത്തിൻേറയും മറേറ കണ്ണത്തിൻേറയും നീളം അളക്കുക.

10. $ABCD$ എന്നൊരു സമാന്തര ചതുഷ്കോണത്തിൽ $AB = 4{\cdot}2$സെ.മീ. $AD = 8{\cdot}2$സെ.മീ. $A = 53°$. സമാന്തരചതുഷ്കോണം വരച്ച കണ്ണങ്ങളെ അളക്കുക. കോണുകളുടെ വലിപ്പം അനുമാനിക്കുക. അളന്നുകിട്ടിയ ഉത്തരവുമായി ഒത്തുനോക്കുക.

11. ഒരു സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തിൻെറ ഭുജങ്ങളുടെ നീളം 2″ഉം 2·5″ ആണ്. ഒരു കണ്ണം = 1″. സമാന്തരചതുഷ്കോണം വരച്ച കോണുകളേയും മറേറ കണ്ണത്തേയും അളക്കുക.

12. $ABCD$ എന്നൊരു സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തിൽ $AB = 5$സെ.മീ., $AD = 7{\cdot}5$സെ.മീ., $AC = 8{\cdot}5$സെ.മീ. സമാന്തരചതുഷ്കോണം വരച്ച കോണുകളെ അളക്കുക.

13. ഒരു സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തിൻെറ കണ്ണങ്ങളുടെ നീളം 9സെ.മീ.ഉം 7·6സെ.മീ.ഉം അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ 108°ഉം ആണ്. സമാന്തരചതുഷ്കോണം വരച്ച അതിൻെറ ഭുജങ്ങളെ അളക്കുക.

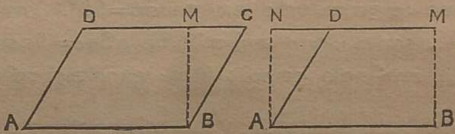
14. ഒരു സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തിൻെറ ഒരു കോൺ = 60°, ഒരു ഭുജം = 7സെ. മീ. അതിന്ന സമാന്തരമായ ഭുജം അതിൽനിന്ന 4സെ. മീ. അകലെയാണ്. സമാന്തരചതുഷ്കോണം നിർമ്മിക്കുക. 7സെ. മീ. അല്ലാത്ത ഭുജം അളക്കുക.

15. സമകോണചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു തോട്ടത്തിന്ന 100 അടി നീളവും 75 അടി വീതിയുമുണ്ട്. തോട്ടത്തിന്ന ചുററും 5 അടി വീതിയിൽ ഒരു പാതയുണ്ട്. പാതയുടെ ഒരു പടം വരക്കുക.

16. ഒരു കുളത്തിൻെറ നീളം 80 വാരയും വീതി 40 വാരയുമാണ്. അതിൻെറ നേരെ നടുവിൽ സമചതുരമായ ഒരു മണ്ഡപമുണ്ടു. മണ്ഡപത്തിൻെറ നീളം 10 വാരയാണെങ്കിൽ കുളത്തിൽ മണ്ഡപത്തിൻെറ സ്ഥാനത്തെ കാണിക്കുന്ന ഒരു പടം വരക്കുക.

ക്ഷേത്രഫലം (Areas).

തടിച്ച കടലാസ്സിൽ $ABCD$ എന്നൊരു സമാന്തരചതുഷ്കോണം വരക്കുക. ABക്കു ലംബമായി CDയെ M ഇൽ



ഛേദിക്കത്തക്കവണ്ണം BM വരക്കുക. AB സമാന്തരകത്തിൻെറ ആധാരവും BM അതിൻെറ ഉന്നതി (Altitude)യും ആണ്.

$\triangle BMC$ത്തെ മുറിച്ചെടുത്തു വലത്തെ പടത്തിൽ കാണുന്നപ്രകാരം $\triangle AND$ ത്തിൻെറ സ്ഥാനത്തു വെക്കാം. അപ്പോൾ $ABMN$ ഒരു സമകോണചതുരമായിരിക്കും. ഇതിൻെറ ആധാരവും ഉന്നതിയും യഥാക്രമം $ABCD$ എന്ന സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തിൻെറ ആധാരത്തിനും, ഉന്നതിക്കും സമമായിരിക്കും.

$ABMN$ എന്ന സമകോണചതുരത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം $= AB \times BM$.

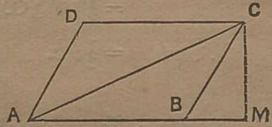
= സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തിൻെറ അധാരം $\times$ ഉന്നതി.

$\therefore$ ഒരു സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തിൻെറ ആധാരം bയും ഉന്നതി hഉം ആണെങ്കിൽ,

അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം, $A = bh$.

ഏതെങ്കിലും ഭുജം ആധാരവും അതിൻെറ ലംബരേഖ ഉന്നതിയുമായി കരുതാം.

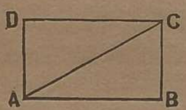
ഒരു സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തിൻെറ കർണ്ണം അതിനെ രണ്ടു സമത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നതുകൊണ്ടു, $\triangle ABC = ABCD$ എന്ന സമാന്തരചതുഷ്കോണത്തിൻെറ $\frac{1}{2} = \frac{AB \times CM}{2}$



$= \frac{\triangle ABC\text{ത്തിൻെറ ആധാരം} \times \text{ഉന്നതി}}{2}$

$\therefore A = \frac{1}{2}bh.$ ഈ സൂത്രത്തിൽ A=ത്രികോണത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം, b=ആധാരം, h=ഉന്നതി.

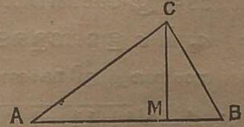
ഈ സൂത്രം വേറൊരുവിധത്തിലും കണ്ടുപിടിക്കാം. ഒരു സമകോണചതുരത്തിൻെറ കർണ്ണം അതിനെ രണ്ടു സമകോണത്രികോണങ്ങളായി ഭാഗിക്കുന്നു. ഇവ രണ്ടും സമമായതുകൊണ്ടു ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം



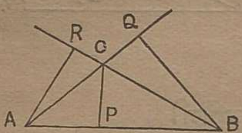
$= \frac{\text{സമകോണിൻെറ ഭുജങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം}}{2}$

$\therefore \triangle ABC = \frac{AB \times BC}{2}$

$\triangle ABC$ൻെറ C എന്ന ശീർഷത്തിൽനിന്നു AB എന്ന ആധാരത്തിലേക്കു CM എന്ന ലംബരേഖ വരച്ചിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ടു AMCയും BMCയും സമകോണത്രികോണങ്ങളാകുന്നു.



$$\triangle ABC = \triangle AMC + \triangle BMC$$
$$= \tfrac{1}{2} AM \times CM + \tfrac{1}{2} BM \times CM$$
$$= \tfrac{1}{2}(AM + BM)\, CM = \tfrac{1}{2} AB \times CM.$$
$$= \tfrac{1}{2}\ \text{ആധാരം} \times \text{ഉന്നതി}$$
$$\therefore A = \tfrac{1}{2} bh.$$



ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ ഭുജങ്ങളുടെ നീളം 10ഉം 7ഉം 5ഉം സെ.മീ. ആണ്. ത്രികോണം വരച്ചു അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭുജത്തെ ആധാരമായി കരുതാവുന്നതുകൊണ്ടു ത്രികോണത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലത്തെ 3 വിധത്തിൽ കാണാം.

AB ആധാരമാകുമ്പോൾ ഉന്നതി $= CP$

∴ ക്ഷേത്രഫലം $= \frac{1}{2} \times 10 \times 3{\cdot}24$ ച. സെ.മീ.

$= 16{\cdot}2$ ച. സെ. മീ.

AC, BC ആധാരങ്ങളാകുമ്പോൾ BQ, AR എന്നിവ യഥാക്രമം ഉന്നതികളായിരിക്കും.

ക്ഷേത്രഫലം $= \frac{1}{2} AC \times BQ = \frac{1}{2} BC \times AR$

ഇവ സമമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ 3 ഭുജങ്ങളുടേയും നീളം അറിയുന്നതായാൽ അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം കാണാനുള്ള സൂത്രം താഴെ ചേക്കുന്നു.

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$A =$ ത്രികോണത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം

$2s =$ ത്രികോണത്തിൻെറ ചുററളവു.

a, b, c ഭുജങ്ങളുടെ നീളം.

നാം വരച്ച ത്രികോണത്തിൽ $2s = (10 + 7 + 5)$ സെ.മീ.

$\therefore A = \sqrt{11(11-10)(11-7)(11-5)}$ ച. സെ.മീ.

$= \sqrt{264}$ ച. സെ.മീ. $= 16{\cdot}2$ ച. സെ.മീ. (1 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി)

അഭ്യാസം 23.

1. താഴേ പറയുന്ന സമാന്തരചതുരശ്രേണങ്ങൾ വരച്ചു അവയുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

(*a*) രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ നീളം 3″ഉം, 2·5″ഉം, ഒരു കോൺ 50°യും ആണ്.

(*b*) രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ നീളം 8സെ. മീ.ഉം 13സെ. മീ.ഉം; ഒരു കർണ്ണം= 9സെ. മീ.

2. ഒരു സമചതുർഭുജത്തിൻെറ ഒരു ഭുജം=6സെ. മീ. ഒരു കോൺ=60°. ക്ഷേത്രം വരച്ചു അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. ഒരു കോൺ 30°യാണെങ്കിൽ ക്ഷേത്രഫലം എത്രയായിരിക്കും?

3. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിൻെറ ഒരു ഭുജം=7സെ. മീ. ത്രികോണം വരച്ചു ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു നോക്കുക.

4. ഒരു ദ്വിസമഭുജത്രികോണത്തിൻെറ സമഭുജങ്ങൾ 3″ഉം, മൂന്നാമത്തെ ഭുജം 2″ഉം ആണ്. ത്രികോണം വരച്ചു ക്ഷേ. ഫ. കാണുക. സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു നോക്കുക.

5. താഴേ പറയുന്ന അളവുകളുള്ള $\triangle ABC$ വരച്ചു ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

(1) $a=3''$, $b=2{\cdot}5''$, $c=2''$.

(2) $a=3{\cdot}6''$, $B=67°$, $c=72°$.

(3) $b=2{\cdot}1''$, $c=1{\cdot}8''$, $A=122°$.

6. ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള ഒരു വയലിൻെറ രണ്ടതിരുകളുടെ നീളം 150ഉം 250ഉം വാരയാകുന്നു. അവക്കിടയിലുള്ള കോൺ= 70°. വയലിൻെറ ഒരു പടം വരച്ചു ക്ഷേ. ഫ. കാണുക.

7. ഒരു സമകോണത്രികോണത്തിൻെറ ക്ഷേ. ഫ.=30. ച. സെ. മീ. സമകോണിൻെറ ഒരു ഭുജം 12സെ. മീ. ആണെങ്കിൽ മററു രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ നീളം കാണുക. വിപുലരേഖയിലേക്കു എതിർ ശീർഷത്തിൽനിന്നുള്ള ലംബരേഖയുടെ നീളം കാണുക.

8. ഒരു സമചതുരത്തിൻെറ കർണ്ണത്തിൻെറ നീളം dസെ. മീ. സമചതുരത്തിൻെറ ക്ഷേ. ഫ. $\frac{1}{2}d^2$ ച. സെ. മീ. ആണെന്നു തെളിയിക്കുക.

9. 7ഉം 8ഉം 9ഉം സെ. മീ. നീളമുള്ള ഭുജങ്ങളോടുകൂടിയ ഒരു ത്രികോണം വരക്കുക. ഏററവും നീളമുള്ള ഭുജത്തെ ആധാരമായി കരുതി ത്രികോണത്തിൻെറ ക്ഷേ. ഫ. കാണുക. ഈ ഉത്തരത്തിൽനിന്നു ശേഷം ഭുജങ്ങളിലേക്കു അവക്കെതിരായ ശീർഷങ്ങളിൽനിന്നുള്ള ലംബരേഖകളുടെ നീളം ഗണിക്കുക.

സൂത്രം മാത്രം ഉപയോഗിച്ചു ക്ഷേ. ഫ. കാണുക. ശേഷം ഉത്തരങ്ങളും ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

10. ഒരു സമാന്തരചതുര്‍ഭുജത്തിന്റെ ക്ഷേ. ഫ. 48 ച. സെ. മീ. ഉം ഒരു കോണ്‍ 30°യും ആണ്. ആധാരം 9·6 സെ. മീ. ആണെങ്കില്‍ സമാന്തരചതുര്‍ഭുജം വരച്ചു ആധാരത്തിന്നടുത്തുള്ള ഭുജത്തിന്റെ നീളം കാണുക.

11. ഒരു സമചതുര്‍ഭുജം വരക്കുക. അതിന്റെ കര്‍ണ്ണങ്ങളുടെ നീളം d_1ഉം d_2ഉം സെ. മീ. ആണെന്നു വിചാരിക്കുക. എന്നാല്‍ അതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $\frac{1}{2}d_1 d_2$ ച. സെ. മീ. ആണെന്നു തെളിയിക്കുക. ഒരു സമചതുര്‍ഭുജത്തിന്റെ ഏതെല്ലാം ഗുണങ്ങള്‍ ആസ്പദമാക്കിയാണ് ക്ഷേത്രഫലം ഗണിച്ചതു?

ഇതില്‍നിന്നു ഒരു സമചതുര്‍ഭുജത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം, $A=\frac{1}{2}d_1 d_2$, (d_1, d_2: കര്‍ണ്ണങ്ങളുടെ നീളം) ആണെന്നു പഠിക്കാം.

12. ഒരു സമചതുര്‍ഭുജത്തിന്റെ ഭുജം 2·4″. ഒരു കോണ്‍ = 60°. സമചതുര്‍ഭുജം നിര്‍മ്മിക്കുക. കര്‍ണ്ണങ്ങളെ അളന്നു ക്ഷേത്രഫലം ഗണിക്കുക. ഒരു സമാന്തരചതുര്‍ഭുജത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുന്ന മാര്‍ഗ്ഗം ഉപയോഗിച്ചും ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. ഈ രണ്ടുത്തരങ്ങളും സമമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

13. രണ്ടു തീവണ്ടിപ്പാതകളുടെ വീതി 5 അടിയും 3 അടി 4 അംഗുലവും ആണ്. പാതകള്‍ തമ്മില്‍ ചേരുന്ന സ്ഥലത്തു അവക്കിടയിലുള്ള കോണ്‍ 45°യാണ്. എന്നാല്‍ പാതകള്‍ക്കിടയിലുള്ള നിലത്തിന്റെ ഒരു പടം കൃത്യമായി വരക്കുക.

(*a*) ഈ നിലത്തിന്റെ അതിരുകളുടെ നീളം കാണുക. (*b*) നിലത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം ച. അടിവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (1936)

അദ്ധ്യായം 12.

ഏകകാലികസമതപങ്ങള്‍

(Simultaneous Equations).

$x+4=15$ (1) $x+y=7$ (2)

ഈ രണ്ടു സമതപങ്ങളേയും പരിശോധിക്കുക. 1-ാം സമതപത്തില്‍ $x=11$ ആണെന്നു വ്യക്തമാണല്ലോ. 2-ാം സമതപത്തില്‍ xന്നു് ഏതു വില കല്പിക്കുന്നതായാലും അ

തിന്ന് യോജിച്ച ഒരു വില yക്കും കാണാവുന്നതാണ്. ഉദാഹരണമായി $x=5$ എന്ന് വിചാരിക്കുക. അപ്പോൾ $y=2$. ഇങ്ങിനെ xന്നും yക്കും എത്രയോ ജോടി വിലകൾ നിശ്ചയിക്കാം. കുറേ ജോടി വിലകൾ താഴേ ചേൎക്കുന്നു.

x	0	2	$3\frac{1}{2}$	5	-1	10
y	7	5	$3\frac{1}{2}$	2	8	-3
$x+y$	7	7	7	7	7	7

$x-y=3$ (3)

ഈ സമത്വത്തിൻെറ ഉപാധി അനുസരിച്ച് അനേകം ജോടി വിലകൾ xന്നും yക്കും ഉണ്ടാകാമെന്ന് നാം കണ്ടുവല്ലോ.

