ജീവദ്ഗണിതം

(ELECTIVE)

STANDARD XI

(FORM VI)

K. G. Sivasankaran Nair

P. E. Punnose

ജീവദ്ഗണിതം

(ELECTIVE)

STANDARD XI

(FORM VI)

K. G. Sivasankaran Nair M.A., M.Ed.

Lecturer, Training College, Trivandrum.

P. E. Punnose B.Sc., B.T.

Teacher, St. Thomas High School, Thottakad.

1958

1/50

2637

ഉള്ളടക്കം

ശുദ്ധിപത്രം

ബീജഗണിതം.

	പുറം	വരി	തെറ്റ്	ശരി
1.	26	20	$(x^3-3bx^2+3b^2x-b^3)\div(x\div a)$	$(x^3-3bx^2+3b^2x-b^3)\div(x-b)$
2.	46	17	$1-2a+4a^3-2a^3$	$1-2a+4a^4-2a^3$
3.	46	24	x^2-5x-6	x^2-5x+6

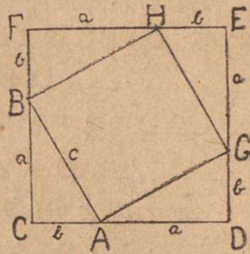
263

ക്ഷേത്രഗണിതം

ഉപപാദ്യം 1

(പൈതഗോറസ്സിന്റെ സിദ്ധാന്തം)

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിന്റെ കർണ്ണത്തിന്മേൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം മററു രണ്ടു വശങ്ങളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സമചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ തുകയ്ക്കു തുല്യമായിരിക്കും.



<u>സങ്കല്പം</u>. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle C = 90°$. BC, CA, AB എന്നീ ഭുജങ്ങളുടെ നീളം കുറിക്കുന്നതിനു് a, b, c എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു.

<u>അനുമാനം</u>. $c^2 = a^2 + b^2$

<u>നിർമ്മിതി</u>. $AD = a$ ആകത്തക്കവണ്ണം CA രേഖയെ D യിലേക്കു നീട്ടുക. CD രേഖയിന്മേൽ CDEF എന്ന സമചതുരം വരയ്ക്കുക. DG, EH ഇവ ഓരോന്നിന്റേയും അളവു് b ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം G, H എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ എടുക്കുക. AG, GH, HB ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

<u>ഉപപത്തി</u>. ABC, GAD എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

$BC = AD$ (നിർമ്മിതി)

$CA = DG$ (നിർമ്മിതി)

$\angle BCA = \angle ADG$ (90° വീതം)

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle GAD$

$\therefore AB = GA$

$\triangle ABC$, $\triangle GAD$ ഇവ സർവ്വസമമെന്നു തെളിയിച്ചതു പോലെ HGE, BHF എന്നീ ത്രികോണങ്ങളും $\triangle ABC$ യ്ക്കു് സർവ്വസമമെന്നു തെളിയിക്കാം. ഇതിൽനിന്നും HG, BH എന്നീവശങ്ങളും ABയ്ക്കു തുല്യമെന്നു തെളിയിക്കാം.

അതായതു് $AB=GA=HG=BH=c$

അതായതു് BAGH ഒരു സമചതുർഭുജമാണു്.

ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle C=90^\circ$ ആയതുകൊണ്ടു് $\angle ABC+\angle BAC=90^\circ$

ABC, GAD എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ സർവ്വസമമായതുകൊണ്ടു് $\angle ABC=\angle GAD$

$\therefore \ \angle GAD + \angle BAC = 90^\circ$

CAD ഒരു നേർവരയായതുകൊണ്ടു്

$$\angle BAC + \angle GAD + \angle BAG = 180^\circ$$

എന്നാൽ $\angle GAD + \angle BAC = 90^\circ$ (തെളിയിച്ചു)

$\therefore \ \angle BAG = 90^\circ$

അതായതു് BAGH എന്ന സമചതുർഭുജത്തിൻെറ ഒരു കോണു് 90° ആകുന്നു. അതുകൊണ്ടു് BAGH ഒരു സമചതുരമാകുന്നു.

CDEF എന്ന സമചതുരത്തിൻെറ വശം $(a+b)$ ആയതുകൊണ്ടു്

CDEF ൻെറ വിസ്തീർണ്ണം $=(a+b)^2$

CDEF ൻെറ വിസ്തീർണ്ണം വേറൊരു രീതിയിലും കണ്ടുപിടിക്കാം. BAGH എന്ന സമചതുരത്തിൻേറയും, $\triangle ABC$, $\triangle GAD$, $\triangle HGE$, $\triangle BHF$ എന്നിവയുടേയും വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ചു കൂട്ടിയാൽ മതിയാകും.

$\triangle ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $=\frac{1}{2}\times a\times b=\frac{1}{2}ab$

2637

$\triangle GAD$, $\triangle HGE$, $\triangle BHF$ ഇവ $\triangle ABC$ യോടു സർവ്വസമമായതിനാൽ

$$\triangle ABC+\triangle GAD+\triangle HGE+\triangle BHF=4\times\frac{1}{2}\,ab$$
$$=2\,ab$$

BAGH ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $=c^2$

$\therefore$ CDEF ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $=c^2+2ab$

CDEF ന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $(a+b)^2$ ആണെന്നു തെളിയിച്ചുകഴിഞ്ഞു.

$$\therefore\quad c^2+2ab=(a+b)^2$$

അതായതു് $c^2+2ab=a^2+b^2+2ab$

ഇരുവശങ്ങളിൽനിന്നും $2ab$ കുറയ്ക്കുക.

അപ്പോൾ $c^2=a^2+b^2$

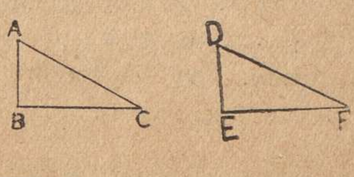
ഉപപാദ്യം 2

(പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വിപരീതം)

ഏതെങ്കിലും ഒരു ത്രികോണത്തിൽ ഒരു ഭുജത്തിന്റെ വർഗ്ഗം മററു രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ വർഗ്ഗത്തിന്റെ തുകയ്ക്കു തുല്യമാണെങ്കിൽ ആ രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള കോണു് ഒരു സമകോണായിരിക്കും.

<ins>സങ്കല്പം.</ins> ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ

$AC^2=AB^2+BC^2$



<ins>അനുമാനം</ins> $\angle ABC=90^\circ$

<ins>നിർമ്മിതി</ins> $EF=BC$, $DE=AB$, $\angle E=90^\circ$ ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം DEF എന്ന ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.

ഉപപത്തി $\angle E = 90^\circ$ ആയതുകൊണ്ടു്

$$
\begin{aligned}
DF^2 &= DE^2 + EF^2 \\
&= AB^2 + BC^2 \quad \text{(നിൎമ്മിതി)} \\
&= AC^2 \quad \text{(സങ്കല്പം)}
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad DF = AC$

ABC, DEF എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

$DF = AC$ (തെളിയിച്ചു)

$EF = BC$ (നിൎമ്മിതി)

$DE = AB$ (നിൎമ്മിതി)

$\therefore \quad \triangle ABC \equiv \triangle DEF$

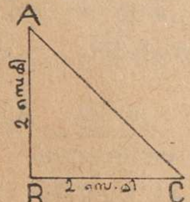
$\therefore \quad \angle B = \angle E$

എന്നാൽ $\angle E = 90^\circ$ (നിൎമ്മിതി)

$\therefore \quad \underline{\angle B = 90^\circ}$

നിൎമ്മിതി 1. ക്ഷേത്രഗണിതരീതിയിൽ $\sqrt{8}$ ന്റെ വില കാണുക.

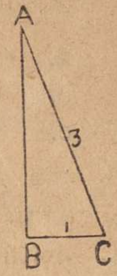
മട്ടം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വശങ്ങൾ 2 സെ. മീ. വീതമുള്ള ABC എന്ന ഒരു മട്ടത്രികോണം വരയ്ക്കുക. ഇതിൽ AC യുടെ അളവു് $\sqrt{8}$ സെ. മീ. ആണെന്നു് താഴെ തെളിയിച്ചിരിക്കുന്നു. AC യെ അളന്നു് $\sqrt{8}$ ന്റെ വില കാണാവുന്നതാണു്.



ഉപപത്തി

$$
\begin{aligned}
AC^2 &= AB^2 + BC^2 \\
&= 2^2 + 2^2 \\
&= 8
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad \underline{AC = \sqrt{8}}$



വേറൊരു രീതിയിലും $\sqrt{8}$ കാണാം. ABC എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൻെറ കൎണ്ണം 3 സെ.മീററും, വേറൊരുവശം 1 സെ.മീററും ആക്കുക. മററെ വശത്തിൻെറ നീളം $\sqrt{8}$ സെ.മീററർ ആയിരിക്കും.

ഉപപത്തി $AB^2 = AC^2 - BC^2$

$$= 3^2 - 1^2$$
$$= 8$$
$$\therefore \quad AB = \sqrt{8}$$

ഒരു സംഖ്യയുടെ വൎഗ്ഗമൂലം ക്ഷേത്രഗണിതരീതിയിൽ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്ന് ആദ്യമായി ആ സംഖ്യയെ രണ്ടു വൎഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയായി പിരിച്ചെഴുതുകയോ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടു വൎഗ്ഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമായി പിരിച്ചെഴുതുകയോ ചെയ്താൽ മതിയെന്ന് മുൻ ഉദാഹരണത്തിൽനിന്നും വ്യക്തമാണ്.

അഭ്യാസം 1.

1. ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിൻെറ രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ അളവു താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. മൂന്നാമത്തെ ഭുജത്തിൻെറ അളവു കണക്കാക്കുക.

   a. മട്ടം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭുജങ്ങൾ 5 സെ.മീ; 12 സെ.മീ.

   b. കൎണ്ണം 100 ലിംഗ്സ്; വേറൊരു ഭുജം 60 ലിംഗ്സ്.

   c. മട്ടം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഭുജങ്ങൾ 18 ഗജം, 21 ഗജം.

   d. കൎണ്ണം 58 അടി; വേറൊരു ഭുജം 42 അടി.

2. താഴെ കൊട്ടത്തിരിക്കുന്ന മട്ടത്രികോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുക.

a. കർണ്ണം 50 ലിംഗ്സ്; ഒരു ഭുജം 40 ലിംഗ്സ്.
b. കർണ്ണം 130 അടി; ഒരു ഭുജം 120 അടി.
c. കർണ്ണം 60 ഗജം; ഒരു ഭുജം 50 ഗജം.

3. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളം 12 ഇഞ്ചും വീതി 9 ഇഞ്ചും ആയാൽ കർണ്ണത്തിന്റെ അളവു കാണുക.

4. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളം 12 സെ.മീററവും കർണ്ണം 13 സെ.മീററവുമായാൽ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

5. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഒരുവശം 6 ഇഞ്ച്. കർണ്ണത്തിന്റെ അളവുകാണുക.

6. ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ കർണ്ണം 20 ഗജം. അതിന്റെ ഒരു വശത്തിന്റെ അളവുകാണുക.

7 30 അടി നീളമുള്ള ഒരു ഏണി ഒരു ഭിത്തിയിൽ ചാരി വച്ചിരിക്കുന്നു. ഏണിയുടെ ചുവട് ഭിത്തിയിൽനിന്നും 18 അടി അകലെയായാൽ അതിന്റെ അഗ്രം തറയിൽ നിന്നും എത്തുയരത്തിലാണെന്നു കണക്കാക്കുക.

8. താഴെകൊട്ടത്തിരിക്കുന്ന അളവുകളിൽ ഭുജങ്ങളുള്ള ത്രികോണങ്ങൾ മട്ടത്രികോണങ്ങളാണോ അല്ലയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(a) 8″, 17″, 15″ (b) 9″, 11″, 13″
(c) 15 സെ.മീ., 20 സെ.മീ., 25 സെ.മീ.
(d) 12 മീ., 13 മീ., 5 മീ. (e) 21 അടി, 25 അടി, 30 അടി.

9. ക്ഷേത്രഗണിതരീതിയിൽ താഴെ കൊട്ടത്തിരിക്കുന്നവയുടെ വില കാണുക.

$\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{13}, \sqrt{15}, \sqrt{17}, \sqrt{41}$

10. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ A യിൽ നിന്നും BC യിലേക്ക് വരച്ചിരിക്കുന്ന ലംബമാണ് AD.

$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

11. ഒരു സമചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം അതിൻെറ കർണ്ണത്തിൻെറ വർഗ്ഗത്തിൻെറ പകുതിയാണെന്നു സമത്ഥിക്കുക. ഈ തത്വം ഉപയോഗിച്ച് കർണ്ണം 24 ഗജമുള്ള ഒരു സമചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുക.

12. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൻെറ കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമാണെങ്കിൽ

$AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

13. PQRS എന്ന ദീർഘചതുരത്തിനകത്തുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് O.

$OP^2 + OR^2 = OQ^2 + OS^2$ എന്നു സമത്ഥിക്കുക.

14. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle B$ ഒരു സമകോണാകുന്നു. BC യിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് S. $AS^2 + BC^2 = AC^2 + BS^2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

15. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle A$ ഒരു സമകോണാകുന്നു. AB യിൽ P എന്നും, AC യിൽ Q എന്നും ഓരോ ബിന്ദുക്കൾ എടുക്കുക. $BQ^2 + CP^2 = PQ^2 + BC^2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

16. PQR എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ ശീർഷങ്ങളിൽ നിന്നും എതിർവശങ്ങളിലേക്ക് PA, QB, RC എന്നീ ലംബങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. $PC^2 + QA^2 + RB^2 = PB^2 + RA^2 + QC^2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

17. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിനകത്തുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് O. O യിൽനിന്നും BC, CA, AB എന്നീ

വശങ്ങളിലേക്കു വരച്ചിരിക്കുന്ന ലംബങ്ങളാണ് OD, OE, OF. $AF^2+BD^2+CE^2=AE^2+CD^2+BF^2$ എന്നു സമൎത്ഥിക്കുക.

18. ABC എന്ന ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശവും 6" വീതമാണ്. A യിൽനിന്നും എതിൎവശത്തേക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ അളവു കണക്കാക്കുക. ഈ അളവുപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീൎണ്ണം കാണുക.

19. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ഓരോ വശവും a ഇഞ്ചു വീതമാണ്. ഏതെങ്കിലും ഒരു ശീൎഷത്തിൽനിന്നും എതിൎവശത്തേക്കു വരയ്ക്കുന്ന ലംബം $a \times \frac{\sqrt{3}}{2}$ ഇഞ്ചാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

20. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle C=90°$, $\angle B=60°$, AB=8." BC, AC എന്നീ ഭുജങ്ങളുടെ അളവു കണക്കാക്കുക. ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീൎണ്ണവും കണ്ടുപിടിക്കുക.

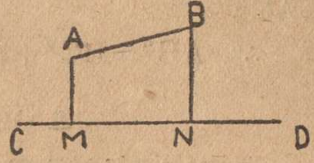
21. DEF എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle D=90°$, $\angle E=30°$, DF=5 സെ.മീ. DE യുടെ അളവു കണക്കാക്കുക.

22. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ ഇരട്ടി വിസ്തീൎണ്ണമുള്ള ഒരു സമചതുരം നിൎമ്മിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു വ്യക്തമാക്കുക.

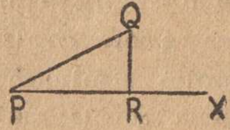
23. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു രേഖയുടെ $\sqrt{2}$ ഇരട്ടിനീളമുള്ള ഒരു രേഖ എങ്ങനെ വരയ്ക്കാമെന്നു വ്യക്തമാക്കുക.

24. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു രേഖയുടെ $\sqrt{3}$ ഇരട്ടിനീളമുള്ള ഒരു രേഖ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു വ്യക്തമാക്കുക.

ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതു പോലെ AB എന്ന നേർ വരയുടെ രണ്ടറ്റത്തുനിന്നും AM BN എന്നീ രേഖകൾ CD യ്ക്കു ലംബമായി വരയ്ക്കുന്നു എന്നു വിചാരിക്കുക. "CD യിൽ AB യുടെ വിക്ഷേപമാണ് MN", എന്നു പറയുന്നു.

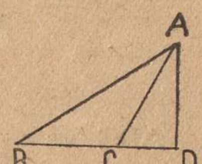


PX രേഖയിൽ PQ ന്റെ വിക്ഷേപം PR ആകുന്നു.



ഉപപാദ്യം 3

ഒരു ബൃഹത്കോണ ത്രികോണത്തിൽ ബൃഹത്കോണ് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഇരുഭുജങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയോട് അവയിൽ ഒരു ഭുജവും അതിന്മേൽ മറേറ ഭുജത്തിന്റെ വിക്ഷേപവും തമ്മിൽ ഗുണിച്ച ഫലത്തിന്റെ ഇരട്ടിയെ കൂട്ടിയാൽ ബൃഹത്കോണിനെ തിരേ കിടക്കുന്ന ഭുജത്തിന്റെ വർഗ്ഗം കിട്ടും.



സങ്കല്പം △ ABC യിൽ ∠C ഒരു ബൃഹത്കോണ്. BC യിൽ AC യുടെ വിക്ഷേപമാണ് CD. അതായതു് BD യ്ക്കു ലംബമാണ് AD.

അനുമാനം $AB^2 = BC^2 + AC^2 + 2BC.CD$

ഉപപത്തി ABD ഒരു മട്ടത്രികോണമായതുകൊണ്ടു്

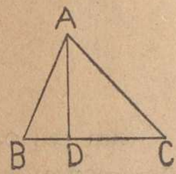
$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$
$$= (BC + CD)^2 + AD^2$$
$$= BC^2 + 2BC \cdot CD + CD^2 + AD^2$$

ACD ഒരു മട്ടത്രികോണമായതുകൊണ്ടു് $CD^2+AD^2 = AC^2$

$\therefore \quad AB^2 = BC^2 + 2BC.CD + AC^2.$

ഉപപാദ്യം 4

ഏതൊരു ത്രികോണത്തിലും ഒരു ന്യൂനകോണ് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുകയിൽനിന്നും അവയിൽ ഒരു ഭുജവും അതിന്മേൽ മറേറ ഭുജത്തിന്റെ വിക്ഷേപവും തമ്മിൽ ഗുണിച്ച ഫലത്തിന്റെ ഇരട്ടിയെ കുറച്ചാൽ ആ ന്യൂനകോണിനെതിരേ കിടക്കുന്ന ഭുജത്തിന്റെ വർഗ്ഗം കിട്ടും.



സങ്കല്പം $\triangle ABC$ യിൽ $\angle C$ ഒരു ന്യൂനകോണാകുന്നു. BC യിൽ AC യുടെ വിക്ഷേപമാണു് CD. അതായതു് BC യ്ക്കു ലംബമാണു് AD.

അനുമാനം $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

ഉപപത്തി ABD ഒരു മട്ടത്രികോണമായതുകൊണ്ടു്

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$
$$= (BC - CD)^2 + AD^2$$
$$= BC^2 - 2BC.CD + CD^2 + AD^2$$

ADC ഒരു മട്ടത്രികോണമായതുകൊണ്ടു്

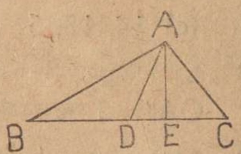
$$AD^2 + CD^2 = AC^2$$
$$\therefore \quad AB^2 = BC^2 - 2BC.CD + AB^2$$

ഉപപാദ്യം 5

(അപ്പൊളോണിയസ്സിന്റെ സിദ്ധാന്തം)

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ഭുജങ്ങളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക മൂന്നാമത്തെ ഭുജത്തിന്റെ പകുതിയുടെ വർഗ്ഗ

വും ആ ഭുജത്തിലേയ്ക്കു വരക്കുന്ന മധ്യമത്തിൻെറ വർഗ്ഗവും കൂട്ടിയ തുകയുടെ ഇരട്ടിയായിരിക്കും.



സങ്കല്പം $\angle ABC$ യിൽ A യിൽ നിന്നും BC എന്ന ഭുജത്തിലേയ്ക്കുള്ള മധ്യമമാണ് AD. അതായതു് BD=DC.

അനുമാനം $AB^2+AC^2=2BD^2+2AD^2$

ക്രിയ BC യ്ക്കു ലംബമായി AE രേഖ വരയ്ക്കുക.

ഉപപത്തി ADB, ADC എന്നീ കോണുകളിൽ ഒന്നു് ബൃഹത്‌കോണും മറേറതു് ന്യൂനകോണുമായിരിക്കും. $\angle ADB$ ബൃഹത്‌കോണും $\angle ADC$ ന്യൂനകോണും ആണെന്നിരിക്കട്ടെ.

$\angle ADB$ ബൃഹത്‌കോണായതുകൊണ്ടു്

$$AB^2=AD^2+BD^2+2BD.DE$$

$\angle ADC$ ന്യൂനകോണായതുകൊണ്ടു്

$$AC^2=AD^2+CD^2-2CD.DE$$

$$\therefore \quad AB^2+AC^2=AD^2+BD^2+2BD.DE+AD^2+CD^2-2CD.DE$$

BD=CD ആയതുകൊണ്ടു്

$$AB^2+AC^2=2AD^2+2BD^2$$

അഭ്യാസം 2

1. താഴെപ്പറയുന്ന വശങ്ങളോടു കൂടിയ ത്രികോണങ്ങളിൽ ബൃഹത്‌കോണത്രികോണങ്ങൾ ഏവയെന്നും, സമകോണത്രികോണങ്ങൾ ഏവയെന്നും കണ്ടുപിടിക്കുക.

(a) 3, 4, 6 (b) 4, 5, 4

(c) 12, 13, 5 (d) 2, 3, 5 (e) 2, 3, 4

2. ഉപപാദ്യം 3-ലെ ചിത്രത്തിൽ $AB=4''$, $BC=3''$, $CA''=2$ ആയാൽ CD യുടെ അളവു കണക്കാക്കുക.

3. ഉപപാദ്യം 4-ലെ ചിത്രത്തിൽ $AB=4''$, $BC=6''$, $AC=5''$ ആയാൽ CD യുടെ അളവു കാണുക. അതിനു ശേഷം AD യുടെ അളവു കാണുക. ഈ അളവുപയോഗിച്ച് $\triangle ABC$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കുക.

4. PQR എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle Q=60°$, $PQ=4''$, $QR=5''$ ആയാൽ PR ൻെറ അളവു കണക്കാക്കുക.

5. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle B=120°$, $AB=10$ സെ.മീ, $BC=8$ സെ.മീ. AC യുടെ അളവു കണക്കാക്കുക.

6. ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ ഭുജങ്ങളുടെ അളവുകൾ 4 സെ.മീ, 5 സെ.മീ, 6 സെ.മീ. വീതമാകുന്നു. അതിൻെറ മൂന്നു മധ്യമങ്ങളുടേയും അളവുകൾ കണക്കാക്കുക.

7. ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ പാർശ്വങ്ങൾ $6''$, $12''$. പാദത്തിലേക്കുള്ള മധ്യമം $9''$. പാദത്തിൻെറ അളവു കണക്കാക്കുക.

8. ഒരു സാമാന്തരികത്തിൻെറ രണ്ടു സമീപവശങ്ങൾ $4''$, $5''$ ആകുന്നു. അതിൻെറ ഒരു കർണ്ണം $6''$ ആയാൽ മററേ കർണ്ണത്തിൻെറ അളവുകാണുക.

9. PQR ഒരു സമഭുജത്രികോണം. $RS=QR$ ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം QR നെ S ലേക്കു നീട്ടുക. $PS^2=3PQ^2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

10. $\triangle ABC$ യിൽ $AB=AC$. C യിൽനിന്നും AB യിലേക്കുള്ള ലംബമാണ് CD. $BC^2=2AB.BD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

11. ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ നാലു ഭുജങ്ങളുടേയും വർഗ്ഗത്തിന്റെ തുക അതിന്റെ കർണ്ണങ്ങളുടെ വർഗ്ഗത്തിന്റെ തുകയ്ക്കു തുല്യമാണ്.

12. $\triangle$ ABC യിൽ C യിൽനിന്നും AB യ്ക്കുള്ള ലംബമാണ് CF. B യിൽനിന്നും AC യ്ക്കുള്ള ലംബമാണ് BE. $AF.AB = AE.AC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

13. $\triangle PQR$ ൽ $PQ=PR$. $QS=PQ$ ആകത്തക്കവണ്ണം PQ നെ S ലേക്കു നീട്ടുക. $RS^2=PQ^2+2QR^2$ എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

14. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ മദ്ധ്യമങ്ങളാണ് AD, BE, CF. $4(AD^2+BE^2+CF^2) = 3(AB^2+BC^2+CA^2)$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

15. ABCD ഒരു ചതുർഭുജം. AC, BD എന്നീ കർണ്ണങ്ങളുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുക്കളാകുന്നു X, Y. $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4XY^2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

16. ത്രികോണം ABC യിൽ CB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു D യും, CA യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദു E യും ആകുന്നു. $4(AD^2-BE^2) = 3(CA^2-CB^2)$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

<u>ബിന്ദുപഥം</u> ഏതെങ്കിലും ക്ഷേത്രഗണിത നിബന്ധനകൾക്കു വിധേയമായി ഒരു ബിന്ദു സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന രേഖയ്ക്കു് ആ ബിന്ദുവിന്റെ സഞ്ചാരപഥമെന്നോ ബിന്ദുപഥമെന്നോ പറയുന്നു. A എന്ന ഒരു സ്ഥിരബിന്ദുവിൽനിന്നും 3" അകലത്തിലായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം P എന്ന ഒരു ചരബിന്ദു സഞ്ചരിക്കുന്നു എന്നു വിചാരിക്കുക. P യുടെ സഞ്ചാരപഥം, അഥവാ ബിന്ദുപഥം, A കേന്ദ്രമായി 3" വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ഒരു വൃത്തമായിരിക്കും.

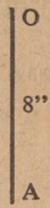
അഭ്യാസം 3

താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ ബിന്ദുപഥം നിർണ്ണയിക്കുക.

1. ഒരു ഘടികാരത്തിൻെറ മിനിട്ടുസൂചിയുടെ അഗ്രബിന്ദു.
2. 4″ അകലത്തിലുള്ള രണ്ടു സമാന്തരരേഖകളിൽ ഓരോന്നിൽ നിന്നും 2″ അകലത്തിലായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദു.
3. തറയിലുള്ള ഒരു നേർവരയിൽക്കൂടി ഉരുണ്ടുപോകുന്ന ഒരു ചക്രത്തിൻെറ കേന്ദ്രബിന്ദു.
4. സ്ഥിരമായ ഒരു വൃത്തത്തിനെ സ്പർശിച്ചുകൊണ്ട് അതിൻെറ വെളിയിലായി സഞ്ചരിക്കുന്ന മററൊരു വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രബിന്ദു.
5. സ്ഥിരമായ ഒരു രേഖയിൽനിന്നും 1″ അകലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദു.

ബിന്ദുപഥം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിൽ രണ്ടുതരം തെററു വരാവുന്നതാണ്. ചിലപ്പോൾ നാം നിർണ്ണയിക്കുന്ന ബിന്ദുപഥം യഥാർത്ഥ ബിന്ദുപഥത്തിൻെറ ഒരു ഭാഗം മാത്രമാണെന്നു വരാം. ഉദാഹരണമായി AB എന്ന ഒരു സ്ഥിരരേഖയിൽനിന്നും 1″ അകലത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളുടെ ബിന്ദുപഥം AB യിൽനിന്നും 1″ അകലത്തിൽ AB യ്ക്കു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന ഒരു രേഖയാണെന്നു നാം നിർണ്ണയിച്ചു എന്നിരിക്കട്ടെ. AB യിൽനിന്നും 1″ അകത്തിൽ AB യുടെ ഇരുവശങ്ങളിലും വരയ്ക്കുന്ന സമാന്തരരേഖകളാണ് യഥാർത്ഥ ബിന്ദുപഥമെന്നതുകൊണ്ട് നാം നിർണ്ണയിച്ച ബിന്ദുപഥം യഥാർത്ഥ ബിന്ദുപഥത്തിൻെറ ഒരു ഭാഗം മാത്രമാണ്.

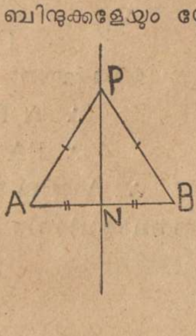
ചിലപ്പോൾ നാം നിർണ്ണയിച്ച ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം മാത്രമാണ് യഥാർത്ഥ ബിന്ദുപഥമെന്നും വരാം. ഉദാഹരണമായി 8" നീളമുള്ള OA എന്ന ഒരു ദോലകത്തിന്റെ (pendulam) അഗ്രബിന്ദുവായ A യുടെ ബിന്ദുപഥം O, കേന്ദ്രമായി 8" വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തമാണെന്ന് നാം നിർണ്ണയിച്ചു എന്നിരിക്കട്ടെ, ഈ വൃത്തം മുഴുവൻ A യുടെ സഞ്ചാരപഥത്തിൽ ഉൾപ്പെടുന്നില്ല എന്നതു വ്യക്തമായതുകൊണ്ട് നാം നിർണ്ണയിച്ച ബിന്ദുപഥത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം മാത്രമാണ് യഥാർത്ഥ ബിന്ദുപഥം.



മേൽവിവരിച്ച രീതിയിലുള്ള രണ്ടുതരം തെററു വരാതിരിക്കുന്നതിന് ഏതെങ്കിലും രേഖയോ രേഖകളോ ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥമാണെന്നു സമർത്ഥിക്കുന്നതിന് നാം രണ്ടു കാര്യങ്ങൾ തെളിയിക്കേണ്ടതാണ്. (1) നിബന്ധനയ്ക്കു വിധേയമായി സഞ്ചരിക്കുന്ന ഏതൊരു ബിന്ദുവും ആ രേഖയിലോ രേഖകളിലോ സ്ഥിതിചെയ്യും. (2) ആ രേഖയിലോ രേഖകളിലോ ഉള്ള ഏതൊരു ബിന്ദുവും നിബന്ധനയെ അനുസരിക്കും.

ഉപപാദ്യം 6

രണ്ടു സ്ഥിരബിന്ദുക്കളിൽനിന്നും തുല്യ അകലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ പഥം ആ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളേയും യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർവരയുടെ മദ്ധ്യലംബമാണ്.



(i) സങ്കല്പം. A, B ഇവ രണ്ടു സ്ഥിര ബിന്ദുക്കൾ. A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നും തുല്യ അകലത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് P.

അനുമാനം. AB യുടെ മദ്ധ്യലംബത്തിലാണ് P സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതു്.

ക്രിയ. AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവായ N കണ്ടുപിടിച്ച് PN യോജിപ്പിക്കുക.

ഉപപത്തി. PAN, PBN എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

$PA = PB$ (സങ്കല്പം)

$AN = NB$ (ക്രിയ)

PN പൊതുവശം

$\therefore \triangle PAN \equiv \triangle PBN$

$\therefore \angle PNA = \angle PNB$

ഈ കോണുകളുടെ തുക 180° ആയതിനാൽ ഇവ ഓരോന്നും 90° വീതമാണ്. അതായതു് PN രേഖ AB യുടെ മദ്ധ്യലംബമാകുന്നു. അതായതു് P എന്ന ബിന്ദു AB യുടെ മദ്ധ്യലംബത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

(ii) സങ്കല്പം. A, B രണ്ടു സ്ഥിരബിന്ദുക്കൾ. AB യുടെ മദ്ധ്യലംബമായ PN രേഖയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് P.

അനുമാനം. $PA = PB$

ഉപപത്തി. PAN, PBN എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

$AN = NB$ (സങ്കല്പം)

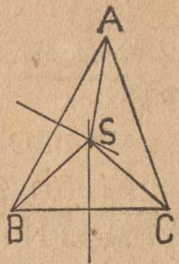
PN പൊതുഭുജം

ഉൾക്കോണ് PNA = ഉൾക്കോണ് PNB (90° വീതം)

$\therefore \triangle PAN \equiv \triangle PBN$

$\therefore PA = PB$

$\therefore$ A യിൽ നിന്നും B യിൽനിന്നും തുല്യ അകലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥം AB യുടെ മദ്ധ്യലംബമാണ്.