കുറേ ജോടി വിലകൾ താഴേ ചേൎക്കുന്നു.

x	3	5	0	$1\frac{1}{2}$	-1	-3
y	0	2	-3	$-1\frac{1}{2}$	-4	-6
$x-y$	3	3	3	3	3	3

മേൽ കാണുന്ന രണ്ടു പട്ടികകളേയും പരിശോധിക്കുന്നതായാൽ രണ്ടു സമത്വങ്ങളിലേയും ഉപാധിക്കനുസരിച്ചതായ ഒരു ജോടി വില മാത്രമേ കാണുകയുള്ളൂ. അത് $x=5$, $y=2$ എന്ന ജോടിയാകുന്നു. എല്ലാ ജോടി വിലകളേയും നമുക്കു ഇവിടെ എഴുതുവാൻ സാധിക്കുകയില്ലെങ്കിലും രണ്ടു സമത്വങ്ങൾക്കും യോജിച്ച ഒരു ജോടി വില മാത്രമേ ഉണ്ടാകയുള്ളുവെന്ന് പിന്നീട് തെളിവാകും.

$$x+y=7 \qquad (1)$$
$$3x+3y=21 \qquad (2)$$

രണ്ടാം സമത്വം 1-ാം സമത്വത്തിൻെറ പദങ്ങളെ 3കൊണ്ടു് ഗുണിച്ചിട്ടുണ്ടായതാണ്. അതുകൊണ്ടു് 2-ാം സമത്വത്തെ 1-ാം സമത്വത്തിൻെറ ഒരു **ഉൽപന്നസമത്വം** (Derived equation) ആയി മാത്രം കരുതാം. അതുനിമിത്തം ഈ രണ്ടു സമത്വങ്ങളിൽനിന്ന് xൻെറയും yയുടെയും വില നിശ്ചയിക്കുവാൻ സാധിക്കുന്നതല്ല.

$$x+y=7. \qquad x+2y=10.$$

ഈ രണ്ടു സമത്വങ്ങളിൽ ഒന്ന് മററൊന്നിൽനിന്ന് ഉൽപന്നമായതല്ലാത്തതുകൊണ്ടു് ഇവയെ **സ്വതന്ത്രസമത്വങ്ങൾ** (Independent equations) എന്നു പറയുന്നു.

രണ്ടു സ്വതന്ത്രസമത്വങ്ങളുടെ ഉപാധികൾക്കു യോജിച്ച ഒരു ജോടിവില എപ്പോഴും കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.

ഒന്നിലധികം **അജ്ഞാതരാശികൾ** (Unknown quantities) അടങ്ങീട്ടുള്ള സമത്വങ്ങളെ **ഏകകാലികസമത്വങ്ങൾ** (Simultaneous Equations) എന്നു പറയുന്നു. രണ്ടു അജ്ഞാതരാശികൾ മാത്രം അടങ്ങീട്ടുള്ള സമത്വങ്ങളുടെ ഫലം നിർണ്ണയിക്കുന്ന മാർഗ്ഗങ്ങളെ നമുക്ക് ഇപ്പോൾ പഠിക്കാം.

$$x+3y=19 \qquad (1)$$
$$2x+y=13 \qquad (2)$$

1-ാം സമത്വപ്രകാരം $x=19-3y$.
xൻെറ വില 2-ാം സമത്വത്തിൽ ചേർക്കുമ്പോൾ

$$2(19-3y)+y=13$$
$$38-6y+y=13$$
$$-5y=-25$$
$$\therefore\ y=5.$$

ഈ വില ഒന്നാം സമതച്ചത്തിൽ ചേക്കുക.

$$x+15=19$$

$$\therefore x=4.$$

$\therefore x=4; y=5.$ ഈ രണ്ടു് വിലയും കണ്ടാൽ മാത്രമേ നാം സമതച്ചങ്ങളുടെ ഫലം നിണ്ണയിച്ചുവെന്നു് പറഞ്ഞുകൂടു.

xൻെറ വില കാണുന്നതിന്നു പകരം yയുടെ വില കണ്ടും ഫലം നിണ്ണയിക്കാം. xൻെറ വിലയെ 2-ാം സമതച്ചത്തിൽ ചേൎത്തപ്പോൾ y അജ്ഞാതരാശിയായ ഒരു ഏകഘാത സമതച്ചം കിട്ടിയതുകൊണ്ടു് yക്കു ഒരു വില മാത്രമേ ഉള്ളുവെന്നു തെളിയുന്നു. yയുടെ ഈ വില ചോദ്യത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു സമതച്ചത്തിൽ ചേക്കുമ്പോൾ x അജ്ഞാത രാശിയായ ഒരു ഏകഘാതസമതച്ചം കിട്ടുന്നു. അതുകൊണ്ടു xന്നും ഒരു വില മാത്രമേ ഉള്ളു.

അതായതു് രണ്ടു അജ്ഞാത രാശികൾക്കും ഓരോ വില മാത്രമേയുള്ളൂ.

നാം ഉപയോഗിച്ച മാൎഗ്ഗത്തിലുള്ള ക്രിയകളെ അവലോകനം ചെയ്യുക.

(1) ഒരു സമതച്ചത്തിൽനിന്നു് ഒരു രാശിയുടെ വിലയെ മറേറ രാശി ഉപയോഗിച്ചു വ്യക്തമാക്കുക.

(2) ആ വിലയെ രണ്ടാം സമതച്ചത്തിൽ ചേൎത്തു അതിനെ ഒരു ഏകഘാത സമതച്ചമായെഴുതുക.

(3) ഈ ഏകഘാത സമതച്ചത്തിൻെറ ഫലം നിണ്ണയിക്കുക.

(4) ഫലം നിണ്ണയിച്ചു കിട്ടിയ വിലയെ ഏതെങ്കിലും ഒരു സമതച്ചത്തിൽ ചേൎത്തു രണ്ടാമത്തെ രാശിയുടെ വിലയും കാണുക.

ഇങ്ങനെ സമതച്ചങ്ങളുടെ ഫലം നിണ്ണയിക്കുന്ന മാൎഗ്ഗത്തിന്നു് പ്രതിന്യാസമാൎഗ്ഗം (Method of substitution) എന്നു പറയുന്നു.

അഭ്യാസം 24.

പ്രതിന്യാസമാൎഗ്ഗം ഉപയോഗിച്ച ഫലം നിൎണ്ണയിക്കുക.

1. $x+5y=12; \quad 3x+2y=23.$
2. $2x-y=7; \quad x+2y=11.$
3. $5x+7y=122; \quad 10x+3y=123.$
4. $7x-y=50; \quad 13x+10y=-2.$
5. $11x+y=-9; \quad 21x+11y=1.$

പ്രതിന്യാസമാൎഗ്ഗം എപ്പോഴും സൌകൎയ്യമായിരിക്കയില്ലെന്ന് ഇതിന്നു മുമ്പിലുള്ള അഭ്യാസത്തിലെ ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്ന് നിങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കിയിരിക്കും. അതിലും എളുപ്പമായ ഒരു മാൎഗ്ഗം കാണിക്കാം.

4 കസേലകളും 7 ബെഞ്ചിന്നും കൂടി 29ക.യും, 6 കസേലകളും 5 ബെഞ്ചിന്നും കൂടി 27ക.യും വിലയുണ്ടെങ്കിൽ ഓരോ സാമാനത്തിന്റെയും വില കാണുക.

രണ്ടിനത്തിലുമുള്ള കസേലയുടെ എണ്ണം സമമാണെങ്കിൽ ബെഞ്ചിന്റെ വില പ്രത്യേകമായി കാണാം. കസേലയുടെ എണ്ണം സമമാകുവാൻ ഒന്നും രണ്ടും ഇനങ്ങളിലുള്ള സാമാനങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ 3 കൊണ്ടും 2 കൊണ്ടും യഥാക്രമം ഗുണിക്കണം.

12 കസേലയുടെ വില	+21 ബെഞ്ചിന്റെ വില			=87ക.
12 ,,	,, +10	,,	,,	=54ക.
	∴ 11	,,	,,	=33ക.
	∴ 1	,,	,,	= 3ക.
	∴ 1 കസേലയുടെ വില			= 2ക.

ഒരു കസേലയുടെ വിലക്കു പകരം xക. എന്നും ഒരു ബെഞ്ചിന്റെ വിലക്കു പകരം yക. എന്നും എഴുതുക.

$4x+7y=29.$ (1)

$6x+5y=27.$ (2)

(1)നെ 3കൊണ്ടു് ഗുണിച്ചാൽ $12x+21y=87$ (3)
(2)നെ 2കൊണ്ടു് ഗുണിച്ചാൽ $12x+10y=54$ (4)
(3)ൽനിന്നു (4) കിഴിച്ചാൽ $11y=33$

$$\therefore \quad y=3$$
$$4x+21=29$$
$$\therefore \quad 4x=29-21$$
$$\therefore \quad x=2$$
$$\therefore \quad x=2;\ y=3.$$

ഈ മാൎഗ്ഗത്തിൽ നമ്മുടെ ഉദ്ദേശം ഏതെങ്കിലും ഒരു രാശിയെ **വിലോപിപ്പിക്ക**(eliminate)ണമെന്നാണു്.

ഇതിന്നായി നാം ആ രാശിയുടെ ഗുണകങ്ങളെ രണ്ടു സമതങ്ങളിലും സമമാക്കുന്നു. ഒരു രാശിയെ വിലോപിപ്പിച്ചശേഷം ഉണ്ടാകുന്ന സമതം ഒരു ഏകഘാതസമതമായിരിക്കും. ഇങ്ങിനെ ഒരു രാശിയെ വിലോപിപ്പിച്ചു ഏകകാലികസമതങ്ങളുടെ ഫലം നിൎണ്ണയിക്കുന്ന മാൎഗ്ഗത്തിന്നു **വിലോപനമാൎഗ്ഗം** (Method of elimination) എന്നു പറയുന്നു.

വിലോപനമാൎഗ്ഗത്തെ ദൃഷ്ടാന്തീകരിക്കുവാൻ 2 ഉദാഹരണങ്ങൾക്കൂടി താഴേ ചേൎക്കുന്നു.

1. $5x+7y=26.$ (1)
   $5x+2y=11.$ (2)

ഒന്നാം സമതത്തിൽനിന്നു മറേറതിനെ കിഴിക്കുന്നതിനാൽ xനെ വിലോപിപ്പിക്കാം. കിഴിച്ചു കിട്ടുന്ന സമതം y അജ്ഞാതരാശിയായ ഒരു ഏകഘാത സമതമായിരിക്കും.

2. $3x-17y=-25.$ (1)
   $8x+17y=\ \ 58.$ (2)

ഈ ഉദാഹരണത്തിൽ yയുടെ ഗുണകങ്ങളുടെ സംഖ്യവില സമവും ചിഹ്നങ്ങൾ വിപരീതവും ആയതുകൊണ്ടു് രണ്ടു സമതങ്ങളേയും കൂട്ടുന്നതിനാൽ x മാത്രം ശേഷിക്കും. കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന സമതം x അജ്ഞാതരാശിയായ ഒരു ഏകഘാതസമതമായിരിക്കും.

ഈ രണ്ടു ഉദാഹരണങ്ങളെയും വിദ്യാൎത്ഥി അഭ്യാസങ്ങളായി കരുതണം.

ഉദാ: —

$$x-5=y+4 \quad (1)$$

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=\frac{x}{6} \quad (2)$$

ഈ രണ്ടു സമതാങ്ങളും അവയിലുള്ള രാശികളെ വിലോപിപ്പിക്കുവാൻ സൌകൎയ്യമായ ഒരു രൂപത്തിലല്ല ഉള്ളതു്.

(1) x, y എന്ന അജ്ഞാതരാശികൾ അടങ്ങിയ പദങ്ങൾ ഇടത്തുപക്ഷത്തും ശേഷമുള്ള രാശികൾ വലത്തുപക്ഷത്തുമായി എഴുതുന്നതു സൌകൎയ്യമായിരിക്കും. ഇങ്ങിനെ എഴുതുന്നതായാൽ 1-ാം സമതാം $x-y=9$ എന്ന രൂപത്തിലാകും.

(2) ഭിന്നിതങ്ങളെ നീക്കം ചെയ്യുന്നതായാൽ ഫലം നിൎണ്ണയിക്കുന്നതു എളുപ്പമായിരിക്കും. 2-ാം സമതാത്തിലെ പദങ്ങളെ അവയുടെ ഛേദകങ്ങളുടെ അ.സാ. ഗുണിതമായ 30കൊണ്ടു് പെരുക്കുന്നതായാൽ,

$$6x-10y=5x. \quad (1)$$

$$\therefore\ x-10y=0. \quad (2)$$

സമതാങ്ങൾ ഇപ്പോൾ താഴേ കാണുന്ന രൂപത്തിലായിരിക്കും.

$$x-y=9 \quad (1)$$

$$x-10y=0 \quad (2)$$

(1)ൽനിന്നു (2) കിഴിച്ചാൽ $9y=9$

$$\therefore\ y=1$$

ഈ വിലയെ ഒന്നാം സമതാത്തിൽ ചേൎക്കുക.

$$x-1=9$$

$$\therefore\ x=10$$

സത്യാപനം:

2-ാം സമതാത്തിൽ ഈ രണ്ടു വിലകളേയും ചേൎക്കുക.

$$10-10\times 1=0.$$

x, y എന്ന രാശികളുടെ ഗുണകങ്ങൾ തമ്മിൽ വല്ല പ്രത്യേക ബന്ധവുമുണ്ടെങ്കിൽ ചില കൃത്രിമമാൎഗ്ഗങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാ: — 1 $\qquad 13x+46y=112. \quad (1)$

$$46x+13y=-53. \quad (2)$$

(1)നോടു് (2) കൂട്ടിയാൽ $59x+59y=59. \quad (3)$

(3)നെ 59കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ $x+y=1 \quad (4)$

(1)ൽനിന്നു് (2) കിഴിച്ചാൽ $-33x+33y=165 \quad (5)$

(5)നെ 33കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ $-x+y=5. \quad (6)$

(4) നോട് (6) കൂട്ടിയാൽ $2y=6$.

$$\therefore y=3.$$

$$\therefore x=-2$$

സത്യാപനം ചെയ്യുക.

ഉദാ:— 2. ഫലം നിർണ്ണയിക്കുക.

$$\frac{1}{3}(5-2x)-y=\frac{-3y+4}{5}. \quad (1)$$

$$\frac{3-4x}{2}+3x=\frac{y-5}{7}. \quad (2)$$

(*a*) ആവരണ ചിഹ്നങ്ങളെ നീക്കുക.

(*b*) ഓരോ സമതാത്തിലുമുള്ള ഛേദകങ്ങളുടെ അ. സാ. ഗുണിതംകൊണ്ടു അവയെ പെരുക്കി ഗുണകങ്ങളെ പൂർണ്ണസംഖ്യകളാക്കുക.

ഇപ്പോൾ സമതാങ്ങൾ ഫലം നിർണ്ണയിക്കുവാൻ സൌകര്യമായ രൂപത്തിലാണ്.

ഉദാ:— 3. $\frac{y-4}{2}=\frac{2x+y}{8}=\frac{x+10}{5}$

ഇവയിൽനിന്ന് 3 സ്വതന്ത്ര സമതാങ്ങളെ നിർമ്മിക്കാം.

$$\frac{y-4}{2}=\frac{2x+y}{8} \quad (1)$$

$$\frac{y-4}{2}=\frac{x+10}{5} \quad (2)$$

$$\frac{2x+y}{8}=\frac{x+10}{5} \quad (3)$$

ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സമതാങ്ങളെ നിർമ്മിച്ചു അവയുടെ ഫലം നിർണ്ണയിച്ചാൽ മതി.

അഭ്യാസം 25.

ഫലം നിർണ്ണയിക്കുക. 1 മുതൽ 30വരെയുള്ള ചോദ്യങ്ങളുടെ ഉത്തരം സത്യാപനം ചെയ്യുക.

1. $5x+7y=69;\ 5x+3y=41.$
2. $x+y=37;\ x-y=49.$
3. $2x-17y=32;\ 17x+17y=-51.$
4. $14x-23y=76;\ 18y-14x=-61.$
5. $9x+y=8;\ 7x-8y=15.$

6. $11y+3x=59;\ 13y-9x=283.$

7. $4x-9y=46;\ 16x-y=9.$

8. $14x-25y=-9\frac{1}{2};\ 21x-20y=-12\frac{1}{2}.$

9. $33x+8y=24;\ 22x+7y=21.$

10. $35y-6x=29;\ 21y+2x=23.$

11. $3x+2y=12;\ 5x-3y=1.$

12. $13x+7y=93;\ 6x+11y=74.$

13. $2y+1=5x;\ 4x-y-4=5x-2y.$

14. $5x=2y;\ 3(x-3)=y-8.$

15. $35-(2-y)=7x;\ 12y-(x+10)=9.$

16. $20-4\,(7+x)=5\,(y-2x);\quad 18-3\,(5y-7)=4x-3.$

17. $5(3x+2)+173=3(2y-3);\quad 15y-4(3y-2)=-121.$

18. $\frac{3x}{2}=\frac{y+3}{4};\quad \frac{7x-4}{5}=\frac{y+3}{6}.$

19. $\frac{x}{2}+\frac{2}{3}(y+1)=x+y-2;\ 7x=2y+4.$

20. $\frac{3x+2}{10}=\frac{y+2}{4};\quad \frac{4}{7}(x+1)=\frac{2y}{3}.$

21. $\frac{7y-3x}{4}=\frac{3y+2x}{5}=3.$

22. $\frac{5x+2y}{7}=5-\frac{y-2x}{3};\quad 3x-y=y-13x.$

23. $\frac{1}{2}(3x-2y)=\frac{1}{4}(2x-y)+3;\ \frac{1}{2}(5x-4y)=\frac{1}{3}(4x-3y)+3$

24. $\frac{1}{4}(a-b)+\frac{1}{3}(a+b)=15;\ \frac{1}{3}(a-b)+\frac{1}{4}(a+b)=13.$

25. $\frac{x+3y-4}{x-3y}=7;\quad \frac{2x+3y-6}{x+3y}=8.$

(വിലങ്ങനെ പെരുക്കി സമീകാരങ്ങളെ നിർമ്മിക്കുക.)

26. $\cdot 3x+y=\cdot 9;\quad \cdot 06x-\cdot 1y=\cdot 09.$

27. $x+\cdot 2y=\cdot 6;\quad 10\cdot 2x-\cdot 06y=\cdot 03.$

28. $13x-5\cdot 8y=20\cdot 2;\quad \cdot 43x+\cdot 34y=1\cdot 2.$

29. $47x+61y=56\frac{1}{3};\quad 61x+47y=51\frac{2}{3}.$

30. $93x+15y=123;\quad 15x+93y=201.$

31. $49x-57y=172;\quad 57x-49y=252.$

32. $118y-48x=-63\frac{1}{3};\quad 118x-48y=75.$

33. $3y-7x-37=\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=0.$

34. $5y+4-3x=\frac{y}{14}-\frac{x}{26}=0.$

35. $3y-5=\frac{x-y}{4}=\frac{x+1}{5}.$

36. $1\frac{1}{2}(x+y)=8-y=\frac{4(x+3)}{5}.$

37. $1\frac{1}{2}x-\left\{\frac{2y+x}{10}+y\right\}=\frac{x+2}{3};\quad 2x+5-\frac{15-y}{4}$
$=4y-\frac{7y+11}{16}.$

38. $\frac{x+3}{4}-\frac{3y-4x}{5}=2y-7;\quad \frac{x+6}{2}+\frac{y-8}{3}$
$=29\frac{1}{2}-5x.$

39. $\frac{3{\cdot}3x-1{\cdot}5(y-1)}{4{\cdot}4}-\frac{y-x}{2{\cdot}5}=2{\cdot}8-{\cdot}9y;$

$10y-8=\frac{2(y-{\cdot}2x)}{{\cdot}6}.$

40. $(x-7)(y-3)=xy+79;\ x-y=4.$

41. $(x-4)(y-3)=xy-84;\ 6x-5y-27=0.$

42. $(2x-3)(3y-2)=6xy-1;\ (3x-1)(5y+2)$
$=15xy-10.$

ചിലപ്പോൾ സമത്വങ്ങളുടെ ഫലം നിൎണ്ണയിക്കുന്നതിന്ന് ചില പ്രതിന്യാസങ്ങൾ സഹായകരമായിരിക്കും.

ഉദാ:— $5(3x+1)-2(2y-1)=-16$ (1)

$3(3x+1)+5(2y-1)=9$ (2)

$3x+1=a.\ 2y-1=b$ എന്നു വിചാരിക്കുക.

$\therefore\ 5a-2b=-16$ (3)

$3a+5b=9.$ (4)

ഫലം നിൎണ്ണയിച്ചാൽ $a=-2,\ b=3$ എന്ന് കിട്ടും.

$\therefore\ 3x+1=-2 \qquad \therefore x=-1$

$\therefore\ 2y-1=3 \qquad \therefore y=2.$

അജ്ഞാതരാശി ഭിന്നിതങ്ങളുടെ ഛേദകമാകുമ്പോഴാണ് പ്രതിന്യാസം വളരെ ഉപകരിക്കുന്നതു്.

$\frac{1}{x}$നെ xന്റെ വ്യുൽക്രമം (reciprocal) എന്നു പറയുന്നു.

$\therefore$ yയുടെ വ്യുൽക്രമം $=\frac{1}{y}$.

$\frac{2}{3}, \frac{1}{5}, 1, 7$ എന്നിവ $\frac{3}{2}, 5, 1. \frac{1}{7}$ എന്നിവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങളാകുന്നു.

ഉദാ:— $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=5; \quad \frac{3}{x}+\frac{1}{y}=5.$

$\frac{1}{x}=a, \frac{1}{y}=b$ എന്നു വിചാരിക്കുക.

a, b എന്ന രാശികളടങ്ങിയ സമത്വങ്ങളുടെ ഫലം നിർണ്ണയിക്കുക.

അപ്പോൾ $x=\frac{1}{a}; \quad y=\frac{1}{b}.$

ഈ സമത്വങ്ങളിൽ a, b എന്നിവയെ പ്രതിന്യസിച്ചു എഴുതുമ്പോൾ

$a+2b=5$

$3a+b=5.$

ഫലം നിർണ്ണയിക്കുമ്പോൾ $a=1, b=2$

$\therefore x=1, y=\frac{1}{2}$ എന്നു കിട്ടും.

ആദ്യത്തെ സമത്വങ്ങളിൽ ഈ വിലകൾ ചേർത്തു സത്യാപനം ചെയ്യുക.

43. $4(2x-3)-3(y+2)=29;$
$6(2x-3)+4(y+2)=18.$

44. $29(3x+1)+17(2y+3)=201;$
$17(3x+1)+29(2y+3)=213.$

45. $\frac{1}{2}(x+1)+\frac{1}{3}(y+3)=\frac{1}{4}; \quad \frac{2}{3}(x+1)-\frac{1}{9}(y+3)=\frac{1}{6}.$

46. $\frac{10}{x}+\frac{6}{y}=7; \quad \frac{8}{x}-\frac{9}{y}=1.$

47. $\frac{5}{x}+\frac{16}{y}=79; \quad \frac{16}{x}-\frac{1}{y}=44.$

48. $3x+\frac{5}{y}=\frac{1}{2}; \quad 5x-\frac{3}{y}=6\frac{1}{2}.$

49. $\frac{1}{x}+4y=\frac{7}{4}; \quad \frac{1}{2x}-\frac{3}{4}y=3$

50. $\frac{4}{x-1}+\frac{5}{y+3}=2; \quad \frac{25}{y+3}-\frac{16}{x-1}=1.$

51. $\frac{2}{3(5x+3)}-\frac{3}{4(2y-7)}=\frac{1}{36};$

$\frac{4}{5(5x+3)}+\frac{9}{10(2y-7)}=-\frac{1}{6}.$

52. $\frac{8}{21(x-1)}+\frac{2}{7(y+1)}=\frac{1}{3}; \quad \frac{4}{5(x-1)}+\frac{1}{5(y+1)}=\frac{1}{2}.$

53. $4x+y=3xy; \quad 2x+3y=4xy.$

xyയുടെ ഗുണകങ്ങൾ സമമാക്കിക്കിട്ടുന്ന സമതാങ്ങളിൽനിന്ന് xഉം yഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടു പ്രതിന്യസിക്കുക.

54. $8x+9y=5xy; \quad 12y-4x=3xy.$

അക്ഷരഗുണകങ്ങൾ അടങ്ങിയ സമതാങ്ങൾ താഴേ ചേർക്കുന്നു.

55. $x+y=2a; \quad x-y=2b.$

56. $2x+y=5a+b; \quad 3x+4y=10a-b.$

57. $ax+by=c; \quad x-y=d.$

58. $mx+y=ma; \quad x+my=a$

59. $ax+by=x+y=c.$

60. $x+ay=b; \quad ax-by=c$

അദ്ധ്യായം 13.

ഏകകാലികസമതാങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്യാവുന്ന കണക്കുകൾ.

(Problems leading to Simultaneous equations).

അങ്കഗണിതത്തിലെ ചില കണക്കുകളെ ഏകഘാത സമതാങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് എളുപ്പത്തിൽ ചെയ്യുന്ന മാർഗ്ഗം നാം പഠിച്ചുവല്ലോ. കാണേണ്ടുന്ന രാശികളുടെ എണ്ണം വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ ഏകകാലികസമതാങ്ങളെ ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരും. ഏകകാലികസമതാങ്ങളെ ഉപയോ

ഗിച്ചുകണക്കു ചെയ്യുന്ന മാർഗ്ഗം താഴേ പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്ന് വ്യക്തമാകുന്നതാണ്. ഇവയിൽ ചിലതിനെ ഏകാംഗാതസമതാങ്ങൾ മാത്രം ഉപയോഗിച്ചു ചെയ്യാമെങ്കിലും ഏകകാലികസമതാങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത് അധികം സൌകര്യവും എളുപ്പവും ആയിരിക്കും.

ഉദാ:—1. രണ്ടു സംഖ്യകളിൽ ഒന്നിൻെറ 5 ഇരട്ടിയിൽനിന്ന് മറേറതിൻെറ 6 ഇരട്ടി കിഴിച്ചാൽ 9 കിട്ടും. ഒന്നാമത്തേതിൻെറ $\frac{2}{3}$ മറേറതിൻെറ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടിയേക്കാൾ 10 കുറവാണെങ്കിൽ സംഖ്യകൾ കാണുക.

ഒന്നാമത്തെ സംഖ്യ x എന്നും മറേറതു y എന്നും വിചാരിക്കുക.

$\therefore\ 5x-6y=9 \qquad (1)$

$\frac{2}{3}x+10=1\frac{1}{2}y \qquad (2)$

ഈ രണ്ടു സമതാങ്ങളുടെ ഫലം നിർണ്ണയിച്ചാൽ,

$x=21,\ y=16$ എന്നു കിട്ടും.

$\therefore$ ഒന്നാമത്തെ സംഖ്യ $=21$. രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യ $=16$.

കണക്കിൽ അടങ്ങിയ രണ്ടു് ഉപാധികളും ശരിയാവുന്നുണ്ടോ എന്നു വിദ്യാർത്ഥി പരിശോധിക്കണം.

2. 9 റാത്തൽ ചായക്കും 11 റാത്തൽ കാപ്പിക്കും കൂടി 16ക. 2ണ. 3പ. വില. 14 റാത്തൽ ചായക്കു് 12 റാത്തൽ കാപ്പിയെക്കാൾ 1ക. അധികം വിലയായാൽ ഓരോന്നിനും റാത്തലൊന്നിന്ന് വിലയെന്തു?

ഒരു റാത്തൽ ചായക്കു് xണ.യും ഒരു റാത്തൽ കാപ്പിക്കു് yണ.യും വിലയുണ്ടെന്നു വിചാരിക്കുക.

$\therefore\ 9x+11y=258\frac{1}{4} \qquad (1)$

$14x-12y=16 \qquad (2)$

ഈ രണ്ടു സമതാങ്ങളുടെ ഫലം നിർണ്ണയിച്ചാൽ,

$x=12\frac{1}{2},\ y=13\frac{1}{4}$.

$\therefore$ 1 റാത്തൽ ചായയുടെ വില $=12$ണ. 6പ.

$\therefore$ 1 ,, കാപ്പിയുടെ ,, $=13$ണ. 3പ.

ഈ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു് വിദ്യാർത്ഥി പരിശോധിക്കണം.

3. ഒരു വിദ്യാർത്ഥി തൻെറ വീട്ടിൽനിന്നു സ്കൂളിലേക്കു് സൈക്കിളിന്മേൽ സവാരി ചെയ്യുന്നു. മണിക്കൂറിൽ 2 നാഴിക വീതം അധികം പോകുന്നതായാൽ 6 മിനുട്ടു മുമ്പ് എത്തും. മണിക്കൂറിൽ 2 നാഴിക വീതം കുറച്ചുപോകുന്ന

തായാൽ 10 മിനുട്ടു വൈകി എത്തും. എന്നാൽ അവൻെറ വീട്ടിൽനിന്നു സ്കൂളിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക.

മണിക്കൂറിൽ x നാഴിക പോകുമ്പോൾ y മണിക്കൂർ വേണ്ടിവരും എന്നു വിചാരിക്കുക.

$\therefore$ മണിക്കൂറിൽ 2 നാഴികവീതം അധികം പോകുമ്പോൾ വേണ്ടുന്ന സമയം $=(y-\frac{1}{10})$ മണിക്കൂർ.

മണിക്കൂറിൽ 2 നാഴിക വീതം കുറച്ചുപോകുമ്പോൾ വേണ്ടുന്ന സമയം $=(y+\frac{1}{6})$ മണിക്കൂർ. അതുകൊണ്ടു ദൂരത്തെ മൂന്നുവിധത്തിൽ കണ്ടാക്കാം.

ദൂരം $=xy$ നാഴിക $=(x+2)(y-\frac{1}{10})$ നാഴിക $=(x-2)(y+\frac{1}{6})$ നാഴിക.

ആദ്യത്തെ രണ്ട് വ്യഞ്ജകങ്ങളെ ചുരുക്കിക്കിട്ടുന്ന സമത്വം,

$xy=xy+2y-\frac{1}{10}x-\frac{1}{5}$

$\therefore 2y-\frac{1}{10}x=\frac{1}{5}$

10കൊണ്ട് പെരുക്കുമ്പോൾ $20y-x=2.$ (1)

ഒന്നാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും വ്യഞ്ജകങ്ങളെ ചുരുക്കുമ്പോൾ,

$xy=xy-2y+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}$

$\frac{1}{6}x-2y=\frac{1}{3}$

6കൊണ്ട് പെരുക്കുമ്പോൾ,

$x-12y=2.$ (2)

ഒന്നും രണ്ടും സമത്വങ്ങളുടെ ഫലം നിണ്ണയിക്കുമ്പോൾ $y=\frac{1}{2}, x=8$ എന്നും കിട്ടും.

$\therefore$ ദൂരം $=4$ നാഴിക.

ഈ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

അഭ്യാസം 26.

1. ഒരു സംഖ്യയിൽനിന്ന് വേറൊരു സംഖ്യയുടെ 3 ഇരട്ടി കിഴിച്ചാൽ 2 ബാക്കി കിട്ടും. വലിയ സംഖ്യയുടെ 3 ഇരട്ടിയോട്ട് ചെറിയ സംഖ്യയുടെ 4 ഇരട്ടി കൂട്ടിയാൽ 230 കിട്ടും. എന്നാൽ സംഖ്യകൾ കാണുക.

2. 3 സംഖ്യകളുടെ തുക 100. ഒന്നാമത്തെ സംഖ്യയിൽനിന്ന് മൂന്നാമത്തേതു് കിഴിച്ചാൽ രണ്ടാമത്തേതിൻെറ ഇരട്ടി കിട്ടും. ഒന്നാമത്തേതിൽനിന്ന് രണ്ടാമത്തേതു് കിഴിച്ചാൽ മൂന്നാമത്തേതിൻെറ 7 ഇരട്ടി കിട്ടും. എന്നാൽ സംഖ്യകൾ കാണുക.

3. രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം അവയുടെ തുകയുടെ $\frac{4}{11}$ ആണ്. ഒന്നിൻെറ $\frac{2}{7}$ നോട്ട് 5 കൂട്ടിയാൽ മറേറതിൻെറ $\frac{1}{5}$ കിട്ടും. എന്നാൽ സംഖ്യകൾ കാണുക.

4. രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയോടു് 10 കൂട്ടി 8 കൊണ്ടു് ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യ അവയുടെ വ്യത്യാസത്തേക്കാൾ 1 കുറവാണു്. വലിയ സംഖ്യയുടെ പകുതിയും ചെറിയ സംഖ്യയുടെ കാലംശവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 6 ആണെങ്കിൽ സംഖ്യകൾ കാണുക.

5. 5 സ്ത്രീകൾക്കും 8 പുരുഷന്മാൎക്കും കൂടി 3 ദിവസത്തിൽ 20ക. 10ണ. കൂലികിട്ടുന്നു. 11 സ്ത്രീകൾക്കും 10 പുരുഷന്മാൎക്കുംകൂടി 1 ദിവസത്തിൽ 10ക. 6ണ. കൂലികിട്ടുന്നു. എന്നാൽ ഒരു സ്ത്രീക്കു് ഒരു ദിവസത്തിൽ എത്ര കൂലി കിട്ടും?

6. 1 അണക്കു് 3 വീതം കുറേ മാങ്ങയും ഡജന്നു് 5ണ. വീതം കുറേ നാരങ്ങയും വാങ്ങിയതിന്നു് 4ക. 6ണ. വിലയായി. മാങ്ങക്കു് നാരങ്ങയുടെ വിലയും നാരങ്ങക്കു് മാങ്ങയുടെ വിലയും കൊടുക്കുന്നതായാൽ ആകെ 6പൈ വില കുറവുണ്ടാകുമായിരുന്നു. എന്നാൽ വാങ്ങിയ മാങ്ങയെത്ര? നാരങ്ങയെത്ര?

7. 3 പുരുഷന്മാരും 2 കുട്ടികളും കൂടി 1 പണി 4 ദിവസംകൊണ്ടു് ചെയ്യും. അതേ പണി 2 പുരുഷന്മാരും 3 കുട്ടികളുംകൂടി 5 ദിവസംകൊണ്ടു ചെയ്യും. എന്നാൽ 7 പുരുഷന്മാരും 13 കുട്ടികളുംകൂടി ആ പണി എത്ര ദിവസംകൊണ്ടു് ചെയ്യും?