നിർമ്മിതി തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ പരിവൃത്തം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു വ്യക്തമാക്കുക.

സങ്കല്പം ABC ഒരു ത്രികോണം.

നിർമ്മിക്കേണ്ടതു് △ABC യുടെ പരിവൃത്തം.

ക്രിയ BC, AB എന്നീ രേഖകളുടെ മധ്യലംബങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. അവ S എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കട്ടെ. S കേന്ദ്രമായും SA വ്യാസാർദ്ധമായും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ആ വൃത്തം B, C എന്നീ മൂലകളിൽക്കൂടി പോകുന്നതാണു്.

ഉപപത്തി S എന്ന ബിന്ദു BC യുടെ മധ്യലംബത്തിലാകയാൽ SB=SC.

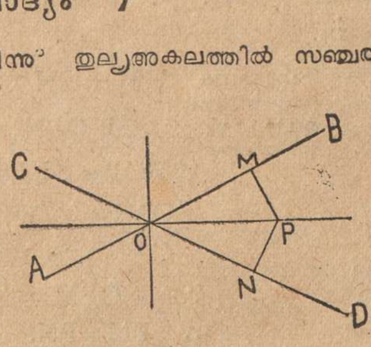
S എന്ന ബിന്ദു AB യുടെ മധ്യലംബത്തിലാകയാൽ

SB=SA. ∴ SA=SB=SC.

അതായതു് S കേന്ദ്രമാക്കി SA വ്യാസാർദ്ധമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നതാണു്.

ഉപപാദ്യം 7

രണ്ടു ഋജുരേഖകളിൽനിന്നു് തുല്യഅകലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിൻെറ പഥം ആ രേഖകൾക്കുള്ളിലുള്ള കോണുകളുടെ സമഭാജികളായിരിക്കും.



(i) സങ്കല്പം AB, CD എന്നീ ഋജുരേഖകൾ O എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു.

ഈ രേഖകളിൽനിന്നും തുല്യഅകലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് P. അതായതു് PM, PN എന്നീ ലംബങ്ങൾ തുല്യം.

<u>അനുമാനം</u> $\angle BOD$ യുടെ സമഭാജിയിലാണ് P കിടക്കുന്നതു്.

<u>ക്രിയ</u> PO യോജിപ്പിക്കുക.

<u>ഉപപത്തി</u> OPM, OPN എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ $PM = PN$ (സങ്കല്പം)

OP പൊതുകർണ്ണം.

$\therefore \triangle OPM \equiv \triangle OPN$

$\therefore \angle POM = \angle PON$

അതായതു് $\angle BOD$ യുടെ സമഭാജിയിലാണ് P സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതു്.

P യുടെ സ്ഥാനം $\angle COB$, $\angle AOD$ എന്നീ കോണുകൾക്കകത്തായാൽ ഇവയുടെ സമഭാജിയിലാണ് P സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതെന്നു തെളിയിക്കാം.

(ii) <u>സങ്കല്പം</u> AB, CD എന്നീ നേർവരകൾ O യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle BOD$ യുടെ സമഭാജിയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് P. PM, PN ഇവ AB, CD രേഖകൾക്കു ലംബം.

<u>അനുമാനം</u> $PM = PN$

<u>ഉപപത്തി</u> OPM; OPN എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

$\angle MOP = \angle NOP$ (സങ്കല്പം)

$\angle OMP = \angle ONP$ (90° വീതം)

OP പൊതുഭുജം.

$\therefore \triangle OPM \equiv \triangle OPN$

$\therefore PM = PN.$

∴ AB, CD എന്നീ രേഖകളിൽനിന്നും തുല്യഅകലത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ബിന്ദുവിൻെറ പഥം ഈ രേഖകൾക്കിടയ്ക്കുള്ള കോണുകളുടെ സമഭാജികളാകുന്നു.

അഭ്യാസം 4.

1. 70° കോണിൽ സന്ധിക്കുന്ന AB, CD എന്ന രണ്ടു ഋജുരേഖകൾ വരയ്ക്കുക. AB യിൽനിന്നും 2 സെ.മീ. അകലത്തിലും CD യിൽനിന്നും 3 സെ.മീ. അകലത്തിലുമുള്ള ഒരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇത്തരത്തിൽ എത്ര ബിന്ദുക്കൾ കിട്ടും?

2. ഒരു ഋജുരേഖ വരച്ച് അതിൽ A എന്ന ഒരു ബിന്ദു എടുക്കുക. A യിൽനിന്നും 2″ അകലത്തിലും രേഖയിൽനിന്നും 1″ അകലത്തിലും സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇപ്രകാരമുള്ള എത്ര ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

3. 2″ നീളത്തിൽ AB എന്ന ഒരു ഋജുരേഖ വരയ്ക്കുക. A യിൽനിന്നും 1″ അകലത്തിലും B യിൽനിന്നും 2″ അകലത്തിലുമുള്ള ഒരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇത്തരത്തിൽ എത്ര ബിന്ദുക്കൾ കിട്ടും?

4. 45° അളവുള്ള AOB എന്ന ഒരു കോണുവരയ്ക്കുക. OP = 2″ ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം OA യിൽ P എന്ന ഒരു ബിന്ദു എടുക്കുക. P യിൽനിന്നും 1″ അകലത്തിലും OA, OB എന്നീ രേഖകളിൽനിന്നും തുല്യഅകലത്തിലും സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക.

5. ABC എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. AB, AC എന്നീ ഭുജങ്ങളിൽനിന്നും തുല്യഅകലത്തിൽ BC യിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക.

6. AB=2", BC=2·5", CA=3" ഉള്ള ABC എന്ന ത്രികോണം വരയ്ക്കുക. CA, CB എന്നീ ഭുജങ്ങളിൽനിന്നും തുല്യഅകലത്തിലും AB യിൽനിന്നും 1" അകലത്തിലുമുള്ള ഒരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക. ഇത്തരത്തിൽ എത്ര ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കാം.

7. മുൻചോദ്യത്തിലെ ത്രികോണത്തിൽ PA=PB ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണവും CA, CB എന്നീ ഭുജങ്ങളിൽനിന്നും തുല്യഅകലത്തിലും സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന P എന്ന ഒരു ബിന്ദു കണ്ടുപിടിക്കുക.

8. 2" അകലത്തിൽ A, B എന്ന രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ എടുക്കുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി കടന്നുപോകത്തക്കവണ്ണം $1\frac{1}{2}$ ഇഞ്ച് വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

9. ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ മൂന്നു ഭുജങ്ങളുടേയും മധ്യലംബങ്ങൾ ഒരേ ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നുപോകുമെന്നു സ്ഥാപിക്കുക.

10. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദു ത്രികോണത്തിൻെറ മൂന്നു ഭുജങ്ങളിൽനിന്നും തുല്യഅകലത്തിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക. ഇതിൽനിന്നും ഒരു ത്രികോണത്തിലെ മൂന്നു കോണുകളുടേയും സമഭാജികൾ ഒരേ ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നുപോകുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

11. ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു മൂലകളിലെ ബാഹ്യകോണുകളുടെ സമഭാജികളും മൂന്നാമത്തെ മൂലയിലെ ആന്തരകോണിൻെറ സമഭാജിയും ഒരേ ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നുപോകുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

12. ABCD ഒരു ചതുർഭുജം. ഒരേ കേന്ദ്രം ഉപയോഗിച്ച് A,B എന്നീ മൂലകളിൽകൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തവും, C,D

എന്നീ മൂലകളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തവും വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു വ്യക്തമാക്കുക.

13. AB, CD ഇവ നീട്ടിയാൽ തമ്മിൽ സന്ധിക്കുന്ന രണ്ടു നേർവരകളാണു്. ഇവ സന്ധിപ്പിക്കാതെ ഇവയുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള കോണിന്റെ സമഭാജി വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു വ്യക്തമാക്കുക.

14. A, B ഇവ രണ്ടു സ്ഥിരബിന്ദുക്കളാണു്. PAB എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ക്ലിപ്തമായിരിക്കത്തക്കവണ്ണം P എന്ന ഒരു ബിന്ദു സഞ്ചരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ P യുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

15. AB എന്നതു് ഒരു സ്ഥിരരേഖയും O എന്നതു് അതിനു വെളിയിലുള്ള ഒരു സ്ഥിരബിന്ദുവുമാണു്. P എന്ന ഒരു ബിന്ദു AB രേഖയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു എങ്കിൽ OP രേഖയുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥം കണ്ടുപിടിക്കുക.

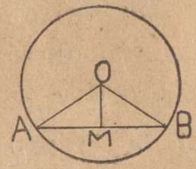
16. A, B ഇവ രണ്ടു സ്ഥിരബിന്ദുക്കളാണു്. PAQB ഒരു സാമാന്തരികമാണു്. ഈ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിനു മാററംവരാതെ P സഞ്ചരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ P യുടെ ബിന്ദുപഥം കണ്ടുപിടിക്കുക.

17. A, B എന്നിവ സ്ഥിരബിന്ദുക്കളാണു്. $AP^2 + PB^2$ എന്ന അളവിനു് വ്യത്യാസം വരാതെ P എന്ന ഒരു ബിന്ദു സഞ്ചരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ P യുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

18. ഒരു വൃത്തത്തിനു വെളിയിലുള്ള ഒരു സ്ഥിരബിന്ദുവാണു് O. P എന്ന ഒരു ബിന്ദു വൃത്തപരിധിയിൽക്കൂടി സഞ്ചരിക്കുകയാണെങ്കിൽ OP യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിന്റെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

ഉപപാദ്യം 8.

ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും ആ വൃത്തത്തിലുള്ള ഒരു ഞാണിനു ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന നേർവര ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യും.



<u>സങ്കല്പം</u> O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണാകുന്നു AB. AB യ്ക്കു ലംബമായി OM വരച്ചിരിക്കുന്നു.

<u>അനുമാനം</u> AM=MB

<u>ക്രിയ</u> OA, OB ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

<u>ഉപപത്തി</u> OAM, OBM എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ

കർണ്ണം OA=കർണ്ണം OB (വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസാർദ്ധം)

OM പൊതുഭുജം

∴ $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$

∴ AM=MB

ഉപപാദ്യം 9

(ഉപപാദ്യം 8-ൻെറ വിപരീതം)

ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും ആ വൃത്തത്തിലുള്ള ഒരു ഞാണിനെ സമഭാഗം ചെയ്യത്തക്കവണ്ണം വരയ്ക്കുന്ന രേഖ ഞാണിനു ലംബമായിരിക്കും.

<u>സങ്കല്പം</u> (ഉപപാദ്യം 8-ലെ ചിത്രം നോക്കുക) O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണാകുന്നു AB. AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് M.

<u>അനുമാനം</u> OM രേഖ AB യ്ക്കു ലംബമാണ്.

<u>ക്രിയ</u> OA, OB ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

<u>ഉപപത്തി</u> OAM, OBM എന്നീ ത്രികോണങ്ങളിൽ

AM=MB (സങ്കല്പം)

OA=OB (വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ)

OM പൊതുഭുജം

$\therefore$ $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$ (മൂന്നു ഭുജങ്ങൾ തുല്യം)

$\therefore$ $\angle OMA = \angle OMB$

ഈ കോണുകളുടെ തുക $180°$ ആയതുകൊണ്ടു് ഓരോന്നും $90°$ വീതമാണു്. അതായതു് OM രേഖ AB യ്ക്കു ലംബം.

അഭ്യാസം 5

1. 10 ഇഞ്ചു വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൽ 8 ഇഞ്ചു നീളമുള്ള ഒരു ഞാൺ വരച്ചിരിക്കുന്നു. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും ഞാണിലേക്കുള്ള അകലം കണക്കാക്കുക.

2. 8" നീളമുള്ള ഒരു ഞാൺ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും 3" അകലെയായാൽ വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസാർദ്ധമെന്തു്?

3. 13 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള വൃത്തത്തിൻെറ ഒരു ഞാൺ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും 5 സെ.മീ. അകലെയായാൽ ഞാണിൻെറ നീളംകാണുക.

4. 5 സെ.മീ. അകലത്തിൽ A, B എന്നു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ എടുക്കുക. A യിലും B യിലുംകൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഏതെങ്കിലും മൂന്നു വൃത്തങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

5. 4 സെ.മീ. അകലത്തിൽ A, B എന്നു രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ എടുക്കുക. A യിലും B യിലുംകൂടി കടന്നുപോകത്തക്കവണ്ണം 3 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

6. 10 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ സമാന്തരങ്ങളായ രണ്ടു ഞാണുകളുടെ നീളം 12 സെ.മീ., 16 സെ.മീ. ആകുന്നു. ഞാണുകൾ തമ്മിലുള്ള അകലം കണക്കാക്കുക.

7. രണ്ട് ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ 3 സെ.മീ., 5 സെ.മീ. ABCD എന്ന ഒരു നേർവര പുറത്തെ വൃത്തത്തെ A, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും അകത്തെ വൃത്തത്തെ B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും ഖണ്ഡിക്കുന്നു. BC=2 സെ.മീ. ആയാൽ AB യുടെ അളവുകാണുക.

8. രണ്ടു സ്ഥിരബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

9. രണ്ട് ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങളിൽ പുറത്തെ വൃത്തത്തിൻെറ AB എന്ന ഞാൺ അകത്തെ വൃത്തത്തെ C,D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AC=DB എന്നു തെളിയിക്കുക.

10. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരിധിയിലുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാണ് P, Q. വൃത്തത്തിനു വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് O. OP=OQ ആയാൽ ∠POQ ൻെറ സമഭാജി വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടി പോകുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

11. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണാകുന്നു AB. A യിൽനിന്നും B യിൽനിന്നും തുല്യഅകലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് C. OC രേഖ ∠ACB യുടെ സമഭാജിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

12. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ C യും D യും ആയാൽ CD രേഖ AB യുടെ മധ്യലംബമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

13. A, B ഇവ കേന്ദ്രങ്ങളായുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AB യ്ക്കു സമാന്തരമായി

C യിൽക്കൂടി വരച്ചിട്ടുള്ള PCQ എന്ന രേഖ വൃത്തങ്ങളെ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. PQ=2AB എന്നു തെളിയിക്കുക.

14. A, B കേന്ദ്രമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. ഇതിൽ ഒരു വൃത്തത്തിലുള്ള EF എന്ന ഒരു ഞാൺ CD യ്ക്കു സമാന്തരമായാൽ AB രേഖ EF നെ സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

15. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിൽ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ പരസ്പരം P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. OP രേഖ ∠APC യെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ AB=CD എന്നു തെളിയിക്കുക.

16. ഒരു സമഭുജത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ 8" വീതമാകുന്നു. ഇതിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക.

17. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ AB=AC=13 സെ.മീ. BC=10 സെ.മീ. ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക.

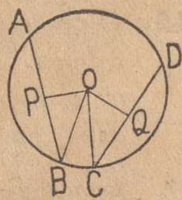
18. ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ AB എന്ന ഞാണിന്റെ നീളം 6" ആകുന്നു. AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവായ C യിൽക്കൂടി AB യ്ക്കു ലംബമായി വരച്ചിരിക്കുന്ന രേഖ വൃത്തത്തെ D എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. CD=1" ആയാൽ വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം കാണുക.

19. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ X, Y എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. PXQ എന്ന രേഖ വൃത്തങ്ങളെ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. PXQ ന് സമാന്തരമായി വരച്ചിട്ടുള്ള RYS എന്ന രേഖ വൃത്തങ്ങളെ R S എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. PQ=RS എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

20. 3″, 4″ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ AB, എന്നീ ബിന്ദു
ക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. വൃത്തകേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അക
ലം 5″ ആയാൽ AB യുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

ഉപപാദ്യം 10

ഒരു വൃത്തത്തിലെ തുല്യമായ ഞാണുകളെല്ലാം വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നും തുല്യമായ അകലത്തിലായിരിക്കും.



<u>സങ്കല്പം</u> O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൽ തുല്യമായ രണ്ടു ഞാണുകളാണ് AB യും CD യും.

OP രേഖ AB യ്ക്കു ലംബം.

OQ രേഖ CD യ്ക്കു ലംബം.

<u>അനുമാനം</u> OP = OQ

<u>ക്രിയ</u> OB, OC ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

<u>ഉപപത്തി</u> OP രേഖ AB എന്ന ഞാണിനു ലംബമായതുകൊണ്ട് ഈ രേഖ AB യെ സമഭാഗംചെയ്യുന്നു.

അതായതു് AP = PB

$\therefore$ PB = $\frac{1}{2}$AB

അതുപോലെ CQ = $\frac{1}{2}$ CD

എന്നാൽ AB = CD (സങ്കല്പം)

$\therefore$ PB = CQ

OPB, OQC എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ

കർണ്ണം OB = കർണ്ണം OC (വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ)

PB = CQ (തെളിയിച്ചു)

$\therefore \triangle OPB \equiv \triangle OQC$

$\therefore OP = OQ$.

ഉപപാദ്യം 11.

(ഉപപാദ്യം 10-ൻെറ വിപരീതം)

ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു തുല്യമായ അകലത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ഞാണുകളെല്ലാം തുല്യമായിരിക്കും.

സങ്കല്പം (ഉപപാദ്യം 10-ലെ ചിത്രം നോക്കുക)

O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു ഞാണുകളാണ് AB യും, CD യും.

OP രേഖ AB യ്ക്കു ലംബം.

OQ രേഖ CD യ്ക്കു ലംബം.

$OP = OQ$

അനുമാനം $AB = CD$

ക്രിയ OB, OC ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

ഉപപത്തി OPB, OQC എന്നീ മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ

കർണ്ണം $OB =$ കർണ്ണം OC (വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ)

$OP = OQ$ (സങ്കല്പം)

$\therefore \triangle OPB \equiv \triangle OQC$

$\therefore PB = CQ$

OP രേഖ AB യ്ക്കു ലംബമാകയാൽ

$AP = PB$

$\therefore PB = \frac{1}{2} AB$

അതുപോലെ $CQ = \frac{1}{2} CD$

$PB = CQ$ ആയതിനാൽ

$\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} CD$

$\therefore AB = CD$

അഭ്യാസം 6

1. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തത്തിൽ ഒരു നിശ്ചിതഅളവിലുള്ള എത്ര ഞാണുകൾ വരയ്ക്കാം. ഈ ഞാണുകളുടെയെല്ലാം മധ്യ ബിന്ദുവിൻെറ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

2. A, B ഇവ കേന്ദ്രമായ രണ്ടു തുല്യവൃത്തങ്ങൾ X, Y എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. XY യുടെ മധ്യബിന്ദുവിൽ കൂടി വരച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു നേർവര ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തെ C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും രണ്ടാമത്തെ വൃത്തത്തെ E, F എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും ഖണ്ഡിക്കുന്നു. CD = EF എന്നു തെളിയിക്കുക.

3. തുല്യമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളാണ് A, B. AB യ്ക്കു സമാന്തരമായ ഒരു നേർവര ആദ്യത്തെ വൃത്തത്തെ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും രണ്ടാമത്തെ വൃത്തത്തെ R, S എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും ഖണ്ഡിക്കുന്നു. PQ = RS എന്നു തെളിയിക്കുക.

4. ഒരു വൃത്തത്തിലെ തുല്യനീളമുള്ള AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AP രേഖ ഒന്നുകിൽ CP യോടോ അല്ലെങ്കിൽ PD യോടോ തുല്യമാണെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

5. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിലെ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle APO = \angle CPO$ ആയാൽ AB = CD എന്നു തെളിയിക്കുക.

6. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിലെ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AB = CD ആയാൽ OP രേഖ ഈ ഞാണുകൾക്കിടയ്ക്കുള്ള ഒരു കോണിൻെറ സമഭാജിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

7. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിനകത്ത് P എന്ന ഒരു ബിന്ദു തന്നിരിക്കുന്നു. P യിൽകൂടി വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കാവുന്ന

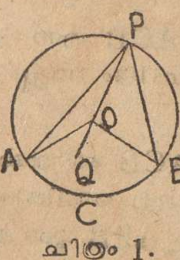
ഞാണുകളിൽവച്ച് ഏററവും ചെറുത് OP യ്ക്കു ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന ഞാണാകുന്നു എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

8. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണാകുന്നു CD. ഈ വൃത്തത്തിനകത്തുവച്ച് CD യെ ഖണ്ഡിക്കാത്ത ഒരു വ്യാസമാണ് AB. AP, BQ ഇവ CD യ്ക്കു ലംബമായി വരച്ചിരിക്കുന്നു. AB എന്ന വ്യാസം വൃത്തത്തിൽ എവിടെ വരച്ചാലും AP+BQ എന്ന അളവിന് മാററം വരുന്നതല്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

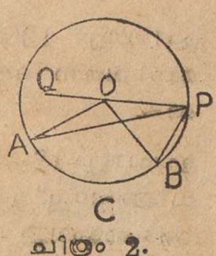
ഒരു വൃത്തത്തിൽ ഒരു ഞാൺ വരച്ചാൽ ആ വൃത്തം രണ്ടു വൃത്തഖണ്ഡങ്ങളായി (segments) വേർതിരിക്കപ്പെടുന്നു. ഇതിൽ വലിയ വൃത്തഖണ്ഡത്തെ ഗുരുവൃത്തഖണ്ഡം (major segment) എന്നും ചെറുതിനെ ലഘുവൃത്തഖണ്ഡം (minor segment) എന്നും പറയുന്നു. ഗുരുവൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ ചാപത്തിന് ഗുരുചാപം (major arc) എന്നും, ലഘുവൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ ചാപത്തിന് ലഘുചാപം (minor arc) എന്നും പറയുന്നു.

ഉപപാദ്യം 12

ഒരു ചാപം വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണ് ശേഷമുള്ള പരിധിയിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണിൻെറ ഇരട്ടിയായിരിക്കും.



ചിത്രം 1.



ചിത്രം 2.

<u>സങ്കല്പം</u> O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലെ ഒരു ചാപമാണ് ACB. ശേഷമുള്ള പരിധിയിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് P.

ചാപം, കേന്ദ്രത്തിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണ് AOB യും, P യിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണ് APB യും ആകുന്നു.

അനുമാനം $\angle AOB = 2\angle APB$.

ക്രിയ PO യോജിപ്പിച്ചു Q വിലേക്കു നീട്ടുക.

ഉപപത്തി AOP എന്ന ത്രികോണത്തിൽ

$$OP = OA \text{ (വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ)}$$

$$\therefore \quad \angle OPA = \angle OAP$$

$\triangle AOP$ യുടെ ഒരു ബാഹ്യകോണാകുന്നു $\angle AOQ$.

$$\therefore \quad \angle AOQ = \angle OPA + \angle OAP$$
$$= 2\angle OPA$$

അതുപോലെ $\angle BOQ = 2\angle OPB$

ചിത്രം (i) ൽ

$$\angle AOQ + \angle BOQ = 2\angle OPA + 2\angle OPB$$

അതായതു് $\angle AOB = 2\angle APB$

ചിത്രം (ii) ൽ

$$\angle BOQ - \angle AOQ = 2\angle OPB - 2\angle OPA$$

അതായതു് $\angle AOB = 2\angle APB$.

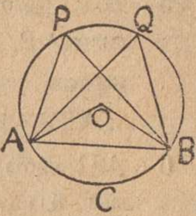
അഭ്യാസം 7

1. ഉപപാദ്യം 12-ൽ ACB എന്ന ചാപം ഒരു ഗുരുചാപമായി വരുന്ന ഒരു ചിത്രം വരച്ചു് ഉപപാദ്യം തെളിയിക്കുക.

2. ഉപപാദ്യം 12-ൽ ACB ഒരു അർദ്ധവൃത്തമായി വരുന്ന ഒരു ചിത്രം വരച്ചു് ഉപപാദ്യം തെളിയിക്കുക. ഇതിൽ $\angle AOB$ യുടെ അളവെന്തു്. $\angle APB$ യുടെ അളവെന്തു്.

ഉപപാദ്യം 13

ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണുകളെല്ലാം തുല്യമായിരിക്കും



സങ്കല്പം AB എന്ന ഞാണിന്മേൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന APQB എന്ന വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാണ് P, Q. വൃത്തകേന്ദ്രം O.

അനുമാനം $\angle APB = \angle AQB$.

ക്രിയ AO, OB ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

ഉപപത്തി ACB എന്ന ചാപം കേന്ദ്രത്തിൽ AOB എന്ന കോണും, പരിധിയിൽ APB എന്ന കോണും സമ്മുഖമാക്കുന്നതുകൊണ്ടു്

$$\angle AOB = 2\angle APB$$

അതുപോലെ $\angle AOB = 2\angle AQB$

$$\therefore \angle APB = \angle AQB.$$

അനുസിദ്ധാന്തം ഒരു അർദ്ധവൃത്തത്തിലെ ഏതൊരു കോണും സമകോണായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 8

1. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിനകത്തു് അന്തർലിഖിതം ചെയ്തിരിക്കുന്ന (inscribed) ഒരു ത്രികോണമാണ് ABC $\angle AOC = 140°$, $\angle BOC = 100°$ ആയാൽ $\angle ACB$ കണക്കാക്കുക.
2. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരസ്പരം ലംബമായിട്ടുള്ള രണ്ടു ഞാണുകളാണ് PQ, RS. $\angle QPR = 40°$ ആയാൽ $\angle PQS$ ൻെറ അളവെന്തു്?
3. ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $AB = AC = AD$ $\angle BAD = 110°$ ആയാൽ $\angle BCD$ യുടെ അളവെന്തു്?

4. AB, CD എന്നീ രണ്ടു ഞാണുകൾ നീട്ടുമ്പോൾ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു. $\angle PAD = 42°$, $\angle APD = 53°$ ആയാൽ $\angle PBC$ യുടെ അളവു കാണുക.

5. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ BC യിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് P. D, E എന്നിവ ABP, ACP എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരികേന്ദ്രങ്ങൾ ആകുന്നു. $\angle ADP = 80°$, $\angle AEP = 110°$ ആയാൽ $\angle BAC$ കാണുക.

6. AB എന്ന ഞാണിന്മേൽ നില്ക്കുന്ന ഒരു വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ ചാപത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് P. ചാപത്തിൽ P യുടെ സ്ഥാനം എവിടെയായാലും $\angle PAB + \angle PBA$ എന്ന അളവിനു വ്യത്യാസം വരുന്നതല്ലെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

7. ഒരു വൃത്തത്തിലെ സമാന്തരങ്ങളായ രണ്ടു ഞാണുകളാകുന്നു AB യും CD യും. AD യും BC യും O എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. OA = OB എന്നു തെളിയിക്കുക.

8. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. A യിൽക്കൂടി വരച്ചിരിക്കുന്ന PAQ എന്ന നേർവര വൃത്തങ്ങളെ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. PAQ എന്ന രേഖയുടെ സ്ഥാനം മാറിയാലും PBQ എന്ന കോണിന്റെ അളവിനു മാററമില്ലെന്നു തെളിയിക്കുക.

9. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. A യിൽക്കൂടിയുള്ള PAQ എന്ന നേർവര വൃത്തങ്ങളെ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും, CAD എന്ന നേർവര, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle PBC = \angle DBQ$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

10. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണാകുന്നു AB. OA വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽക്കൂടി പോകുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

11. ഒരു സമപാർശ്വത്രികോണത്തിൽ ഒരു പാർശ്വം വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം പാദത്തിന്റെ മദ്ധ്യബിന്ദുവിൽകൂടി പോകുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

12. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു പാർശ്വങ്ങൾ വ്യാസങ്ങളായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തങ്ങൾ ത്രികോണത്തിന്റെ പാദത്തിൽവച്ച് പരസ്പരം ഖണ്ഡിക്കുമെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

13. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. PA, PB ഇവ വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസങ്ങളാകുന്നു. A, Q, B എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു നേർവരയിലാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

14. BACE, BAFD എന്നീ വൃത്തങ്ങൾ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. CAD, EAF ഇവ നേർവരകളാകുന്നു. $\angle EBC = \angle DBF$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

15. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിലെ ഒരു ഞാണാകുന്നു PQ. ലഘുചാപം PQ വിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് A. $\angle POQ + 2\angle PAQ = 360^\circ$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

16. PAB എന്ന നേർവര ഒരു വൃത്തത്തെ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും, PCD എന്ന നേർവര C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle PAD = \angle PCB$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

17. ABCDE എന്ന വൃത്തത്തിൽ AE വ്യാസമാകുന്നു.
$\angle ABC + \angle CDE = 270^\circ$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

18. ഒരു വൃത്തത്തിലെ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ O യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. OA = AC ആയാൽ, OD = BD എന്നു തെളിയിക്കുക.

19. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിൽ അന്തർലിഖിതമായ ഒരു ത്രികോണമാണ് ABC. BC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് D. $\angle BOD = \angle BAC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

20. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിൽ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു ഞാണുകളാണ് AB, CD. $\angle DAB = \angle OAC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

21. ABCD എന്ന ഒരു വൃത്തത്തിനു വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് P. PBA എന്ന നേർവര വൃത്തത്തെ B, A എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും, PCD എന്ന നേർവര C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും ഖണ്ഡിക്കുന്നു. വൃത്തകേന്ദ്രം O ആയാൽ $\angle AOD - \angle BOC = 2 \angle BPC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

22. AB യുടെ ഒരേവശത്തു സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന രണ്ടു ചാപങ്ങളാണ് ACB, ADB. ACD എന്ന നേർവര ഈ ചാപങ്ങളെ C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. ADB എന്ന വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രം ACB എന്ന ചാപത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ $CB = CD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

23. ഒരു വൃത്തത്തിനകത്ത് അന്തർലിഖിതം ചെയ്തിരിക്കുന്ന ഒരു ത്രികോണമാണ് ABC. APD, BPE, CPF എന്നിവ ത്രികോണത്തിനകത്തുള്ള P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിൽക്കൂടി പോകുന്ന മൂന്നു ഞാണുകളാണ്. $\angle EDF = \angle BPC - \angle BAC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

ഏതെങ്കിലും മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ തന്നാൽ (ഒരേ നേർവരയിലല്ലാത്തവ) അവയിൽക്കൂടി പോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ സാധ്യമാണെന്നു നാം പഠിച്ചുവല്ലോ. ഏതെങ്കിലും നാലു ബിന്ദുക്കൾ തന്നാൽ അവയിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കാൻ സാധ്യമാണോ? ഈ നാലു ബിന്ദുക്കളിൽ ഏതെങ്കിലും മൂന്നെണ്ണം എടുത്ത് അവയിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം നാലാമത്തെ ബിന്ദുവിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്നുണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. ഇതുപോലെ വേറെയും നാലു ബിന്ദുക്കൾ എടുത്ത് അതിൽ മൂന്നെണ്ണത്തിൽക്കൂടി കടന്നു പോകുന്ന

വൃത്തം നാലാമത്തെ ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നു പോകുന്നുണ്ടോ എന്നു പരിശോധിക്കുക. പൊതുവേ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി പോകുന്ന വൃത്തം നാലാമത്തേതിൽകൂടി പോകുന്നില്ലെന്നു കാണാം. എന്നാൽ ചിലപ്പോൾ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി പോകുന്ന വൃത്തം നാലാമത്തേതിൽ കൂടി പോയെന്നും വരാം. അപ്രകാരമായാൽ ആ നാലു ബിന്ദുക്കളെ ഏകവൃത്തസ്ഥിതങ്ങൾ (concyclic) എന്നു പറയുന്നു.

A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഏകവൃത്തസ്ഥിതങ്ങളാണെങ്കിൽ ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തെ ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജം (cyclic quadrilateral) എന്നു പറയുന്നു. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരിധിയിൽ മൂലകളെല്ലാം സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഒരു ചതുർഭുജത്തെയാണ് ചക്രീയചതുർഭുജമെന്നു പറയുന്നതെന്നു വ്യക്തമാണ്.