8. ഒരു വ്യാപാരി 8 പശുക്കളേയും 5 ആടുകളേയും വാങ്ങി, അവയെ വിററപ്പോൾ അയാൾക്കു് 65ക. ലാഭം കിട്ടി. 4 പശുക്കളേയും 15 ആടുകളേയും അതേപ്രകാരം വാങ്ങി വിററിരുന്നെങ്കിൽ അയാൾക്കു 70ക. ലാഭം കിട്ടുമായിരുന്നു. എന്നാൽ ഓരോ കാലിയുടെ വിലയിന്മേലും അയാൾക്കു എത്ര ലാഭം കിട്ടി?

(ഒരു പശുവിൻെറ വിലയിന്മേൽ xക.യും ഒരാട്ടിൻെറ വിലയിന്മേൽ yക.യും ലാഭം കിട്ടിയെന്നു വിചാരിക്കുക.)

9. ഒരു കാലിക്കച്ചവടക്കാരൻ 8 പശുക്കളേയും 5 ആടുകളേയും ഒരു ചന്തയിൽനിന്നു വാങ്ങി വിററപ്പോൾ അയാൾക്കു് 35ക. ലാഭം കിട്ടി. 12 പശുക്കളേയും 15 ആടുകളേയും അതേപ്രകാരം വാങ്ങി വില്ക്കുന്നതായാൽ 30ക. ലാഭം കിട്ടുമായിരുന്നു. എന്നാൽ ഓരോ കാലിയുടെ വിലയിന്മേലും ലാഭമോ നഷ്ടമോ എത്ര? (ഒരു പശുവിൻെറ വിലയിന്മേൽ ലാഭം xക. എന്നും ഒരു ആട്ടിൻെറ വിലയിന്മേൽ ലാഭം yക. എന്നും വിചാരിക്കുക. ഉത്തരം ഋണസംഖ്യയാണെങ്കിൽ നഷ്ടമാണു്).

10. ബിയുടെ ഓഹരി ഏയുടെ ഓഹരിയുടെ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടിയേക്കാൾ 5ക. കുറഞ്ഞും ഏയുടെ ഓഹരി സീയുടെ ഓഹരിയുടെ ഇരട്ടിയേക്കാൾ 30ക. കവിഞ്ഞും ഇരിക്കത്തക്കവണ്ണം 370ക. അവൎക്കു മൂന്നുപേൎക്കും ഭാഗിച്ചു കൊടുക്കുക.

11. ഏ്യക്ക് ബീയേക്കാൾ സീയുടെ ഓഹരിയുടെ പകുതി അധികവും ബീക്ക് ഏ്യയുടെ ഓഹരിയുടെ പകുതിയും സീയുടെ ഓഹരിയുടെ $\frac{1}{7}$ഉം കൂടി യത്രയും കിട്ടത്തക്കവണ്ണം 825ക. അവൎക്കു മൂന്നപേൎക്കും ഭാഗിച്ചുകൊടുക്കുക.

12. അണ, കാലണ, പൈ കൂടി ഒരു സഞ്ചിയിൽ ആകെ 78 നാണയങ്ങൾ ഉണ്ടു്. കാലണനാണയങ്ങളുടെ വില അണനാണയങ്ങളുടെ വിലയേക്കാൾ 1ണ. അധികമാണ്. സഞ്ചിയിൽ ആകെ 1ക. 2ണ. 3പ. ഉണ്ടെങ്കിൽ ഓരോ തരം നാണയങ്ങളെത്ര?

13. 10 കൊല്ലം മുമ്പ് ഏ്യ, ബി എന്നിവരുടെ വയസ്സു 2 : 5 എന്ന സംബന്ധത്തിലായിരുന്നു. 12 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ അവരുടെ വയസ്സു 5 : 7 എന്ന സംബന്ധത്തിലായിരിക്കും. എന്നാൽ അവരുടെ വയസ്സു കാണുക.

14. ഒരാൾക്കു് അയാളുടെ ഭാൎയ്യയുടെയും മകൻെറയും വയസ്സു കൂടിയത്ര വയസ്സുണ്ടു. 10 കൊല്ലം മുമ്പു അയാൾക്കു ഭാൎയ്യയുടെ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടി വയസ്സുണ്ടായിരുന്നു. 30 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞാൽ അമ്മക്കു മകൻെറ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടി വയസ്സുണ്ടാകും. എന്നാൽ ഓരോരുത്തരുടേയും വയസ്സു കാണുക.

15. രണ്ടു സ്ഥാനങ്ങളുള്ള ഒരു സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുകകൊണ്ടു സംഖ്യയെ ഹരിക്കുന്നതായാൽ ഹരിതഫലം 6. അക്കങ്ങളെ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ സംഖ്യയുടെ വില 9 കുറയും. എന്നാൽ സംഖ്യ കാണുക.

16. ഒരു സംഖ്യ 10നും 100നും ഇടയിലാണ്. സംഖ്യയും അതിൻെറ അക്കങ്ങളെ തിരിച്ചെഴുതിയാലുണ്ടാകുന്ന സംഖ്യയും കൂട്ടിയാൽ 121. സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 27. എന്നാൽ സംഖ്യ കാണുക.

17. 3 സ്ഥാനങ്ങളടങ്ങിയ ഒരു സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 18. ഒന്നിൻെറയും പത്തിൻെറയും സ്ഥാനങ്ങളിലുള്ള അക്കങ്ങളെ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ സംഖ്യയുടെ വില 45 കുറയും. പത്തിൻെറയും നൂറിൻെറയും സ്ഥാനങ്ങളിലുള്ള അക്കങ്ങളെ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ വില 90 അധികമാകും. എന്നാൽ സംഖ്യ കാണുക.

18. 3 സ്ഥാനങ്ങളുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ പത്തിൻെറ സ്ഥാനത്തിലെ അക്കം മററു രണ്ടു അക്കങ്ങളുടെ തുകയോടു് സമമാകുന്നു. സംഖ്യ അക്കങ്ങളുടെ തുകയുടെ 44 ഇരട്ടിയാണ്. ഒന്നിൻെറയും നൂറിൻെറയും സ്ഥാനങ്ങളിലെ അക്കങ്ങളെ തിരിച്ചെഴുതിയാൽ സംഖ്യയുടെ വില 495 കുറയും. എന്നാൽ സംഖ്യ കാണുക.

19. ഒരു ഭിന്നിതത്തിൻെറ അംശത്തിനോടും ഛേദകത്തിനോടും 5 വീതം കൂട്ടിയാൽ അതു $\frac{4}{5}$നോടു് സമമായിരിക്കും. രണ്ടിൽനിന്നും 4 വീതം കിഴിക്കുന്നതായാൽ ഭിന്നിതം $\frac{1}{2}$യോടു സമമാകും. എന്നാൽ ഭിന്നിതം കാണുക.

20. ഒരു ഭിന്നിതത്തിന്റെ ഛേദകം അംശത്തിന്റെ 3 ഇരട്ടിയേക്കാൾ 2 അധികമാണ്; അതിന്റെ ഛേദകത്തിന്റെയും അംശത്തിന്റെയും തുകയും വ്യത്യാസവും യഥാക്രമം ഛേദകവും അംശവും ആയിട്ടുള്ള ഭിന്നിതം $\frac{8}{15}$ നോടു സമമാകുന്നു. എന്നാൽ ഭിന്നിതം കാണുക.

21. ഒരു ഭിന്നിതത്തിന്റെ അംശത്തിനോടു $\frac{1}{2}$ കൂട്ടിയാൽ ഭിന്നിതത്തിന്റെ വില $\frac{1}{2}$ യോടു സമമാകും. ഛേദകത്തിനോടു $\frac{1}{2}$ കൂട്ടിയാൽ ഭിന്നിതത്തിന്റെ വില $\frac{4}{9}$ നോടു സമമാകും. എന്നാൽ ഭിന്നിതം കാണുക.

22. ഒരു ഭിന്നിതത്തിന്റെ അംശം 11 ആണ്. അംശത്തിനോടും ഛേദകത്തിനോടും ഒരേ സംഖ്യ കൂട്ടിയപ്പോൾ ഭിന്നിതത്തിന്റെ വില $\frac{7}{9}$ ആയിത്തീൎന്നു. അതേ സംഖ്യ അംശത്തിൽനിന്നും ഛേദകത്തിൽനിന്നും കിഴിക്കുന്നതായാൽ ഛേദകം അംശത്തിന്റെ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടിയാകും. എന്നാൽ ഭിന്നിതത്തിന്റെ ഛേദകം കാണുക.

23. ഒരു മുറിയുടെ നീളം 2 അടി കുറയുകയും വീതി 3 അടി അധികമാകുകയും ചെയ്താൽ അതിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം 31 ച.അടി അധികമാകും. നീളം 3 അടി അധികമാകുകയും വീതി 2 അടി കുറയുകയും ചെയ്താൽ ക്ഷേത്രഫലം 6 ച.അടി അധികമാകും. എന്നാൽ മുറിയുടെ നീളവും വീതിയും കാണുക.

24. 120 വാര ചുററളവുള്ള ഒരു മുറിയുടെ നീളം 4 വാര അധികമാകുകയും വീതി 4 വാര കുറയുകയും ചെയ്താൽ മുറിയുടെ ക്ഷേത്രഫലം 64 ച.വാര കുറയും. എന്നാൽ മുറിയുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

25. ഒരു പായയുടെ നീളത്തോടു 5 അംഗുലം കൂട്ടുകയും വീതിയിൽനിന്നു 4 അംഗുലം കുറക്കുകയും ചെയ്താൽ അതിന്റെ വീതി നീളത്തിന്റെ $\frac{7}{10}$ ആകും; എങ്കിലും ക്ഷേത്രഫലം വ്യത്യാസപ്പെടുകയില്ല. എന്നാൽ പായയുടെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക.

26. ഒരാൾക്കു് കണ്ണൂരിൽനിന്നു തലശ്ശേരിയിലേക്കു് ബസ്സിലും തലശ്ശേരിയിൽനിന്നു് മയ്യഴിയിലേക്കു് തീവണ്ടിയിലും യാത്രചെയ്വാൻ 1 മണിക്കൂർ 10 മിനുട്ടു് വേണ്ടിവരുന്നു. തിരിച്ചു തലശ്ശേരിയിലേക്കു് ബസ്സിലും അവിടെനിന്നു തീവണ്ടിയിലും യാത്ര ചെയ്താൽ കണ്ണൂരിലെത്തുവാൻ 1 മണിക്കൂർ 3 മിനുട്ടു് വേണ്ടിവരും. ഒരു മണിക്കൂറിൽ ബസ്സ് 15 നാഴികയും തീവണ്ടി 20 നാഴികയും പോകുമെങ്കിൽ തലശ്ശേരിയിൽനിന്നു മററു രണ്ടു പട്ടണങ്ങളിലേക്കുമുള്ള ദൂരം കാണുക.

27. ഒരാൾക്കു് 7 നാഴിക കാൽനടയായും 8 നാഴിക കുതിരവണ്ടിയിലും യാത്ര ചെയ്വാൻ ആകെ 3 മണിക്കൂർ 8 മിനുട്ടു് വേണ്ടിവന്നു. 7 നാഴിക കുതിരവണ്ടിയിലും 8 നാഴിക നടന്നും പോയിരുന്നുവെങ്കിൽ 14 മിനുട്ടു് അധി

കൾ വേണ്ടിവരുമായിരുന്നു. എന്നാൽ മണിക്കൂറിൽ അയാൾ എത്ര നാഴിക നടന്നു?

28. ഒരാൾ കുറേ ദൂരം നടന്നു. മണിക്കൂറിൽ $\frac{1}{2}$ നാഴിക അധികം നടക്കുന്നതായാൽ സാധാരണ വേണ്ടുന്ന സമയത്തിന്റെ $\frac{4}{5}$ മതിയാകും. മണിക്കൂറിൽ $\frac{1}{2}$ നാഴിക കുറച്ചു നടക്കുന്നതായാൽ $2\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ അധികം സമയം വേണ്ടിവരും. എന്നാൽ അയാൾ നടന്ന ദൂരം എത്ര?

29. ഏയിൽനിന്ന് ബീയിലേക്കു ഓടുന്ന ഒരു തീവണ്ടിയുടെ എഞ്ചിന്ന് കേടു പററുകയാൽ അതിന്റെ ഗതിവേഗം മണിക്കൂറിൽ 5 നാഴിക വീതം കുറയുകയും തന്നിമിത്തം അതു ബീയിൽ $1\frac{3}{4}$ മണിക്കൂർ വൈകി എത്തുകയും ചെയ്തു. സാധാരണമായി ഇതിനേക്കാൾ മണിക്കൂറിൽ 10 നാഴിക അധികം ഓടുന്ന ഒരു മെയിൽവണ്ടിക്ക് ഏയിൽനിന്നു ബീയിലേക്ക് പോകുവാൻ 2 മണിക്കൂർ കുറച്ചുമതിയെങ്കിൽ ഏയിൽനിന്നു ബീയിലേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക.

30. ഏ, ബീ എന്ന രണ്ടുപേർ സീയിൽനിന്ന് പുറപ്പെട്ട് 55 നാഴിക ദൂരെയുള്ള ഡി എന്ന ഗ്രാമത്തിലേക്ക് സൈക്കിളിന്മേൽ സവാരി ചെയ്തു. ഏ, ബീയേക്കാൾ 30 മിനുട്ട് മുമ്പ് ഡീയിൽ എത്തി; തിരിച്ചുവരുമ്പോൾ ബീ, ഡീയിൽനിന്ന് 4 നാഴിക ദൂരത്തെത്തിയ സമയത്ത് ഏ പുറപ്പെടുകയും ബീ എത്തുന്നതിന്ന് 6 മിനുട്ട് മുമ്പ സീയിൽ എത്തുകയും ചെയ്തു. എന്നാൽ ഓരോ ആളും മണിക്കൂറിൽ സവാരി ചെയ്ത ദൂരം എത്ര?

31. തമ്മിൽ 12 നാഴിക ദൂരമുള്ള രണ്ടു സ്ഥലങ്ങളിൽനിന്ന് രണ്ടു പേർ ഒരേ സമയത്തു യാത്ര പുറപ്പെടുന്നു. രണ്ടു പേരും ഒരേ വശത്തേക്കു യാത്ര ചെയ്യുന്നതായാൽ 6 മണിക്കൂർകൊണ്ട് അവർ ഒരുമിച്ചെത്തും. എതിരായി യാത്ര ചെയ്യുന്നതായാൽ 1 മണിക്കൂർ 20 മിനുട്ടിൽ അവർ തമ്മിൽ കണ്ടുമുട്ടും. എന്നാൽ ഓരോ ആളും മണിക്കൂറിൽ യാത്ര ചെയ്യുന്ന ദൂരം എത്ര?

32. തമ്മിൽ 1 നാഴിക ദൂരമുള്ള രണ്ടു ഗ്രാമങ്ങളിൽനിന്ന് ഒരേ സമയത്ത് രണ്ടു പേർ ഒരേവശത്തേക്ക് യാത്ര ചെയ്യുമ്പോൾ 40 മിനുട്ടുകൊണ്ടും എതിരായി യാത്ര ചെയ്യുമ്പോൾ 8 മിനുട്ടുകൊണ്ടും ഒന്നായിച്ചേരുന്നുവെങ്കിൽ അവരോരോരുത്തരും 1 മണിക്കൂറിൽ പോകുന്ന ദൂരം കാണുക.

33. ഏയിൽനിന്ന് ബീ എന്ന ഗ്രാമത്തിലേക്കുള്ള ഒരു തീവണ്ടിപ്പാത കുറേ ദൂരം കയററവും ബാക്കി ഇറക്കവും ആയിട്ടുള്ള നിലത്തിൽ കൂടിയാണ് പണിചെയ്തിട്ടുള്ളത്. കയററത്തിൽ മണിക്കൂറിൽ 10 നാഴികയും ഇറക്കത്തിൽ 12 നാഴികയും വീതം ഓടുന്ന ഒരു വണ്ടിക്ക് ഏയിൽനിന്നു ബീയിലേക്കു പോകുവാൻ 39 മിനുട്ടും തിരിച്ചു ഏയിലേക്കു പോകുവാൻ 38 മിനുട്ടും വേണമെങ്കിൽ ഏയിൽനിന്നു ബീയിലേക്കുള്ള ദൂരം എത്ര?

34. ഏ, ബീ എന്ന രണ്ടു പട്ടണങ്ങൾ 40 നാഴിക അകലെയാണ്. ഏയിൽനിന്ന് ബീയിലേക്കുള്ള നിരത്ത് കുറേ ദൂരം സമനിരപ്പും കുറേ ദൂരം കയററവും ബാക്കി ഇറക്കവും ആകുന്നു. സമനിലത്ത് മണിക്കൂറിൽ 20 നാഴികയും കയററത്തിൽ 15 നാഴികയും ഇറക്കത്തിൽ 24 നാഴികയും ഓടുന്ന ഒരു മോട്ടോർ കാറിന് ഏയിൽനിന്നു ബീയിലേക്ക് പോകുവാൻ 2 മണിക്കൂർ 1 മിനുട്ടും ബീയിൽനിന്ന് ഏയിലേക്ക് തിരിച്ചുപോകുവാൻ 2 മണിക്കൂർ 4 മിനുട്ടും വേണ്ടിവരുന്നെങ്കിൽ ഏയിൽനിന്ന് ബീയിലേക്ക് പോകുമ്പോൾ എത്ര നാഴിക കയററമുണ്ട്? എത്ര നാഴിക ഇറക്കമുണ്ട്?