ഉപപാദ്യം 14

രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന ഋജുരേഖ ആ രേഖയുടെ ഒരേ വശത്തുള്ള മററു രണ്ടുബിന്ദുക്കളിൽ തുല്യമായകോണുകൾ സമ്മുഖമാക്കുന്നു എങ്കിൽ ഈ നാലു ബിന്ദുക്കളും ഏകവൃത്തസ്ഥിതങ്ങളാണ്.

<u>സങ്കല്പം.</u> A,B രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ. C, D ഇവ AB യുടെ ഒരേ വശത്തുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ.

$$\angle ACB = \angle ADB$$

<u>അനുമാനം</u> A, B, C, D എന്നീ നാലു ബിന്ദുക്കൾ ഒരു വൃത്തപരിധിയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നവയാണ്.

<u>ക്രിയ</u> A, B, C എന്നീ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽകൂടി പോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം D എന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നു പോകുമെന്നു സമർത്ഥിച്ചാൽ മതി.

ഉപപത്തി A, B, C എന്നീ മൂന്നു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി പോകുന്ന വൃത്തം D എന്ന ബിന്ദുവിൽക്കൂടി പോകുന്നില്ല എന്നു സങ്കല്പിക്കുക. അപ്രകാരമായാൽ ഈ വൃത്തം BD രേഖയെ (അല്ലെങ്കിൽ BD യെ നീട്ടിയാലുള്ള രേഖയെ) E എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കണം. AE യോജിപ്പിക്കുക.

അപ്പോൾ $\angle AEB = \angle ACB$ (ഒരേവൃത്തഖണ്ഡത്തിലുള്ളവ)

എന്നാൽ $\angle ADB = \angle ACB$ (സങ്കല്പം)

$\therefore \quad \angle AEB = \angle ADB$

എന്നാൽ ഈ രണ്ടു കോണുകളിൽ ഒന്നു് ADE എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ ബാഹ്യകോണും മറേറതു് ഈ ത്രികോണത്തിൻെറ ഉള്ളെതിർകോണും (interior opposite angle) ആണു്. ഇവരണ്ടും തുല്യമാവുക എന്നതു് അസാദ്ധ്യമാണു്.

അതുകൊണ്ടു് A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി പോകുന്ന വൃത്തം D യിൽക്കൂടി പോകുന്നില്ല എന്ന സങ്കല്പം തെററാണു്.

അതായതു് A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി പോകുന്ന വൃത്തം D യിൽക്കൂടി പോകുന്നതാണു്.

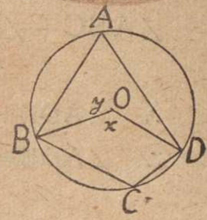
അതായതു് A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഏകവൃത്തസ്ഥിതങ്ങളാണു്.

അഭ്യാസം 9

ഒരു മട്ടത്രികോണത്തിൻെറ കർണ്ണം വ്യാസമായി വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം മട്ടത്തിൻെറ മൂലയിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുമെന്നു തെളിയിക്കുക. (ഉപപാദ്യം 14 തെളിയിച്ച രീതിയിൽ ഇതും തെളിയിക്കാവുന്നതാണു്).

ഉപപാദ്യം 15

ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജത്തിൻെറ എതിർകോണുകൾ അനുപൂരക (supplementary) ങ്ങളാണ്.



സങ്കല്പം. ABCD ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജം. O വൃത്തകേന്ദ്രം.

അനുമാനം

$$\angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$$
$$\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$$

ക്രിയ. OB, OD യോജിപ്പിക്കുക.

ഉപപത്തി $\angle BOD$ യ്ക്കു x എന്നും, മഹാകോണ് BOD (reflex angle BOD) യ്ക്കു y എന്നും പേരു നൽകുക.

$\angle BAD = \frac{1}{2}\angle x$ (പരിധിയിലെ കോണ് $= \frac{1}{2}$ കേന്ദ്രത്തിലെ കോണ്)

$\angle BCD = \frac{1}{2}\angle y$ (പരിധിയിലെ കോണ് $= \frac{1}{2}$ കേന്ദ്രത്തിലെ കോണ്)

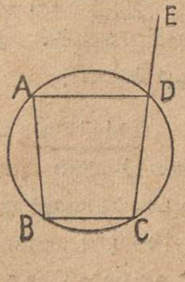
$\therefore \quad \angle BAD + \angle BCD = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle y$

എന്നാൽ $\angle x + \angle y = 360^\circ \quad \therefore \quad \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ$

അതുപോലെ $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ എന്നു തെളിയിക്കാം.

ഉപപാദ്യം 16

ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിൻെറ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഭുജം നീട്ടിയാലുണ്ടാകുന്ന ബാഹ്യകോണ് ആ കോണിനെതിരേ കിടക്കുന്ന ആന്തരകോണിനോടു തുല്യമായിരിക്കും.



സങ്കല്പം ABCD ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജം. CD എന്ന ഭുജം E യിലേക്കു നീട്ടിയിരിക്കുന്നു.

അനുമാനം $\angle ADE = \angle ABC$

ഉപപത്തി $\angle ADE + \angle ADC = 180°$ (CDE ഒരു നേർവര)

$\angle ABC + \angle ADC = 180°$ (ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിൻെറ എതിർകോണുകൾ)

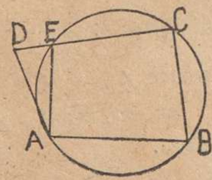
$\therefore \quad \angle ADE + \angle ADC = \angle ABC + \angle ADC$

$\therefore \quad \angle ADE = \angle ABC$.

ഉപപാദ്യം 17

(ഉപപാദ്യം 15-ൻെറ വിപരീതം)

ഒരു ചതുർഭുജത്തിൻെറ ഏതെങ്കിലും ഒരുജോടി എതിർകോണുകൾ അനുപൂരകങ്ങളാണെങ്കിൽ അതു് ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജമായിരിക്കും.



സങ്കല്പം ABCD എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ $\angle B + \angle D = 180°$.

അനുമാനം ABCD ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജം.

ക്രിയ A, B, C എന്നീ മൂന്നു മൂലകളിൽകൂടി പോകുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം D യിൽകൂടി പോകുമെന്നു തെളിയിച്ചാൽ മതി.

ഉപപത്തി A, B, C എന്നീ മൂലകളിൽക്കൂടി പോകുന്ന വൃത്തം D എന്ന മൂലയിൽക്കൂടി പോകുന്നില്ല എന്നു സങ്കല്പിക്കുക. അപ്രകാരമായാൽ ഈ വൃത്തം CD രേഖയെ (അല്ലെങ്കിൽ CD യെ നീട്ടിയാലുള്ള രേഖയെ) E എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കണം. AE യോജിപ്പിക്കുക.

അപ്പോൾ $\angle AEC + \angle ABC = 180°$ (ചക്രീയ ചതുർ ഭുജത്തിൻെറ എതിർകോണുകൾ)

എന്നാൽ $\angle ADC + \angle ABC = 180°$ (സങ്കല്പം)

$\therefore \quad \angle AEC = \angle ADC$

എന്നാൽ ഈ രണ്ടു കോണുകളിൽ ഒന്നു് ADE എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ ബാഹ്യകോണും മറേറതു് ഈ ത്രികോണത്തിൻെറ ഉള്ളെതിർകോണും ആണു്. ഇവ രണ്ടും തുല്യമാവുക എന്നതു് അസാധ്യമാണു്.

അതുകൊണ്ടു് A, B, C എന്നീ മൂലകളിൽക്കൂടി പോകുന്ന വൃത്തം D യിൽക്കൂടി പോകുന്നില്ല എന്ന സങ്കല്പം തെററാണു്. അതായതു് A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി പോകുന്ന വൃത്തം D യിൽക്കൂടി പോകുന്നതാണു്. അതായതു് ABCD ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജമാണു്.

അഭ്യാസം 10.

1. ABCD എന്ന ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിൽ AB ഒരു വ്യാസമാണു്. $\angle ADC = 129°$ ആയാൽ $\angle BAC$ കണക്കാക്കുക.
2. ACEB, ADFB എന്നീ വൃത്തങ്ങൾ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. CAD, EBF ഇവ നേർവരകളാണു്. $\angle ACE = 80°$ ആയാൽ $\angle CDF$ കാണുക.
3. ABCD എന്ന ചക്രീയചതുർഭുജത്തിൻെറ കർണ്ണങ്ങൾ O യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle BAC = 50°$, $\angle BOC = 110°$, $\angle ADB = 30°$ ആയാൽ $\angle BCD$ കാണുക.
4. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ B, C എന്നീ മൂലകളിൽനിന്നും എതിർവശങ്ങളിലേക്കു വരച്ചിരിക്കുന്ന ലംബങ്ങളാണു് BE, CF. BE, CF ഇവ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. BCEF,

AFPE എന്നീ ചതുർഭുജങ്ങൾ ചക്രീയങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

5. ABCD ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജം. $\angle A - \angle B = \angle D - \angle C$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

6. ABCD എന്ന ചക്രീയചതുർഭുജത്തിൽ $\angle A = 60°$. O വൃത്തകേന്ദ്രമായാൽ $\angle OBD + \angle ODB = \angle CBD + \angle CDB$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. ABCD ഒരു സാമാന്തരികം. AB വ്യാസമായിട്ടുള്ള വൃത്തം AD, BC എന്നീ രേഖകളെ E, F എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. D, E, F, C ഇവ ഏകവൃത്തസ്ഥിതങ്ങളെന്നു തെളിയിക്കുക.

8. ഒരു സാമാന്തരികം ചക്രീയമാണെങ്കിൽ അതു് ഒരു ചതുരം (rectangle) ആയിരിക്കുമെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

9. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle B$, $\angle C$ ഇവയുടെ സമഭാജികൾ I എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. B യിലേയും C യിലേയും ബാഹ്യകോണുകളുടെ സമഭാജികൾ K എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. IBKC ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജമെന്നു തെളിയിക്കുക.

10. ABCD ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജം. AC എന്ന കർണ്ണം $\angle A$, $\angle C$ ഇവയെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്നെങ്കിൽ $\angle ABC = 90°$ എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

11. PQCA, PQDB എന്നീ വൃത്തങ്ങൾ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. APB, CQD ഇവ നേർവരകളാണു്. AC രേഖ BD ന്നു സമാന്തരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

12. ഒരു വൃത്തത്തിലെ AB, CD എന്നീ ഞാണുകളെ നീട്ടിയപ്പോൾ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു. PB=BD ആയാൽ PC=AC എന്നു തെളിയിക്കുക.

13. ABCD ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജം. AD, BC എന്നീ ഭുജങ്ങൾ നീട്ടിയപ്പോൾ E ൽ സന്ധിക്കുന്നു. AB, DC ഇവ നീട്ടിയപ്പോൾ F ൽ സന്ധിക്കുന്നു. EDC, FBC എന്നീ വൃത്തങ്ങൾ X ൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. E, X, F എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു നേർവരയിലാണെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

14. PQR എന്ന ത്രികോണത്തിൽ QR ലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് D. H, K എന്നിവ PQD, PDR എന്നീ ത്രികോണങ്ങളുടെ പരികേന്ദ്രങ്ങൾ (circum centres) ആകുന്നു. H, D, K, P ഇവ ഏകവൃത്തസ്ഥിതങ്ങളാണെങ്കിൽ $\angle QPR = 90°$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

15. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle B$, $\angle C$ ഇവയുടെ സമഭാജികൾ AC, AB ഇവയെ യഥാക്രമം P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. BP, CQ ഇവ I എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. A, Q, I, P ഇവ ഏകവൃത്തസ്ഥിതങ്ങളാണെങ്കിൽ $\angle A = 60°$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

16. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ B, C എന്നീ മൂലകളിൽനിന്നും എതിർവശങ്ങളിലേക്കു വരച്ചിരിക്കുന്ന ലംബങ്ങളാണ് BE, CF എന്നിവ. $\angle AEF = \angle ABC$ എന്നു തെളിയിക്കുക. BE, CF ഇവ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\angle APF = \angle AEF$ എന്നും തെളിയിക്കുക.

17. ADHE എന്ന വൃത്തത്തിനകത്തുള്ള ഒരു വൃത്തമാണ് BCGF. ഈ വൃത്തങ്ങളെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന രണ്ടു നേർവരകളാണ് OABCD, OEFGH എന്നിവ. A, B, F, E എന്നിവ ഏകവൃത്തസ്ഥിതങ്ങളാണെങ്കിൽ, C, D, H, G എന്നിവ ഏകവൃത്തസ്ഥിതങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

18. ABCD ഒരു ദീർഘചതുരം. AB, AD എന്നീ രേഖകളെ നീട്ടുമ്പോൾ C യിൽകൂടി AC യ്ക്കു ലംബമായി വരച്ചിട്ടുള്ള ഒരു രേഖയെ E, F എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. EFBD എന്ന ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

19. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിനകത്തുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് P. BC യിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് X. BXP എന്ന വൃത്തം AB യെ Z എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. CXP എന്ന വൃത്തം CA യെ Y എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AYPZ ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജമാണെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

20. ഒരു വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ഖണ്ഡിക്കുന്ന രണ്ടു ഞാണുകളാണ് AB യും CD യും. AE, CF ഇവ CD, AB എന്നീ രേഖകൾക്ക് യഥാക്രമം ലംബമായി വരച്ചിരിക്കുന്നു. BD, EF ഇവ സമാന്തരമെന്നു തെളിയിക്കുക.

21. ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ബാഹ്യകോണുകളുടെ സമഭാജികളാൽ രൂപീകരിക്കപ്പെട്ട ചതുർഭുജം ചക്രീയമാണെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

22. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ AC=AB. ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിൽ BC എന്ന ചാപത്തിലുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാണ് P യും, Q യും. AP, AQ ഇവ BC യെ X, Y എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. PQYX ചക്രീയചതുർഭുജമെന്നു തെളിയിക്കുക.

23. ABCD എന്ന ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിന്റെ കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബമായി O യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. O യിൽനിന്നും ചതുർഭുജത്തിന്റെ വശങ്ങളിലേക്ക് OP, OQ, OR, OS എന്നീ ലംബങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. PQRS ചക്രീയമെന്നു തെളിയിക്കുക.

24. ഒരു വൃത്തത്തിലെ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു ഞാണുകളാകുന്നു AB യും CD യും. DQ വേറൊരു ഞാണാകുന്നു. AP രേഖ DQ ന് ലംബമായി വരച്ചിരിക്കുന്നു. OP, BQ ഇവ സമാന്തരമെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

25. ABC എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൻെറ കർണ്ണമായ AC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് D. AD=BD എന്നു തെളിയിക്കുക.

26. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ B, C എന്നീ മൂലകളിൽനിന്നും എതിർവശങ്ങളിലേക്കു വരച്ചിരിക്കുന്ന ലംബങ്ങളാണ് BE യും CF ഉം. BC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് M. MF=ME എന്നു തെളിയിക്കുക.

27. മുകളിലത്തെ ചോദ്യത്തിൽ $\angle FME = 180^\circ - 2\angle BAC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

28. APRB, ASQB എന്നീ വൃത്തങ്ങൾ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. PAQ, RAS ഇവ നേർവരകളാണ്. RP, SB ഇവയെ നീട്ടിയപ്പോൾ M എന്ന ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു. MPBQ ഒരു ചക്രീയ ചതുർഭുജമെന്നു തെളിയിക്കുക.

29. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരസ്പരം ലംബമായ രണ്ടു വ്യാസങ്ങളാണ് POQ, ROS. RA, RB എന്നീ ഞാണുകൾ PQ നെ H, K എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. A, B, K, H എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഏകവൃത്തസ്ഥിതങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

30. ഒരു ലംബകം (trapezium) ചക്രീയമാണെങ്കിൽ അതിൻെറ അസമാന്തരവശങ്ങൾ തുല്യങ്ങളാണെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

31. ABCD എന്ന ചക്രീയ ചതുർഭുജത്തിൻെറ BA, CD എന്നീ വശങ്ങൾ നീട്ടുമ്പോൾ F-ൽ സന്ധിക്കുന്നു. AD, BC എന്നീ വശങ്ങൾ നീട്ടുമ്പോൾ E-ൽ സന്ധിക്കുന്നു.

∠E, ∠F ഇവയുടെ സമഭാജികൾ പരസ്പരം ലംബമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

32. മുകളിലത്തെ ചോദ്യത്തിൽ A, C, E, F ഇവ ഏകവൃത്തസ്ഥിതങ്ങളാണെങ്കിൽ ACEF എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസമായിരിക്കും EF എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

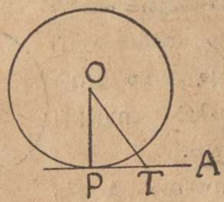
33. ABC എന്ന ത്രികോണിന്റെ പരിവൃത്തത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് P. PX, PY, PZ ഇവ BC, CA, AB എന്നീ രേഖകൾക്കു ലംബമായി വരച്ചിരിക്കുന്നു. X, Y, Z ഇവ ഒരു നേർവരയിലാണ് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതെന്നു തെളിയിക്കുക.

സ്പർശകം. ഉപപാദ്യം 18-ലെ ചിത്രം നോക്കുക. O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ ഒരു സ്പർശകമാണ് ATP എന്ന രേഖ. രേഖയും വൃത്തവും തമ്മിൽ സ്പർശിക്കുന്ന P എന്ന ബിന്ദുവിന് സ്പർശകബിന്ദു എന്നു പറയുന്നു. P ഒഴിച്ച് സ്പർശകരേഖയിലുള്ള ഏതൊരു ബിന്ദുവും വൃത്തത്തിനു വെളിയിലാണെന്നു കാണാവുന്നതാണ്.

ഉപപാദ്യം 19-ലെ ചിത്രങ്ങൾ നോക്കുക. പരസ്പരം സ്പർശിക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങളാണ് ഓരോ ചിത്രത്തിലും ഉള്ളത്. ഒന്നാമത്തെ ചിത്രത്തിലുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ ബാഹ്യമായിട്ടാണ് സ്പർശിക്കുന്നത്. രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലുള്ള വൃത്തങ്ങൾ അന്തർസ്പർശികളാണ്. സ്പർശബിന്ദുവായ C യിൽക്കൂടി ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശകം വരച്ചാൽ അത് മറേറ വൃത്തത്തിന്റേയും സ്പർശകമായിരിക്കും. CT രേഖ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടേയും സ്പർശകമാണെന്നു കാണാവുന്നതാണ്. അതുകൊണ്ട് CT യെ ഈ വൃത്തങ്ങളുടെ പൊതുസ്പർശകം (common tangent) എന്നു പറയാം.

ഉപപാദ്യം 18

ഒരു വൃത്തപരിധിയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽകൂടി വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശകവും ആ ബിന്ദുവിൽകൂടി വരയ്ക്കുന്ന വ്യാസാർദ്ധവും പരസ്പരം ലംബമായിരിക്കും.



സങ്കല്പം O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പരിധിയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവാണ് P. P യിൽകൂടി വൃത്തത്തിനു വരച്ചിരിക്കുന്ന സ്പർശകമാണ് AP.

അനുമാനം OP രേഖ AP യ്ക്കു ലംബമാണ്.

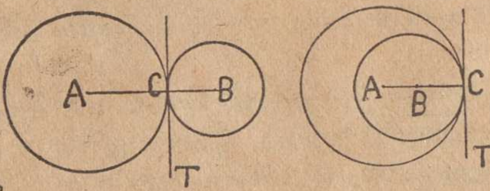
ഉപപത്തി OP രേഖ AP യ്ക്കു ലംബമല്ലെങ്കിൽ O യിൽ നിന്നും AP യ്ക്കു ലംബമായ രേഖ OT എന്നിരിക്കട്ടെ.

$\angle OTP$ സമകോണായതുകൊണ്ടു് $\triangle OTP$ ഒരു മട്ടത്രികോണമാണ്. ഈ മട്ടത്രികോണത്തിൻെറ കർണ്ണമായ OP യേക്കാൾ ചെറുതാണ് OT രേഖ. എന്നാൽ T എന്ന ബിന്ദു വൃത്തത്തിനു വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാകയാൽ OT രേഖ വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസാർദ്ധമായ OP യേക്കാൾ വലുതാണ്. ഇങ്ങനെ OT രേഖ OP രേഖയേക്കാൾ ചെറുതുമാണ്, അതേസമയം തന്നെ OT രേഖയേക്കാൾ വലുതുമാണ് എന്ന അനുമാനത്തിൽ നാം എത്തിച്ചേരുന്നു. ഈ അനുമാനം പ്രത്യക്ഷത്തിൽതന്നെ തെറ്റാണ്. അതുകൊണ്ടു് OP രേഖ AP യ്ക്കു ലംബമല്ല എന്ന സങ്കല്പം തെറ്റാണ്. അതായതു് OP രേഖ AP യ്ക്കു ലംബം തന്നെയാണ്.

അനുസിദ്ധാന്തം ഒരു വ്യാസാർദ്ധത്തിൻെറ അഗ്രബിന്ദുവിൽകൂടി അതിനു ലംബമായി വരയ്ക്കുന്ന രേഖ വൃത്തത്തിനെ ആ ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നതാണ്.

ഉപപാദ്യം 19

രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ പരസ്പരം സ്പർശിക്കുന്നവയാണെങ്കിൽ ഈ വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളും സ്പർശകബിന്ദുവും ഒരേ നേർവരയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യും.



ചിത്രം 1   ചിത്രം 2

സങ്കല്പം A കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തം B കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തെ C എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു.

അനുമാനം A, B, C ഇവ ഒരു നേർവരയിലാണ് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതു്.

ക്രിയ C എന്ന ബിന്ദുവിൽകൂടി വൃത്തങ്ങളുടെ പൊതു സ്പർശകമായ CT രേഖ വരയ്ക്കുക. AC, BC ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

ഉപപത്തി. AC വ്യാസാദ്ധ്വും, CT രേഖ ഈ വ്യാസാദ്ധ്ത്തിന്റെ അഗ്രത്തിൽകൂടി വരച്ചിരിക്കുന്ന സ്പർശകവും ആയതു കൊണ്ടു് $\angle ACT = 90°$

അതുപോലെ $\angle BCT = 90°$

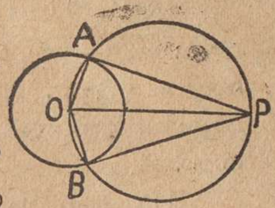
ചിത്രം 1-ൽ $\angle ACT + \angle BCT = 180°$

$\therefore$ ACB ഒരു നേർവരയാണു്.

ചിത്രം 2-ൽ AC, BC ഇവ CT രേഖയ്ക്കു് C യിൽകൂടി വരച്ചിരിക്കുന്ന ലംബങ്ങളായതിനാൽ ഈ രേഖകൾ രണ്ടും ഒരേ നേർവരതന്നെയാണു്. അതായതു് ABC ഒരു നേർവരയാണു്.

നിർമ്മിതി. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നും വൃത്തത്തിനു് സ്പർശകങ്ങൾ വരയ്ക്കുക.

സങ്കല്പം O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന്റെ വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണു് P.



നിർമ്മിക്കേണ്ടതു് P യിൽനിന്നും വൃത്തത്തിനുള്ള സ്പർശകങ്ങൾ.

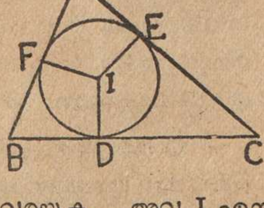
ക്രിയ OP യോജിപ്പിച്ചു് OP വ്യാസമായിട്ടുള്ള വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം, തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തെ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. PA, PB ഇവ യോജിപ്പിക്കുക. ഇവയാണു് P യിൽനിന്നും വൃത്തത്തിനുള്ള സ്പർശകങ്ങൾ.

ഉപപത്തി OA യോജിപ്പിക്കുക.

$\angle OAP = 90^\circ$ (അർദ്ധവൃത്തത്തിലെ കോണു്). OA എന്ന വ്യാസാർദ്ധത്തിനു് AP ലംബമായതുകൊണ്ടു് AP രേഖ A യിലുള്ള സ്പർശകമാണു്. അതുപോലെ BP രേഖയും തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശകമാണു്.

നിർമ്മിതി. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തം വരയ്ക്കുക.

സങ്കല്പം ABC ഒരു ത്രികോണം.



നിർമ്മിക്കേണ്ടതു് $\triangle ABC$ യുടെ അന്തർവൃത്തം.

ക്രിയ $\triangle ABC$ യുടെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു കോണുകളുടെ സമഭാജികൾ വരയ്ക്കുക. അവ I എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. ID രേഖ BC യ്ക്കു് ലംബമായി വര

യ്ക്കുക. I കേന്ദ്രമായും ID വ്യാസാർദ്ധമായും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തം ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നു ഭുജങ്ങളേയും സ്പർശിക്കുന്നതാണ്.

<u>ഉപപത്തി</u> IE, IF ഇവ AC, AB എന്നീ ഭുജങ്ങൾക്കു ലംബമായി വരയ്ക്കുക. ID=IE=IF എന്നു് നാം മുൻപു തെളിയിച്ചിട്ടുണ്ടു്. അതുകൊണ്ടു്, I കേന്ദ്രമായും ID വ്യാസാർദ്ധമായും വരയ്ക്കുന്ന വൃത്തം E, F എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി പോകുന്നതാണ്.

ID എന്ന വ്യാസാർദ്ധത്തിനു് BDC ലംബമാകയാൽ, BDC രേഖ ഈ വൃത്തത്തിനെ D എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കും. അതുപോലെ AC, AB എന്നീ രേഖകളും വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കും. അതായതു് നാം വരച്ച വൃത്തം ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തമാണ്.

താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം നോക്കുക. ഇതിൽ വരച്ചിരിക്കുന്ന വൃത്തവും ത്രികോണം ABC യുടെ മൂന്നു ഭുജങ്ങളേയും സ്പർശിക്കുന്നുണ്ടു്. പക്ഷേ ഈ വൃത്തം ത്രികോണത്തിനുള്ളിലല്ല സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതു്. ഇതിനെ ത്രികോണം ABC യുടെ വ്യതിവൃത്തം എന്നു പറയുന്നു. B യിലും C യിലുമുള്ള ബാഹ്യകോണുകളുടെ സമഭാജികൾ തമ്മിൽ സന്ധിക്കുന്ന ബിന്ദുവായ I ആണു് ഈ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം. ഈ കേന്ദ്രത്തെ വ്യതികേന്ദ്രം എന്നു പറയുന്നു. A യിലുള്ള ആന്തരകോണിന്റെ സമഭാജിയും ഈ കേന്ദ്രത്തിൽ കൂടി പോകുമെന്നു് തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്.

ത്രികോണം ABC യ്ക്കു് ഇതുപോലെ രണ്ടു വ്യതിവൃത്തങ്ങൾകൂടി വരയ്ക്കാമെന്നു് അല്പം ആലോചിച്ചാൽ മനസ്സിലാകും.

അഭ്യാസം 11

1 രണ്ടു ഏകകേന്ദ്ര വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാദ്ധ്ങ്ങൾ 2 ഇഞ്ചും 3 ഇഞ്ചും ആകുന്നു. ചെറിയ വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കത്തക്കവണ്ണം വലിയ വൃത്തത്തിൽ ഒരു ഞാൺ വരച്ചാൽ ഈ ഞാണിൻെറ നീളം കണക്കാക്കുക.

2. രണ്ടു് ഏകകേന്ദ്രവൃത്തങ്ങളിൽ ചെറുതിനെ സ്പർശിച്ചുകൊണ്ടു് വലിയ വൃത്തത്തിൽ വരയ്ക്കുന്ന ഞാണുകളെല്ലാം തുല്യമായിരിക്കുമെന്നു സമത്ഥിക്കുക.

3. ഒരു ക്ലിപ്ത വ്യാസാദ്ധമുള്ളതും തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു നേർവരയെ സ്പർശിക്കുന്നതുമായ വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

4. ഒരു ക്ലിപ്ത വ്യാസാദ്ധമുള്ളതും തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിൽ കൂടി പോകുന്നതുമായ വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

5. തമ്മിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്ന രണ്ടു നേർവരകളെ സ്പർശിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

6. സമാന്തരങ്ങളായ രണ്ടു നേർവരകളെ സ്പർശിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രത്തിൻെറ സഞ്ചാരപഥം കാണുക.

7. ഒരു വൃത്തവും ഒരു നേർവരയും തന്നിരിക്കുന്നു. നേർവരയ്ക്കു സമാന്തരമായി വൃത്തത്തിനു് ഒരു സ്പർശകം വരയ്ക്കുക. നേർവരയ്ക്കു ലംബമായും ഒരു സ്പർശകം വരയ്ക്കുക.

8. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു നേർവരയെ സ്പർശിക്കുന്നതും, തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു ബിന്ദുവിൽകൂടി പോകുന്നതും ഒരു നിശ്ചിത വ്യാസാദ്ധമുള്ളതുമായ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെ?

9. AB എന്ന ഒരു നേർവരയിൽ P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവും, രേഖയ്ക്കു വെളിയിലായി Q എന്ന ഒരു ബിന്ദുവും തന്നി

ട്ടുണ്ട്. AB യെ P യിൽ സ്പർശിക്കുന്നതും Q വിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നതുമായ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

10. ബഹിഃസ്പർശികളായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അവയുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ തുകയാണെന്നും, അന്തഃസ്പർശികളായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം അവയുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണെന്നും തെളിയിക്കുക.

11. ഒരു നിശ്ചിത വ്യാസാർദ്ധമുള്ളതും തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ ബഹിർസ്പർശികളുമായ വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

12. ഒരു നിശ്ചിത വ്യാസാർദ്ധമുള്ളതും തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ ആന്തരസ്പർശികളുമായ വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

13. ഒരു വൃത്തപരിധിയിൽ P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവും വൃത്തത്തിനു വെളിയിൽ Q എന്ന ഒരു ബിന്ദുവും തന്നിട്ടുണ്ട്. ഈ വൃത്തത്തെ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നതും Q വിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നതുമായ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

14. AB, CD എന്ന രണ്ടു നേർവരകൾ തന്നിട്ടുണ്ട്. AB യിൽ P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവും തന്നിട്ടുണ്ട്. CD രേഖയെയും, AB രേഖയെ P എന്ന ബിന്ദുവിലും സ്പർശിക്കുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

15. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തവും അതിനു വെളിയിൽ P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവും തന്നിരിക്കുന്നു. ഒരു ക്ലിപ്തവ്യാസാർദ്ധമുള്ളതും തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുന്നതും, P യിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുന്നതുമായ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

16. ഒരു ക്ലിപ്തവ്യാസാർദ്ധമുള്ളതും തന്നിരിക്കുന്നതായ രണ്ടു നേർവരകളെ സ്പർശിക്കുന്നതുമായ വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

17. ഒരു ക്ലിപ്തവ്യാസാർദ്ധമുള്ളതും തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തത്തേയും ഒരു നേർവരയേയും സ്പർശിക്കുന്ന വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

18. ഒരു ക്ലിപ്തവ്യാസാർദ്ധമുള്ളതും തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്നതുമായ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

19. 1″ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം A യും, 1.5″ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള വേറൊരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം B യും ആണ്. $AB=3''$. $1\frac{3}{4}''$ വ്യാസാർദ്ധമുള്ളതും A കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തെ ആന്തരമായും, B കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തെ ബാഹ്യമായും സ്പർശിക്കുന്ന ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

20. കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിൽ $1\frac{1}{2}$ ഇഞ്ച് അകലമുള്ള രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ $\frac{1}{2}$ ഇഞ്ചും, $\frac{3}{4}$ ഇഞ്ചും ആകുന്നു. ഈ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളേയും ആന്തരമായി സ്പർശിക്കുന്നതും 2″ വ്യാസാർദ്ധമുള്ളതുമായ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക.