35. ഒരു സ്കൂളിലെ ഹെഡ്മാസ്റ്ററുടെ ഛായാപടം വാങ്ങുന്നതിലേക്ക് കുറെ കുട്ടികൾകൂടി പണം വരിയിട്ടെടുക്കുവാൻ നിശ്ചയിച്ചു. 16 പേർക്കു പണം കൊടുക്കുവാൻ കഴിയാതെ വന്നാൽ ബാക്കി ഓരോ കുട്ടിയും $\frac{1}{4}$ണ. വീതം അധികം കൊടുക്കേണ്ടിവരും. 48 കുട്ടികൾകൂടി പണം കൊടുക്കുന്നതായാൽ ഓരോ കുട്ടിയും $\frac{1}{2}$ണ. കുറച്ചുകൊടുത്താൽ മതിയാകും. എന്നാൽ എത്ര വിലക്കുള്ള പടമാണ് വാങ്ങുവാൻ നിശ്ചയിച്ചത്?

36. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ കുറെ ചാക്ക് അരി വാങ്ങി. 5 ചാക്ക് നഷ്ടപ്പെട്ടു പോയി. ബാക്കി ചാക്കിന് 8ണ. വീതം വില കയററിയപ്പോൾ അയാളുടെ മുതൽ കിട്ടി. 16 ചാക്ക് നഷ്ടപ്പെട്ടിരുന്നെങ്കിൽ കച്ചവടത്തിൽ നഷ്ടം വരാതിരിപ്പാൻ ചാക്കൊന്നിന് 1ക. 14ണ. വില കയററി വില്ക്കേണ്ടിവരുമായിരുന്നു. എന്നാൽ അരിക്കു ആകെ എന്തു മുതലുണ്ടായിരുന്നു?

37. ഒരു കുതിരയേയും വണ്ടിയേയും 815ക.ക്ക് വിററപ്പോൾ കുതിരയുടെ മുതലിന്മേൽ 25%വും വണ്ടിയുടെ മുതലിന്മേൽ 10%വും ലാഭം കിട്ടി. കുതിരയുടെ വിലയിന്മേൽ 10%വും വണ്ടിയുടെ വിലയിന്മേൽ 25%വും ലാഭം കിട്ടണമെങ്കിൽ രണ്ടിനേയും കൂടി 830ക.ക്ക് വില്ക്കണം. എന്നാൽ ഓരോന്നിന്മേലുമുള്ള മുതൽ കാണുക.

38. ഒരു കാളയെ $6\frac{1}{4}$% ലാഭത്തിന്നും ഒരു പശുവിനെ $12\frac{1}{2}$% നഷ്ടത്തിന്നും വിററപ്പോൾ എനിക്കു 2ക. 10ണ. നഷ്ടം വന്നു. രണ്ടിനേയും കൂടി $8\frac{1}{3}$% ലാഭത്തിന് വിററിരുന്നെങ്കിൽ ആകെ 104ക. വില കിട്ടുമായിരുന്നു. എന്നാൽ ഓരോന്നിന്റെയും വില എത്ര?

39. ഒരു തീവണ്ടി ഒരു ആപ്പീസിൽനിന്ന് പുറപ്പെട്ടു 1 മണിക്കൂർ കഴിഞ്ഞപ്പോൾ എഞ്ചിന്ന് കേടുപററുകയാൽ 42 മിനുട്ട് വഴിയിൽ നില്ക്കേണ്ടിവന്നു. അതിന്നു ശേഷം മണിക്കൂറിൽ 5 നാഴിക കുറച്ചു ഓടിയതിനാൽ വണ്ടി എത്തേണ്ടുന്ന സ്ഥലത്ത് $1\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ വൈകിച്ചെന്നു. വണ്ടി പുറപ്പെട്ടു 1 മണിക്കൂർ കഴിഞ്ഞു കേടു പററുകയും വഴിയിൽ $1\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ നിന്ന് ബാക്കി ദൂരം 6 നാഴിക

വീതം കുറച്ചു ഓട്ടുകയും ചെയ്യിരുന്നുവെങ്കിൽ മുമ്പിലത്തെ അത്ര തന്നെ വൈകി ചെല്ലുമായിരുന്നു. എന്നാൽ വണ്ടി ആകെ ഓടിയ ദൂരം എത്ര?

സ്കൂൾഫൈനൽ പരീക്ഷാചോദ്യങ്ങൾ.

40. ഏ, ബി എന്ന രണ്ടു പേർ കളിയിൽ ഏർപ്പെട്ടു. ഏ 20ക. നഷ്ട പ്പെട്ടപ്പോൾ അയാളുടെ കയ്യിൽ ഉണ്ടായിരുന്ന പണം ബിയുടെ കൈയിൽ ഉണ്ടായിരുന്നതിൻെറ $\frac{1}{3}$ ആയിരുന്നു. പിന്നെ ഏ നഷ്ടപ്പെട്ട 20 ഉറുപ്പികക്കു പുറമെ ബിയിൽനിന്ന് 50ക.യുംകൂടി നേടി. അപ്പോൾ അയാളുടെ വശം ഉണ്ടായിരുന്ന സംഖ്യ ബിയുടെ വശം ഉണ്ടായിരുന്നതിൻെറ $1\frac{1}{2}$ ഇരട്ടി ആയിരുന്നെങ്കിൽ ഓരോരുത്തരുടെയും വശം ആദ്യം എത്രയുണ്ടായിരുന്നു? (1947)

41. പുരുഷന്ന് 5ണ. 6പ. വീതവും കുട്ടിക്ക് 3ണ. 6പ. വീതവും കുറേ ഭിക്ഷക്കാർക്ക് കൊടുപ്പാൻ 12ക. 10ണ. വേണ്ടിവരും. പുരുഷന്ന് 6പ. കുറച്ചും കുട്ടിക്കു 6പ. അധികവും കൊടുക്കുന്നതായാൽ 2ണ. ബാക്കിയുണ്ടാകും. എന്നാൽ ഓരോതരം ഭിക്ഷക്കാരുടെയും എണ്ണം കാണുക. (1919)

42. ഒരാൾ നാഴികക്ക് തീവണ്ടിക്കൂലി 3പ.യും തോണിക്കൂലി 6പ.യും വീതം കൊടുത്തു കുറേ ദൂരം യാത്രചെയ്യുതിന്ന് ആകെ കൂലി 3ക. 12ണ.യായി. തീവണ്ടിക്കൂലി നാഴികക്ക് $\frac{1}{2}$പ. കുറവും തോണിക്കൂലി 1പ. അധികവും ആയിരുന്നെങ്കിൽ ആകെ കൂലി 5ണ. അധികമാകുമായിരുന്നു. എന്നാൽ തീവണ്ടിയിലും തോണിയിലും യാത്രചെയ്യു ദൂരം വെവ്വേറെ കാണുക. (1927)

43. 78 പുരുഷന്മാർക്കും 25 സ്ത്രീകൾക്കും കൂടി ദിവസത്തിൽ 116ക. 4ണ. കൂലി കിട്ടുന്നു. 5 പുരുഷന്മാർക്ക് 7 സ്ത്രീകളെക്കാൾ 1ക. അധികം കൂലി കിട്ടുന്നുവെങ്കിൽ ഒരു പുരുഷൻെറയും ഒരു സ്ത്രീയുടെയും ദിവസക്കൂലി വെവ്വേറെ കാണുക. (1931)

44. ഒരാൾ ഒരു വീടും തോട്ടവും വാങ്ങി. വീട് 12% ലാഭത്തിന്നും തോട്ടം 16% നഷ്ടത്തിന്നും വിററപ്പോൾ ആകെ 380ക. ലാഭം കിട്ടി. വീട് 14% ലാഭത്തിന്നും തോട്ടം 20% നഷ്ടത്തിന്നും വിററിരുന്നെങ്കിൽ അയാൾക്ക് ആകെ 30ക. അധികം ലാഭം കിട്ടുമായിരുന്നു. എന്നാൽ വീട്ടിൻെറയും തോട്ടത്തിൻെറയും മുതൽ വെവ്വേറെ കാണുക. (1932)

45. ഏയിൽനിന്ന് ബിയിലേക്കുള്ള വഴി കയററവും ബിയിൽനിന്ന് സിയിലേക്ക് സമനിരപ്പും സിയിൽനിന്ന് ഡിയിലേക്ക് ഇറക്കവുമാണ്. ഒരാൾ ഏയിൽനിന്ന് ഡിയിലേക്ക് കയററത്തിൽ മണിക്കൂറിൽ 2 നാഴികയും സമനിരപ്പിൽ 3 നാഴികയും ഇറക്കത്തിൽ 4 നാഴികയും വീതം യാത്ര

ചെയ്യപ്പോൾ ആകെ m മണിക്കൂറും തിരിച്ച് എയിലേക്ക് പോവാൻ n മണിക്കൂറും വേണ്ടിവന്നു. സമനിരപ്പായ വഴി എയിൽനിന്നു ബിയിലേക്കുള്ള കയററത്തിൻെറ ഇരട്ടി ദൂരമാണെങ്കിൽ സമനിരപ്പായ ദൂരം കാണുക.

(1933)

അദ്ധ്യായം 14.

സരളരേഖാലേഖാചിത്രങ്ങൾ (Straight Line Graphs).

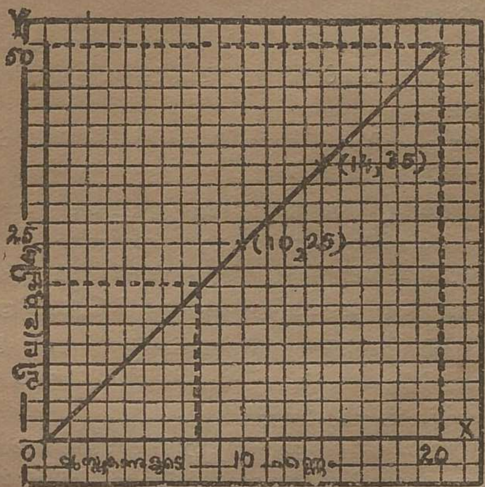
O എന്ന മൂലബിന്ദുവിൽകൂടി ഒരു സരളരേഖ വരക്കുക. ഈ സരളരേഖമേലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ പ്രഥമനിയാമകം വർദ്ധിക്കുന്നതോടുകൂടി അവയുടെ ദ്വിതീയ നിയാമകവും അതേ തോതിൽ വർദ്ധിക്കുമെന്നതു സ്പഷ്ടമാണ്. അതായത് ഒരു സരളരേഖയായ ഒരു ലേഖാചിത്രത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ പ്രഥമനിയാമകം ദ്വിതീയ നിയാമകത്തിന്നു ക്രമാനുപാതമായിരിക്കും. ഇതുനിമിത്തം പരസ്പരം ക്രമാനുപാതമായ രാശികളുടെ ബന്ധത്തെ കാണിക്കുന്ന ലേഖാചിത്രം ഒരു സരളരേഖയായിരിക്കും. ഇതിനാൽ നിർദ്ദിഷ്ടങ്ങൾ അനുസരിച്ചു ഒരു സരളരേഖ വരക്കുന്നതിനാൽ പരസ്പരം ക്രമാനുപാതമായ പരിമാണങ്ങളെ ഗണിക്കുവാനും ഒരുതരം അളവുകൾക്കു സമമായ അളവുകളുടെ വലിപ്പം കാണുവാനും സാധിക്കും. അതുകൊണ്ടു ഇത്തരം സരളരേഖാലേഖാചിത്രങ്ങളെ Conversion Graphs എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാ:—1. 14 പുസ്തകത്തിന്നു 35ക. വില. എന്നാൽ പുസ്തകത്തിൻെറ എണ്ണവും വിലയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം വരച്ചു അതിൽനിന്നു (1) 20 പുസ്തകത്തിൻെറ വിലയും (2) 20ക.ക്കു എത്ര പുസ്തകം കിട്ടുമെന്നും കാണുക.

(1) പുസ്തകത്തിൻെറ വില എണ്ണത്തിന്നു ക്രമാനുപാതമായതുകൊണ്ടു ഇവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ കാണിക്കുന്ന ലേഖാചിത്രം ഒരു സരളരേഖയായിരിക്കും.

അതുകൊണ്ടു ലേഖാചിത്രത്തിന്മേലുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം നിശ്ചയിച്ചാൽ ലേഖാചിത്രം വരക്കാം.

(2) മൂലബിന്ദു ലേഖാചിത്രത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണെന്നു സ്പഷ്ടമാണ്.



14 പുസ്തകങ്ങളേയും 35ക-യേയും സൂചിപ്പിക്കുന്ന ബിന്ദുവും ലേഖാചിത്രത്തിന്മേലായിരിക്കും.

ഈ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്ന സരളരേഖയാണ് ആവശ്യപ്പെട്ട ലേഖാചിത്രം.

(3) തോതു്:

x അക്ഷത്തിൽ 1″ = 10 പുസ്തകം.

y അക്ഷത്തിൽ 1″ = 25ക.

(4) ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചപ്രകാരം അക്ഷങ്ങൾക്കു ലംബരേഖകൾ വരച്ചു ഉത്തരം കാണുക.

(5) ഒരു സരളരേഖ നിശ്ചയിപ്പാൻ 2 ബിന്ദുക്കൾ മതിയെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവുംകൂടി കുറിക്കുന്നതു നന്നായിരിക്കും. കാരണം രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ കുറിക്കുന്നതിൽ വല്ല തെറവും വന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ ബിന്ദു കുറിക്കുന്നതിനാൽ ആ തെറവു പ്രത്യക്ഷപ്പെടും.

അഭ്യാസം 27.

1. 60 നാഴിക യാത്ര ചെയ്യുവാൻ തീവണ്ടിക്കൂലി 1ക. 9ണ.യാണെങ്കിൽ യാത്ര ചെയ്യുന്ന ദൂരവും തീവണ്ടിക്കൂലിയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം വരക്കുക.

അതിൽനിന്നു (*a*) 84 നാഴിക (*b*) 36 നാഴിക യാത്ര ചെയ്യുവാനുള്ള തീവണ്ടിക്കൂലിയും (*c*) 2ക. 8ണ. (*d*) 1ക. 14ണ. കൂലിക്കു യാത്ര ചെയ്യാവുന്ന ദൂരവും കാണുക.

2. 20 ഡോളർ=95ക.യാണെങ്കിൽ ഒരു ലേഖാചിത്രം വരച്ചു താഴേ പറയുന്നവ കാണുക.

(*a*) 15 ഡോളർ (*b*) 55 ഡോളർ എത്ര ഉറുപ്പികക്കു സമമാണ്?

(*c*) 150ക. (*d*) 70ക. എത്ര ഡോളറിന്നു സമമാണ്?

3. 15 സെ.മീ.=5·9″ എന്നു കരുതി ഈ നീളഅളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം വരക്കുക. ലേഖാചിത്രത്തിൽനിന്നു 4 സെ.മീ., 10 സെ.മീ. എന്നിവ എത്ര അംഗുലമാണെന്നു (അംഗുലത്തിൻെറ ദശാംശംവരെ കൃത്യമായി) കാണുക. 2·8″, 4·5″ എന്നിവ എത്ര സെ.മീ. ആണെന്നു (മി.മീ.വരെ കൃത്യമായി) കാണുക.

4. 10 കിലോഗ്രാം=22 റാത്തൽ. കി.ഗ്രാമും റാത്തലും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം വരക്കുക. ചിത്രത്തിൽനിന്നു 2·7 കി.ഗ്രാം എത്ര റാത്തലാണെന്നു (ദശാംശം വരെ കൃത്യമായി) കാണുക. 8·4 റാത്തൽ എത്ര കി.ഗ്രാം ആണെന്നു (ദശാംശംവരെ കൃത്യമായി) കാണുക. നിങ്ങളുടെ ഉത്തരങ്ങൾ ശരിയോയെന്നു ഗണിച്ചുനോക്കുക. (1936)

5. 1 മണിക്കൂറിൽ 30 നാഴിക ഗതിവേഗം, സെക്കണ്ടിൽ 44′ ആണെങ്കിൽ മണിക്കൂറിൽ 40, 28, 15, 9 നാഴിക യഥാക്രമം സെക്കണ്ടിൽ എത്ര അടിയാണെന്നു ഒരു ലേഖാചിത്രം വരച്ചു കാണുക. സെക്കണ്ടിൽ 15, 26, 36, 50 അടി മണിക്കൂറിൽ എത്ര നാഴികക്കു സമമാണെന്നും ചിത്രത്തിൽനിന്നു കാണുക.