21. ഒരു വൃത്തത്തിൽ സമാന്തരമായി രണ്ടു സ്പർശകങ്ങൾ വരച്ചാൽ അവയുടെ സ്പർശകബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടി കടന്നുപോകുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

22. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $AB=AC$. ത്രികോണത്തിന്റെ പരിവൃത്തത്തിന് A യിൽക്കൂടി ഒരു സ്പർശകം വരച്ചാൽ അതു് BC യ്ക്കു സമാന്തരമായിരിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

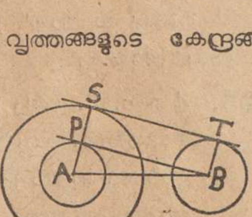
23. 4 സെ.മീ. വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രമാണ് O. വൃത്തപരിധിയിലുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള സ്പർശകത്തിൽ $PT=3$ സെ.മീ. ആകത്തക്കവണ്ണം T എന്ന ബിന്ദു എടുത്തിരിക്കുന്നു. P വൃത്തത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ T യുടെ ബിന്ദുപഥം കാണുക.

താഴെ കൊട്ടത്തിരിക്കുന്ന ചിത്രം നോക്കുക. ഇതിൽ ST എന്ന രേഖ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്നതായി കാണാം. ഇപ്രകാരമുള്ള ഒരു സ്പർശകത്തെ ഈ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടേയും പൊതുസ്പർശകം എന്നു പറയുന്നു.

53-ാംപേജിലെ ചിത്രം നോക്കുക. ഇതിലും ST എന്ന രേഖ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്നതായി കാണാം. അതുകൊണ്ടു് ഈ ചിത്രത്തിൽ കാണുന്ന ST എന്ന രേഖയും രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ പൊതുസ്പർശകമാണു്. എന്നാൽ ഈ രണ്ടു ചിത്രങ്ങളിലുമുള്ള പൊതുസ്പർശകങ്ങൾ തമ്മിൽ ഒരു വ്യത്യാസമുണ്ടു്. ആദ്യത്തേതിൽ വൃത്തങ്ങൾ രണ്ടും സ്പർശകത്തിൻെറ ഒരേ പാർശ്വത്തിലാണു് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതു്. എന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിൽ പൊതുസ്പർശകത്തിൻെറ ഇരുവശങ്ങളിലുമായിട്ടാണു് വൃത്തങ്ങൾ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതു്. ആദ്യത്തെ ചിത്രത്തിലുള്ള പൊതുസ്പർശകത്തിനു് ഏകപാർശ്വപൊതുസ്പർശകം (direct common tangent) എന്നും, രണ്ടാമത്തെ ചിത്രത്തിലുള്ള പൊതുസ്പർശകത്തിനു് ദ്വിപാർശ്വപൊതുസ്പർശകം (transverse common tangent) എന്നും പറയുന്നു.

<u>നിർമ്മിതി.</u> തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ ഏകപാർശ്വപൊതുസ്പർശകം വരയ്ക്കുക.

<u>സങ്കല്പം</u> A, B എന്നിവ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളാണു്. A കേന്ദ്രമായ വൃത്തം B കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തേക്കാൾ വലുതാണു്. A കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസാർദ്ധം R എന്നും മറേറ വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസാർദ്ധം r എന്നും ഇരിക്കട്ടെ.



<u>നിർമ്മിക്കേണ്ടതു്</u> ഈ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടേയും ഒരു ഏകപാർശ്വപൊതുസ്പർശകം.

ക്രിയ A കേന്ദ്രമായും $(R-r)$ വ്യാസാർദ്ധമായും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. B യിൽനിന്നും ഇപ്പോൾ വരച്ച വൃത്തത്തിനു് BP എന്ന ഒരു സ്പർശകം വരയ്ക്കുക. AP യോജിപ്പിച്ചശേഷം ഈ രേഖയെ നീട്ടുക. ഇതു് വലിയ വൃത്തത്തെ S എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. AS ന സമാന്തരമായി B യിൽക്കൂടി BT രേഖ വരയ്ക്കുക. ഈ രേഖ ചെറിയ വൃത്തത്തെ T യിൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. ST യോജിപ്പിക്കുക. ST ഈ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടേയും ഒരു പൊതുസ്പർശകമായിരിക്കും.

ഉപപത്തി $PS=AS-AP$

$$=R-(R-r)=R-R+r=r$$

$$BT=r \qquad \therefore \quad PS=BT$$

ഇവ സമാന്തരമായിട്ടാണു് വരച്ചിട്ടുള്ളതും

$\therefore$ STBP ഒരു സാമാന്തരികമാണു്

PB രേഖ സ്പർശകവും, AP രേഖ വ്യാസാർദ്ധവും ആയതിനാൽ ഇവ രണ്ടും പരസ്പരം ലംബമാണു്.

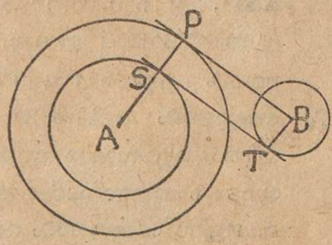
$\therefore \angle SPB=90°$ $\qquad \therefore$ STBP ഒരു ചതുരമാണു്

$\therefore \angle PST, \angle BTS$ ഇവ $90°$ വീതമാണു്

$\therefore$ ST രേഖ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടേയും സ്പർശകമാണു്.

N.B. ST യെപ്പോലെ ഒരു ഏകപാർശ്വ പൊതുസ്പർശകംകൂടി വരയ്ക്കാവുന്നതാണു്.

നിർമ്മിതി തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ ഒരു ദ്വിപാർശ്വപൊതുസ്പർശകം വരയ്ക്കുക.



സങ്കല്പം A, B എന്നിവ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ കേന്ദ്രങ്ങളാണു്. A കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസാർദ്ധം R എന്നും മറേറ വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസാർദ്ധം r എന്നും ഇരിക്കട്ടെ.

നിർമ്മിക്കേണ്ടതു്. ഈ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടേയും ഒരു ദ്വിപാർശ്വപൊതുസ്പർശകം.

ക്രിയ A കേന്ദ്രമായും (R+r) വ്യാസാർദ്ധമായും ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഈ വൃത്തത്തിനു് B യിൽനിന്നും BP എന്ന ഒരു സ്പർശകം വരയ്ക്കുക. AP യോജിപ്പിക്കുക. ഈ രേഖ, തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തത്തെ S എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. B യിൽക്കൂടി AP യ്ക്കു സമാന്തരമായി ഒരു രേഖ വരച്ചു് B കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തെ T എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുക. ST യോജിപ്പിക്കുക. ഇതു് തന്നിരിക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ ഒരു ദ്വിപാർശ്വപൊതുസ്പർശകം ആയിരിക്കും.

ഉപപത്തി മുൻപിലത്തെ നിർമ്മിതിയിൽ തെളിയിച്ചതുപോലെ തന്നെ PSTB ഒരു ചതുരമാണെന്നു തെളിയിച്ചു് ST ഒരു പൊതുസ്പർശകമാണെന്നു സമത്ഥിക്കാം.

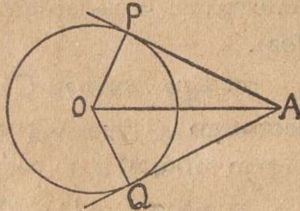
N. B. തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾക്കു് രണ്ടു ദ്വിപാർശ്വപൊതുസ്പർശകങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.

അഭ്യാസം 12

1. കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിൽ $2\frac{1}{2}''$ അകലമുള്ളതും 1 ഇഞ്ചും $\frac{3}{4}$ ഇഞ്ചും വീതം വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ ഉള്ളതുമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചു് ഇവയുടെ ഏകപാർശ്വ പൊതുസ്പർശകങ്ങളും ദ്വിപാർശ്വ പൊതുസ്പർശകങ്ങളും വരയ്ക്കുക.
2. കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിൽ 5 സെ.മീ. അകലമുള്ളതും 4 സെ. മീററും, 2 സെ. മീററും വീതം വ്യാസാർദ്ധമുള്ളതുമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾവരച്ചു് ഇവയുടെ പൊതുസ്പർശകങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ആകെ എത്ര പൊതുസ്പർശകങ്ങൾ വരയ്ക്കാം.
3. കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിൽ $3''$ അകലമുള്ളതും 2 ഇഞ്ചും 1 ഇഞ്ചും വീതം വ്യാസാർദ്ധമുള്ളതുമായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ വരച്ചു് ഇവയുടെ പൊതുസ്പർശകങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ആകെ എത്ര പൊതുസ്പർശകങ്ങൾ വരയ്ക്കാം?

ഉപപാദ്യം 20.

ഒരു വൃത്തത്തിന് വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നും വൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശകങ്ങൾ രണ്ടും തുല്യമായിരിക്കും. ബിന്ദുവിനെ വൃത്തകേന്ദ്രവുമായി യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖയുമായി ഈ സ്പർശകങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്ന കോണുകൾ തുല്യമായിരിക്കും. ഈ സ്പർശകങ്ങൾ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ സമ്മുഖമാക്കുന്ന കോണുകളും തുല്യമായിരിക്കും.



സങ്കല്പം. A എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിന് AP, AQ എന്ന സ്പർശകങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. OA, OP, OQ ഇവ യോജിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

അനുമാനം. (1) $AP = AQ$

(2) $\angle OAP = \angle OAQ$

(3) $\angle AOP = \angle AOQ$

ഉപപത്തി. OP ഒരു വ്യാസാർദ്ധവും, AP രേഖ ഈ വ്യാസാർദ്ധത്തിൻെറ അഗ്രബിന്ദുവിലുള്ള സ്പർശകവും ആയതിനാൽ

$\angle OPA = 90°$

അതുപോലെ $\angle OQA = 90°$

അതുകൊണ്ട് OPA, OQA എന്നീ ത്രികോണങ്ങൾ മട്ടത്രികോണങ്ങളാകുന്നു. ഈ മട്ടത്രികോണങ്ങളിൽ കർണ്ണം OA രണ്ടു ത്രികോണങ്ങൾക്കും പൊതുവായ വശമാണ്.

$OP = OQ$ (വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ)

$\therefore \quad \triangle OPA \equiv \triangle OQA$

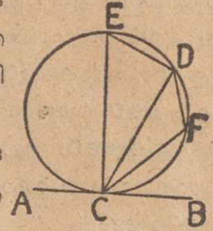
$\therefore \quad AP = AQ$

$\angle OAP = \angle OAQ$

$\angle AOP = \angle AOQ$

ഉപപാദ്യം 21

ഒരു ഞാണിൻെറ അഗ്രത്തിൽക്കൂടി ഒരു സ്പർശകം വരച്ചാൽ ആ ഞാണിനും സ്പർശകത്തിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ഓരോ കോണും മറുവശത്തുള്ള വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണിനോടു തുല്യമായിരിക്കും.



സങ്കല്പം വൃത്തം CDE യിലെ ഒരു ഞാണാകുന്നു CD. AB രേഖ വൃത്തത്തെ C എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു.

അനുമാനം (1) $\angle BCD$ ഈ കോണിൻെറ മറുവശത്തുള്ള CED എന്ന വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണിനോടു തുല്യം.

(2) $\angle ACD$ ഈ കോണിൻെറ മറുവശത്തുള്ള CFD എന്ന വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണിനോടു തുല്യം.

(1) ക്രിയ CE എന്ന വ്യാസം വരയ്ക്കുക. DE യോജിപ്പിക്കുക.

ഉപപത്തി അർദ്ധവൃത്തത്തിലെ കോണായതുകൊണ്ട്

$\angle CDE = 90°$

$\therefore$ CDE എന്ന ത്രികോണത്തിൽ

$\angle CED + \angle ECD = 90°$

AB സ്പർശകവും, CE വ്യാസവുമാകയാൽ

$\angle ECB = 90°$

അതായതു് $\angle BCD + \angle ECD = 90°$

$\therefore \angle CED + \angle ECD = \angle BCD + \angle ECD$

$\therefore \angle CED = \angle BCD$

അതായതു് $\angle BCD$ മറുവശത്തുള്ള CED എന്ന വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണിനോടു തുല്യം.

(ii) <u>ക്രിയ</u> CFD എന്ന ചാപത്തിൽ F എന്ന ഏതെങ്കിലും ബിന്ദുവെടുത്ത് CF, DF ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

<u>ഉപപത്തി</u> CEDF ചക്രീയ ചതുർഭുജമായതുകൊണ്ട്

$\angle CED + \angle CFD = 180°$

ACB നേർവരയായതുകൊണ്ട്

$\angle BCD + \angle ACD = 180°$

$\therefore \angle CED + \angle CFD = \angle BCD + \angle ACD$

എന്നാൽ $\angle CED = \angle BCD$ (തെളിയിച്ചു)

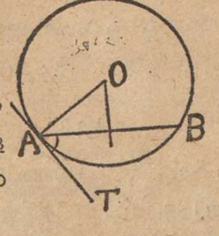
$\therefore \angle CFD = \angle ACD$.

<u>നിർമ്മിതി</u> ഒരു ക്ലിപ്തഅളവിലുള്ള കോണ് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒരു വൃത്തഖണ്ഡം തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു ഋജുരേഖയിന്മേൽ വരയ്ക്കുക.

<u>സങ്കല്പം</u> AB ഒരു ഋജുരേഖ. തന്നിരിക്കുന്ന കോണിന്റെ അളവ് $x°$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

<u>നിർമ്മിക്കേണ്ടത്</u> AB യിന്മേൽ $x°$ അളവുള്ള കോണ് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തഖണ്ഡം.

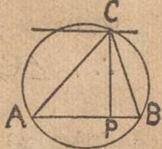
<u>ക്രിയ</u> $\angle BAT = x°$ ആയിരിക്കത്തക്കവണ്ണം AT രേഖ വരയ്ക്കുക. A യിൽക്കൂടി AT യ്ക്കു ലംബമായി ഒരു രേഖ വരയ്ക്കുക. ഈ രേഖയെ AB യുടെ മധ്യലംബം O യിൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. O കേന്ദ്രമായി OA വ്യാസാർദ്ധമായി വൃത്തം വരയ്ക്കുക. $\angle BAT$ യുടെ മറുവശത്തുള്ള വൃത്തഖണ്ഡമാണ് ആവശ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന വൃത്തഖണ്ഡം.



<u>ഉപപത്തി</u> O എന്ന ബിന്ദു AB യുടെ മധ്യലംബത്തിലുള്ള ബിന്ദുവാകയാൽ OA = OB. അതായത് നാം വരച്ച

വൃത്തം B യിൽകൂടി പോകുന്നതാണ്. AT രേഖ OA യ്ക്കു ലംബമാകയാൽ AT രേഖ വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശകമാണ്. AB എന്ന ഞാണിനും AT എന്ന സ്പർശകത്തിനും ഇടയ്ക്കുള്ള കോണ് മറുവശത്തുള്ള വൃത്തഖണ്ഡത്തിലുള്ള കോണിനു സമമാകയാൽ നാം വരച്ച വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണ് x° ആയിരിക്കും.

നിർമ്മിതി ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പാദം, ഉയരം, ശീർഷകോണ് ഇവ തന്നിട്ടുണ്ട്. ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.



സങ്കല്പം ABC എന്ന ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പാദം b'', ഉയരം h'', ശീർഷകോൺ x°.

നിർമ്മിക്കേണ്ടതു് ത്രികോണം ABC

ക്രിയ $AB=b''$ ആകത്തക്കവണ്ണം വരയ്ക്കുക. AB യിന്മേൽ x° ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക. AB യിൽനിന്നും h'' അകലത്തിൽ AB യ്ക്കു സമാന്തരമായി ഒരു രേഖ വരയ്ക്കുക. ഈ രേഖ വൃത്തഖണ്ഡത്തെ C യിൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. AC, BC ഇവ യോജിപ്പിക്കുക. ABC യാണ് ആവശ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ത്രികോണം.

ഉപപത്തി C യിൽനിന്നും AB യ്ക്കു ലംബമായി CP രേഖ വരയ്ക്കുക.

$CP=h''$ (ക്രിയ) $AB=b''$ (ക്രിയ)

x° ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തഖണ്ഡത്തിലെ കോണാകയാൽ

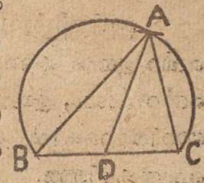
$\angle ACB=x^\circ$.

നിർമ്മിതി ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ പാദം, ശീർഷകോണ്, പാദത്തിലേയ്ക്കുള്ള മധ്യമം എന്നിവ തന്നിട്ടുണ്ട്. ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.

സങ്കല്പം ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $BC=a''$, ശീർഷകോണ് $=x^\circ$, പാദത്തിലേക്കുള്ള മധ്യമം $=m''$.

നിർമ്മിക്കേണ്ടതു് ത്രികോണം ABC.

ക്രിയ $BC = a''$ ആയി വരയ്ക്കുക. BC യിന്മേൽ x° കോണു് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒരു വൃത്തഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക. BC യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവായ D കണ്ടുപിടിച്ചു് D കേന്ദ്രമായും, വ്യാസാർദ്ധം m'' ആയും ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. ഈ ചാപം വൃത്തഖണ്ഡത്തെ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ



ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. AB, AC ഇവ യോജിപ്പിക്കുക. $\triangle ABC$ യാണു് ആവശ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ത്രികോണം.

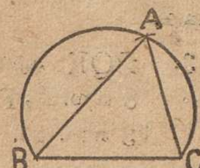
N.B. ഇതിൻെറ ഉപപത്തി വളരെ എളുപ്പമായതിനാൽ ഇവിടെ ചേർക്കുന്നില്ല.

നിർമ്മിതി ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ പാദം, ശീർഷകോണു്, ഒരു പാർശ്വം ഇവ തന്നിട്ടുണ്ടു്. ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക.

സങ്കല്പം ത്രികോണം ABC യിൽ പാദം $BC = a''$, ശീർഷകോണു് $A = x^\circ$, $AC = b''$.

നിർമ്മിക്കേണ്ടതു് ത്രികോണം ABC.

ക്രിയ a'' നീളത്തിൽ BC വരച്ചു് അതിന്മേൽ x° ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക. C കേന്ദ്രമായും b'' വ്യാസാർദ്ധമായും ഒരു ചാപം വരയ്ക്കുക. ഈ ചാപം വൃത്തഖണ്ഡത്തെ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. AB, AC ഇവ യോജിപ്പിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ABC എന്ന ത്രികോണമാണു് ആവശ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ത്രികോണം.



(N. B. ഉപപത്തി വളരെ ലഘുവായതിനാൽ ഇവിടെ കൊടുത്തിട്ടില്ല).

നിമ്മിതി. ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ പാദം, ശീർഷകോണ്, വിസ്തീണ്ണം ഇവ തന്നിട്ടുണ്ട്. ത്രികോണം നിമ്മിക്കുക.

(വിസ്തീണ്ണവും പാദവും തന്നിട്ടുള്ളതുകൊണ്ട് ത്രികോണത്തിൻെറ ഉയരം കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്. അപ്പോൾ ത്രികോണത്തിൻെറ പാദം, ഉയരം, ശീർഷകോണ് ഇവ നമുക്കറിയാം. ഇവ അറിയാമെങ്കിൽ ത്രികോണം വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു ചർച്ച ചെയ്തുകഴിഞ്ഞു.)

അഭ്യാസം 13.

1. 2″ നീളത്തിൽ ഒരു രേഖ വരച്ച് അതിന്മേൽ $48°$ കോണ് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

2. 6 സെ. മീ. നീളത്തിൽ ഒരു നേർവര വരച്ച് അതിന്മേൽ $110°$ കോണ് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന വൃത്തഖണ്ഡം വരയ്ക്കുക.

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അളവുകൾ ഉള്ള ത്രികോണങ്ങൾ നിമ്മിക്കുക.

3. PQR എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle P = 84°$, $QR =$ 8 സെ.മീ, P യിൽനിന്നും എതിർവശത്തേക്കുള്ള ലംബം $=$ 3 സെ. മീ.

4. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ പാദമായ $BC = 2''$, ഉയരം $= \frac{3}{4}''$, $\angle A = 100°$.

5. DEF എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle D = 42°$, $EF = 3$ സെ. മീ, D യിൽനിന്നും എതിർവശത്തേക്കുള്ള മധ്യമം $=$ $3\frac{1}{2}$ സെ. മീ.

6. KLM എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle K = 110°$, $LM =$ $2{\cdot}5''$, K യിൽനിന്നും എതിർവശത്തേക്കുള്ള മധ്യമം $= 1''$.

7. XYZ എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ പാദമായ $YZ = 2''$, ശീർഷകോണ് $= 55°$, വിസ്തീർണ്ണം $= 1\frac{1}{2}$ ച. ഇ.

8. PQR എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ പാദമായ $PQ = 8$ സെ. മീ. ശീർഷകോണ് $= 120°$, വിസ്തീർണ്ണം $= 6$ ച. സെ. മീ.

9. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ ശീഷകോണായ $\angle C = 84°$, $AB = 6$ സെ. മീ, $BC = 3$ സെ. മീ.

10. DEF എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle F = 34°$, $DE = 1\frac{1}{2}''$, $EF = 2\frac{1}{4}''$.

അഭ്യാസം 14

1. TAB എന്ന നേർവര ഒരു വൃത്തത്തെ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. TC, വൃത്തത്തിനു വരച്ചിരിക്കുന്ന സ്പർശകം. $\angle TCB = 120°$, $\angle CTB = 25°$ ആയാൽ $\angle CAB$ കാണുക.

2. PQR ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ ലഘുചാപമാകുന്നു. P യും R ലും ഉള്ള സ്പർശകങ്ങൾ T യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു $\angle PTQ = 64°$ ആയാൽ $\angle PQR$ കണക്കാക്കുക.

3. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ അന്തർവൃത്തം അതിൻെറ ഭുജങ്ങളെ X, Y, Z എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. $\angle ABC = 70°$, $\angle BAC = 60°$ ആയാൽ $\triangle XYZ$ൻെറ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

4. ബാഹ്യസ്പർശികളായ രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ 12 സെ. മീററും, 3 സെ. മീററും ആകുന്നു. അവയുടെ പൊതുസ്പർശകത്തിൻെറ നീളം കണക്കാക്കുക.

5. 1″ വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഒരു വൃത്തം വരയ്ക്കുക. ഇതിനെ പരിലേഖനം (Circumscribe) ചെയ്ത് 40°, 60°, 80° അളവുകളിൽ കോണുകളുള്ള ഒരു ത്രികോണം വരയ്ക്കുക.

6. $50°$, $60°$, $70°$ കോണുകളുള്ള ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ മൂന്നു ശീർഷങ്ങളിലുംകൂടി ത്രികോണത്തിൻെറ പരിവൃത്തത്തിനു് സ്പർശകങ്ങൾ വരച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ സ്പർശകങ്ങൾ ചേൎന്നുണ്ടാകുന്ന വലിയ ത്രികോണത്തിൻെറ കോണുകൾ കണക്കാക്കുക.

7. ഒരു വൃത്തത്തെ പരിലേഖനം ചെയ്തു് ഒരു സാമാന്തരികം വരച്ചാൽ അതു് ഒരു സമചതുർഭുജമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

8. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിലെ രണ്ടു സമാന്തരസ്പർശകങ്ങളെ വേറൊരു സ്പർശകം P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle POQ = 90°$ എന്നു സമൎത്ഥിക്കുക.

9. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ അന്തർവൃത്തം BC യെ D യിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. AB യും AC യും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം BD യും DC യും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിനു തുല്യമാണു് എന്നു തെളിയിക്കുക.

10. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ അന്തർവൃത്തം BC, CA, AB എന്നീ വശങ്ങളെ D, E, F എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. $AE = AF = s - a$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

$$\left(s = \frac{a+b+c}{2}\right)$$

11. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തെ പരിലേഖനംചെയ്തു വരച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു ചതുർഭുജമാണു് PQRS. $\angle POQ + \angle ROS = 180°$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

12. 10-ാംചോദ്യത്തിൽ ΔABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തെ s കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ അന്തർവൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസാർദ്ധം കിട്ടുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

13. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ A യ്ക്ക് എതിരേയുള്ള വ്യതീവൃത്തം AB നീട്ടിയ രേഖയെ Y എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിച്ചാൽ Ay = s എന്നു തെളിയിക്കുക.

14. AOC, BOD എന്നിവ ABCD എന്ന വൃത്തത്തിന്റെ ഞാണുകൾ ആകുന്നു. A യിലുള്ള സ്പർശകം DB യെ നീട്ടിയാലുള്ള രേഖയെ T യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle ATD = 30°$, $\angle COD = 80°$, $\angle TBC = 140°$ ആയാൽ $\angle BAC$ കണക്കാക്കുക.

15. രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടെ വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ 2 സെ. മീ, 7 സെ. മീ. വൃത്തകേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലം 13 സെ.മീ. ഇവയുടെ പൊതുസ്പർശകങ്ങളുടെ നീളം കണക്കാക്കുക.

16. AB എന്ന ഞാണിനെ T യിലേക്കു നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. T-യിൽനിന്നും വൃത്തത്തിലേയ്ക്കുള്ള ഒരു സ്പർശകമാണ് TP. $\angle TBP = \angle TPA$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

17. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ അന്തർവൃത്തം BC, CA, AB എന്നീ ഭുജങ്ങളെ X, Y, Z എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. Y, Z ഇവ AC, AB എന്നീ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളാണെങ്കിൽ, BC യുടെ മധ്യബിന്ദു X ആയിരിക്കുമെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

18. ACB, ADB എന്നീ വൃത്തങ്ങൾ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AC, AD ഇവ A യിലുള്ള സ്പർശകങ്ങളാണ്. $\angle ABC = \angle ABD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

19. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. A-യിൽക്കൂടിയുള്ള ഒരു നേർവര വൃത്തങ്ങളെ X, Y എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. ഈ ബിന്ദുക്കളിലുള്ള സ്പർശകങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

20. APB എന്ന വൃത്തത്തിൽ A യിലുള്ള സ്പർശകമാണ് AD. APയും BDയും സമാന്തരമായാൽ

$\angle ABP = \angle ADB$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

21. ഒരു വൃത്തത്തെ പരിലേഖനം ചെയ്തു വരച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു ചതുർഭുജമാണ് ABCD. $AB + CD = BC + AD$ എന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

22. PQR എന്ന ത്രികോണത്തിൽ PQ=PR. QR ൻെറ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് S. PSR എന്ന വൃത്തത്തിന് S ൽ വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശകം PQ ന് ലംബമായിരിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

23. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ A യിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. ഇവയുടെ ഒരു ഏകപാർശ്വപൊതുസ്പർശകമാണ് PQ. A യിൽക്കൂടിയുള്ള സ്പർശകം PQ നെ സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്നും,

$\angle PAQ = 90°$ എന്നും തെളിയിക്കുക.

24. AB, CD എന്നിവ ABDC എന്ന വൃത്തത്തിൻെറ സമാന്തരങ്ങളായ രണ്ടു ഞാണുകളാണ്. A യിലുള്ള സ്പർശകം DC യെ നീട്ടിയാലുള്ള രേഖയെ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. PB രേഖ വൃത്തത്തെ Q യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle PAQ = \angle BPD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

25. ABCDEF എന്നതു് ഒരു വൃത്തത്തെ പരിലേഖനംചെയ്തു് വരച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു ഷഡ്ഭുജമാണ്.

$AB + CD + EF = BC + DE + FA$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

26. APB, AQB എന്നീ വൃത്തങ്ങൾ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AQB എന്ന വൃത്തത്തിന് A യിലുള്ള സ്പർശകമാണ് PA. APB എന്ന വൃത്തത്തിന് B യിലുള്ള സ്പർശകമാണ് BQ. AQ, BP ഇവ സമാന്തരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

27. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ തുല്യമായ രണ്ടു ഞാണുകളാണ് CA യും CB യും. A യിലെ സ്പർശകം BC യെ നീട്ടിയാലുള്ള രേഖയെ D യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AD യെ E യിലേക്കു നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. $\angle BDE = 3\angle CAD$ എന്നു സമത്ഥിക്കുക.

28. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle A$ യുടെ സമഭാജി BC യെ D യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. BC യെ D യിൽ സ്പർശിക്കുന്നതും A യിൽകൂടി പോകുന്നതുമായ വൃത്തം AB, AC എന്നീ വശങ്ങളെ E, F എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle EDB = \angle FDC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

29. ACB, ADB എന്നീ വൃത്തങ്ങൾ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. CA, DA ഇവ A യിലുള്ള സ്പർശകങ്ങളാണ്. CBD ഒരു നേർവരയാണെങ്കിൽ $\angle CAD = 90°$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

30. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ ആന്തരമായി സ്പർശിക്കുന്നു. BCDE എന്ന നേർവര ഒരു വൃത്തത്തെ B, E എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും മറേറ വൃത്തത്തെ C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle BAC = \angle DAE$ എന്നു സമത്ഥിക്കുക.

31. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ പരിവൃത്തത്തിൽ C യിലെ സ്പർശകം AB നീട്ടിയാലുള്ള രേഖയെ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle ACB$ യുടെ സമഭാജി AB യെ D യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $PC = PD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

32. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle B = 90°$. A യ്ക്കെതിരേയുള്ള വ്യതികേന്ദ്രമാണ് X. $\angle AXC = 45°$ എന്നു സമത്ഥിക്കുക.

33. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസമാണ് AOB. B യിലെ സ്പർശകം AC എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ഞാണി

നെ T-യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle OCB = \angle ATB$ എന്നു സമത്ഥിക്കുക.

34. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നു. ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ B എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിലുള്ള സ്പർശകം മറേറ വൃത്തത്തെ C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle BAC + \angle BAD = 180°$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

35. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $AB = AC$. BC യെ B എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നതും A യിൽക്കൂടി പോകുന്നതുമായ വൃത്തം AC യെ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $BP = BC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

36. A കേന്ദ്രമായിട്ടുള്ള ഒരു വൃത്തം B കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തെ X എന്ന ബിന്ദുവിലും, C കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തെ Y എന്ന ബിന്ദുവിലും ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നു. XY രേഖ C കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തെ Z എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. CZ രേഖ BX നു സമാന്തരമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

37. CAD, CBD എന്നീ വൃത്തങ്ങളുടെ ഒരു പൊതുസ്പർശകമാണ് AB. $\angle ADB + \angle ACB = 180°$ എന്നു സമത്ഥിക്കുക.

38. AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ O യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. A, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ സ്പർശകങ്ങൾ X ൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. B, D എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലെ സ്പർശകങ്ങൾ Y ൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle AXC + \angle DYB = 2\angle AOD$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

39. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ അന്തർവൃത്തത്തിൻെറ കേന്ദ്രമാണ് I. I കേന്ദ്രമായി വരച്ച വേറൊരു വൃത്തം

BC യെ D, E എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും, AC യെ F, G എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും, AB യെ H, K എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും ഖണ്ഡിക്കുന്നു. DE = FG = HK എന്നു തെളിയിക്കുക.

40. O കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസമാണ് AB. BT = OB ആകത്തക്കവണ്ണം AB യെ T യിലേക്കു നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. T യിൽനിന്നുമുള്ള സ്പർശകമാണ് TQ. TQ = QA എന്നു തെളിയിക്കുക.

41. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ A എന്ന ബിന്ദുവിൽ ബാഹ്യമായി സ്പർശിക്കുന്നു. ഇതിൽ ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസമാണ് AB. B യിൽനിന്നും മറേറ വൃത്തത്തിലേക്കുള്ള സ്പർശകമാണ് BT. $\angle ATB = 45° - \frac{1}{2}\angle ABT$ എന്നു സമത്ഥിക്കുക.

42. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ ആന്തരമായി A യിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. വലിയ വൃത്തത്തിൻെറ PQ എന്ന ഞാൺ ചെറിയ വൃത്തത്തെ R എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നു. $\angle PAR = \angle QAR$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

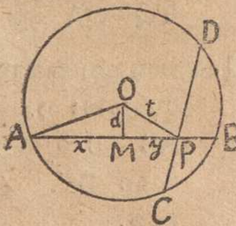
43. ABCD ഒരു ചക്രീയചതുർഭുജം. A യിലും C യിലും ഉള്ള സ്പർശകങ്ങൾ P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $\angle ABC$, $\angle ADC$ എന്നീ കോണുകളുടെ വ്യത്യാസത്തിനു തുല്യമാണ് $\angle APC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

44. A, B, C ഇവ കേന്ദ്രമായ മൂന്നു വൃത്തങ്ങളിൽ ഓരോന്നും മററു രണ്ടു വൃത്തങ്ങളെ സ്പർശിക്കുന്നു. സ്പർശകബിന്ദുക്കൾ D, E, F ഇവയായാൽ $\triangle ABC$ യുടെ അന്തർവൃത്തം $\triangle DEF$ ൻെറ പരിവൃത്തമാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

ഉപപാദ്യം 22

ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ രണ്ടു ഞാണുകൾ പരസ്പരം ഖണ്ഡിച്ചാൽ അവയിൽ ഒരു ഞാണിൻെറ ഖണ്ഡങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം മറേറ ഞാണിൻെറ ഖണ്ഡങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തോടു തുല്യമായിരിക്കും.

<u>സങ്കല്പം</u> O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിലെ AB, CD എന്നീ ഞാണുകൾ പരസ്പരം P യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു.



<u>അനുമാനം</u> PA.PB=PC.PD

<u>ക്രിയ</u> O യിൽനിന്നും OM രേഖ AB യ്ക്കു ലംബമായി വരയ്ക്കുക. OA, OP ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

<u>ഉപപത്തി</u> OM രേഖ AB എന്ന ഞാണിനു ലംബമായതുകൊണ്ട്

$$AM=BM$$

$AM=BM=x$ എന്നും, $PM=y$ എന്നും, $OA=r$ എന്നും, $OP=t$ എന്നും, $OM=d$ എന്നും ഇരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ $PA=x+y$, $PB=x-y$

$$\therefore \quad PA.PB=(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

OAM ഒരു മട്ടത്രികോണമായതുകൊണ്ട്

$$x^2+d^2=r^2$$

അതുപോലെ $y^2+d^2=t^2$

ഇവതമ്മിൽ കുറയ്ക്കുമ്പോൾ

$$x^2-y^2=r^2-t^2$$

$$\therefore \quad PA.PB=r^2-t^2$$

O യിൽനിന്നും CD എന്ന ഞാണിനു ലംബം വരച്ച് $PC.PD = r^2 - t^2$ എന്നും തെളിയിക്കാം.

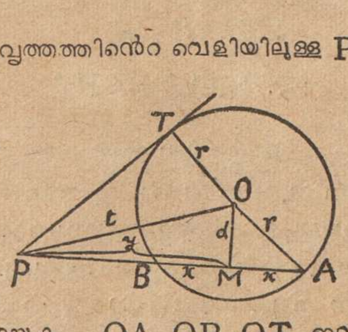
$\therefore \quad PA.PB = PC.CD$

ഉപപാദ്യം 23-ലെ ചിത്രത്തിലുള്ള PBA എന്ന രേഖയെ നോക്കുക. ഈ രേഖ വൃത്തത്തെ രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. ഇപ്രകാരമുള്ള ഒരു രേഖയെ വൃത്തത്തിൻെറ ഖണ്ഡകം (secant) എന്നു പറയുന്നു.

ഉപപാദ്യം 23

ഒരു വൃത്തത്തിനു വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നും വൃത്തത്തിന് ഒരു ഖണ്ഡകവും സ്പർശകവും വരച്ചാൽ, വൃത്തത്തിനു വെളിയിലുള്ള ഖണ്ഡകത്തിൻെറ ഭാഗവും മുഴുവൻ ഖണ്ഡകവും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന ഫലം, സ്പർശകത്തിൻെറ വർഗ്ഗത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും.

സങ്കല്പം O കേന്ദ്രമായ വൃത്തത്തിൻെറ വെളിയിലുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നും PBA എന്ന ഖണ്ഡകവും PT എന്ന സ്പർശകവും വൃത്തത്തിനു വരച്ചിരിക്കുന്നു.



അനുമാനം $PA.PB = PT^2$

ക്രിയ O യിൽനിന്നും OM രേഖ AB യ്ക്കു ലംബമായി വരയ്ക്കുക. OA, OP, OT ഇവ യോജിപ്പിക്കുക.

ഉപപത്തി OM രേഖ AB എന്ന ഞാണിനു ലംബമാകയാൽ $AM = BM$

$AM=BM=x$ എന്നും, $PM=y$ എന്നും, $OA=r$ എന്നും, $OP=t$ എന്നും, $OM=d$ എന്നും ഇരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ $PA=x+y$, $PB=y-x$

$\therefore \quad PA.PB=(x+y)(y-x)=y^2-x^2$

OAM ഒരു മട്ടത്രികോണമായതുകൊണ്ടു്

$$x^2+d^2=r^2$$

അതുപോലെ $y^2+d^2=t^2$

$\therefore \quad (y^2+d^2)-(x^2+d^2)=t^2-r^2$

അതായതു് $y^2-x^2=t^2-r^2$

$\therefore \quad PA.PB=t^2-r^2$

OT രേഖ വ്യാസാർദ്ധവും, PT രേഖ സ്സർശകവും ആകയാൽ

$\angle PTO=90^\circ$

PTO എന്ന മട്ടത്രികോണത്തിൽ

$PT^2=t^2-r^2$

$\therefore \quad PA.PB=PT^2$

അനുസിദ്ധാന്തം ഒരു വൃത്തത്തിനു വെളിയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നും വൃത്തത്തിലേക്കു് അനേകം ഖണ്ഡകങ്ങൾ വരയ്ക്കുകയും, ഓരോ ഖണ്ഡകത്തെ സംബന്ധിച്ചും മുഴുവൻ ഖണ്ഡകവും വൃത്തത്തിനു വെളിയിലുള്ള ഭാഗവും തമ്മിൽ ഗുണിച്ചു കിട്ടുന്ന ഫലം കണ്ടുപിടിക്കുകയും ചെയ്താൽ ഈ ഗുണനഫലങ്ങളെല്ലാം തുല്യങ്ങളായിരിക്കും. (ഓരോ ഗുണനഫലവും ബിന്ദുവിൽനിന്നും വൃത്തത്തിനു വരയ്ക്കുന്ന സ്സർശകത്തിൻെറ വർഗ്ഗത്തിനു തുല്യമാണു്)

അഭ്യാസം 15

1. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AB യെ നീട്ടിയാലുള്ള രേഖയിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് P. P യിൽനിന്നും ഈ വൃത്തങ്ങൾക്കു വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശകങ്ങൾ തുല്യങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

2. രണ്ടു വൃത്തങ്ങൾ A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. ഇവയുടെ ഒരു പൊതുസ്പർശകമാണ് CD. AB യെ നീട്ടിയാലുള്ള രേഖ CD യെ സമഭാഗം ചെയ്യുമെന്നു സമർത്ഥിക്കുക.

3. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ A, B എന്നീ മൂലകളിൽനിന്നും എതിർവശങ്ങളിലേക്കു വരച്ചിരിക്കുന്നതായ AP, BQ എന്നീ ലംബങ്ങൾ O യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. $AO.OP = BO.OQ$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

4. AC രേഖയ്ക്കകത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവാണ് B. A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി പോകുന്ന വൃത്തങ്ങൾക്ക് C യിൽനിന്നും വരയ്ക്കുന്ന സ്പശ്കങ്ങളെല്ലാം തുല്യമായിരിക്കുമെന്നു തെളിയിക്കുക.

5. ഒരു വൃത്തപരിധിയിലുള്ള P എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നും ആ വൃത്തത്തിൻെറ ഒരു വ്യാസമായ AB യിലേക്ക് PN എന്ന ലംബം വരച്ചിരിക്കുന്നു. $AN = 3''$, $NB = 12''$ ആയാൽ PN ൻെറ അളവെന്ത്?

6. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle A = 90°$. A യിൽനിന്നും BC യിലേയ്ക്കുള്ള ലംബമാണ് AD.
$AD^2 = BD.DC$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

7. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $AB = AC = 10''$. $BC = 12''$. A യിൽനിന്നും BC യിലേക്കുള്ള ലംബമാണ് AD. $\triangle ABC$ യുടെ പരിവൃത്തത്തെ E യിൽ ഖണ്ഡിക്കത്തക്ക

വണ്ണം AD യെ നീട്ടിയിരിക്കുന്നു. DE യുടെ അളവും പരിവൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസാദ്ധ്വും കണക്കാക്കുക.

8. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ BE, CF എന്നീ ലംബങ്ങൾ H എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. CE.CA= CH.CF എന്നും, AE.AC=AF.AB എന്നും തെളിയിക്കുക.

9. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle C=90°$. AC യിലുള്ള P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിൽനിന്നും PQ രേഖ AB യ്ക്കു ലംബമായി വരച്ചിരിക്കുന്നു. AC.AP=AB.AQ എന്നു തെളിയിക്കുക.

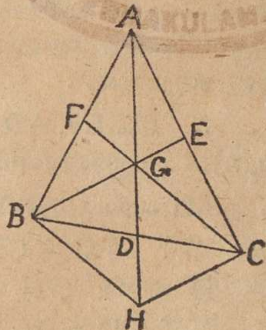
10. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ $\angle C=90°$. C യിൽനിന്നും AB യ്ക്കുള്ള ലംബമാണു് CD $AD.AB=AC^2$ എന്നു തെളിയിക്കുക.

11. AB, CD എന്നീ നേർവരകൾ E യിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. AE.EB=CE.ED ആയാൽ A, B, C, D ഇവ ഏകവൃത്തസ്ഥിതങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

12. PQ, PR ഇവ ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ ഞാണുകളാണു്. P യിലുള്ള സ്പർശകത്തിനു സമാന്തരമായ ഒരു രേഖ PQ, PR എന്നിവയെ D, E എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്നു. PD.PQ =PE.PR എന്നു തെളിയിക്കുക.

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചോദ്യം പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്ന ഒന്നാണു്.

ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ മൂന്നു മധ്യമങ്ങളും ഒരേ ബിന്ദുവിൽ പരസ്പരം ഖണ്ഡിക്കുമെന്നും, ഈ ബിന്ദു ഓരോ മധ്യമത്തിനേയും 1:2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുമെന്നും തെളിയിക്കുക.



സങ്കല്പം. ABC ഒരു ത്രികോണം.

അനുമാനം. ഇതിൻെറ മൂന്നു മധ്യമങ്ങളും ഒരേ ബിന്ദുവിൽകൂടി കടന്നു പോകും. ഈ ബിന്ദു ഓരോ മധ്യമത്തേയും 1:2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കും.

ക്രിയ. B, C എന്നീ മൂലകളിൽ നിന്നും എതിർവശങ്ങളിലേ ക്കുള്ള BE CF എന്നീ മധ്യമങ്ങൾ വരയ്ക്കുക. ഇവ G യിൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. AG യെ യോജിപ്പിച്ചു നീട്ടുക. ഈ രേഖ BC യെ D യിൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. B യിൽകൂടി BH രേഖ CF നു സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുക. ഈ രേഖ AD യെ നീട്ടിയാൽ കിട്ടുന്ന രേഖയെ H എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഖണ്ഡിക്കട്ടെ. CH യോജിപ്പിക്കുക.

ഉപപത്തി. △ ABH ൽ AB യുടെ മദ്ധ്യബിന്ദുവാണ് F. ക്രിയ അനുസരിച്ച് FG രേഖ BH ന് സമാന്തരമാണ്.

∴ AH ൻെറ മധ്യബിന്ദുവാണ് G.

△ ACH ൽ E, G എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ AC, AH എന്നീ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളാണ്. അതുകൊണ്ടു EGയും CHഉം സമാന്തരങ്ങളാണ്. അതായതു് BG യും CHഉം സമാന്തരങ്ങളാണ്.

BHCG എന്ന ചതുർഭുജത്തിൽ CHനു് സമാന്തരമാണ് BG (തെളിയിച്ചു).

CG ക്കു് സമാന്തരമാണ് BH (ക്രിയ).

∴ BHCG സാമാന്തരികമാണ്.

∴ ഇതിൻെറ കർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം സമഭാഗം ചെയ്യും.

$\therefore$ $BD=DC$ $GD=DH$

$BD=DC$ ആയതുകൊണ്ടു് AD രേഖ ത്രികോണം ABC യുടെ മധ്യമമാണു്.

$\therefore$ BE, CF, AD എന്നീ മൂന്നു മധ്യമങ്ങളും G എന്ന ബിന്ദുവിൽ പരസ്പരം ഖണ്ഡിക്കുന്നു.

AH ൻെറ മധ്യബിന്ദുവാണു് G എന്നു തെളിയിച്ചു.

$\therefore$ $AG = GH$

D എന്നതു് GH ൻെറ മധ്യബിന്ദുവായതുകൊണ്ടു്

$GD = \frac{1}{2}GH$

$\therefore$ $GD=\frac{1}{2}AG$

അതായതു് G എന്ന ബിന്ദു AD എന്ന മധ്യമത്തെ 1:2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുന്നു.

ഇതു പോലെ G എന്ന ബിന്ദു BE, CF എന്നീ മധ്യമങ്ങളേയും 1 : 2 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ഭാഗിക്കുമെന്നു് തെളിയിക്കാം.

ത്രികോണത്തിൻെറ മധ്യമങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചു് നാം കണ്ടുപിടിച്ച തത്വം താഴെകൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിർമ്മിതികൾക്കു് പ്രയോജനകരമാണു്.

<u>നിർമ്മിതി</u> ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ പാദമായ BC യും, AB, AC എന്നീ വശങ്ങളെ സമഭാഗം ചെയ്യുന്ന മധ്യമങ്ങളും തന്നിട്ടുണ്ടു്. ത്രികോണം ABC നിർമ്മിക്കുക.

<u>ക്രിയ</u> (73-ാംപേജിലെ ചിത്രം നോക്കുക). ആദ്യമായി BCG എന്ന ത്രികോണം നിർമ്മിക്കുക. BG, GC എന്നിവയുടെ അളവുകൾ തന്നിരിക്കുന്ന മധ്യമങ്ങളുടെ $\frac{2}{3}$ വീതം ആയിരിക്കണം. BC യുടെ മധ്യബിന്ദുവായ D കണ്ടുപിടിച്ചു് DG യെ യോജി

പ്പിക്കുക. GA=2DG ആകത്തക്കവണ്ണം DG യെ A യിലേക്കു നീട്ടുക. AB, AC ഇവ യോജിപ്പിക്കുക. ABC യാണ് ആവശ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ത്രികോണം.

നിമ്മിതി ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ മൂന്നു മധ്യമങ്ങളും തന്നിട്ടുണ്ട്. ത്രികോണം നിമ്മിക്കുക.

ക്രിയ (73-ാംപേജിലെ ചിത്രം നോക്കുക). ആദ്യമായി BGH എന്ന ത്രികോണം നിമ്മിക്കുക. ഇതിൻെറ വശങ്ങൾ മധ്യമങ്ങളുടെ $\frac{2}{3}$ വീതമായിരിക്കണം. GH ൻെറ മധ്യബിന്ദുവായ D കണ്ടുപിടിച്ച് BD യോജിപ്പിക്കുക. BD=DC ആകത്തക്കവണ്ണം BD യെ C യിലേക്കു നീട്ടുക. ഇപ്പോൾ BCG എന്ന ത്രികോണം കിട്ടിക്കഴിഞ്ഞു. ശേഷമുള്ള ക്രിയ മുൻപിലത്തെ നിമ്മിതിയിൽ ചെയ്തതുപോലെ ചെയ്യുക.

അഭ്യാസം 16

1. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ BC=2". CA, AB എന്നീ വശങ്ങളിലേയ്ക്കുള്ള മധ്യമങ്ങൾ 1·8", 1·5". ത്രികോണം നിമ്മിക്കുക.
2. PQR എന്ന ത്രികോണത്തിൽ PQ=6 സെ.മീ. QR, RP എന്നീ വശങ്ങളിലേക്കുള്ള മധ്യമങ്ങൾ $4\frac{1}{2}$ സെ.മീ, 6 സെ. മീ. ത്രികോണം നിമ്മിക്കുക.
3. DEF എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ മധ്യമങ്ങൾ 1·5", 1·8", 1·2" ആകുന്നു. ത്രികോണം നിമ്മിക്കുക.
4. XYZ എന്ന ത്രികോണത്തിൻെറ മധ്യമങ്ങൾ $7\frac{1}{2}$ സെ.മീ, 6 സെ.മീ, $4\frac{1}{2}$ സെ.മീ. ആകുന്നു. ത്രികോണം നിമ്മിക്കുക.

ക്ഷേത്രഗണിതം printed at S. B. Press, Trivandrum, &
ബീജഗണിതം printed at Star Press, Trivandrum.

ബീജഗണിതം

★

അദ്ധ്യായം 1

ധർമ്മങ്ങൾ (Functions)

1. $ax^2 + abx + ab$ എന്ന രാശിമാല പരിശോധിക്കുക. ഇതിൽ ax^2, abx, ab എന്നിങ്ങനെ മൂന്നു പദങ്ങളാണല്ലോ ഉള്ളതു്. $a \times x \times x$ എന്നതിനെയാണു് നാം ax^2 എന്നു ചുരുക്കിയെഴുതുന്നതു്. അപ്പോൾ മൂന്നക്ഷരങ്ങൾ ഗുണിച്ചെഴുതിയിട്ടുള്ളതാണു് ax^2 എന്ന പദം. അതുകൊണ്ടു് ഈ പദത്തിനെ മൂന്നാം ഡിഗ്രിയിൽ (degree) ഉള്ള ഒരു പദമെന്നു പറയുന്നു. abx എന്ന പദവും മൂന്നാം ഡിഗ്രിയിലുള്ളതു തന്നെ. ab എന്ന പദത്തിൻെറ ഡിഗ്രി 2 ആകുന്നു.

$6ax^2$ എന്ന പദത്തിൻെറ ഡിഗ്രിയും 3 തന്നെയാണു്. അതായതു് ഒരു പദത്തിൻെറ ഡിഗ്രി നിശ്ചയിക്കുന്നതിനു് അതിൻെറ സംഖ്യാഘടകത്തെ ഗൗനിക്കേണ്ടതില്ല. അതിലുള്ള അക്ഷരങ്ങളെ മാത്രം പരിഗണിച്ചാൽ മതിയാകും.

$6ax^2 + 2abx + 3ab$ എന്ന രാശിമാലയിലെ ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങൾ മൂന്നാം ഡിഗ്രിയിലുള്ളവയും ഒടുവിലത്തെ പദം രണ്ടാം ഡിഗ്രിയിലുള്ളവയുമാണു്. ഈ മൂന്നു പദങ്ങളുടെ ഡിഗ്രികളിൽ ഏററവും കൂടിയതു് 3 ആയതുകൊണ്ടു് $6ax^2+2abx+ab$ എന്ന രാശിമാലയെ മൂന്നാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു രാശിമാലയെന്നു പറയുന്നു. അതായതു് ഒരു രാശിമാലയുടെ ഡിഗ്രി നിശ്ചയിക്കുന്നതു് ആ രാശിമാലയിലുള്ള പദങ്ങളിൽ ഏററവും ഉയൎന്ന ഡിഗ്രിയിലുള്ള പദത്തിൻെറ ഡിഗ്രിയെ ആസ്പദമാക്കിയാണു്. $8x^5 + 3x + 4$ എന്നതു് അഞ്ചാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു രാശിമാലയാണു്. $5ab^3 + 3ab^2 + 2a$ എന്ന രാശിമാലയുടെ ഡിഗ്രി 4 ആകുന്നു.

ചിലപ്പോൾ ഒരു രാശിമാലയുടെ ഡിഗ്രി നിശ്ചയിക്കുന്നതിന് അതിലുള്ള ചില അക്ഷരങ്ങളെ മാത്രമേ പരിഗണിച്ചുള്ളു എന്നുവരാം. x എന്ന അക്ഷരത്തെ മാത്രം പരിഗണിച്ച് $a x^2 + a b x + a b$ എന്നതു് x ന്റെ രണ്ടാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു രാശിമാലയാണെന്നു പറയാം. അപ്പോൾ ഇതിലുള്ള a, b എന്നീ അക്ഷരങ്ങളെ വെറും ഗുണോത്തരങ്ങളായി മാത്രമാണ് കരുതുന്നതു്. $a x^2 + a b x + a b$ എന്നതിനെ x ന്റെ രണ്ടാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു രാശിമാലയായി കരുതുമ്പോൾ x നെ ചരമെന്നും (variable), a, b ഇവയെ സ്ഥിരങ്ങളെന്നും (constants) പറയുന്നു $a x^2$ രണ്ടാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു പദവും, $a b x$ ഒന്നാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള പദവും, $a b$ പൂജ്യം ഡിഗ്രിയിലുള്ള പദം അല്ലെങ്കിൽ സ്ഥിരരാശിയും ആകുന്നു

'ചരങ്ങളെപ്പററി ചർച്ചചെയ്യുമ്പോൾ 'രാശിമാല' എന്നതിനു പകരം 'ധർമ്മം' (function) എന്ന വാക്കുപയോഗിക്കുകയാണ് കുറേക്കൂടി സൗകര്യം. $a x^2 + a b x + a b$ എന്നതു് x ന്റെ ഒരു ധർമ്മമാകുന്നു.

x y, എന്നീ അക്ഷരങ്ങളെ ചരങ്ങളായി പരിഗണിക്കുകയാണെങ്കിൽ $a x^2 + b x y + c y^2$ എന്നതു് x, y എന്നിവയുടെ ഒരു ധർമ്മമെന്നു പറയാം.

'x ന്റെ ഒരു ധർമ്മം' (function of x) എന്നെഴുതുന്നതിനു പകരം $f(x)$ എന്നോ $F(x)$ എന്നോ എഴുതിയാൽ മതിയാകും. 'x, y ഇവയുടെ ധർമ്മം' എന്നതിനെക്കുറിക്കാൻ $f(x, y)$ എന്നോ, $F(x, y)$ എന്നോ എഴുതാവുന്നതാണ്.

“x ന്റെ ഒരു ധർമ്മമായ $7 x^2 - 3 x + 12$ എന്ന രാശിമാലയിൽ $x = 3$ ആയാൽ രാശിമാലയുടെ വിലയെന്തു്?” എന്ന ചോദ്യം അല്പംകൂടി ചുരുക്കി താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ ചോദിക്കാം.

“$F(x) = 7 x^2 - 3 x + 12$ ആയാൽ $F(3)$ കാണുക.”

ഉദാ. 1, $F(x) = 7x^2 - 3x + 12$ ആയാൽ $F(3)$ എത്ര?

$$F(3) = 7 \times 3^2 - 3 \times 3 + 12 = \underline{\underline{66}}$$

ഉദാ. 2. $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$; $F(x) = 2x^2 + 3x - 2$ ആയാൽ $f(3) - F(2)$ എത്ര?

$$f(3) = 3 \times 3^2 - 5 \times 3 + 4 = 16$$

$$F(2) = 2 \times 2^2 + 3 \times 2 - 2 = 12$$

$$\therefore \quad f(3) - F(2) = 16 - 12 = \underline{4}$$

അഭ്യാസം 1

1. $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ ആയാൽ $f(0), f(1)$ $f(3)$ ഇവയുടെ വില കാണുക.
2. $F(x) = 3x^3 + 2x^2 + 2x + 3$ ആയാൽ $F(2)$, $F(-3)$, $F(0)$ ഇവയുടെ വിലകാണുക.
3. $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ ആയാൽ $f(5)$, $f(-3)$ ഇവയുടെ വില കാണുക.
4. $f(x) = 3x^2 - 2x + 6$, $F(x) = 5x^2 + 3x - 5$ ആയാൽ താഴെപ്പറയുന്നവയുടെ വില കാണുക.

   (a) $f(0) + F(0)$

   (b) $f(1) - F(1)$

   (c) $f(4) - F(3)$

2. സമകൃതിധർമ്മങ്ങൾ

(Homogeneous Functions)

ഒരു ധർമ്മത്തിലെ പദങ്ങളെല്ലാം ഒരേ ഡിഗ്രിയിലുള്ളവയായാൽ ആ ധർമ്മത്തെ ഒരു സമകൃതിധർമ്മമെന്നു പറയുന്നു. $x + y$ എന്നതു് x, y എന്നിവയുടെ ഒന്നാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു സമകൃതി ധർമ്മമാണു്. $a x^2 + b x y + c y^2$ എന്നതു് x, y എന്നിവയുടെ രണ്ടാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു സമകൃതി ധർമ്മമാണു്, $a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + b^3$ എന്നതു് a, b എന്നിവയുടെ മൂന്നാംഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു സമകൃതിധർമ്മമാണു്.

രണ്ടോ അതിൽ കൂടുതലോ സമകൃതി ധർമ്മങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ഒരു സമകൃതി ധർമ്മമായിരിക്കും. മാത്രമല്ല ഗുണനഫലമായ ധർമ്മത്തിന്റെ ഡിഗ്രി, ഘടകങ്ങളായ ധർമ്മങ്ങളുടെ ഡിഗ്രികൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുന്നതായിരിക്കും. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കുക.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$
$$(x + y)(x + y)(x+y) = x^3 + 3x^2 y + 3x y^2 + y^3$$
$$(x - y)(x^2 + x y + y^2) = x^3 - y^3$$

അഭ്യാസം 2

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമകൃതിധർമ്മങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം കാണുക.

1. $(a + b + c)(a - b)$
2. $(x + y)(x - y)(x^2 + y^2)$
3. $(x + y)(y + z)(z + x)$

അദ്ധ്യായം 2

ഗുണനം; ഹരണം; വർഗ്ഗമൂലം

1. ഒരു ദ്വിപദം കൊണ്ട് ഒരു രാശിമാലയെ ഗുണിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നിങ്ങൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. രണ്ടിൽ കൂടുതൽ പദങ്ങളുള്ള ഒരു രാശിമാല കൊണ്ടു ഗുണിക്കുന്നതിനും നിങ്ങൾ മുൻപു പഠിച്ചിട്ടുള്ള രീതി ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാ: 1. $(3x - 5x^2 + 2x^3 + 1) \times (2 + 4x^2 - 4x)$ ന്റെ ഗുണനഫലം കാണുക.

ആദ്യമായി x ന്റെ ഡിഗ്രിയെ ആസ്പദമാക്കി അവരോഹണക്രമത്തിലോ ആരോഹണക്രമത്തിലോ എഴുതുകയും അതിനുശേഷം സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുന്നതുപോലെ ഇവയെ എഴുതി ഗുണിക്കുകയും ചെയ്യാവുന്നതാണ്. സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ നാം വലത്തുവശത്തുള്ള അക്കം മുതലാണ് തുടങ്ങുന്നത്. എന്നാൽ ബീജഗണിതത്തിൽ ഇടത്തുവശത്തുള്ള പദം മുതൽ ഗുണനം തുടങ്ങുന്നതാണ് സൗകര്യം

$$\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2x^3 & -5x^2 & +3x & +1 \\
 & & & 4x^2 & -4x & +2 \\
\hline
8x^5 & -20x^4 & +12x^3 & +4x^2 & & \\
 & -8x^4 & +20x^3 & -12x^2 & -4x & \\
 & & 4x^3 & -10x^2 & +6x & +2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{ഗുണനഫലം} = 8x^5 - 28x^4 + 36x^3 - 18x^2 + 2x + 2$$

അഭ്യാസം 3

ഗുണനഫലം കാണുക

1. $(x^2 + x - 2) \quad (x^2 - x - 3)$
2. $(x^2 + 5 - 7x) \quad (3 - 2x + 2x^2)$
3. $(2y^3 - 3y^2 + 2y) \quad (3y + 2 + 2y^2)$
4. $(a^5 + a^4 + 7a^3) \quad (5 + a^2 + 3a)$

2. മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിലുള്ള ഗുണനഫലങ്ങൾ കാണുന്നതിന് അല്പംകൂടി ലഘുവായ ഒരു രീതിയുണ്ട്. $(2x^3 - 5x^2 + 3x + 1)$ $(4x^2 - 4x + 2)$ എന്ന ഗുണനഫലം കാണുന്നതിന് ഓരോ ധർമ്മത്തിലുമുള്ള പദങ്ങളുടെ ഗുണോത്തരങ്ങൾ മാത്രം എടുത്ത് അതാതിന്റെ സ്ഥാനത്തെഴുതി താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ ക്രിയചെയ്ത് ഗുണനഫലം കണ്ടുപിടിക്കാം.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
2 - 5 & + 3 & + 1 & & & \\
4 - 4 & + 2 & & & & \\
\hline
8 - 20 & + 12 & + 4 & & & \\
- 8 & + 20 & - 12 & - 4 & & \\
& + 4 & - 10 & + 6 & + 2 & \\
\hline
8 - 28 & + 36 & - 18 & + 2 & + 2 &
\end{array}
$$

ഗുണനഫലത്തിൽ ആദ്യത്തെ പദത്തിന്റെ ഗുണോത്തരം 8 ആണ്. ഈ പദം ഏതാണ്? ഗുണിക്കേണ്ട ഓരോ ധർമ്മത്തിലേയും ആദ്യത്തെ പദങ്ങൾ $2x^3$, $4x^2$ ഇവയായതുകൊണ്ട് ഗുണനഫലത്തിലെ ആദ്യത്തെ പദം $8x^5$ ആണെന്നു മനസ്സിലാക്കാം. ഗുണനഫലത്തിലെ അടുത്ത പദം നാലാം ഡിഗ്രിയിലുള്ളതെന്നും, അതിനടുത്ത പദം മൂന്നാം ഡിഗ്രിയിലുള്ളതെന്നും മററും വ്യക്തമാണ്. അതുകൊണ്ട് മുകളിലത്തെ ഗുണനഫലം പൂർണ്ണരൂപത്തിൽ എഴുതുമ്പോൾ $8x^5 - 28x^4 + 36x^3 + 18x^2 + 2x + 2$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

ഈ രീതിയിൽ ഗുണനക്രിയ ചെയ്യുമ്പോൾ ഒരു കാര്യം പ്രത്യേകം ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതായിട്ടുണ്ട്. $(3x^3 - 4x + 2)$ $(x^3 - 2x^2 - 3)$ ന്റെ ഗുണനഫലം കാണണമെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇതിൽ ആദ്യത്തെ ധർമ്മത്തിൽ x^2 എന്ന പദവും രണ്ടാമത്തേതിൽ x എന്ന പദവും ഇല്ലാത്തതുകൊണ്ട് ഇവയെ ആദ്യമായി ഈ പദങ്ങൾ കൂടി ഉള്ള ധർമ്മങ്ങളാക്കി താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ എഴുതണം. $(3x^3 + 0x^2 - 4x + 2)$

$(x^3 - 2x^2 + 0x - 3)$ ഇപ്രകാരം എഴുതിയശേഷം ഇവയുടെ ഗുണോത്തരങ്ങൾ വേർപെടുത്തി ഗുണനഫലം കാണാവുന്നതാണു്.

$$
\begin{array}{r}
3 + 0 - 4 + 2 \qquad\qquad\qquad \\
1 - 2 + 0 - 3 \qquad\qquad\qquad \\
\hline
3 + 0 - 4 + 2 \qquad\qquad\qquad \\
-6 + 0 + 8 - 4 \qquad\qquad \\
0 + 0 + 0 + 0 \qquad \\
-9 + 0 + 12 - 6 \\
\hline
3 - 6 - 4 + 1 - 4 + 12 - 6
\end{array}
$$

∴ ഗുണനഫലം

$$= 3x^6 - 6x^5 - 4x^4 + x^3 - 4x^2 + 12x - 6$$

അഭ്യാസം 4

ഗുണോത്തരം വേർതിരിക്കൽ രീതിയിൽ ഗുണനഫലം കാണുക

1. $(3x^2 + 4 - 5x)\ (4 - 3x + 2x^2)$
2. $(1 + 5x + x^3 - 7x^2)\ (2x^2 - 1 - 4x)$
3. $(a^3 + a^4 - 4a^2 + 1 + a)\ (a^4 - 3a^2 + 1)$
4. $(x^3 + 4x + 1)\ (x^3 + 4 - 4x)$
5. $(3 + 5x - 6x^2 + 4x^3)\ (x^2 - 2x + 1)$
6. $(3y^3 + 5y + 6)\ (3 + 2y)$

3. സമകൃതി ധർമ്മങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം കാണുന്നതിനും ഗുണോത്തരം വേർതിരിക്കൽ രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാ: $(8a^3 + 12a^2b + 18ab^2 + 27b^3)(2a - 3b)$

$$\begin{array}{rrrrr} 8 & +12 & +18 & +27 & \\ 2 & -3 & & & \\ \hline 16 & +24 & +36 & +54 & \\ & -24 & -36 & -54 & -81 \\ \hline 16 & +0 & +0 & +0 & -81 \end{array}$$

ഗുണനഫലം $= \underline{\underline{16a^4 - 81b^4}}$

അഭ്യാസം 5

ഗുണനഫലം കാണുക

1. $(x^3 - x^2y + y^3)\ (x - 2y)$
2. $(x^2 - xy + y^2)\ (x^2 + xy + y^2)$
3. $(p^3 + 6p^2q + 12pq^2 + q^3)(p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3)$
4. $(a^3 - b^3)\ (a^2 + ab + b^2)$
5. $(a^3 + b^3)\ (a^2 - ab + b^2)$
6. $(x^3 + 6xy^2 + 8y^3)\ (x^2 + 4y^2 + 4xy)$

4. ചില ധമ്മങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം ഗുണോത്തരം വേർതിരിച്ചു ഗുണനഫലം കാണുന്നതു സൗകര്യപ്രദമല്ല.

ഉദാ. $(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)(x + y + z)$ന്റെ ഗുണനഫലം കാണുക.

$$
\begin{array}{l}
x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \\
x + y + z \\
\hline
x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2y - xyz - zx^2 \\
\quad - xy^2 + x^2y - xyz + y^3 + yz^2 - y^2z \\
\quad\quad - xz^2 - xyz + zx^2 - yz^2 + y^2z + z^3 \\
\hline
x^3 - 3xyz + y^3 + z^3
\end{array}
$$

$\therefore$ ഗുണനഫലം $= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$

അഭ്യാസം 6.

ഗുണനഫലം കാണുക.

1. $(9a^2 + 4b^2 + c^2 - 6ab - 2bc - 3ca)$ $(3a + 2b + c)$
2. $(x^2 + y^2 + 1 - xy + x + y)(x + y - 1)$
3. $(2ac - c^2 + 2a^2 - 3bc + ab)(a - b + 2c)$
4. $(xy - xz - y^2 + yz)\ (z - x)$
5. $(xy + yz + zx)\ (xy - yz + zx)$

ദീർഘഹരണം.

5. ദ്വിപദംകൊണ്ടു് ഹരിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു് നിങ്ങൾ മുൻപു പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. രണ്ടിൽ കൂടുതൽ പദങ്ങളുള്ള ഒരു ധർമ്മംകൊണ്ടു് വേറൊരു ധർമ്മത്തെ ഹരിക്കുന്നതിനും നിങ്ങൾ മുൻപു പഠിച്ചിട്ടുള്ള രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാ: 1. $(6a^5 + 4a^3 - a - a^4 - 5a^2 - 15)$
$\div (2a^2 + 3 - a)$.

ഹാര്യത്തേയും ഹാരകത്തേയും അവരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതി താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ ക്രിയ ചെയ്യാം.

$2a^2 - a + 3)\ 6a^5 - a^4 + 4a^3 - 5a^2 - a - 15\ (3a^3 + a^2 - 2a - 5$

$$\begin{array}{l}
\underline{6a^5 - 3a^4 + 9a^3} \\
\quad 2a^4 - 5a^3 - 5a^2 \\
\quad \underline{2a^4 - a^3 + 3a^2} \\
\quad\quad -4a^3 - 8a^2 - a \\
\quad\quad \underline{-4a^3 + 2a^2 - 6a} \\
\quad\quad\quad -10a^2 + 5a - 15 \\
\quad\quad\quad \underline{-10a^2 + 5a - 15}
\end{array}$$

ഹരണഫലം $= 3a^3 + a^2 - 2a - 5$

ഉദാ: 2. $(2x^2 - 15x - 6 - x^3 + 2x^5) \div (x^2 - 3)$.

$x^2 + 0x - 3)\ 2x^5 + 0x^4 - x^3 + 2x^2 - 15x - 6\ (2x^3 + 5x + 2$

$$\begin{array}{l}
\underline{2x^5 + 0x^4 - 6x^3} \\
\quad 5x^3 + 2x^2 - 15x \\
\quad \underline{5x^3 + 0x^2 - 15x} \\
\quad\quad +2x^2 + 0x - 6 \\
\quad\quad \underline{+2x^2 + 0x - 6}
\end{array}$$

ഹരണഫലം $= 2x^3 + 5x + 2.$

ഉദാ: 3. $x^4 + 4a^4$ നെ $x^2 + 2xa + 2a^2$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുക.

$$
\begin{array}{r l}
x^2 + 2xa + 2a^2) & x^4 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 4a^4 \quad (x^2 - 2xa + 2a^2 \\
 & \underline{x^4 + 2x^3a + 2x^2a^2} \\
 & \quad -2x^3a - 2x^2a^2 \\
 & \quad \underline{-2x^3a - 4x^2a^2 - 4xa^3} \\
 & \qquad\qquad 2x^2a^2 + 4xa^3 + 4a^4 \\
 & \qquad\qquad \underline{2x^2a^2 + 4xa^3 + 4a^4.}
\end{array}
$$

ഹരണഫലം $= x^2 - 2xa + 2a^2$

അഭ്യാസം 7.

ഹരണഫലം കാണുക.

1. $(6x^2 - 7x - 3) \div (2x - 3)$
2. $(7a^3 - 28a + 96a^2) \div (7a - 2)$
3. $(27y^3 - 3y + 9y^2 - 10) \div (3y - 2)$
4. $(14x^4 + 78x^2y^2 + 45x^3y + 14y^4 + 45xy^3) \div (2x^2 + 5xy + 7y^2)$
5. $(4x - x^3 + 4x^5) \div (3x + 2 + 2x^2)$
6. $(x^2 + x^4 + 1) \div (x + 1 + x^2)$
7. $(x^6 - 2x^4 + 2x - 2x^3 + 1) \div (x^2 - x - 1)$
8. $(15 - 56x + x^4) \div (1 - 4x + x^2)$
9. $(x^5 + x^3 + y^3 + x^4y - x^3y^2 - 2xy^2) \div (x^2 - y^2 + xy)$
10. $(x^5 + y^5) \div (x + y)$

6. ഗുണോത്തരം വേർതിരിച്ചു് ഗുണനക്രിയ ചെയ്യുപോലെ ഹരണക്രിയയും ചെയ്യാവുന്നതാണു്.

ഉദാ: 1 $(x^5 + 3x^2 - x^3 - 6x - 9) \div (x^2 - 3)$

ഹാര്യത്തിൽ x^4 എന്ന പദവും ഹാരകത്തിൽ x പദവും ഇല്ല. ഇവകൂടിയുള്ള ധർമ്മങ്ങളായി അവരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതിയശേഷമാണു് ഗുണോത്തരം വേർതിരിച്ചു ക്രിയചെയ്യേണ്ടതു്.

$$(x^5 + 0x^4 - x^3 + 3x^2 - 6x - 9) \div (x^2 + 0x - 3).$$

$$
\begin{array}{l}
1 + 0 - 3)\ 1 + 0 - 1 + 3 - 6 - 9\ (1 + 0 + 2 + 3 \\
\qquad\qquad\ \underline{1 + 0 - 3} \\
\qquad\qquad\quad + 0 + 2 + 3 \\
\qquad\qquad\quad \underline{+ 0 + 0 + 0} \\
\qquad\qquad\qquad\quad + 2 + 3 - 6 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+ 2 + 0 - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 3 + 0 - 9 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+ 3 + 0 - 9}
\end{array}
$$

ഹരണഫലത്തിലെ ആദ്യത്തെ പദം x^5 നെ x^2 കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന x^3 ആയതുകൊണ്ടു് ഹരണഫലം

$$= x^3 + 0\,x^2 + 2\,x + 3$$
$$= x^3 + 2\,x + 3$$

അഭ്യാസം 8.

ഗുണോത്തരം വേർതിരിക്കൽ രീതിയനുസരിച്ചു് ഹരണഫലം കാണുക.

1. $(6\,m^3 - 25\,m^2 + 13\,m + 30) \div (2\,m - 5)$
2. $(15 + 3\,a - 7\,a^2 - 4\,a^3) \div (5 - 4\,a)$
3. $(81\,x^4 + 16 - 96\,x + 216\,x^2 - 216\,x^3) \div (2 - 3x)$
4. $(4\,x^5 + 4\,x - x^3) \div (2\,x^2 + 2 + 3\,x)$
5. $(x^4 + 1 + x^2) \div (1 + x + x^2)$
6. $(x^4 - 56\,x + 15) \div (x^2 - 4\,x + 1)$

7. നാം ഇതുവരെ ചെയ്ത ഹരണക്രിയകളിലൊന്നും ശിഷ്ടം ഇല്ലായിരുന്നു. ശിഷ്ടം വരുന്ന ഹരണക്രിയക്കു് രണ്ടുദാഹരണങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഉദാ: 1.

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+1) & x^3-3x^2+3x+2\ (x-3 \\
 & \underline{x^3 \qquad\quad +x} \\
 & \quad -3x^2+2x+2 \\
 & \quad \underline{-3x^2 \qquad\ \ -3} \\
 & \qquad\qquad 2x+5
\end{array}
$$

ഹരണഫലം $= x - 3$

ശിഷ്ടം $= 2x + 5$

ഉദാ: 2.

$$
\begin{array}{r|l}
x+4) & x^2+9x+25\ (x+5 \\
 & \underline{x^2+4x} \\
 & \qquad 5x+25 \\
 & \qquad \underline{5x+20} \\
 & \qquad\qquad 5
\end{array}
$$

ഹരണഫലം $= x + 5$

ശിഷ്ടം $= 5$

മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്നും ശിഷ്ടമായി കിട്ടുന്ന ധമ്മത്തിന്റെ ഡിഗ്രി ഹാരകത്തിന്റെ ഡിഗ്രിയേക്കാൾ ഒന്നു കുറവായിരിക്കുമെന്നു കാണാവുന്നതാണ്.

8. $\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5}$ എന്നെഴുതുന്നതുപോലെ

$\dfrac{x^3-3x^2+3x+2}{x^2+1}$ എന്നതിനേയും ഈ രീതിയിൽ എഴുതാം.

$$\frac{x^3-3x^2+3x+2}{x^2+1} = x - 3 + \frac{2x+5}{x^2+1}$$

അതുപോലെ $\dfrac{x^2+9x+25}{x+4} = x + 5 + \dfrac{5}{x+4}$

$$\frac{x^3-3x^2+3x+2}{x^2+1},\ \frac{2x+5}{x^2+1},\ \frac{5}{x+4}$$

എന്നിങ്ങനെ ഭിന്നത്തിന്റെ രൂപത്തിലുള്ള ഒരു ധർമ്മത്തിന് ഭിന്നധർമ്മം (*fractional function*) എന്നു പറയുന്നു. $x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, $x - 3$, $x + 5$ എന്നിങ്ങനെ ഭിന്നത്തിന്റെ രൂപത്തിലല്ലാതുള്ള ധർമ്മങ്ങളെ 'അഭിന്നധർമ്മങ്ങൾ' (*integral functions*) എന്നു പറയുന്നു.

$\dfrac{x^2 + 9x + 25}{x + 4}$ എന്നതിൽ അംശമായ ധർമ്മത്തിന്റെ ഡിഗ്രി ഛേദമായ ധർമ്മത്തിന്റെ ഡിഗ്രിയേക്കാൾ കൂടുതലായതിനാൽ ഇതിനെ ഒരു വിഷമഭിന്നമെന്നും, $\dfrac{2x + 5}{x^2 + 1}$, $\dfrac{5}{x + 4}$ എന്നിപ്രകാരം അംശമായ ധർമ്മത്തിന്റെ ഡിഗ്രി ഛേദമായ ധർമ്മത്തിന്റെ ഡിഗ്രിയേക്കാൾ കുറവായവയെ സമഭിന്നങ്ങൾ എന്നും പറയുന്നു.

ഒരു വിഷമഭിന്നത്തെ ഹരണക്രിയചെയ്ത് ഒരു അഭിന്നധർമ്മത്തിന്റേയും ഒരു സമഭിന്നത്തിന്റേയും തുകയായി എഴുതാമെന്ന് മുൻപിലത്തെ ഖണ്ഡികയിൽനിന്നും വ്യക്തമാണ്.

$\dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x + 2}{x^2 + 1}$ എന്ന വിഷമഭിന്നത്തെ ഹരണക്രിയചെയ്ത് $x - 3$ എന്ന അഭിന്നധർമ്മത്തിന്റേയും $\dfrac{2x + 5}{x^2 + 1}$ എന്ന സമഭിന്നത്തിന്റേയും തുകയായി എഴുതാം. $\dfrac{x^2 + 9x + 25}{x + 4}$നെ ഹരണക്രിയചെയ്ത് $x + 5$ എന്ന അഭിന്നധർമ്മത്തിന്റേയും $\dfrac{5}{x + 4}$ എന്ന സമഭിന്നത്തിന്റേയും തുകയായി എഴുതാം,

അഭ്യാസം 9.

ഹരണഫലവും ശിഷ്ടവും കാണുക.

1. $(x^2 + 5x + 21) \div (x + 3)$
2. $(6y^2 + 7y + 17) \div (3y + 2)$
3. $(2x^4 - 3x^2 + 6x - 4) \div (x - 2)$
4. $(x^4 + 5x^2 - 3x^3 - 4) \div (x^2 - 4x + 2)$
5. $(x + 4x^3 - 9x^2 - 1 - 7x^4 + x^5)$
$\div (x - 1 - 3x^2 + x^3)$

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിഷമഭിന്നങ്ങളെ ഹരണക്രിയ ചെയ്തു് ഒരു അഭിന്നാംശത്തിന്റെയും സമഭിന്നത്തിന്റെയും തുകയായി എഴുതുക.

6. $(x^2 + 6x + 21) \div (x + 3)$
7. $(6a^2 + 7a + 16) \div (3a + 2)$
8. $(2m^4 - 3m^2 + 6m + 10) \div (m - 2)$
9. $(y^4 + 5y^2 - 3y^3 - 5) \div (y^2 - 4y + 2)$
10. $(x + 4x^3 - 9x^2 + 1 - 7x^4 + x^5)$
$\div (x - 1 - 3x^2 + x^3)$

വർഗ്ഗമൂലം

9. $\sqrt{16} = +4$ അല്ലെങ്കിൽ -4 എന്നു നിങ്ങൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. അതായതു് ഒരു അധികസംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലമായി രണ്ടുത്തരം കിട്ടുന്നതാണു്. ഇതിൽ ഒന്നു് ഒരു അധികസംഖ്യയും മറേറതു് ന്യൂനസംഖ്യയുമാണു്. അധികസംഖ്യയായ വർഗ്ഗമൂലം കിട്ടിക്കഴിഞ്ഞാൽ മറേറ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക എന്നതു് വളരെ ലഘുവായ ഒന്നാണു്. അതുകൊണ്ടു് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിലെല്ലാം അധികചിഹ്നത്തോടുകൂടിയ വർഗ്ഗമൂലം മാത്രമേ കണ്ടിട്ടുള്ളു

തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു ധർമ്മത്തിൻെറ വർഗ്ഗമൂലം കാണുന്നതിന് അതിനെ $(a+b)^2$ എന്ന രൂപത്തിലോ, $(a+b+c)^2$ എന്ന രൂപത്തിലോ എഴുതിയാൽ മതിയാകും.

ഉദാ: 1. $16x^2 - 24xy + 9y^2$ ൻെറ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

$$16x^2 - 24xy + 9y^2 = (4x - 3y)^2$$

$$\therefore \text{വർഗ്ഗമൂലം} = \underline{4x - 3y}$$

ഉദാ: 2. $x^2 + y^2 - 2xy - 4ax + 4ay + 4a^2$ ൻെറ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

$$x^2 + y^2 - 2xy - 4ax + 4ay + 4a^2 = (x - 2a - y)^2$$

$$\therefore \text{വർഗ്ഗമൂലം} = \underline{x - 2a - y}$$

അഭ്യാസം 10.

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ധർമ്മങ്ങളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

1. $4x^2 + 4xy + y^2$
2. $x^6 - 2x^3 + 1$
3. $x^4 + y^4 - 2x^2y^2$
4. $x^2 - x + \frac{1}{4}$
5. $1 - 6x + 9x^2$
6. $m^4 + \frac{2}{3}m^2 + \frac{1}{9}$
7. $\frac{a^2}{4} - 3ab + 9b^2$

8. $\frac{x^2}{y^2} - 2 + \frac{y^2}{x^2}$

9. $(x - y)^2 - 4(x - y) + 4$

10. $(x + y)^2 + 2(x + y)(a + b) + (a + b)^2$

11. $x^4 + x^2 + 1 + 2x^3 + 2x^2 + 2x$

12. $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx$

13. $a^2 + b^2 + 2ab + 4a + 4b + 4$

14. $a^4 + b^2 + 2a^2b - 2a^2c - 2bc + c^2$

10. ദീർഘഹരണരീതിയിൽ സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണാൻ നിങ്ങൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഒരു ബീജഗണിതധർമ്മത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുന്നതിനും ഈ രീതി ഉപയോഗിക്കാം. $25x^2 - 12x + 4 + 16x^4 - 24x^3$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലം കാണണമെന്നിരിക്കട്ടെ. ആദ്യമായി ഈ ധർമ്മത്തെ x ന്റെ ഡിഗ്രിയനുസരിച്ചു് അവരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതുക. അപ്പോൾ $16x^4 - 24x^3 + 25x^2 - 12x + 4$ എന്നു കിട്ടും. വർഗ്ഗമൂലത്തിലെ ആദ്യത്തെ പദം $16x^4$ ന്റെ വർഗ്ഗമൂലമായ $4x^2$ ആണെന്നു സ്പഷ്ടമാണു്. വർഗ്ഗമൂലത്തിലെ ബാക്കിയുള്ള പദങ്ങൾ കണ്ടുപിടിച്ചിരിക്കുന്നതു നോക്കുക.

$$
\begin{array}{l}
\quad\quad\quad\quad \left| \begin{array}{l} 16x^4 - 24x^3 + 25x^2 - 12x + 4 \; (4x^2 - 3x + 2 \\ 16x^4 \end{array} \right. \\
8x^2 - 3x \left| \begin{array}{l} -24x^3 + 25x^2 \\ -24x^3 + 9x^2 \end{array} \right. \\
\quad\quad\quad 8x^2 - 6x + 2 \left| \begin{array}{l} 16x^2 - 12x + 4 \\ 16x^2 - 12x + 4 \end{array} \right.
\end{array}
$$

$\therefore$ വർഗ്ഗമൂലം $= \underline{4x^2 - 3x + 2}$

ഒരു സംഖ്യയുടെ വർഗ്ഗമൂലം കാണുന്ന രീതിയിൽ തന്നെയാണു് ഇവിടെയും ക്രിയാനുഷ്ഠിക്കുന്നതെന്നു വ്യക്തമാണു്.

അഭ്യാസം 11.

വർഗ്ഗമൂലം കാണുക.

1. $a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1$
2. $4x^4 + 29x^2 - 30x - 12x^3 + 25$
3. $9x^4 - 12x^3 - 2x^2 + 4x + 1$
4. $y^4 + 6y^2 - 4y^3 - 4y + 1$
5. $4x^4 - 7x^2 + 4x^3 - 4x + 4$
6. $1 - 10a + 27a^2 - 10a^3 + a^4$

അദ്ധ്യായം 3

സർവ്വസമ വാക്യങ്ങൾ

ഘടകക്രിയ ചെയ്യുന്നതിനും ഗുണനഫലം കാണുന്നതിനും ഉപയോഗപ്രദമായ പല സവ്വസമ വാക്യങ്ങളും നിങ്ങൾ താഴ്ന്ന ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇതുപോലെ ഉപയോഗപ്രദമായ വേറെ രണ്ടു സവ്വസമ വാക്യങ്ങളാണു് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതു്.

1. $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$
$$= x^4 + x^2y^2 + y^4$$

2. $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

ഓരോ സവ്വസമ വാക്യത്തിലും ഇടതുവശത്തുള്ള രാശിമാലകൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാൽ വലതുവശത്തുള്ള രാശിമാല കിട്ടുന്നതാണു്.

അഭ്യാസം 12.

സർവ്വസമവാക്യമുപയോഗിച്ച് ഗുണനഫലം കാണുക.

1. $(a^2 + ab + b^2) \quad (a^2 - ab + b^2)$
2. $(p^2 + q^2 + pq) \quad (p^2 + q^2 - pq)$
3. $(m^2 - mn + n^2) \quad (m^2 + n^2 + mn)$
4. $(4x^2 + 2xy + y^2) \quad (4x^2 - 2xy + y^2)$
5. $(x^2 + 9y^2 + 3xy) \quad (x^2 + 9y^2 - 3xy)$
6. $(x^2 + \sqrt{3}\,x + 3) \quad (x^2 - \sqrt{3}\,x + 3)$
7. $(x^2 + 2 + \sqrt{2}\,x) \quad (x^2 + 2 - \sqrt{2}\,x)$
8. $(a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{1}{9}b^2) \quad (a^2 + \frac{1}{3}ab + \frac{1}{9}b^2)$

ഘടകങ്ങളാക്കുക.

9. $a^4 + a^2b^2 + b^4$
10. $m^4 + n^4 + m^2n^2$
11. $p^2q^2 + q^4 + p^4$
12. $16x^4 + 4x^2y^2 + y^4$
13. $x^4 + 81y^4 + 9x^2y^2$
14. $a^4 + \frac{1}{4}a^2b^2 + \frac{1}{16}b^4$

അഭ്യാസം 13.

ഘടകങ്ങളാക്കുക.

1. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
2. $x^3 + y^3 + 1 - 3xy$
3. $a^3 + b^3 - c^3 + 3abc$
4. $x^3 + 9xy - 1 + 27y^3$
5. $1 - l^3 - m^3 - 3lm$
6. $a^6 + x^3 - 1 + 3a^2x$

7. $8m^3 - n^3 - a^3 - 6amn$

8. $x^3 + \dfrac{y^3}{27} + 1 - xy$

9. $xy^2 - \dfrac{x^3}{27} + y^6 + 1$

10. $x^3 + \dfrac{a^3}{8} + b^3 - \dfrac{3}{2}abx$

11. $\dfrac{p^3}{27} + pqr + q^3 - r^3$

12. $(a - x)^3 + (a - y)^3 + (a - z)^3 - 3(a - x)(a - y)(a - z)$

ഗുണനഫലം കാണുക.

13. $(m + n + r)(m^2 + n^2 + r^2 - mn - nr - rm)$

14. $(3x - 2y - z)(9x^2 + 4y^2 + z^2 + 6xy - 2yz + 3zx)$

15. $(a + b - 1)(a^2 + a + b - ab + b^2 + 1)$

16. $(x + y + \frac{1}{2})(x^2 + y^2 + \frac{1}{4} - xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y)$

അദ്ധ്യായം 4

ശിഷ്ടസൂത്രം (Remainder Theorem)

1. ഒരു അഭിന്നധർമ്മത്തെ ഒരു ദ്വിപദം കൊണ്ടു ഹരിക്കുന്ന ക്രിയ ബീജഗണിതത്തിൽ വളരെ പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്ന ഒന്നാണു്.

ഒരു അഭിന്നധർമ്മത്തെ വേറൊരു ധർമ്മം കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ശിഷ്ടമായി കിട്ടുന്ന ധർമ്മത്തിന്റെ ഡിഗ്രി, ഹാരകമായ

ധർമ്മത്തിൻെറ ഡിഗ്രിയെക്കാരം ഒന്നു കുറവായിരിക്കുമെന്നു രണ്ടാം അദ്ധ്യായത്തിൽ നാം കണ്ടുകഴിഞ്ഞതല്ലോ അതുകൊണ്ടു് ഇപ്രകാരമുള്ള ഒരു ധർമ്മത്തെ $(x-3)$, $(x-4)$, $(x+5)$ എന്നീ രൂപത്തിലുള്ള ഒരു ദ്വിപദം കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോരം കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം x ൻെറ പൂജ്യം ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു ധർമ്മമായിരിക്കും. അതായതു് ശിഷ്ടം ഒരു സംഖ്യ മാത്രമായിരിക്കും. ഈ സംഖ്യ പെട്ടെന്നു കണ്ടുപിടിക്കാൻ സഹായിക്കുന്ന ഒരു സൂത്രമുണ്ടു്. അതാണു് ഈ അദ്ധ്യായത്തിലെ ചർച്ചാവിഷയം.

$7x+2$ എന്ന ധർമ്മത്തെയും $3x^2-5x+4$ എന്ന ധർമ്മത്തെയും $x-a$ എന്ന ദ്വിപദംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോരം കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടമെന്തെന്നു നോക്കാം.

$$
\begin{array}{l}
x-a)\ 7x+2\ (7 \\
\qquad\ \ \underline{7x-7a} \\
\qquad\qquad\ 7a+2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
x-a)\ 3x^2-5x+4\ (3x+[3a-5] \\
\qquad\ \underline{3x^2-3ax} \\
\qquad\qquad x(3a-5)+4 \\
\qquad\qquad \underline{x(3a-5)-a(3a-5)} \\
\qquad\qquad\qquad a(3a-5)+4=3a^2-5a+4
\end{array}
$$

$7x+2$ നെ $x-a$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോരം കിട്ടിയ ശിഷ്ടം $7a+2$. $3x^2-5x+4$ നെ $x-a$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോരം കിട്ടിയ ശിഷ്ടം $3a^2-5a+4$. ഈ രണ്ടു ഉദാഹരണങ്ങളെ സൂക്ഷ്മമായി പരിശോധിച്ചാൽ $(x-a)$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള ലഘുമാർഗ്ഗം കിട്ടുന്നതാണു്. തന്നിരിക്കുന്ന ധർമ്മത്തിൽ x നു പകരം a ഇട്ടാൽ കിട്ടുന്ന രാശിമാലയാണു് ശിഷ്ടം. അതായതു് $F(x)$

എന്ന ധമ്മത്തെ $(x-a)$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം $F(a)$ ആകുന്നു.

ഉദാ: 1. $6x^2 + 5x + 1$ എന്ന ധമ്മത്തെ $(x-3)$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം കാണുക

ഇവിടെ $F(x) = 6x^2 + 5x + 1$, $(x-3)$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ ഉള്ള ശിഷ്ടം $F(3)$ ആകുന്നു.

$$F(3) = 6 \times 3^2 + 5 \times 3 + 1 = 70.$$

ഉദാ: 2. $x^3 + x^2 - 3x + 2$ എന്ന ധമ്മത്തെ $(x+2)$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം കാണുക

$x + 2$ എന്നതിനെ $[x - (-2)]$ എന്നെഴുതാം.

$\therefore$ $x + 2$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം കാണുന്നതിന് x നു പകരം (-2) എന്ന വില ധമ്മത്തിൽ ആരോപിപ്പിച്ചാൽ മതിയാകും.

$$\therefore \text{ശിഷ്ടം} = (-2)^3 + (-2)^2 - 3(-2) + 2$$
$$= -8 + 4 + 6 + 2 = 4$$

മുകളിലത്തെ രണ്ടുദാഹരണങ്ങളിൽ ദീർഘഹരണംമൂലം ശിഷ്ടം കണ്ടുപിടിച്ച് ഉത്തരം ശരിതന്നെയോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

അഭ്യാസം 14.

ശിഷ്ടം കണ്ടുപിടിക്കുക.

1. $(x^2 + 3x + 2) \div (x - 2)$
2. $(3x^3 - 5x^2 + 6x - 1) \div (x + 2)$
3. $(x^3 - 7x^2 - 6x + 4) \div (x - 3)$
4. $(x^4 + 3x - 1) \div (x + 3)$
5. $(x^5 - 1) \div (x - 2)$
6. $(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) \div (x - 2)$

2. ശിഷ്ടം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് നാം ഇപ്പോൾ നിർണ്ണയിച്ച സൂത്രത്തിന്റെ തെളിവ് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ശിഷ്ടസൂത്രം. $F(x)$ എന്നതു് x ന്റെ ഒരു അഭിന്നധർമ്മമാണെങ്കിൽ $F(x)$ നെ $(x-a)$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം $F(a)$ ആയിരിക്കും

തെളിവ്. $F(x)$ നെ $(x-a)$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലം $f(x)$ എന്ന ധർമ്മവും, ശിഷ്ടം R ഉം ആയിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ

$\dfrac{F(x)}{(x-a)} = f(x) + \dfrac{R}{x-a}$ ആയിരിക്കുമെന്നു നാം പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞല്ലോ.

ഇരുവശങ്ങളേയും $(x-a$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക. അപ്പോൾ $F(x) = (x-a)\,f(x) + R$. ഇതു് ഒരു സർവ്വസമവാക്യമായതുകൊണ്ടു് x ന് എന്തു വിലയിട്ടാലും ഈ സമത നിലനിൽക്കും. x ന് a എന്ന വിലയിടുക. അപ്പോൾ

$F(a) = (a-a)\,f(a) + R$.

അതായതു് $F(a) = R$.

അഭ്യാസം 15.

ശിഷ്ടസൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു ശിഷ്ടം കാണുക.

1. $(x^2 + 2ax + a^2) \div (x - a)$
2. $(x^3 - 3bx^2 + 3b^2x - b^3) \div (x - a)$
3. $(x^3 + 3a^2x + a^3) \div (x + a)$
4. $(x^5 - b^5) \div (x + b)$
5. $(x^4 - bx^3 + 2b^2x^2) \div (x - b)$
6. $(x^2 + 5ax + 6a^2) \div (x + 2a)$

3. $x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ എന്നതിനെ $(x - 1)$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോഴുള്ള ശിഷ്ടം എന്തെന്നു നോക്കാം.

$$F(x) = x^3 - 5x^2 + 6x - 2$$
$$F(1) = 1 - 5 + 6 - 2 = 0$$

ശിഷ്ടം പൂജ്യം എന്നാണു കിട്ടുന്നതു്. അതായതു് $x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ എന്നതിൽ $(x-1)$ എന്നതു് നിശ്ശേഷം അടങ്ങും. വേറൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ $(x-1)$ എന്നതു് $x^3 - 5x^2 + 6x - 2$ ൻെറ ഒരു ഘടകമാണു്. ഇങ്ങനെ ശിഷ്ടസൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു് $(x-1)$ എന്നതു് തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു ധൎമ്മത്തിൻെറ ഘടകമാണോ അല്ലയോ എന്നു് എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണു്. $(x-1)$ മാത്രമല്ല $(x+1)$, $(x-2)$, $(x+2)$ എന്നീ രൂപത്തിലുള്ള ഏതൊരു ദ്വിപദവും തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു ധൎമ്മത്തിൻെറ ഘടകമാണോ അല്ലയോ എന്നു് ഈ രീതിയിൽ പെട്ടെന്നു കണ്ടുപിടിക്കാം. തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു ധൎമ്മത്തെ ഘടകങ്ങളായി പിരിക്കുന്നതിനു് ഈ വസ്തുത വളരെ പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്ന ഒന്നാണു്. താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണം നോക്കുക.

ഉദാ: $6x^4 - 17x^3 - 2x^2 + 20x + 8$ നെ ഘടകങ്ങളായി പിരിക്കുക.

തന്നിരിക്കുന്ന ധൎമ്മത്തിൻെറ ഒടുവിലത്തെ പദം 8 ആയതുകൊണ്ടു് $(x-1)$, $(x+1)$, $(x-2)$, $(x+2)$, $(x-4)$, $(x+4)$ ഇവയിലേതെങ്കിലുമൊക്കെ ഘടകങ്ങളായി വരാൻ സാധ്യതയുണ്ടു്. ഓരോന്നായി പരിശോധിച്ചുനോക്കുക.

$F(1) = 6 - 17 - 2 + 20 + 8 = 15$

$F(1)$ പൂജ്യം അല്ലാത്തതിനാൽ $(x-1)$ ഘടകമല്ല.