6. 1 ഡജൻ നാരങ്ങക്കു 7ണ.യും 20 മാങ്ങക്കു 9ണ.യും വിലയുണ്ടു. ഒരേ കടലാസ്സിൽ രണ്ടു ലേഖാചിത്രങ്ങളും വരച്ചു ഈ പഴങ്ങൾ 1ക.ക്കു എത്ര വീതം കിട്ടുമെന്നു കാണുക. 10 നാരങ്ങക്കു അത്രയും മാങ്ങയേക്കാൾ എത്ര അധികം വിലയുണ്ടു? 10ണ.ക്കു നാരങ്ങയേക്കാൾ എത്ര അധികം മാങ്ങ കിട്ടും?

7. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരിധി വ്യാസത്തിൻെറ $3\frac{1}{7}$ ഇരട്ടിയാണ്. വ്യാസവും പരിധിയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഒരു ലേഖാചിത്രം മൂലം കാണിക്കുക. വൃത്തങ്ങളുടെ പരിധി 50, 33, 47 അംഗുലമാണെങ്കിൽ അവയുടെ വ്യാസവും,

വ്യാസം 8, 13, 18 അംഗുലമാണെങ്കിൽ വൃത്തങ്ങളുടെ പരിധിയും അംഗുലത്തിൻെറ ദശാംശംവരെ കൃത്യമായി ചിത്രത്തിൽനിന്നു കാണുക.

8. 50 നാഴിക ദൂരം പോകാൻ ഒരു മോട്ടോർകാറിന്നു ഗാലന്നു 1ക. 4ണ. വിലയുള്ള $2\frac{1}{2}$ ഗാലൻ പെട്രോൾ വേണം. കാർ പോകുന്ന ദൂരവും അതിന്നുള്ള ചിലവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം വരക്കുക.

ചിത്രത്തിൽനിന്നു (1) 24 നാഴിക പോകാനുള്ള ചിലവും (2) 2ക. 4ണ. വിലക്കുള്ള പെട്രോൾകൊണ്ടു എത്ര ദൂരം പോകാമെന്നും കാണുക. (1937)

9. 1 പവൻ = 15ക.യാണെങ്കിൽ മാസത്തിൽ ഇത്ര ഉറുപ്പിക ശമ്പളം കൊല്ലത്തിൽ ഇത്ര പവനാണെന്നു കണക്കാക്കുവാൻ ഒരു ലിപിക വരക്കുക. അതിൽനിന്നു മാസത്തിൽ 40ക. കൊല്ലത്തിൽ എത്ര പവനും, കൊല്ലത്തിൽ 60 പവൻ മാസത്തിൽ എത്ര ഉറുപ്പികക്കും സമമാണെന്നും കാണുക. (1913)

10. 1000ഘ. സെ. മീ. = 33·8 ദ്രാവക ഔൺസ് എന്നു കരുതി ഈ അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്ന ഒരു ലേഖാചിത്രം വരക്കുക.

അതിൽനിന്നു 1700ഘ. സെ. മീ. എത്ര ദ്രാവക ഔൺസിന്നു സമമാണെന്നും 25 ദ്രാവക ഔൺസ് എത്ര ഘ. സെ. മീ.ന്നു സമമാണെന്നും കഴിയുന്നത്ര കൃത്യമായി കാണുക.

11. 6·25 ഗാലൻ = 1728ഘനാംഗുലം. ഒരു ലേഖാചിത്രം വരച്ചു താഴേ പറയുന്നവ കാണുക.

(1) 500ഘ. അം. (2) 2400ഘ. അം. എത്ര ഗാലന്നു സമമാണ്?

(3) 3·5 ഗാലൻ (4) 5·4 ഗാലൻ എത്ര ഘനാംഗുലത്തിന്നു സമമാണ്?

അദ്ധ്യായം 15.

പരീക്ഷക്കടലാസ്സുകൾ (Test papers).

വിദ്യാർത്ഥിയുടെ ശീഘ്രതയും സൂക്ഷ്മതയും പരിശോധിപ്പാൻ ചില പരീക്ഷാചോദ്യങ്ങൾ താഴേ ചേർക്കുന്നു. കടലാസ്സിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ള സമയത്തിൽ ചെയ്തു തീർക്കുന്നതായാൽ എത്ര മാർക്കു കിട്ടുമെന്നു വിദ്യാർത്ഥി ഒരു നോട്ടുപുസ്തകത്തിൽ കുറിക്കേണം. ഓരോ വിഷയവും ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ചശേഷം ഇത്തരം വേറെയും ചോദ്യക്കടലാസ്സുകൾ ഗുരുനാഥൻ കൊടുക്കുകയും അവയിൽ കിട്ടിയ മാർക്കും വിദ്യാർത്ഥി കുറിക്കുകയും ചെയ്യുന്നതിനാൽ വിദ്യാർത്ഥിയുടെ പുരോഗതി

നിശ്ചയിക്കാം. ഓരോ ചോദ്യത്തിൻെറയും മാക്ക് ആവരണചിഹ്നങ്ങളിൽ ചേത്തിരിക്കുന്നു.

മാക്ക്: 30. 1. സ്ഥൂലഗണനം. സമയം: 25മി.

1. 1949ൽ പാക്കിസ്ഥാനിൽ ഉല്പാദിക്കപ്പെട്ട ചില ധാതുപദാത്ഥങ്ങളുടെ പരിമാണം താഴേ ചേത്തിരിക്കുന്നു. അവയെ 4 ഗണ്യ അക്കങ്ങൾ മാത്രം ഉപയോഗിച്ചെഴുതുക. ഓരോന്നിലും നിങ്ങളുടെ മാത്രയെന്താണെന്നും എഴുതുക.

Petroleum	1,18,15,720 ഗാലൻ.	
Coal	4,05,325 ടൺ.	
Limestone	7,26,167 ,,	
Rocksalt	2,56,041 ,,	(4)

2. ഇന്ത്യയിൽ 1947—48 എന്ന കൊല്ലത്തിൽ പലതരം വിദ്യാലയങ്ങളിൽ പഠിച്ചിരുന്ന കുട്ടികളുടെ എണ്ണം താഴെ ചേത്തിരിക്കുന്നു. ആകെ (*a*) വിദ്യാത്ഥികളുടെ (*b*) വിദ്യാത്ഥിനികളുടെ (*c*) ഒട്ടാകെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം ലക്ഷം വരെ കൃത്യമായി കാണുക.

	വിദ്യാത്ഥികൾ	വിദ്യാത്ഥിനികൾ	
High Schools	15,76,166	2,49,813	
Middle ,,	9,65,475	2,29,144	
Primary ,,	80,69,508	29,98,765	(6)

3. വെളിച്ചം ഒരു സെക്കണ്ടിൽ 186330 നാഴിക സഞ്ചരിക്കുന്നു. സൂൎയ്യനിൽനിന്നു ഭൂമിയിലേക്കുള്ള ദൂരം 9900000 നാഴികയാണെങ്കിൽ സൂൎയ്യനിൽനിന്നു ഭൂമിയിലേക്കു വെളിച്ചം എത്തുവാൻ എത്ര സെക്കണ്ട് വേണ്ടിവരും? (സെക്കണ്ട്‌വരെ കൃത്യമായി കാണുക). (8)

4. ഐക്യരാഷ്ട്രത്തിൽനിന്നു കുഴിച്ചെടുത്ത കല്ക്കരിയുടെ തുകവിവരം താഴേ ചേത്തിരിക്കുന്നു.

കൊല്ലം	കല്ക്കരി (ടൺ)	കുഴിച്ചെടുക്കുന്നവരുടെ എണ്ണം
1929	64,872,965	903,914
1930	54,061,222	849,344

(1) ഓരോ കൊല്ലത്തിലും ഒരാൾ ശരാശരി കുഴിച്ചെടുക്കുന്ന കല്ക്കരി.

(2) രണ്ടാമത്തെ കൊല്ലത്തിൽ ശരാശരി കുഴിച്ചെടുക്കുന്നതിലുണ്ടായ കുറവിൻെറ ശതമാനം (ഒരു ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക). (12)

(March 1948)

മാക്ക്: 30.   2. ചില അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം.   സമയം: 25മി.

1. 10·51സെ. മീ. = 4·14 അംഗുലം. എന്നാൽ 1 മീററർ എത്ര അംഗുലത്തിന്നു സമമാണ്? 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (6)

2. 1 മീററർ = 3·2809 അടി. എന്നാൽ 1 ച. മീറററിൽ എത്ര ച. അടി ഉണ്ടെന്നു 2ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (8)

3. 1 ഗാലൻ = 277·274ഘ. അംഗുലം. 1ഘ. അടി എത്ര ഗാലന്നു സമമാണെന്നു 3 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (8)

4. 1ഘ. സെ. മീ. വെള്ളത്തിന്റെ തൂക്കം = 1ഗ്രാം. 1 ഗാലൻ വെള്ളത്തിന്റെ തൂക്കം = 10 റാത്തൽ. എന്നാൽ 1 ഗാലൻ എത്ര ഘ. സെ. മീ. ആണെന്നു പൂർണ്ണസംഖ്യവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (8)

മാക്ക്: 25.   3. ധനസംബന്ധമായ ചില ഇടപാടുകൾ.   സമയം: 25മി.

1. $2\frac{1}{2}\%$ങ്ങൾക്കു $108\frac{3}{4}$ വിലയുള്ളപ്പോൾ 3200ക.യുടെ സ്റ്റോക്ക് വിററു കിട്ടിയ പണത്തിൽ പകുതികൊണ്ടു 87 വിലയുള്ള $2\frac{1}{4}\%$ങ്ങളും ബാക്കികൊണ്ടു 116 വിലയുള്ള 4%ങ്ങളും ഞാൻ വാങ്ങുന്നതായാൽ എന്റെ ആദായം എത്ര വർദ്ധിക്കും? (7)

2. 7900ക.ക്കു വിലയുള്ള തന്റെ മോട്ടോർകാർ $1\frac{1}{4}\%$ കമ്മിഷൻ കൊടുത്തു ഒരാൾ ഇൻഷ്വർ ചെയ്യുന്നു. കാർ നഷ്ടപ്പെട്ടുപോയാൽ അതിന്റെ വിലക്കും പുറമെ അടച്ച കമ്മിഷനും തിരിച്ചുകിട്ടത്തക്കവണ്ണം അയാൾ എത്രക്കു കാർ ഇൻഷ്വർ ചെയ്യേണം? (6)

3. 540ക. ശമ്പളമുള്ള ഒരു ഉദ്യോഗസ്ഥൻ മാസംതോറും തന്റെ ശമ്പളത്തിന്മേൽ 1ക.ക്കു 1ണ. പ്രകാരം Provident Fund ലേക്കും ശമ്പളത്തിന്റെ $3\frac{3}{4}\%$ Life insurance വരിയായും പണം അടക്കുന്നു. ഈ സംഖ്യകൾ ആദായനികുതിയിൽനിന്നു ഒഴിവാണ്. അയാൾ മാസംതോറും 35ക. 7ണ. ആദായനികുതിയായി അടക്കുന്നുവെങ്കിൽ നികുതിയുടെ നിരക്കു കാണുക. (6)

4. 7200ക. വിലക്കു മുതലുള്ള ഒരു ദീപാളി തന്റെ കടക്കാർക്കു ഉറുപ്പികക്കു 11ണ. 3പ. കൊടുക്കാമെന്നു കണക്കാക്കി. ഒരു പുതിയ കടവുംകൂടി വെളിപ്പെട്ടതിനാൽ ഉറുപ്പികക്കു 10ണ. വീതം മാത്രം കൊടുപ്പാൻ സാധിച്ചുവെങ്കിൽ പുതിയ കടം എത്രയാണ്? (6)

മാൎക്ക്: 30. **4. കൂട്ടുപലിശ.** സമയം: 30മി.

1. അരക്കൊല്ലന്തോറും പലിശ മുതലിനോടു കൂട്ടുന്നതായാൽ 400ക.ക്കു 1 കൊല്ലത്തേക്കു 4% പ്രകാരമുള്ള പലിശ പൈവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (7)

2. 2 കൊല്ലം മുമ്പ് ഞാൻ ഒരു ബേങ്കിൽനിന്നു കടമായി വാങ്ങിയ 325ക.ക്കു ഓരോ കൊല്ലാവസാനത്തിലും പലിശകൊടുത്തതിനാൽ ആകെ 26ക. പലിശ കൊടുക്കേണ്ടിവന്നു. ഒന്നാംകൊല്ലത്തിൻെറ അവസാനത്തിൽ പലിശകൊടുത്തിരുന്നില്ലെങ്കിൽ ഇപ്പോൾ എത്ര അധികം പലിശ അടക്കേണ്ടിവരുമായിരുന്നു? പൈവരെ കൃത്യമായി ഗണിക്കുക. (7)

3. ഞാൻ ഒരു കമ്പനിയിൽനിന്നു 7200ക.ക്കു ഒരു കാർ വാങ്ങി. വിലയിൽ കൊല്ലന്തോറും 15% കുറവു കണക്കാക്കി അതു തിരികെ വാങ്ങുവാൻ അവർ ഏററു. 2 കൊല്ലത്തിന്നുശേഷം ഈ കാർ കൊടുക്കുന്നതിന്നു പുറമെ എത്ര ഉറുപ്പിക കൊടുത്താൽ അവർ 10000ക.യുടെ ഒരു പുതിയ കാർ എനിക്കു തരും? (7)

4. 1,13,000 ജനങ്ങളുള്ള ഒരു പട്ടണത്തിലെ ജനസംഖ്യ 10 കൊല്ലത്തിൽ 12% വീതം വൎദ്ധിക്കുന്നതായി കണക്കാക്കിയിരിക്കുന്നു. ഇതിന്നും പുറമെ 10 കൊല്ലത്തിൽ ജനസംഖ്യയിൽ 1000ന്നു 75 വീതം അഭയാൎത്ഥികളും വന്നു ചേരുമെന്നു പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു. എന്നാൽ 20 കൊല്ലത്തിന്നുശേഷം പട്ടണത്തിലെ ജനസംഖ്യയിലുണ്ടാവുന്ന വൎദ്ധനവു (പൂൎണ്ണസംഖ്യയായിമാത്രം) കാണുക. (9)

മാൎക്ക്: 30. **5. വൎഗ്ഗമൂലം.** സമയം: 30മി.

1. താഴെയുള്ള സംഖ്യകളിൽ ഏവയെല്ലാം കൃത്യവൎഗ്ഗമായിരിക്കയില്ലെന്നു നോക്കിപ്പറയുക:—

1000, 38416, 12321, 1293·4, ·00625, 15089. (3)

2. $\sqrt{5}=2{\cdot}646$; $\sqrt{5}=2{\cdot}236$ ഈ വിലകൾ ഉപയോഗിച്ചു 28, 45, 343, 500, $\frac{7}{25}$ എന്നിവയുടെ വൎഗ്ഗമൂലം 2 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക. നേരിട്ടു വൎഗ്ഗമൂലം കണ്ടു നിങ്ങളുടെ ഉത്തരങ്ങൾ സത്യാപനം ചെയ്യുക. (10)

3. $\frac{2}{11}$, $\frac{6}{13}$ എന്നിവയുടെ വൎഗ്ഗമൂലം 3 ദശാംശസ്ഥാനംവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (6)

4. 490 വാര നീളമുള്ള ഒരു വയലിൻെറ വിസ്തീൎണ്ണം 78,400ച. വാരയാണ്. ഈ വയലിൻേറയും അതിന്നു സമമായ ഒരു സമചതുര വയലിൻേറയും ചുററുമുള്ള വേലികളുടെ നീളത്തിലുള്ള വ്യത്യാസം എത്ര വാരയാണ്? (6)

5. കറെ കുട്ടികൾ ഒരു അദ്ധ്യയന യാത്രച്ചെലവിലേക്കു 68ക. 1ണ. കൊടുത്തു. ഓരോ കുട്ടിയും കൊടുത്ത സംഖ്യയിലുള്ള അണയുടെ എണ്ണം കുട്ടികളുടെ എണ്ണത്തിന്നു സമമാണെങ്കിൽ ഓരോ കുട്ടിയും കൊടുത്ത സംഖ്യ കാണുക. (5)

മാർക്ക്: 20 6. പൈത്താഗൊറസ്സിൻെറ പ്രമേയം. സമയം: 30മി.