$F(-1) = 6 + 17 - 2 - 20 + 8 = 9$

$\therefore$ $(x+1)$ ഘടകമല്ല.

$$F(2) = 6 \times 16 - 17 \times 8 - 2 \times 4 + 20 \times 2 + 8$$
$$= 96 - 136 - 8 + 40 + 8 = 0$$

$\therefore$ $(x-2)$ ഒരു ഘടകമാണു്.

ഒരു ഘടകം കിട്ടിക്കഴിഞ്ഞാൽ ആ ഘടകംകൊണ്ടു് ധമ്മത്തെ ഹരിച്ചു് ഹരണഫലം കിട്ടിയ തീൻശേഷം ഘടകക്രിയ തുടരുന്നതാണു് സൗകര്യം.

$$
\begin{array}{r l}
x - 2) & 6x^4 - 17x^3 - 2x^2 + 20x + 8 \quad (6x^3 - 5x^2 - 12x - 4 \\
 & \underline{6x^3 - 12x^3} \\
 & \quad -5x^3 - 2x^2 \\
 & \quad \underline{-5x^3 + 10x^2} \\
 & \qquad -12x^2 + 20x \\
 & \qquad \underline{-12x^2 + 24x} \\
 & \qquad\quad -4x + 8 \\
 & \qquad\quad \underline{-4x + 8}
\end{array}
$$

വീണ്ടും $6x^3 - 5x^2 - 12x - 4$ നെ ഘടകങ്ങളാക്കാൻ ശ്രമിക്കുക ഇതിന്റെ ഒടുവിലത്തെ പദം -4 ആയതുകൊണ്ടു് $x - 1$, $x + 1$, $x - 2$, $x + 2$, $x - 4$, $x + 4$ ഇവയൊക്കെയാണു് ഘടകങ്ങളായി വരാൻ സാദ്ധ്യത $x - 1$, $x + 1$ ഇവ ഘടകങ്ങളല്ലെന്നു് കണ്ടുകഴിഞ്ഞതിനാൽ വീണ്ടും പരിശോധിക്കേണ്ട ആവശ്യമില്ല അതുകൊണ്ടു് $x - 2$ ഘടകമാണോ എന്നു പരിശോധിക്കാം.

$$f(x) = 6x^3 - 5x^2 - 12x - 4$$
$$f(2) = 6 \times 8 - 5 \times 4 - 12 \times 2 - 4$$
$$= 48 - 20 - 24 - 4 = 0$$

$\therefore$ $(x - 2)$ ഇതിന്റെ ഘടകമാണു്.

മുൻപിലത്തെപോലെ $6x^3 - 5x^2 - 12x - 4$ നെ വീണ്ടും $x - 2$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുക.

$$
\begin{array}{rl}
x-2) & 6x^3 - 5x^2 - 12x - 4 \quad (6x^2 + 7x + 2 \\
 & \underline{6x^3 - 12x^2} \\
 & \quad\quad 7x^2 - 12x \\
 & \quad\quad \underline{7x^2 - 14x} \\
 & \quad\quad\quad\quad 2x - 4 \\
 & \quad\quad\quad\quad 2x - 4
\end{array}
$$

$6x^2 + 7x + 2$ നെ മധ്യപദവിഭജനംമൂലം ഘടകക്രിയ ചെയ്യാം.

$$6x^2 + 7x + 2 = 6x^2 + 4x + 3x + 2$$
$$= 2x(3x + 2) + 1(3x + 2)$$
$$= (2x + 1)(3x + 2)$$

$$\therefore \quad 6x^4 - 17x^3 - 2x^2 + 20x + 8$$
$$= (x-2)(x-2)(2x+1)(3x+2)$$
$$= \underline{(x-2)^2(2x+1)(3x+2)}$$

അഭ്യാസം 16

1. $(x-1)$, $(x+1)$, $(x+2)$ ഇവ x^4-5x^2+4 ൻെറ ഘടകങ്ങളാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

2. $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$ ഇവ $x^3+6x^2+11x+6$ ൻെറ ഘടകങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കുക.

3. $(x+1)$, $(x-2)$ ഇവ $2x^3-5x^2-x+6$ ൻെറ ഘടകങ്ങളാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക

ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക.

4. $2x^3-5x^2+x+2$
5. $2x^3-x^2-5x-2$
6 x^3+4x^2+x-6
7. $x^3+9x^2+26x+24$
8. $2x^3+9x^2+7x-6$
9. $x^4+3x^3-7x^2-27x-18$
10. $2x^4-9x^3-9x^2+46x+24$
11. $2x^4+5x^3-5x-2$
12. $4x^4+16x^3+15x^2-4x-4$

13. $x^3+8x^2+17x+10$ ൻെറ ഒരു ഘടകം $x+5$ ആണെങ്കിൽ ബാക്കി ഘടകങ്ങൾ കാണുക.

14. $x=3$, $x=-2$ എന്നീ വിലകളിൽ ഏതു് ആരോപിച്ചാലും $x^4+x^3-11x^2-9x+18$ ൻെറ വില പൂജ്യമാണെന്നു് അറിയാം. ഈ ധൎമ്മത്തിനെ ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക.

15. $x^3+4x+3a$ എന്ന ധൎമ്മത്തിൽ a യുടെ വില എന്തായാൽ $x+3$ ഈ ധൎമ്മത്തിൻെറ ഒരു ഘടകമാകും?

16. $x^3-2(k+2)x^2+kx+4$ എന്ന ധൎമ്മത്തിൽ k യുടെ വില എന്തായാൽ $x+2$ ഇതിൻെറ ഒരു ഘടകമായിരിക്കും?

അദ്ധ്യായം 5.

ഉ. സാ. ഘ; ല. സാ. ഗു.

(H. C. F. and L. C. M.)

1. 30, 18, 24 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഉ സാ ഘ. കാണേണമെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവയെ അവിഭാജ്യഘടകങ്ങളായി പിരിച്ചു് ഉ സാ. ഘ കാണുന്ന രീതി നിങ്ങൾക്കു സുപരിചിതമാണല്ലോ.

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$
$$18 = 2 \times 3 \times 3$$
$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

വലതുവശത്തുള്ള ഘടകങ്ങൾ പരിശോധിച്ചാൽ 2 × 3 എന്നതാണു് മൂന്നു സംഖ്യകൾക്കും പൊതുവായിട്ടുള്ള ഘടകങ്ങളിൽ ഏററവും വലുതെന്നു വ്യക്തമാണു്. അതുകൊണ്ടു് 30, 18, 24 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഉ. സാ. ഘ = 6.

30, 18, 24 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ പൊതുഗുണിതങ്ങളിൽ ഏററവും ചെറുതു് (അതായതു് ല. സാ ഗു) ഏതാണു്? ഇതു കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനു് താഴെ നിർദ്ദേശിച്ചിരിക്കുന്ന മാർഗ്ഗം സ്വീകരിക്കാം. ആദ്യമായി 2 × 3 × 5 (ie 30) എന്ന സംഖ്യ എടുക്കുക. ഇതിനെ ഏതു അവിഭാജ്യഘടകങ്ങൾകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ 2 × 3 × 3 (ie 18) ൻെറ ഗുണിതമാകും? 18 ൻെറ ഗുണിതമായ സംഖ്യയിൽ 2 എന്ന ഘടകം ഒരു പ്രാവശ്യവും 3 എന്ന ഘടകം രണ്ടു പ്രാവശ്യവും വേണ്ടതാണു്. 2 × 3 × 5 എന്ന സംഖ്യയിൽ 3 എന്ന ഘടകം രണ്ടുപ്രാവശ്യം ഇല്ല. അതുകൊണ്ടു് 2 × 3 × 5 എന്ന സംഖ്യയെ 18 ൻെറ ഗുണിതമാക്കുന്നതിനു് 3 എന്ന ഘടകംകൊണ്ടു ഗുണിക്കേണ്ടതാണു്. അപ്പോൾ 2 × 3 × 3 × 5 എന്ന സംഖ്യയാണു് 30 ൻേറയും 18 ൻേറയും പൊതുഗുണിതങ്ങളിൽ ഏററവും ചെറുതു്. ഇനി ഈ സംഖ്യ

യെ എണ്ണുകൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മൂന്നാമത്തെ സംഖ്യയായ $2 \times 2 \times 2 \times 3$ (24) ൻെറ ഗുണിതമാകും? ഇതിൻെറ ഗുണിതമായി വരുന്ന സംഖ്യയിൽ 2 എന്ന ഘടകം 3 പ്രാവശ്യവും 3 എന്ന ഘടകം ഒരു പ്രാവശ്യവും ഉണ്ടായിരിക്കണം. 30 ൻെറയും 18 ൻെറയും പൊതുഗുണിതമായി നാം കണ്ടുപിടിച്ച $2 \times 3 \times 3 \times 5$ എന്ന സംഖ്യയിൽ 2 എന്ന ഘടകം ഒരു പ്രാവശ്യമേയുള്ളു. അതുകൊണ്ടു് ഈ ഘടകം രണ്ടെണ്ണംകൂടി ചേർത്താലേ 24 ൻെറ ഗുണിതമാവുകയുള്ളു. അപ്പോൾ 24 ൻെറയും കൂടി ഗുണിതമായ ഏററവും ചെറിയസംഖ്യ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$ ആകുന്നു. അതായതു് 30, 18, 24 എന്നീ മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ

ല. സാ. ഗു $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = \underline{360}.$

ല. സാ. ഗു കാണുന്നതിനു് വേറൊരു രീതിയിലും ചിന്തിക്കാം.

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$18 = 2 \times 3 \times 3$

$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

30, 18, 24 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ അവിഭാജ്യഘടകങ്ങളായി 2, 3, 5 എന്നീ മൂന്നുതരം ഘടകങ്ങളാണു് ഉള്ളതു്. സംഖ്യകളുടെ ല. സാ. ഗു. വിൽ 2, 3, 5 എന്നീ ഘടകങ്ങൾ ഓരോന്നും കുറഞ്ഞതു് എത്രപ്രാവശ്യം വീതം ഉണ്ടായിരിക്കണം എന്നു് ആലോചിക്കുക. ആദ്യമായി 2 എന്ന ഘടകം എടുക്കുക. 30 ൻെറ ഗുണിതമാകാൻ 2 എന്ന ഘടകം ഒരു പ്രാവശ്യം ഉണ്ടായിരുന്നാൽ മതി. അതുപോലെ 18 ൻെറ ഗുണിതമാകാനും 2 എന്ന ഘടകം ഒരുപ്രാവശ്യം മതി. പക്ഷേ 24 ൻെറ ഗുണിതമാകണമെങ്കിൽ 2 എന്ന ഘടകം മൂന്നു പ്രാവശ്യമെങ്കിലും ഉണ്ടായിരിക്കണം അതുകൊണ്ടു് 30, 18, 24 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ പൊതുഗുണിതത്തിൽ 2 എന്ന ഘടകം 3 പ്രാവശ്യ

മെങ്കിലും ഉണ്ടായിരിക്കണം. അതുപോലെ ഈ സംഖ്യകളുടെ പൊതുഗുണിതത്തിൽ 3 എന്ന ഘടകം രണ്ടുപ്രാവശ്യവും 5 എന്ന ഘടകം ഒരുപ്രാവശ്യവും ഉണ്ടായിരിക്കണം. അതുകൊണ്ട് ഈ മൂന്നു സംഖ്യകളുടെ പൊതുഗുണിതങ്ങളിൽ ഏററവും ചെറുത് $2^3 \times 3^2 \times 5$ ആകുന്നു.

$\therefore$ ല സാ. ഗു $= 2^3 \times 3^2 \times 5 = \underline{360}.$

അഭ്യാസം 17

ഉ. സാ. ഘ യും, ല. സാ. ഗു വും കാണുക.

1. 12, 18, 24
2. 9, 12, 18
3. 12, 18, 54
4. 24, 54, 30
5. 180, 300, 108
6. 126, 90, 72
7. 28, 42, 70, 140
8. 42, 63, 105, 126

2. അങ്കഗണിതത്തിൽ സംഖ്യകളുടെ ഉ സാ. ഘ യും ല. സാ. ഗു വും നിർണ്ണയിക്കുന്നതുപോലെ ബീജഗണിതരാശികളുടെ ഉ. സാ. ഘ യും ല. സാ. ഗു വും നിർണ്ണയിക്കാം.

ഉദാ: $17\,p\,x^3\,y^4\,z,\quad 34\,p\,r\,x\,z^2,\quad 51\,p\,r\,x\,y\,z$ ഇവയുടെ ഉ. സാ. ഘ യും ല. സാ. ഗു വും കാണുക.

$$17\,p\,x^3\,y^4\,z = 17\,p\,x^3\,y^4\,z$$
$$34\,p\,r\,x\,z^2 = 2 \times 17 \times p\,r\,x\,z^2$$
$$51\,p\,r\,x\,y\,z = 3 \times 17 \times p\,r\,x\,y\,z$$

ഉ. സാ. ഘ $= 17\,p\,x\,z$

ല. സാ. ഗു $= 2 \times 3 \times 17 \times p\,r\,x^3\,y^4\,z^2$

$= 102\,p\,r\,x^3\,y^4\,z^2$

അഭ്യാസം 18

ഉ. സാ. ഘ യും ല. സാ. ഗു വും കാണുക.

1. $4\,a^4,\ \ 3\,a^3$
2. $a^2\,x,\ \ a^3\,y$
3. $a^4,\ a^3,\ \ a^2$
4. $x\,y,\ y\,z,\ x\,y\,z$
5. $6\,x^3\,y^2,\ 2\,x^2\,y^4$
6. $12\,a^2\,b^3,\ \ 9\,a^3\,b^2$
7. $4\,p\,q^3,\ \ 2\,p^3\,q^2$
8. $9\,b^2\,y^3,\ \ 12\,b^3\,y$
9. $b^2\,c^3,\ b^3\,c^4,\ \ b^3\,c^7$
10. $3\,a^2\,x^7,\ 6\,a^3\,x^6$
11. $14\,x^2\,y^3\,z^2,\ \ 7\,x\,y\,z$
12. $13\,a\,x^3\,y^4\,z,\ \ 26\,b\,x\,z^3,\ \ 39\,a\,c\,x$ [illegible] z
13. $5\,a^2\,b^3\,c^4,\ \ 15\,a^3\,b^4\,c^5,\ \ 25\,a^4\,b^2\,c^3,\ \ 10\,a^2\,b^2\,c^2$
14. $20\,a^2\,x^3\,y^4\,z,\ \ 15\,b^3\,x\,y^3\,z^4,\ \ 10\,a\,b^2\,x^4\,y\,z^3,\ \ 25\,x\,y^2\,z$
15. $x\,(x + y),\ \ y\,(x + y)$
16. $2\,(a - b),\ \ 3\,(a - b)$
17. $x^2\,(x + y)\,(x - y,\ \ x\,y\,(y - x)\,(x - z)$
18. $a\,b\,c\,(a - b)\,(c - a),\ \ a\,b^2\,(b - a)\,(b + a)$
19. $y^2\,(x + 1),\ \ y^3\,(x + 2)$
20. $(x + 1)\,(x + 2)\,(x + 3),\ \ (x + 2)\,(x - 5)\,(x + 1)$
21. $12\,(x^2 + y^2)\,(x - y),\ \ 18\,(x + y)\,(x^2 + y^2)$
22. $4\,a\,(a + b)^2,\ \ 6\,a\,b\,(a + b)\,(a - b),\ \ 2\,a\,b^2\,(a + b)\,(a - b)^2$

3. ഉദാ: 1 $2a^3 - 2ab^2$, $3a^2b - 3ab^2$, $5a^3b - 10a^2b^2 + 5ab^3$ എന്നീ രാശിമാലകളുടെ ഉ. സാ ഘ യും ല. സാ. ഗു വും കാണുക.

ആദ്യമായി ഓരോ രാശിമാലയേയും ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക.

$2a^3 - 2ab^2 = 2a(a^2 - b^2) = 2a(a-b)(a+b)$

$3a^2b - 3ab^2 = 3ab(a-b)$

$5a^3b - 10a^2b^2 + 5ab^3 = 5ab(a^2 - 2ab + b^2)$

$= 5ab(a-b)^2$

$\therefore$ ഉ. സാ. ഘ $= a(a-b)$

ല. സാ ഗു $= 2 \times 3 \times 5 \times ab(a+b)(a-b)^2$

$= 30ab(a+b)(a-b)^2$

ഉദാ: 2 $x^4y - xy^4$, $x^4y^2 - x^2y^4$, $xy^2(x^3 - y^3)$

ഇവയുടെ ഉ. സാ ഘ യും ല. സാ. ഗു വും കാണുക.

$x^4y - xy^4 = xy(x^3 - y^3)$

$= xy(x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$x^4y^2 - x^2y^4 = x^2y^2(x^2 - y^2)$

$= x^2y^2(x-y)(x+y)$

$xy^2(x^3 - y^3) = xy^2(x-y)(x^2 + xy + y^2)$

ഉ. സാ. ഘ $= xy(x-y)$

ല. സാ. ഗു $= x^2y^2(x-y)(x+y)(x^2 + xy + y^2)$

അഭ്യാസം 19.

ഉ. സാ. ഘ യും ല. സാ. ഗു വും കാണുക.

1. $4x + 8y$, $3x + 6y$
2. $x^2y - xy^2$, $x^2 - 2xy + y^2$
3. $a^2 + ab$, $a^2 - b^2$
4. $(x+y)^2$, $(x^2 - y^2)$
5. $2a^2 - 2ab$, $a^3 - a^2b$

6. $a^3 - a^2 x,\ a^3 - a x^2$

7. $a^2 - 2 a b,\ a^2 - 4 b^2,\ 4 a - 8 b$

8. $a^2 b x + a b^2 x,\ a^2 b - b^3$

9. $9 a^2 - 1,\ 9 a^2 + 6 a + 1$

10. $x^2 - 2 x y + y^2,\ (x - y)^3$

11. $x^2 + x y - 2 y^2,\ x^3 + 8 y^3$

12. $p^2 + 3 p + 2,\ p^2 + 5 p + 6$

13. $m^2 + 4 m - 5,\ m^2 + 5 m - 6$

14. $6 q^2 + 17 q + 5,\ 3 q^2 + 13 q + 4$

15. $y^2 + 2 y + 1,\ y^2 - y - 2$

16. $x y - y,\ x^4 y - x y$

17. $a^3 + a^2 b,\ a^4 - b^4$

18 $b^2 - 9,\ b^3 - 3 b^2 - b + 3$

19. $a^3 - a^2 - a + 1,\ a^2 - 2 a + 1$

20. $x^4 - 27 a^3 x,\ x - 3 a$

21. $12 x^2 + x - 1,\ 15 x^2 + 8 x + 1$

22. $2 a^2 + 9 a + 4,\ 2 a^2 + 11 a + 5,\ 2 a^2 - 3 a - 2$

23. $3 b^4 + 8 b^3 + 4 b^2,\ 3 b^5 + 11 b^4 + 6 b^3,$
$3 b^4 - 16 b^3 - 12 b^2$

24 $3 x^2 - 12,\ 6 x^2 - 24 x + 24,\ 9 x^2 y - 18 x y$

25. $x^2 - 1,\ x^2 + x - 2,\ x^2 + 2 x - 3$

26 $a^3 + 3 a^2 - a - 3,\ a^3 - 3 a^2 - 4 a,\ a^2 - 9$

27. $4 b^3 + 20 b^2 - b - 5,\ 2 b^3 - b^2 - 50 b + 25,$
$(2 b - 1)^2 (b + 1)^2$

ല. സാ. ഗു കാണുക.

28. $x (x - y),\ y (y - z),\ z (z - x)$

29 $a^4 (b - c),\ a^2 (b^2 - c^2),\ b^2 (b + c)$

30 $b^2 c^2 (b - c),\ c^2 a^2 (c - a),\ a^2 b^2 (a - b)$

31. $a^2-1,\ a^2+1,\ (a+1)^2$

32. $x^2-y^2,\ x^3-y^3,\ x^3+y^3$

4. 299, 377 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഉ. സാ. ഘ കണ്ടുപിടിക്കാൻ ശ്രമിക്കുക. ഇവയെ അവിഭാജ്യഘടകങ്ങളായി പിരിക്കുന്നതു് എളുപ്പമല്ലെന്നു കാണാം. ഇപ്രകാരമുള്ള സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഇവയുടെ ഉ. സാ. ഘ വേറൊരു രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ പൊതുഘടകങ്ങളെ സംബന്ധിക്കുന്ന ഒരു നിയമമുണ്ടു്. ഇവയുടെ പൊതുഘടകങ്ങളെല്ലാം ഇവയിൽ വലിയ സംഖ്യയെ ചെറിയ സംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടത്തിന്റെയും ഘടകങ്ങളായിരിക്കും ഉദാഹരണമായി 42, 154 എന്നീ സംഖ്യകൾ എടുക്കുക. ഘടകക്രിയ ചെയ്താൽ ഇവയുടെ ഉ. സാ. ഘ 14 ആണെന്നു കിട്ടുന്നതാണു്. 154 നെ 42 കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടത്തിലും ഈ പൊതുഘടകം അടങ്ങിയിട്ടുള്ളതായി കാണാം. മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന തത്വം ഉപയോഗിച്ചു് 299, 377 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഉ. സാ. ഘ കണ്ടുപിടിക്കാം. ആദ്യമായി 377 നെ 299 കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ശിഷ്ടം 78 എന്നു കിട്ടും.

$$\begin{array}{r} 299)\ 377\ (1 \\ 299 \\ \hline 78 \end{array}$$

299, 377 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ പൊതുഘടകങ്ങളെല്ലാം 78 എന്ന സംഖ്യയിലും ഉള്ളതുകൊണ്ടു് 299, 377 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഉ. സാ, ഘ കാണുന്നതിനു പകരം 299, 78 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഉ സാ. ഘ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതിയാകും. 299 നെ 78 കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ശിഷ്ടം 65 എന്നു കിട്ടും

$$\begin{array}{r} 78)\ 299\ (3 \\ 234 \\ \hline 65 \end{array}$$

299, 78 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഉ സാ. ഘ. കാണുന്നതിനു പകരം 78, 65 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഉ. സാ. ഘ

കണ്ടാൽ മതിയാകും. 78 നെ 65 കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ശിഷ്ടം 13 എന്നു കിട്ടും. 78 ന്റേയും 65 ന്റേയും ഉ. സാ. ഘ കാണുന്നതിനു പകരം 65, 13 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഉ. സാ. ഘ കണ്ടാൽ മതി. 65 നെ 13 കൊണ്ടു ഹരിക്കുക. ശിഷ്ടം പൂജ്യം എന്നു കിട്ടി. അതായതു് 65 ൽ 13 നിശ്ശേഷം അടങ്ങിയിട്ടുണ്ടു്. അതുകൊണ്ടു് 65, 13 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഉ, സാ. ഘ. 13 തന്നെയാണു്.

```
65) 78 (1
    65
    --
    13
```

```
13) 65 (5
    65
    --
     0
```

∴ 299, 377 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഉ. സാ. ഘ = 13

ഉ. സാ. ഘ കാണാൻ നാം ചെയ്യു ക്രിയകൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ ചുരുക്കിയെഴുതാം.

```
299) 377 (1
     299
    ----
     78) 299 (3
         234
        ----
         65) 78 (1
             65
            ---
             13) 65 (5
                 65
                ---
                  0
```

ഒടുവിലത്തെ ഹാരകമായി കിട്ടിയ 13 ആണു് ഉ സാ. ഘ. ക്രിയചെയ്യുന്ന രീതി അല്പംകൂടി ചുരുക്കി എഴുതാവുന്നതാണു്.

3	299	377	1	
	234	299		
5	65	78	1	
	65	65		
	0	13		ഉ. സാ. ഘ

അഭ്യാസം 20.

മുകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ദീർഘഹരണരീതിയിൽ ഉ. സാ. ഘ. കാണുക.

1. 187, 355
2. 323, 698
3. 323, 779
4. 431, 943
5. 317, 897
6. 7?3, 1643

5. ദീർഘഹരണരീതിയിൽ സംഖ്യകളുടെ ഉ. സാ. ഘ കണ്ടുപിടിച്ച രീതിയിൽ രാശിമാലകളുടെ ഉ. സാ. ഘ യും കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണു്.

ഉദാ: 1. $8x^3 - 8x^2 - 4x - 3$,

$2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x - 3$ എന്നീ രാശിമാലകളുടെ ഉ. സാ. ഘ കാണുക.

ഒന്നാമത്തെ രാശിമാലയ്ക്കു് A എന്നും, രണ്ടാമത്തേതിനു് B എന്നും പേരുകൊടുക്കുക. B എന്നതു് A യേക്കാൾ ഉയൎന്ന ഡിഗ്രീയിലുള്ളതായതുകൊണ്ടു് ആദ്യമായി B യെ A കൊണ്ടു ഹരിക്കുകയാണു വേണ്ടതു്. അപ്രകാരം ഹരിച്ചുനോക്കുക. ഹരണഫലത്തിൽ ആദ്യത്തെ പദമായി $\frac{1}{4}x$ എന്ന ഭിന്നമാണു് കിട്ടുന്നതു്. ഇപ്രകാരം ഭിന്നം വരുന്നതു് ക്രിയയെ ക്ലേശകരമാക്കുന്നതുകൊണ്ടു് ആദ്യമായി B യെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചശേഷം A കൊണ്ടു ഹരിക്കുകയാണു് സൗകര്യം. അതായതു് A, B ഇവയുടെ ഉ. സാ. ഘ. കാണുന്നതിനു പകരം A, 4 B ഇവയുടെ ഉ. സാ. ഘ കണ്ടാൽ മതിയാകും. A, B ഇവയുടെ പൊതുഘടകങ്ങളെല്ലാം A, 4 B ഇവയുടേയും പൊതുഘടകങ്ങളായിരിക്കുമെന്നു വ്യക്തമാണു്. ഹരണക്രിയ ലഘൂകരിക്കുന്നതിനുവേണ്ടി ഉ. സാ. ഘ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന ക്രിയ ചെയ്യുന്നതിനിടയ്ക്കു് ഉചിതമായ സന്ദർഭങ്ങളിലെല്ലാം ഇപ്രകാരം ആവശ്യമുള്ള സംഖ്യകൊണ്ടു ഗുണിക്കുകയോ ഹരിക്കുകയോ ചെയ്യാവുന്നതാണു്.

തന്നിരിക്കുന്ന രാശിമാലകളുടെ ഉ. സാ. ഘ ദീർഘഹരണരീതിയിൽ താഴെ കണ്ടു പിടിച്ചിരിക്കുന്നതു നോക്കുക.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x - 3 \\
 & 4 \\
\hline
8x^3 - 8x^2 - 4x - 3) & 8x^4 + 12x^3 - 12x^2 - 28x - 12 \quad (x \\
 & 8x^4 - 8x^3 - 4x^2 - 3x \\
\hline
 & \quad 20x^3 - 8x^2 - 25x - 12 \\
 & \quad 2 \\
\hline
 & \quad 40x^3 - 16x^2 - 50x - 24 \quad (5 \\
 & \quad 40x^3 - 40x^2 - 20x - 15 \\
\hline
 & \quad 3) \quad 24x^2 - 30x - 9 \\
\hline
 & \qquad 8x^2 - 10x - 3
\end{array}
$$

$$8x^2 - 10x - 3)\ 8x^3 - 8x^2 - 4x - 3 \quad x$$

$$\underline{8x^3 - 10x^2 - 3x}$$

$$2x^2 - x - 3$$

$$\underline{4}$$

$$8x^2 - 4x - 12 \ (1$$

$$\underline{8x^2 - 10x - 3}$$

$$3)\ \underline{6x - 9}$$

$$2x - 3.$$

$$2x - 3)\ 8x^2 - 10x - 3 \ (4x + 1$$

$$\underline{8x^2 - 12x}$$

$$2x - 3$$

$$\underline{2x - 3}$$

$$0.$$

∴ ഉ. സാ. ഘ = $\underline{2x - 3.}$

ഈ ക്രിയ താഴെ ചേർത്തിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ ചുരുക്കാവുന്നതാണ്.

x	$8x^3 - 8x^2 - 4x - 3$	$2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x - 3$	
	$8x^3 - 10x^2 - 3x$	4	
	$2x^2 - x - 3$	$8x^4 + 12x^3 - 12x^2 - 28x - 12$	x
	4	$8x^4 - 8x^3 - 4x^2 - 3x$	
1	$8x^2 - 4x - 12$	$20x^3 - 8x^2 - 25x - 12$	
	$8x^2 - 10x - 3$	2	
	$3 \mid 6x - 9$	$40x^3 - 16x^2 - 50x - 24$	5
	$2x - 3$	$40x^3 - 40x^2 - 20x - 15$	
		$3\,)\ 24x^2 - 30x - 9$	
		$8x^2 - 10x - 3$	$4x+1$
		$8x^2 - 12x$	
		$2x - 3$	
		$2x - 3$	
		$0.$	

$\therefore$ ഉ. സാ. ഘ $= \underline{2x - 3}$

ഉദാ: 2. ഉ. സാ. ഘ കാണുക.

$2x^5 - 12x^3 + 10x^2, \quad 6x^4 - 18x^2 + 12x.$

ഓരോ രാശിമാലയിലുമുള്ള ഏകപദഘടകങ്ങളെ വേർതിരിച്ചതിന്നുശേഷം ദീർഘഹരണരീതിയിൽ ഉ. സാ. ഘ. കണ്ടുപിടിക്കുന്നതാണു് സൗകര്യം.

$$2x^5 - 12x^3 + 10x^2 = 2x^2(x^3 - 6x + 5)$$
$$6x^4 - 18x^2 + 12x = 6x(x^3 - 3x + 2)$$

തന്നിരിക്കുന്ന രാശിമാലകളുടെ പൊതുഘടകങ്ങളിൽ ഒന്നു് $2x$ ആണെന്നു മനസ്സിലായിക്കഴിഞ്ഞു. ഇനി $x^3 - 6x + 5$, $x^3 - 3x + 2$ ഇവയുടെ പൊതുഘടകങ്ങൾ ദീർഘഹരണരീതിയിൽ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ $x - 1$ എന്നു കിട്ടുന്നതാണു്.

$\therefore$ തന്നിരിക്കുന്ന രാശിമാലകളുടെ ഉ. സാ. ഘ $= 2x(x-1)$

ഉദാ: 3 ഉ. സാ. ഘ കാണുക.

$10x^4 - 7x^3 + x^2, \quad 4x^4 - 2x^3 - 2x + 1.$

ആദ്യത്തെ രാശിമാലയിൽ ഒരു ഏകപദം ഘടകമായിട്ടുള്ളതു മാററിയതിന്നുശേഷം ദീർഘഹരണരീതിയിൽ ഉ. സാ. ഘ കാണുക

$$10x^4 - 7x^3 + x^2 = x^2(10x^2 - 7x + 1)$$

x^2 എന്നതു് രണ്ടാമത്തെ രാശിമാലയിലെ ഘടകമല്ലെന്നുള്ളതു് പ്രത്യക്ഷത്തിൽതന്നെ അറിയാം. അതുകൊണ്ടു് തന്നിരിക്കുന്ന രാശിമാലകളുടെ ഉ. സാ. ഘ കാണുന്നതിനു് $10x^2 - 7x + 1$, $4x^4 - 2x^3 - 2x + 1$ എന്നീ രാശിമാലകളുടെ ഉ. സാ. ഘ കണ്ടുപിടിച്ചാൽ മതി. ദീർഘഹരണരീതിയിൽ അതു കണ്ടുപിടിച്ചാൽ $2x - 1$ എന്ന ഉത്തരം കിട്ടും.

$\therefore$ ഉ. സാ. ഘ $= 2x - 1$,

അഭ്യാസം 21.

ഉ. സാ. ഘ. കാണുക.