1 ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ ഒരു കോൺ ഒരു സമകോണാണോ എന്നു കോണുകളെ അളക്കാതെ നിശ്ചയിക്കാമോ? എങ്ങിനെ? (2)

2. ക്ഷേത്രഗണിതം വഴിയായി 23ൻെറ വർഗ്ഗമൂലം 1 ദശാംശസ്ഥാനം വരെ കൃത്യമായി കാണുക. ഗണിച്ച നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. (6)

3. 5ച. അംഗുലം വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു സമചതുരം നിർമ്മിക്കുക. അതിൻെറ ഭുജം അളക്കുക. ഗണിച്ച നിങ്ങളുടെ ഉത്തരം ശരിയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. (6)

4. ഒരു ദ്വിസമഭുജത്രികോണത്തിൻെറ സമഭുജങ്ങളുടെ നീളം 6സെ.മീ. ഉം ശേഷമുള്ള ഭുജത്തിൻെറ നീളം 5സെ. മീ.ഉം ആണെങ്കിൽ ത്രികോണത്തിൻെറ ഏററവും വലിയ ഉയരം ഗണിക്കുക. ത്രികോണം വരച്ചു കിട്ടുന്ന അളവിനോടു ഒത്തു നോക്കുക. (6)

മാർക്ക്: 30 7. വൃത്തം. സമയം: 25മി.

1. സമനീളമുള്ള രണ്ടു കമ്പികൾ എടുത്തു ഒന്നിനെ ഒരു വൃത്തമായും മറേറതിനെ ഒരു സമചതുരമായും വളച്ചാൽ വ്യാസത്തിൻേറയും സമചതുരത്തിൻെറ ഭുജത്തിൻേറയും നീളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള സംബന്ധം π ഉപയോഗിച്ചെഴുതുക. (3)

2. ഒരു സമചതുരത്തിൽ വരക്കാവുന്ന ഏററവും വലിയ വൃത്തം സമചതുരത്തിൻെറ ഏതൊരംശമായിരിക്കും? π ഉപയോഗിച്ചു ഉത്തരമെഴുതുക. (3)

3. ഒരു വൃത്തം വരക്കുക. അതിൻെറ ഇരട്ടി വലിപ്പമുള്ള ഒരു വൃത്തം നിങ്ങൾ എങ്ങിനെ വരക്കും? വഴി വ്യക്തമായി എഴുതുക. (5)

4. ഒരു കളത്തിൻെറ വ്യാസം 35 അടിയാകുന്നു. അതിന്നു ചുററുമുള്ള ഒരു നടയുടെ ക്ഷേത്രഫലം $423\frac{1}{2}$ച. അടിയാണെങ്കിൽ അതിൻെറ വീതി കാണുക.

5. $4\frac{1}{2}''$ വ്യാസമുള്ള ഒരു കാഡ്ബോഡ് കഷണത്തിൻെറ കേന്ദ്രത്തിൽ ഒരു കുട്ടി 80° വലിപ്പമുള്ള ഒരു കോൺ വരച്ചു കിട്ടിയ വൃത്തകോണാംശത്തെ

മുറിച്ചെടുത്താൽ ബാക്കിയാകുന്ന കഷ്ണത്തിൻെറ ചുററളവും ക്ഷേത്രഫലവും കാണുക.

6. $OP=10$സെ. മീ. O കേന്ദ്രവും 4സെ.മീ. വ്യാസാദ്ധവും ആയ ഒരു വൃത്തം വരക്കുക. Pയിൽനിന്നു ഈ വൃത്തത്തിലേക്കു 2 സ്പശ്‌രേഖകൾ വരക്കുക. അവയുടെ നീളം അളന്നും ഗണിച്ചും (മി.മീററർവരെ കൃത്യമായി) കാണുക.

മാക്ക്: 30. 8. ക്ഷേത്രഗണിതം. സമയം: 40മി.

1. ABC എന്നൊരു ത്രികോണം നിമ്മിക്കുവാൻ താഴേ പറയുന്ന അളവുകൾ മതിയോ? അല്ലെങ്കിൽ, എന്തുകൊണ്ടു അവ മതിയാകുന്നില്ല? $c=2{\cdot}5''$ $b=3''$, $C=40°$. ത്രികോണം നിമ്മിക്കുക. (6)

2. ഒരു Clinometer ഉപയോഗിച്ചു ഒരു സ്കൂളിലെ ഒരു കൊടിമരത്തിൻെറ ഉയരം കാണ്മാൻ കുറേ വിദ്യാൎത്ഥികൾ എടുത്ത അളവുകൾ താഴേ ചേക്കുന്നു:— കൊടിമരത്തിൽനിന്നുള്ള ദൂരം. മേൽനോട്ടക്കോൺ

77 അടി	35°
37 ,,	55°

Clinometer ഉപയോഗിച്ച വിദ്യാൎത്ഥിയുടെ കണ്ണു നിലത്തിന്നു 5 അടി ഉയരത്തിലാണെന്നു കരുതുക. തോതനുസരിച്ചു ഒരു പടം വരക്കുക. അതിൽനിന്നു ഉയരം കാണുക. (6)

3. ത്രികോണാകൃതിയിലുള്ള ഒരു വയലിൻെറ 2 ഭുജങ്ങളുടെ നീളം 125ഉം 90ഉം വാരയും അവക്കിടയിലുള്ള കോൺ 43°യും ആണ്. ഒരു പടം വരച്ചു വയലിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം ച. വാരവരെ കൃത്യമായി കാണുക. (7)

4. $ABCD$ എന്നൊരു സമാന്തര ചതുരസ്രത്തിൽ $AB=4{\cdot}4$സെ.മീ., $BC=5{\cdot}3$സെ.മീ., $BD=7{\cdot}3$സെ.മീ. $ABCD$ നിമ്മിച്ചു അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം കാണുക. (6)

5. ഒരു സമചതുൎഭുജത്തിൻെറ കണ്ണങ്ങളുടെ നീളം, d_1 ഉം d_2 ഉം അംഗുലമാണെങ്കിൽ അതിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം$=\frac{d_1 . d_2}{2}$ച. അംഗുലമാണെന്നു തെളിയിക്കുക. (5)

മാക്ക്: 40. 9. ഏകകാലിക സമതങ്ങൾ. സമയം: 50മി.

1. നോക്കി xൻേറയും yയുടേയും വില എഴുതുക.

a) $x+3y=11;\ \ x+2y=9.$

b) $x-y=1;\ \ x+y=13.$

c) $2x-3y=9;\ \ x+3y=9.$ (6)

2. സമതാഫലം നിർണ്ണയിക്കുക.

a) $52x+27y=44$

$27x+52y=48\frac{1}{6}$

b) $3-(2-x)=\frac{5y+2}{4}$

$2-(y+1)=-\frac{5x+3}{4}$ (12)

3. 8 വീശം കാപ്പിക്കും 45 വീശം പഞ്ചസാരക്കും കൂടി 13 വീശം കാപ്പിക്കും 15 വീശം പഞ്ചസാരക്കും കൂടിയുള്ളത്ര വിലയുണ്ട്. 15 വീശം കാപ്പിക്കും 16 വീശം പഞ്ചസാരക്കും കൂടി 86ക. 2ണ. വിലയുണ്ടെങ്കിൽ 1 വീശം കാപ്പിയുടേയും 1 വീശം പഞ്ചസാരയുടേയും വില വെവ്വേറെ കാണുക. (10)

(1946)

4. നെയ്യും കടലെണ്ണയും കൂടിയ 2 കൂട്ടം മിശ്രങ്ങളിൽ ഇവ യഥാക്രമം 1 : 3 എന്നും 3 : 5 എന്നും ഉള്ള സംബന്ധത്തിലുണ്ട്. 50 പലം നെയ്യും 90 പലം കടലെണ്ണയും ഉള്ള ഒരു പുതിയ മിശ്രം ഉണ്ടാക്കുവാൻ തന്നിട്ടുള്ള മിശ്രങ്ങൾ ഓരോന്നിൽനിന്നും എത്ര വീതം ചേർക്കണം? (12)

(April 1947)

സാങ്കേതികപദങ്ങൾ.

ഒന്നാം പുസ്തകത്തിൽ ഉപയോഗിച്ച സാങ്കേതിക പദങ്ങൾക്കു പുറമെ ഈ പുസ്തകത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ള പദങ്ങൾ താഴെ ചേൎക്കുന്നു.

Ambiguous	സന്നിഗ്ദ്ധ
,, Case	സന്നിഗ്ദ്ധസംഗതി
Approximately	സുമാറായി, സ്ഥൂലമായി
Approximate value	സുമാർ വില
Approximation	സ്ഥൂലഗണനം
Bearing	ദിഗ്സ്ഥാനം
Broker	ദല്ലാളി
Brokerage	ദല്ലാൾകമ്മിഷ്യൻ
Cardinal points (of the Compass)	ദിഗ്ബിന്ദുക്കൾ
Circumscribe a circle	പരിവൃത്തം വരക്കുക.
Commission	കമ്മിഷ്യൻ
Contact	സ്പൎശം
,, point of	സ്പൎശബിന്ദു
Contracted addition	ചുരുക്കക്കൂട്ടൽ
,, division	,, ഹരിക്കൽ
,, multiplication	,, പെരുക്കൽ
,, subtraction	,, കിഴിക്കൽ
Discount	വട്ടക്കിഴിവു്
Equation — simultaneous	ഏകകാലികസമതാ‌ം
Figure — significant	ഗണ്യമായ അക്കം
Form — standard	പ്രമാണരൂപം
Gross income	ഒട്ടാകെ വരവു്
Inscribe	അന്തൎലേഖനംചെയ്യുക
Instalment	ഗഡു, തവണ
Insurance	ഇൻഷ്യൂറൻസ്
Kilogram	കിലോഗ്രാം
Metric system	മെറ്റ്രിക്ക് പദ്ധതി

Number – irrational	കരണീയുതസംഖ്യ
Par – value	തുല്യവില
Plan	പ്ലാൻ
Plumb line	ലംബസൂത്രം
Premium	ഇൻഷൂറൻസ് വരി
Property	ഗുണം
Reciprocal	വ്യുൽക്രമം
Root	മൂലം
Root – square	വർഗ്ഗമൂലം
Significant	ഗണ്യം
Simultaneous	ഏകകാലിക
Square	വർഗ്ഗം; സമചതുരം
Stocks and shares	സ്റ്റോക്കും ഓഹരിയും
Substitution	പകരം ചേർക്കൽ
Surd	കരണി
Survey	സർവ്വെ
Tangent	സ്പർശരേഖ

ഉത്തരങ്ങൾ

അഭ്യാസം 1.

1. 46; 810; 1500; 70101,ആയിരം.
2. (*a*) 93142. (*b*) 931. (*c*) 93. (*d*) 9.
3. (i) (*a*) 21ക. 13ണ. 7പ. (*b*) 21ക. 14ണ. (*c*) 22ക.
   (ii) (*a*) 9ണ. 4പ. (*b*) 9ണ. (*c*) 1ക.
   (iii) (*a*) 7ണ. 8പ. (*b*) 8ണ. (*c*) 0ക.
   (iv) (*a*) 12പ. (*b*) 1ണ. (*c*) 0ക.
4. (i) (*a*) 23. (*b*) 23·0. (*c*) 23·05.
   (ii) (*a*) 170. (*b*) 169·7. (*c*) 169·74.
   (iii) (*a*) 1. (*b*) 0·8. (*c*) 0·82.
   (iv) (*a*) 0. (*b*) 0·4. (*c*) 0·44.
5. (*a*) 352·84മി. (*b*) 35·3കോടി.
6. (*a*) ·15, ·57, ·56. (*b*) ·154, ·571, ·556.
7. 601; 7·55; 0·0440; 0·00733; 3·78; 12·3; 0·0667; 3·12.
8. 12·85, ·86, ·87, ·88, ·89, ·90, ·91, ·92, ·93, ·94.
9. 1·724; 1·715ഔ.
10. 12മ. 7മി. 29സെ.; 12മ. 6മി. 30സെ.
11. 3ക. 11ണ. 9പ.; 3ക. 11ണ. 7പ.
12. (i) 200; 1000ക. (ii) 232; ·0001ഗ്രാം.
    (iii) 924; .001അം. (iv) 438; ·1അടി.
13. (*a*) 10·295, 10·285. (*b*) ·40355, ·40345
    (*c*) 7·0015, 7·0005. (*d*) 625050, 624950
14. 4.

അഭ്യാസം 2.

1. (i) (*a*) 45 (*b*) 44·53 (*c*) 44·529.
   (ii) (*a*) 30 (*b*) 29·96 (*c*) 29·956.
   (iii) (*a*) 11 (*b*) 10·58 (*c*) 10·577.
2. (i) (*a*) 3 (*b*) 3·0 (*c*) 2·95.
   (ii) (*a*) 7 (*b*) 7·3 (*c*) 7·32.
   (iii) (*a*) 2 (*b*) 2·2 (*c*) 2·21.

3. 5·382; 16·147; 21·530.
4. (i) 221·26 (ii) 1·83 (iii) 438·23 (iv) 1·00.
5. (i) 1·30 (ii) 0·00039 (iii) 464 ആയിരം. (vi) 203 ലക്ഷം.
(v) 10·75188 (vi) 0·00567 (vii) 0·0000499.
6. 2430; 24·8; ·00100. 7. 25·2
8. (i) 1·1902 (ii) 38·95 (iii) 155·1 (iv) 8·71963.
(v) 0·007. (vi) (*a*) 149·0. (*b*) 14·47. (*c*) 0·8086.
(*d*) 59·61.
9. 0·312163. 10. (*a*) 2·601. (*b*) 0·626.
11. (*a*) 902. (*b*) 1122. 12. +35·1; −7·0; +355·5;
+38·7; +17·3; 698667; 683348; −2·2.
13. 7ഷി. 6പൈ.; 8ഷി. 1പൈ.; 42.
14. 17040ക.; 24538ക. 44·0.
15. (*a*) +2·7, +2·2, −1·4. (*b*) + 9.

അഭ്യാസം 3.

1. 3840 മീ. 2. 6·45; 16·393. ഇംഗ്ലീഷുകാരൻ; ·4.
4. 29. 5. 24975·0. 6. 1550; 10·76; 1·196.
7. 247. 8. 44. 9. ·528. 10. 3035.
11. 62റാ. 6·8ഔ. 12. 51.

അഭ്യാസം 4.

1. 1721ക. 4ണ.; 51ക.; $2\frac{26}{27}$%. 2. 4108ക. 12ണ.;
4103ക. 5ണ. 6പ. 3. 3300ക.
4. ഒന്നാം. $4\frac{4}{9}$, $4\frac{1}{6}$, $4\frac{2}{7}$. 5. $102\frac{1}{2}$.
6. 71; 621ക. 4ണ.; $8\frac{4}{7}$. 7. 7ക. 8ണ.
8. 2400ക. 9. 65ക. 10. 106ക.
11. 1840ക. 2ണ. 12. $77\frac{5}{8}$.

അഭ്യാസം 5.

1. *a*. 106ക. 1ണ. *b*. 96ക. 7ണ. *c*. 258ക. 12ണ.
d. 1902ക. 8ണ. 2. 361ക. 9ണ. 3. $\frac{3}{4}$.
4. 38550ക. 5. 18405ക. 6. 5251ക. 8ണ.
7. 1425ക. 2ണ.; 42424ക., 14ണ. 8. 75000ക.

അഭ്യാസം 6.

1. 105ക. 14ണ. 2. 10000ക. 3. 16
4. 650ക. 5. *A* ക്ക. $26\frac{1}{4}$ക.
6. *a*. 177ക. 5ണ. 6പ. *b*. (1) 20. (2) 8.
7. 15ക. 10ണ. 8. 14ക. 1ണ.

അഭ്യാസം 7.

1. 386ക. 11ണ. 6പ. 2. 91ക. 3ണ. 6പ.
3. 375ക. 4. 423ക. 5. 340ക.
6. 412ക. 8ണ. 7. 1ണ. 3പ.

അഭ്യാസം 8.

1. 41627ക. 9ണ. 8പ. 2. 6ണ. 8പ. 3. 205728ക.; 729ക. 2ണ. 8പ. 4. 5ണ. 6പ. 5. 10ണ. $2\frac{17}{25}$പ.
6. 2240ക. 7. 350ക.; 11ണ. 8പ. 8. 10ണ.
9. 2880ക. 10. 4640ക.

അഭ്യാസം 9.

1. *a*. 964ക. 11ണ. *b*. 270ക. 15ണ.
   c. 126ക. 12ണ. *d*. 183ക. 13ണ. 9പ.
   e. 1339ക. 6പ.
2. *a*. $\frac{441}{400}$; 1025ക. *b*. $\frac{289}{256}$; 1289ക. 1ണ.
   c. $\frac{676}{625}$; 816ക. *d*. $\frac{10609}{10000}$; 609ക.
   e. $\frac{6889}{6400}$; 764ക. 1ണ.
3. 21ക. 4ണ. 4. *a*. 12ക. 9ണ. 8പ.
   b. 390ക. 10ണ. 1പ. *c*. 10ക. 7ണ. 11പ.
   d. 87ക. 5ണ. 2പ.
5. *a*. 5ണ. 9പ. *b*. 8ണ. 1പ. *e*. 1ക. 2ണ. 1പ.
6. *a*. 19ക. 11ണ. 11പ.; 3ണ. 2പ.
   b. 21ക. 8ണ. 7പ.; 2ണ. 7പ.
   c. 3ക. 9ണ. 8പ.; 4പ.
   d. 6ക. 10ണ. 2പ.; 11പ.
7. 139393. 8. 461982000.

9. 17326ക. 1ണ.; 9873ക. 10ണ.;
629ക. 9ണ.; 537ക. 7ണ.

10. 2861ക. 4ണ.   11. 354578ക. 12ണ.

12. 10·25; 6·09; 5·0625; 3·0225.

13. *a*. 1. 427ക. 10ണ. 2പ.   2. 198ക. 3ണ. 11പ.
3. 39ക. 5ണ. 7പ.   *b*. 1. 8ക. 12ണ. 3പ.
2. 7ക. 14ണ. 6പ.   *c*. 1. 9ക. 1ണ.   2. 4ക. 10ണ. 11പ.

14. 1. 608ക. 6ണ. 3പ.   2. 414ക. 4ണ.

അഭ്യാസം 10.

1. 33; 44; 48; 231; 252; 385; 693; 756; 825; 940.

2. $\frac{1}{21}$; $\frac{2}{25}$; $\frac{5}{11}$; $\frac{27}{32}$; $1\frac{1}{3}$; $1\frac{3}{7}$; $1\frac{11}{15}$; $2\frac{32}{39}$; $10\frac{4}{15}$; $4\frac{19}{42}$.

3. 2, 5, 11, 3, 5, 6.

അഭ്യാസം 11 A.

1. 37	2. 56	3. 82
4. 99	5. 103	6. 195
7. 118	8. 309	9. 328
10. 459	11. 481	12. 708
13. 1079	14. 1679	15. 1235
16. 3702	17. 6401	18. 8002
19. 9451	20. 16105	21. 4321
22. 15215	23. 57834	24. 811071
25. 100372	26. 99997	

B.

1. 8·6	2. 3·28	3. 1·95	4. ·99
5. ·431	6. 5·05	7. 10·043	
8. 64·005	9. ·0101	10. ·01849	
11. 6·0483	12. ·0374	13. 52·004	
14. ·0451	15. ·59049	16. ·00405	

C.

1. 462അ.	2. 1. 1·732	2. 2·236
3. 3·162	4. 17·029	5. 1·804

6. 3·479 7. ·084 8. ·316
9. ·007 10. ·285

3. 1. $\frac{1}{69}$ 2. $2\frac{5}{7}$ 3. $8\frac{1}{9}$ 4. $3\frac{159}{220}$
5. $\frac{3}{4}$

4. ·408, ·632, ·327, 2·021, 2·3021.

5. 17·321, 4·4722, 11·1805, 12·1247, 5·1963, 25·9815, ·22361, ·017321, ·86605, ·74536.

6. 368അ. 7. (1) 70വാ. (2) 209അ. (3) 208അ. 9അം.

8. 340. 9. 288; 72. 10. $12\frac{15}{22}$മി.

11. 39:43. 12. 3762വാ.; 1881ക. 13. 242ക.

14. 334ക. 11ണ. 15. $16\frac{1}{2}$അ.

അഭ്യാസം 12.

1. 29സെ. മീ. 4. 311വാര. 5. $480\frac{1}{4}$വാര.
6. 3·5അം. 7. 10·83ച. സെ. മീ. 9. 1ച. 83ക.
10. 10′; 1′. 11. $24\frac{1}{2}$′. 12. 25′.
13. 52′0″. 14. 2·9″. 15. $26\frac{1}{4}$ച.വാ.
16. 4·2ച. അം. 17. 77·76ച.സെ.മീ. 18. 12·5സെ.മീ.
19. 3മണിക്കൂർശേഷം. 20. 35′. 21. $3\frac{1}{4}$′.
22. 26·5′. 23. $11\frac{1}{4}$′ ഉയരത്തിൽ.

അഭ്യാസം 13.

1. (*a*) 110സെ. മീ. (*b*) 14വാ. 2അം. (*c*) 73ച. 92ക.
2. (*a*) 42അം. (*b*) 10വാ. 2അ. 8അം. (*c*) 1ച. 26ക.
3. $5\frac{1}{2}$″. 4. 11000′ 5. 120. 6. $565\frac{5}{7}$″.
7. $490\frac{2}{7}$വാര. 8. $8\frac{3}{4}$′. 9. 2·8″. 10. 2:3.
11. $3\sqrt{2}$″ 12. $3\frac{1}{2}$″. 13. 8വാര. 14. $17\frac{1}{2}$′.
15. 88′. 16. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$സെ. മീ.

അഭ്യാസം 14.

1. 616ച. സെ. മീ., $962\frac{1}{2}$ച. അം., $78\frac{4}{7}$ച. മീ., 75·46ച. അ.
2. $86\frac{5}{8}$ച. അം., 3850ച. അ., $11\frac{5}{11}$ച. സെ. മീ., $795\frac{5}{11}$ച. മീ.
3. 7അം., 4·2സെ. മീ. 2ച., 70വാര.

4. 78·5വാ., 55·5വാ. 5. 77ച.അം. 6. 28ക. 4ണ. 7പ.
7. 14″. 8. 350ച. വാര. 9. 16·6′.
10. 154ച. അം.; 98ച. അം. 11. വൃത്തം
12. 5സെ. മീ.; 2; $20\frac{5}{7}$ച.സെ.മീ. 13. $10\frac{1}{2}$ച. അം.
14. $56\frac{4}{7}$ച.സെ.മീ.; $39\frac{2}{7}$ച.സെ.മീ. 15. 27335ക.
16. (*a*) 3 : 4. (*b*) 9 : 16. 17. 2; $1:\sqrt{2}$.
19. $\sqrt{5}$അം. 21. 160അ. 23. $12\sqrt{3}$ച. അം.
24. 3πച.സെ.മീ.

അഭ്യാസം 15.

1. (*a*) $4\frac{2}{5}$സെ. മീ.; $7\frac{7}{10}$ച.സെ.മീ.; (*b*) $5\frac{1}{2}$അം.; $24\frac{3}{4}$ച.അം.
(*c*) $17\frac{1}{9}$അടി; $34\frac{2}{9}$ച.അടി.
2. 100; 34·65ച. സെ. മീ. 3. $19\frac{1}{11}$അം. 4. 1467റാ.
6. 198, 86, 76. 7. $6\frac{1}{4}$ച.സെ.മീ. 8. 31അം.
9. $1039\frac{1}{2}$ച. അടി; $1193\frac{1}{2}$ച.അടി. 10. $2964\frac{1}{2}$ച.അടി.
11. (*a*) 149·6; 4·4 (*b*) 140; 14. (*c*) 123·9; 30·1ച.സെ.മീ.

അഭ്യാസം 16.

1. 2·4സെ. മീ.; 3·46സെ. മീ. 2. 3·46″; 2·65″. 3. 4·61സെ.മീ.

അഭ്യാസം 17.

3. 80° 4. ·48ച. അം. 5. 12സെ.മീ.
6. $\sqrt{d^2-r^2}$സെ.മീ.; 7·42സെ.മീ.; 5·75സെ.മീ.
7. 2·9″. 8. 13·42സെ. മീ. 12. 8·50ച.സെ.മീ.
13. 2·24സെ. മീ. 14. 29·35′.

അഭ്യാസം 18.

1. 4·1″. 2. $AC=5·7$സെ. മീ.; $BC=9·4$സെ. മീ.
3. 3·2സെ. മീ.; 7സെ. മീ. 4. $AC=1·5″$; $B=28°$; $C=62°$.
5. 1·2″. 6. $a=5·9$സെ. മീ.; $c=3·5$സെ.മീ.
7. $a=3·1″$; $c=2·1″$. 8. $a=9·8$സെ.മീ. $B=40°$; $C=50°$.
13. 3·1″. 14. 5·7സെ.മീ. 17. 6·1സെ.മീ.; 3·5സെ.മീ.
4·6സെ.മീ.; 2·3സെ.മീ.
19. *a*) 2; സന്ദിഗ്ദ്ധസംഗതി. *b*) ദ്വിസമഭുജം. *c*) 1.
d) സമകോണം. *e*) 0.

20. *a*) 1   *b*) 2; അധികകോണത്രികോണവും ന്യൂനകോണത്രികോണവും; രണ്ടു കോണുകൾ പരിപൂരകങ്ങളാണ്.

അഭ്യാസം 19.

1. 869അടി; 68°; 73°.   2. 14·4″.
3. 61 വാര; 70വാര.   4. 380വാര.
5. 611വാ.   6. 933അ.   7. മതിയാകയില്ല. 2 ത്രികോണങ്ങൾ വരക്കാം.

അഭ്യാസം 20.

2. (1) 135° (2) 90° (3) $112\frac{1}{2}°$ (4) $157\frac{1}{2}°$ (5) 180°
(6) 50° (7) 155° (8) $7\frac{1}{2}°$ 3. കി.വ-കി.   4. തെ. 20°പ.
5. 6·7.   6. 5·6നാ.   7. 225വാ.   8. 714വാ.
9. 7·1നാ., 8·6നാ., 9·3നാ, 10·4നാ.   10. $13\frac{1}{4}$നാ., വ. 13°പ.
11. 7·6നാ.   12. 2022അടി.   13. 662·8വാര
14. 9·2നാ.   15. കി. 13°തെ.

അഭ്യാസം 21.

1. 173അടി.   2. 16അടി; 56.   3. 21·2അടി.
4. 329·7അടി.   5. 635അടി.   6. 87·3അടി.
7. 109അടി.   8. 123അടി.   9. 681അടി.

അഭ്യാസം 22.

1. 8·5സെ.മീ.   2. 7·07സെ.മീ.   3. 2·83″.
4. 9·7സെ.മീ.   5. 8സെ.മീ.   6. 9·4സെ.മീ.; 3·4സെ.മീ.
7. 3·86″; 1·03″; 150°, 150°, 30°.   8. 4·35സെ.മീ.; 44°; 136°.
9. 5·2സെ.മീ.; 5·2സെ.മീ.   10. 11·3സെ.മീ., 6·5സെ.മീ.; 127°, 127°, 53°.   11. 131°, 49°; 3·25″.   12. 97°, 83°.
13. 4·9സെ.മീ.; 6·8സെ.മീ.   14. 4·62സെ.മീ.

അഭ്യാസം 23.

1, (*a*) 5·745ച.അം.   (*b*) 70·99ച. സെ. മീ.
2. 31·176ച. സെ. മീ.; 18ച. സെ. മീ.   3. 21·217ച. സെ. മീ.
4. 2·828ച. അം.   5. (1) 2·475ച.അ.   (2) 1·704ച. അം.

(3) 1·603 ച. അം. 6. 17625 ച. വാ. 7. 5 സെ.മീ.; 13 സെ.മീ.; 4·62 സെ.മീ. 9. 7·67 സെ.മീ.; 6·71 സെ.മീ. 10. 5 സെ.മീ. 12. 4·99 ച.അം. 13. 7·07′, 4·71′; 24 ച.അ.

അഭ്യാസം 24.

1. 7, 1. 2. 5, 3. 3. 9, 11. 4. 6, −8. 5. −1, 2.

അഭ്യാസം 25.

1. 4, 7.	2. 43, −6.	3. −1, −2.
4. $\frac{1}{2}$, −3.	2. 1, −1.	6. −17, 10.
7. $\frac{1}{4}$, −5.	8. $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$.	9. 0, 3.
10. 1, 1.	11. 2, 3.	12. 5, 4.
13. 3, 7.	14. 2, 5.	15. 5, 2.
16. 3, 2.	17. −30, −43.	18. 2, 9.
19. 2, 5.	20. 6, 6.	21. 3, 3.
22. 1, 8.	23. 6, 4.	24. 24, 12.
25. $-\frac{38}{45}$, $-\frac{2}{45}$.	26. 2, ·3.	27. ·02, 2·9.
28. 2, 1.	29. $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$,.	30. 1, 2.
31. 7, 3.	32. $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$.	33. −4, 3.
34. 13, 7.	35. 19, 3.	36. 12, −4.
37. 4, 3.	38. 5, 5.	39. 2, 1.
40. −3, −7.	41. $15\frac{1}{13}$, $12\frac{9}{13}$.	42. $-\frac{1}{2}$, 1.
43. 4, −5.	44. 1, 1.	45. $-\frac{1}{10}$, $-2\frac{7}{10}$.
46. 2, 3.	47. $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$.	48. 1, −2.
49. $\frac{44}{213}$, $-\frac{17}{22}$.	50. 5, 2.	51. −3, −1.
52. 3, 1.	53. 1, 2.	54. 3, 4.

55. $a+b, a-b,$ 56. $2a+b, a-b.$

57. $\dfrac{c+bd}{a+b}, \dfrac{c-ad}{a+b}.$ 58. $a, 0.$

59. $\dfrac{c-bc}{a-b}, \dfrac{c-ac}{b-a}.$ 60. $\dfrac{ac+b^2}{a^2+b}; \dfrac{ab-c}{a^2+b}.$

അഭ്യാസം 26.

1. 66, 8. 2. 65, 30, 5. 3. 75, 35.
4. 18, 12. 5. 6ണ. 6. 90മം. 96നം.
7. $1\frac{1}{3}$മി. 8. ലാഭം. പശു : $6\frac{1}{4}$ക.; ആട്ടു : 3ക.
9. പശു. ലാഭം $6\frac{1}{4}$ക.; ആട്ടു നഷ്ടം 3ക.
10. എ. 130ക.; ബി. 190ക.; സി. 50ക.
11. എ. 350ക.; ബി. 225ക.; സി. 250ക.
12. 7ണ.; 32 കാലണ.; 39 പൈ.
13. 18, 30. 14. 40, 30, 10. 15. 54.
16. 74. 17. 783. 18. 792.
19. $\frac{7}{19}$. 20. $\frac{7}{23}$. 21. $\frac{6}{13}$.
22. 15. 23. 27അ., 22അ. 24. 864 ച. വാ.
25. 1120ച. അ. 26. 13നാ., 6നാ. 27. 3നാ.
28. 15നാ. 29. 175നാ. 30. 11നാ., 10നാ.
31. $5\frac{1}{2}$നാ., $3\frac{1}{2}$നാ. 32. $4\frac{1}{2}$നാ., 3നാ. 33. 7നാ.
34. 4, 6. 35. 18ക. 36. 600ക.
37. 300ക., 400ക. 38. 50ക., 46. 39. 150നാ.
40. 70ക., 130ക. 41. 24പ.; 20ക. 42. 60നാ.; 90നാ.
43. 1ക. 4ണ.; 12ണ. 44. 6500ക.; 2500ക.
45. $\frac{24}{17}(2m-n)$നാ.

പരീക്ഷകടലാസ്സുകൾ.

1. 1. 1182-പതിനായിരം ഗാലൺ. 4053-റൂവുടൺ.
7262-റൂവുടൺ. 2560-റൂവുടൺ.
2. *a*. 106. *b*. 35. *c*. 141.
3. 499സെ. 4. 71·8; 63·7; 11·3.
2. 1. 39·29. 2. 10·76. 3. 6·232. 4 4536.
3. 1. 25ക. 2. 8000ക. 3. 1ണ. 2പ. 4. 1280ക.
4. 1. 16ക. 2ണ. 7പ. 2. 8ണ. 4പ. 3. 4798ക. 4. 48367.
5. 1. 1000, 1293·1, ·00625.
2. 5·29; 6·71; 18·52; 22·36; ·53.
3. ·426; ·679. 4. 180.
6. 2. 4·8. 3. 2·2″. 4. 5·5സെ. മീ.

7. 1. വ്യാസം : ഭുജം $=4:\pi$. 2. $\frac{\pi}{4}$.

4. $3\frac{1}{2}'$. 5. $15\frac{1}{2}''$, $12\frac{3}{8}$ ച. അം. 6. 9·2 സെ.മീ.

8. 1. സന്നിശ്രസംഗതി. 2. $60'$. 3. 3836 ച. വാ.

4. 23·04 ച. സെ.മീ.

9. 1. a) $x=5$; $y=2$. b) $x=7$; $y=6$. c) $x=6$; $y=1$.

2. a) $x=\frac{1}{2}$; $y=\frac{1}{3}$. b) $x=-3$; $y=-2$.

3. 4ക 14ണ.; 13ണ. 4. 20പ.; 120പ.

GENERAL MATHEMATICS

BOOK II FOR FORM V

(*According to the Syllabus issued in July 1950*)

Approved as a Text-Book by the Madras Text-Book Committee
Vide Fort St. George Gazette, Part I-B, page 69
dated May 19, 1954.

J. Pavamani, B. A., L. T.
Headmaster, B. E. M. High and Training School, Tellicherry.

സാമാന്യഗണിതശാസ്ത്രം

രണ്ടാം പുസ്തകം—5-ാം ഫോറത്തിന്നു.

(1950 ജൂലായിമാസം പ്രസിദ്ധപ്പെടുത്തിയ പാഠപദ്ധതിക്കനുസരിച്ചെഴുതിയതു്).

37170
510
PAV/S

BLISHED BY THE
SSION BOOK DEPOT
MANGALORE
1954

Price: Re. 1 As. 8]   [വില: 1ക. 8ണ.

Indic Digital Archive Foundation
gpura.org