1. $x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 24x,\quad x^3 + 8x^2 - 3x - 9$
2. $2a^5 - 5a^4 + 11a^3 + 7a^2,\quad 4a^4 - 11a^3 + 25a^2 + 7a$
3. $2y^5 + 4y^4 - 7y^3 - 14y^2.\quad 6y^3 - 10y^2 - 21y + 35$
4. $20b^4 - 14b^3 + 2b^2,\quad 8b^4 - 4b^3 - 4b + 2$
5. $x^3 + 2x^2 - 13x + 10,\quad x^3 + x^2 - 10x + 8$
6. $4a^3 - 8a^2 + 3a - 6,\quad 12a^3 + 4a^2 + 9a + 3$
7. $40 - 99y - 5y^2 + y^3,\quad 35 - 86y - 6y^2 + y^3$
8. $1 - b^2 + 4b - 10b^3,\quad 5b + 1 + b^2 - 15b^3$
9. $2c^2 + c^3 - 8c - 16,\quad 3c^2 + c^3 - 8c - 24$
10. $23p^2 - 26p + 8 - 6p^3,\quad 13p^2 - 2p^3 - 27p + 18$
11. $q^3 - 5q + 4q^2 - 20.\quad 6q^2 + q^3 - 5q - 30$
12. $x^3 - x^2 - 5x - 3,\quad x^3 - 4x^2 - 11x - 6$
13. $x^3 - 5x^2y + 7xy^2 - 3y^3,\quad x^3 - 3xy^2 + 2y^3$
14. $a^3 + 2a^2b - 7ab^2 + 40b^3.\quad 2a^3 + 9a^2b - 11ab^2 - 30b^3$
15. $b^4 - 2b^3 - 4b - 7,\quad b^3 + b^4 - 3b^2 - b + 2$
16. $3c^4 - 3c^3 - 2c^2 - c - 1,\quad 9c^4 - 3c^3 - c - 1$

17. $y^2 - 2y^3 + 2y^4 + 3y - 6$, $3y - 2y^3 + 4y^4 - 9$

18. $p^4 - p^3 + 2p^2 + p + 3$, $2p^3 + p^4 - p - 2$

19. $3x^3 - 3ax^2 + 2a^2x - 2a^3$, $3x^3 + 12ax^2 + 2a^2x + 8a^3$

20. $a^3 - 2a^2 - 2a - 3$, $a^2 + 2a^3 + a - 1$, $a^2 + 3a^3 + a - 2$

21. $4b^3 + 7b^2 - 3b - 6$, $b^3 + 6b^2 + 9b + 4$, $4b^2 + 3b - 1$

5. രണ്ടു രാശിമാലകളുടെ ഉ. സാ ഘ, ല. സാ. ഗു ഇവ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാൽ രാശിമാലകളുടെ ഗുണനഫലം കിട്ടുമെന്നു തെളിയിക്കാവുന്നതാണു്.

രാശിമാലകൾ A, B എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവയുടെ ഉ. സാ. ഘ H എന്നും ല. സാ. ഗു L എന്നും ഇരിക്കട്ടെ $\frac{A}{H} = a$ എന്നും, $\frac{B}{H} = b$ എന്നും വിചാരിക്കുക. അപ്പോൾ $A = aH$

$B = bH$

ല. സാ. ഗു. $= abH$

$A \times B = aH \times bH = abH \times H$

$=$ ല. സാ. ഗു $\times$ ഉ. സാ. ഘ

$\therefore$ ല. സാ ഗു $= \dfrac{A \times B}{\text{ഉ. സാ ഘ}}$

അതായത്ത് രാശിമാലകളുടെ ഗുണനഫലത്തെ അവയുടെ ഉ. സാ. ഘ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ല. സാ. ഗു കിട്ടുന്നതാണ്. ഘടകക്രിയ ചെയ്ത് ല. സാ. ഗു കാണാൻ പ്രയാസമുള്ളപ്പോൾ ദീർഘഹരണരീതിയിൽ ഉ. സാ. ഘ നിർണ്ണയിച്ചശേഷം മുകളിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ബന്ധം ഉപയോഗിച്ച് ല. സാ. ഗു കാണാവുന്നതാണ്.

ഉദാ: $a^3 - a^2 - 5a + 2, \quad a^3 + 4a^2 + a - 6$ ഇവയുടെ ല. സാ. ഗു കാണുക.

ദീർഘഹരണരീതിയിൽ ഇവയുടെ ഉ. സാ. ഘ കണ്ടുപിടിക്കുക. ഉ. സാ. ഘ $= a + 2$ എന്നു കിട്ടും

$$\therefore \text{ ല. സാ. ഗു } = \frac{(a^3-a^2-5a+2)(a^3+4a^2+a-6)}{a+2}$$

$$= (a^2 - 3a + 1)(a^3 + 4a^2 + a - 6)$$

അഭ്യാസം 22.

ല. സാ. ഗു. കാണുക.

1. $4-4y-y^2+y^3, \quad 2y^3-y^2-6y+8$
2. $3p^3-15p^2+p-5, \quad 6p^4-25p^2-9$
3. $a-7a^2+10a^3, \quad 1-2a+4a^3-2a^3$
4. $8x^2-6x+32x^3+18x^4,$
   $95x^3+35x^2-20x+40x^4$
5. $15a^3-31a^2b+5ab^2+2b^3,$
   $6a^4-25a^3b+26a^2b^2-b^4$
6. രണ്ടു രാശിമാലകളുടെ ഉ. സാ. ഘ $x-2$. അവയുടെ ല. സാ. ഗു $(x-2)(x^2-9)$. അവയിൽ ഒരു രാശിമാല x^2-5x-6 ആയാൽ മറ്റേ രാശിമാല കാണുക.
7. രണ്ടു രാശിമാലകളുടെ ഗുണനഫലം x^4+2x^3-2x-1. അവയുടെ ഉ. സാ. ഘ. $x+1$. ല. സാ. ഗു കാണുക.

അദ്ധ്യായം 6

ഭിന്നങ്ങൾ (Fractions)

1. അങ്കഗണിതത്തിൽ $\frac{24}{30} = \frac{6 \times 4}{6 \times 5} = \frac{4}{5}$. അതായത് ഒരു ഭിന്നത്തിന്റെ അംശത്തേയും ഛേദത്തേയും ഒരേ സംഖ്യ കൊണ്ടു ഹരിച്ച് ഭിന്നസംഖ്യയെ ലഘൂകരിക്കാം. ബീജഗണിതത്തിലുള്ള ഭിന്നങ്ങളേയും ഈ രീതിയിൽ ലഘൂകരിക്കാം.

ഉദാ: 1 $\frac{ax}{ay} = \frac{a \times x}{a \times y} = \frac{x}{y}$

ഉദാ: 2. $\frac{12x^2y^3z}{8xy^2z^2} = \frac{4xy^2z \times 3xy}{4xy^2z \times 2z} = \frac{3xy}{2z}$

അംശവും ഛേദവും ഓരോ രാശിമാലയായി വന്നാൽ ആദ്യമായി ഇവയെ ഘടകങ്ങളാക്കിയിട്ട് പിന്നീട് ലഘൂകരിക്കാം.

ഉദാ: 3 $\frac{m^2 + 2mn + n^2}{m^2 - n^2} = \frac{(m+n)(m+n)}{(m+n)(m-n)} = \frac{m+n}{m-n}$

അഭ്യാസം 23

ലഘൂകരിക്കുക.

(1) $\frac{12mn^2p}{15m^2np^2}$ (2) $\frac{15a^2b^3c^2}{18a^4b}$

(3) $\frac{3x^2yz^3}{5xy^4z^2}$ (4) $\frac{5a^3b^2c^4}{15ab^4c}$

(5) $\frac{39m^2n^4}{52m^3n^5p^4}$ (6) $\frac{38a^2b^3c^4}{57a^3bc^2}$

(7) $\frac{ab^2}{a^2b - b^3}$ (8) $\frac{x(a-b)}{a-b}$

(9) $\frac{3a^2 - 6ab}{2a^2b - 4ab^2}$ (10) $\frac{axy + xy^2}{aby + by^2}$

(11) $\frac{4a^2 - 9b^2}{4a^2 + 6ab}$ (12) $\frac{20(x^3 - y^3)}{5x^2 + 5xy + 5y^2}$

(13) $\frac{p^3 - 2pq^2}{p^4 - 4p^2q^2 + 4q^4}$ (14) $\frac{ab - 3b^2}{a^3b^2 - 27b^5}$

(15) $\frac{a^2 - 5a}{a^2 - 4a - 5}$ (16) $\frac{3b^2 + 6b}{b^2 + 4b + 4}$

(17) $\frac{x^3y + 2x^2y + 4xy}{x^3 - 8}$ (18) $\frac{a^2 - 7a + 12}{a^2 - 3a - 4}$

(19) $\frac{2y^2 + 7y + 6}{3y^2 + 8y + 4}$ (20) $\frac{b^2 + 1}{b^3 - b^2 + b - 1}$

(21) $\frac{a^3 + a^2 + a - 3}{a^3 + 3a^2 + 5a + 3}$ (22) $\frac{(x + y)^2 - (a + b^2}{(x + a^2 - (y + b)^2}$

(23) $\frac{x^4 - y^4}{x^4y - xy^4}$ (24) $\frac{(1+p)^2 - p(1 + p)^2}{(1 - p)^2 + p(1 - p)^2}$

(25) $\frac{(xy^2a^4)^2}{(x^2ya^3)^2}$ (26) $\frac{x^2 + (a + b)x + ab}{x^2 + (b + c)x + bc}$

(27) $\frac{a^6 + 2a^3b^3 + b^6}{a^6 - b^6}$ (28) $\frac{y^3 - y^2 + 3y + 5}{y^3 - 5y^2 + 11y - 15}$

2. ഭിന്നങ്ങൾകൊണ്ടുള്ള ഗുണനവും ഹരണവും

അങ്കഗണിതത്തിൽ ഭിന്നസംഖ്യകൾകൊണ്ടുള്ള ഗുണനവും ഹരണവും ചെയ്യുന്നതുപോലെ തന്നെ ബീജഗണിതത്തിലും ഈ ക്രിയകൾ ചെയ്യാം.

ഉദാ: 1. $\frac{3x^2y}{4a^2b} \times \frac{5ab^2}{6xy^2} = \frac{3x^2y \times 5ab^2}{4a^2b \times 6xy^2}$

$$= \frac{5xb}{8ay}$$

ഉദാ: 2. $\dfrac{4\ a^2 bc}{3\ a\ b^2\ c} \div \dfrac{2\ a\ b\ c^2}{6\ a^2\ b^2\ c^2} = \dfrac{4\ a^2\ b\ c \times 6\ a^2\ b^2\ c^2}{3\ a\ b^2\ c \times 2\ a\ b\ c^2}$

$$= \underline{4\ a^2}$$

ഉദാ: 3. $\dfrac{x^2 + 5\ x + 6}{x^2 - 3x + 2} \times \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 + 2\ x - 3}$

$$= \frac{(x + 3)\ (x + 2)}{(x - 2)\ (x - 1)} \times \frac{(x - 2)\ (x + 1)}{(x + 3)\ (x - 1)}$$

$$= \frac{(x + 2)\ (x + 1)}{(x - 1)\ \ (x - 1)}$$

അഭ്യാസം 24

(1) $\dfrac{12\ a^2\ b^3\ c}{9\ a\ b^2\ c} \times \dfrac{8\ a^2\ b\ c^2}{24\ a\ b^3}$

(2) $\dfrac{13\ l^2\ m^3}{11\ k\ l\ y^3} \div \dfrac{26\ l^3\ m^2}{33\ k^2\ ly}$

(3) $\dfrac{9\ x^2\ y^2\ z}{7\ a\ x^3\ y\ z^2} \times \dfrac{14\ a\ x^4\ y\ z^2}{27\ x^2\ y^2}$

(4) $\dfrac{7\ a\ x}{4\ b\ y} \div \dfrac{21\ a\ x^2}{8\ b^2\ y^2}$

(5) $\dfrac{3\ x}{4\ y} \times \dfrac{8\ a\ y^2}{9\ b\ x^3} \times \dfrac{36\ ab\ x^3}{24\ a\ x\ y^3}$

(6) $\dfrac{2\ (a^3\ b)^2\ c}{5\ (a\ b^3)^2\ c^2} \times \dfrac{15\ a^2\ b\ c^3)^3}{4\ (a\ b\ c)^4}$

(7) $\dfrac{2x - 2a}{6} \times \dfrac{1}{x^2 - a^2}$

(8) $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \div \dfrac{a + b}{a\ \ \ b}$

(9) $$\frac{14\,b^2 - 7\,b}{12\,b^3 + 24\,b^2} \div \frac{2\,b - 1}{b^2 + 2\,b}$$

(10) $$\frac{a^2 - 4\,b^2}{a\,b + 2\,b^2} \times \frac{2\,b}{a - 2b}$$

(11) $$\frac{36\,a^2 - b^2}{9\,a^2\,x^2 - 4\,x^2} \times \frac{x\,(3a + 2)}{6\,a + b}$$

(12) $$\frac{x^2 + 4\,x - 5}{x^2 - 6\,x} \times \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$$

(13) $$\frac{6\,x^2 - x - 12}{y^2 + 5\,y} \times \frac{y^2 - 25}{12 + x - 6x^2}$$

(14) $$\frac{3\,x^2 + 3\,x\,y}{x^2 - y^2} \div \frac{3x + 3\,y}{x^2 - 2\,x\,y + y^2}$$

(15) $$\frac{64\,a^2\,b^2 - z^4}{x^2 - 4} \times \frac{(x - 2)^2}{8\,a\,b + z^2} \div \frac{x^2 - 4}{(x + 2)^2}$$

(16) $$\frac{3\,x}{x^2 - 1} \times \frac{x^2 - 2x + 1}{4\,x} \div \frac{x^2 - x}{2\,x^3 + 2\,x^2}$$

(17) $$\frac{3\,a^2 - a\,b}{7\,ab - 21\,b^2} \div \frac{9\,a^2 - b^2}{7\,a^2 - 49b^2)} \times \frac{7\,b\,(3\,a + b)}{3\,a\,(a + 7\,b)}$$

(18) $$\frac{y^2 - y - 20}{y^2 - 25} \times \frac{y^2 - y - 2}{y^2 + 2y - 8} \div \frac{y + 1}{y^2 + 5y}$$

(19) $$\frac{p^2 - p}{p^2 - p - 2} \div \frac{p^2 - 2p + 1}{p^2 + 2p - 8} \times \frac{p^2 - 3\,p + 2}{p^2 + 3\,p - 4}$$

(20) $$\frac{a^4 - 8\,a}{a^2 - 4a - 5} \times \frac{a^2 + 2\,a + 1}{a^3 - a^2 - 2\,a} \div \frac{a^2 + 2a + 4}{a - 5}$$

(21) $$\frac{(a + b)^2 - c^2}{a^2 + a\,b - ac} \times \frac{a}{(a + c)^2 - b^2} \times \frac{(a - b)^2 - c^2}{a\,b - b^2 - bc}$$

(22) $$\frac{x^2 + 12\,x - 64}{x^2 + 24\,x + 128} \times \frac{x^2 - 64}{x^3 - 64} \div \frac{x^2 - 16x + 64}{x^2 + 4\,x + 16}$$

3. ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനവും വ്യവകലനവും

അങ്കഗണിതത്തിൽ ഭിന്നസംഖ്യകൾ കൂട്ടുകയും കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നതു് ഛേദങ്ങളുടെ ല. സാ. ഗു കണ്ടിട്ടാണല്ലോ.

ഉദാ: 1. $\frac{3}{8}+\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{15+16+30}{40}$

$$=\frac{61}{40}=1\frac{21}{40}$$

ഈ രീതിതന്നെയാണു് ബീജഗണിതത്തിലും ഉപയോഗിക്കുന്നതു്.

ഉദാ: 2. $\frac{5a}{8x}+\frac{3a}{5x}+\frac{a}{4x}$ നെ ലഘൂകരിക്കുക.

ഛേദങ്ങളുടെ ല. സാ. ഗു $= 40x$

$$\frac{5a}{8x}+\frac{3a}{5x}+\frac{a}{4x}=\frac{25a+24a+10a}{40x}=\underline{\frac{59a}{40x}}$$

ഉദാ: 3. ലഘൂകരിക്കുക.

$$\frac{2}{x+y}-\frac{2}{x-y}+\frac{4x}{x^2-y^2}$$

ഛേദങ്ങളുടെ ല. സാ ഗു $= (x+y)(x-y)$

$$\therefore \text{ രാശിമാല } = \frac{2(x-y)-2(x+y)+4x}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{2x-2y-2x-2y+4x}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{4x-4y}{(x+y)(x-y)}=\frac{4(x-y)}{(x+y)(x-y)}$$

$$=\frac{4}{x+y}$$

അഭ്യാസം 25

ലഘൂകരിക്കുക.

(1) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4}$ (2) $\frac{2\,ab}{3} + \frac{5\,a\,b}{6} + \frac{7\,a\,b}{9}$

(3) $\frac{y - 1}{2} + \frac{y + 3}{5} + \frac{y + 7}{10}$

(4) $\frac{5\,x - 1}{8} - \frac{3\,x - 2}{7} + \frac{x - 5}{4}$

(5) $\frac{2\,y - 3}{9} - \frac{y + 2}{6} + \frac{5\,y + 8}{12}$

(6) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ (7) $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$

(8) $\frac{x}{a^2} - \frac{y}{ab} + \frac{z}{b^2}$ (9) $\frac{2p + 5}{p} - \frac{p + 3}{2p} - \frac{27}{8\,p^2}$

(10) $\frac{x - y}{x\,y} + \frac{y - z}{y\,z} + \frac{z - x}{z\,x}$

(11) $\frac{x - 2\,y}{2x} - \frac{x - 5\,y}{4x} + \frac{x + 7\,y}{8x}$

(12) $\frac{y + z}{2x} + \frac{z + x}{4\,y} - \frac{x - y}{3\,z}$

(13) $\frac{a - 3}{5\,a} + \frac{a^2 - 9}{10\,a^2} - \frac{8 - a^3}{15\,a^3}$

(14) $\frac{1}{x + 2} + \frac{1}{x + 3}$ (15) $\frac{2}{a + 3} - \frac{1}{a + 4}$

(16) $\frac{a}{x + a} - \frac{b}{x + b}$ (17) $\frac{1}{x - 5} - \frac{1}{x - 4}$

(18) $\frac{3}{x - 6} - \frac{1}{x + 2}$ (19) $\frac{p}{x - p} - \frac{p}{x + p} + \frac{2p}{x^2 - p^2}$

(20) $\dfrac{a+3}{a+4} - \dfrac{a+1}{a+2}$ (21) $\dfrac{a+y}{a-y} - \dfrac{a-y}{a+y}$

(22) $\dfrac{x}{x-a} - \dfrac{x^2}{x^2-a^2}$ (23) $\dfrac{1}{2x-3y} - \dfrac{(x+y)}{4x^2-9y^2}$

(24) $1 - \dfrac{y}{x-y}$ (25) $\dfrac{x}{x-y} + 1$

(26) $\dfrac{a^2}{a-b} - a$ (27) $\dfrac{a-b}{a+b} - \dfrac{(a-b)^2}{a^3-b^3}$

(28) $\dfrac{x}{1-x^2} - \dfrac{x}{1+x^2}$ (29) $\dfrac{b}{a^3-b^3} - \dfrac{b}{a^3+b^3}$

(30) $\dfrac{a}{a^2-a-6} + \dfrac{a}{a^2-4a+3} - \dfrac{2a}{a^2+a-2}$

(31) $\dfrac{y^3+1}{y^3-1} + \dfrac{1}{y-1} - 1$

(32) $\dfrac{1}{x^2-3x+2} - \dfrac{1}{x^2+2x-3} \times \dfrac{1}{x^2+x-6}$

4. ഉദാ: 1. ക്രിയചെയ്യുക $\dfrac{a}{a-b} - \dfrac{b}{b-a}$

ഛേദങ്ങളുടെ ല. സാ. ഗു $(a-b)\ (b-a)$ ആണെന്നു തോന്നിയേക്കാം. എന്നാൽ $b-a = -(a-b)$ ആയതുകൊണ്ട് ല. സാ. ഗു $a-b$ എന്നോ $b-a$ എന്നോ എടുക്കാം.

$$\therefore \quad \frac{a}{a-b} - \frac{b}{b-a} = \frac{a}{a-b} - \frac{b}{-(a-b)} = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{a-b}$$

$$= \frac{a+b}{a-b}$$

ഉദാ: 2. ലഘൂകരിക്കുക

$$\frac{a^2-3ab-4b^2}{a^2-16b^2} - \frac{2ab}{2a^2+8ab}$$

ഓരോ ഭിന്നത്തിന്റേയും അംശത്തേയും ഛേദത്തേയും ഘടകക്രിയചെയ്തു് ഭിന്നത്തെ ലഘൂകരിക്കാം

$$\text{രാശിമാല} = \frac{(a-4b)(a+b)}{(a+4b)(a-4b)} - \frac{2ab}{2a(a+4b)}$$

$$= \frac{a+b}{a+4b} - \frac{b}{a+4b}$$

$$= \frac{a+b-b}{a+4b} = \frac{a}{a+4b}$$

ഉദാ: 3 ലഘൂകരിക്കുക.

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1+x^2} + \frac{4x^6}{x^4-1}$$

ഈ ചോദ്യത്തിൽ ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങൾ കൂട്ടിയശേഷം മൂന്നാമത്തെ പദം എടുക്കുകയും അതിനുശേഷം നാലാമത്തെ പദം എടുക്കയും ചെയ്യുകയാണു് സൗകര്യം.

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{1+x+1-x}{(1-x)(1+x)} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1+x^2} = \frac{2}{1-x^2} - \frac{2}{1+x^2}$$

$$= \frac{2(1+x^2) - 2(1-x^2)}{(1-x^2)(1+x^2)}$$

$$= \frac{2+2x^2-2+2x^2}{(1-x^2)(1+x^2)} = \frac{4x^2}{1-x^4}$$

$$\therefore \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1+x^2} + \frac{4x^6}{x^4-1}$$

$$= \frac{4x^2}{1-x^4} + \frac{4x^6}{x^4-1} = \frac{4x^2}{1-x^4} - \frac{4x^6}{1-x^4}$$

$$= \frac{4x^2-4x^6}{1-x^4} = \frac{4x^2(1-x^4)}{1-x^4} = \underline{4x^2.}$$

അഭ്യാസം 26

(1) $\frac{a}{a-b} - \frac{a-b}{b-a}$

(2) $\frac{x-y}{y+y} + \frac{y}{y\ \ x} - \frac{x}{x-y}$

(3) $\frac{b^2}{b^2-1} + \frac{b}{b+1} - \frac{b}{1-b}$

(4) $\frac{3}{1+a} - \frac{2}{1-a} - \frac{5a}{a^2-1}$

(5) $\frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2} - \frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}$

(6) $\frac{x^2+2x+4}{x+2} - \frac{x^2-2x+4}{2-x}$

(7) $\frac{1}{2(y-1)} - \frac{y-5}{y^2-7y+10} + \frac{y-6}{2(y^2-9y+18)}$

(8) $\frac{a^2-1}{(a+1)^2} + \frac{a^2-5a+6}{a^2-4a+4} + \frac{1}{a+1}$

(9) $\frac{x^3+x^2y}{x^2y-y^3} - \frac{x(x-y)}{y(x+y)} - \frac{2xy}{x^2-y^2}$

(10) $\frac{1}{a-2b} - \frac{(a+2b)^2}{a^3-8b^3}$

(11) $\frac{5}{1+2y} - \frac{3y}{1-2y} - \frac{4-13y}{1-4y^2}$

(12) $\frac{5x}{6(x^2-1)} - \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{3(x+1)}$

(13) $\frac{a}{a^3+b^3} - \frac{b}{a^3-b^3} + \frac{a^3b+ab^3}{a^6-b^6}$

(14) $$\frac{1}{x^2 - 9x + 20} + \frac{1}{x^2 - 11x + 30}$$

(15) $$\frac{5}{5 + p - 18p^2} - \frac{2}{2 + 5p + 2p^2}$$

(16) $$\frac{x + 3y}{4(x+y)(x+2y)} + \frac{x + 2y}{(x+y)(x+3y)} - \frac{x + y}{4(x+2y)(x+3y)}$$

(17) $$\frac{a}{a^2 + 5a + 6} + \frac{15}{a^2 + 9a + 14} - \frac{12}{a^2 + 10a + 21}$$

(18) $$\frac{1}{6x^2 + 5} + \frac{1}{3x - 9} - \frac{x}{3x^2 - 27}$$

(19) $$\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+2} - \frac{3}{(p+1)(p+2)}$$

(20) $$\frac{3x}{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x-2} + \frac{4}{1-x}$$

(21) $$\frac{k}{k+l} - \frac{kl}{(k+l)^2} - \frac{k^2 l}{(k+l)^3}$$

(22) $$\frac{1}{x-y} + \frac{x-y}{x^2 + xy + y^2} + \frac{xy - 2x^2}{x^3 - y^3}$$

(23) $$\frac{1}{(a-5)(a-6)} - \frac{10}{(a-6)(a+4)} + \frac{9}{(a+4)(a-5)}$$

(24) $$\frac{y+1}{(1-x)(x-y)} - \frac{1+x}{(x-y)(1-y)} + \frac{x + 2y - 1}{(y-1)(1-x)}$$

(25) $$\frac{1}{(1+m)^2} - \frac{2}{1-m^2} + \frac{1}{(1-m)^2}$$

(26) $$\frac{x}{x-y} + \frac{x}{x+y} - \frac{2x^2}{x^2 + xy + y^2}$$

(27) $$\frac{1}{a^2 + ab + b^2} + \frac{1}{a^2 - ab + b^2} - \frac{2(a^2 + b^2)}{a^4 + a^2b^2 + b^4}$$

(28) $\dfrac{a-b}{a+b}+\left\{\dfrac{a-b}{a+b}\right\}^2+\left\{\dfrac{a-b}{a+b}\right\}^3$

(29) $\dfrac{p+2q}{p^2+pq-6q^2}-\dfrac{p-q}{p^2+7pq+12q^2}+\dfrac{p-4q}{p^2+2pq-8q^2}$

(30) $\dfrac{x}{2x-y}+\dfrac{2x^2}{4x^2+2xy+y^2}-\dfrac{8x^3}{8x^3-y^3}$

5. സങ്കീർണ്ണഭിന്നങ്ങൾ (Complex fractions)

$\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}$ എന്ന ഹരണക്രിയയെ $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാറുണ്ട്. $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ എന്നതിനെ ഒരു സങ്കീർണ്ണഭിന്നമെന്നു പറയുന്നു.

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ എന്ന സങ്കീർണ്ണഭിന്നത്തെ സാധാരണ ഭിന്നമാക്കുന്നതിനു് അംശമായ $\dfrac{a}{b}$ എന്ന ഭിന്നത്തെ ഛേദമായ $\dfrac{c}{d}$ എന്ന ഭിന്നംകൊണ്ടു ഹരിച്ചു് ലഘൂകരിച്ചാൽമാത്രം മതിയാകും.

$$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}\div\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\times\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$$

ഉദാ: 1. ലഘൂകരിക്കുക. $\dfrac{\frac{a}{b}}{x}$

ഇവിടെ ഛേദമായ ഭിന്നം $= x = \dfrac{x}{1}$

$$\therefore \quad \frac{\frac{a}{b}}{x} = \frac{a}{b} \div \frac{x}{1} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{x} = \frac{a}{bx}$$

ഉദാ: 2. ലഘൂകരിക്കുക. $\dfrac{a}{\frac{b}{x}}$

ഇവിടെ അംശമായ ഭിന്നം $= a = \dfrac{a}{1}$

$$\therefore \quad \frac{a}{\frac{b}{x}} = \frac{a}{1} \div \frac{b}{x} = \frac{a}{1} \times \frac{x}{b} = \frac{a\,x}{b}$$

N. B $\dfrac{\frac{a}{b}}{x}$, $\dfrac{a}{\frac{b}{x}}$ ഇവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം ശ്രദ്ധിച്ച് മനസ്സിലാക്കേണ്ടതാണ്.

ഉദാ: 3. ലഘൂകരിക്കുക. $\dfrac{\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}}$

അംശം $= \dfrac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{(a-b)\ (a+b)}$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2}{(a-b)\ (a+b)} = \frac{2\ (a^2 + b^2)}{(a+b)(a-b)}$$

$$\text{ഹരം} = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{4ab}{(a-b)(a+b)}$$

$$\therefore \text{ തന്നിരിക്കുന്ന ഭിന്നം} = \frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)} \div \frac{4ab}{(a-b)(a+b)}$$

$$= \frac{2(a^2+b^2)}{(a+b)(a-b)} \times \frac{(a-b)(a+b)}{4ab}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{2ab}$$

അഭ്യാസം 27

ലഘൂകരിക്കുക.

(1) $\dfrac{3y}{y - \frac{1}{4}}$

(2) $\dfrac{x - \frac{m}{n}}{x}$

(3) $\dfrac{a + \frac{1}{2}}{a - \frac{1}{3}}$

(4) $\dfrac{x + \frac{x^2}{3} + 3}{x + \frac{9}{x} + 3}$

(5) $\dfrac{1 - \frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x}}$

(6) $\dfrac{\frac{x}{x+1} + \frac{1}{x-1}}{\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x+1}}$

(7) $\dfrac{a^2 - \dfrac{5a}{6} - 1}{a^2 + \dfrac{13a}{6} + 1}$ (8) $\dfrac{\dfrac{y+2}{y+1} - \dfrac{1}{y+3}}{\dfrac{1}{y+1} + \dfrac{y+2}{y+3}}$

അദ്ധ്യായം 7.

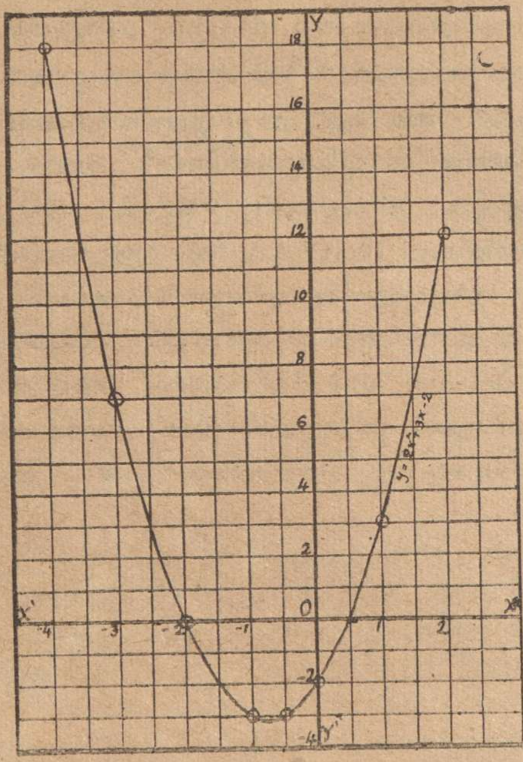
ലേഖകൾ

1. ഒന്നാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു ധർമ്മത്തിൻെറ ലേഖ ഒരു ഋജുരേഖയായിരിക്കുമെന്നു നിങ്ങൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. $3x + 5$ എന്ന ധർമ്മത്തിൻെറ ലേഖ വരച്ചു എന്നു വിചാരിക്കുക. ഈ ലേഖയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവെടുത്താൽ ആ ബിന്ദുവിൻെറ x നിയാമകവും (*x-coordinate*) y നിയാമകവും (*y - coordinate*) തമ്മിൽ $y = 3x + 5$ എന്ന ബന്ധമുണ്ടായിരിക്കുന്നതുമൂലം നാം വരച്ച ലേഖയെ $y = 3x + 5$ എന്ന സമവാക്യത്തിൻെറ ലേഖയെന്നും പറയാവുന്നതാണ്.

$3x + 5$ എന്ന ധർമ്മത്തിൻെറ ലേഖ ഒരു നേർവരയായതുകൊണ്ട് ഈ ലേഖ വരയ്ക്കുന്നതിന് ലേഖയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ നിർണ്ണയിച്ചാൽ മതിയാകും. എന്നാൽ മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ നിർണ്ണയിച്ചശേഷം ലേഖ വരയ്ക്കുകയാണെങ്കിൽ നാം നിർണ്ണയിച്ച ബിന്ദുക്കളിൽ തെററുണ്ടെങ്കിൽ അതു കണ്ടുപിടിക്കാൻ സഹായകമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് മൂന്നു ബിന്ദുക്കൾ നിർണ്ണയിച്ചശേഷം ഈ ലേഖ വരയ്ക്കുകയാണു സാധാരണ ചെയ്തുവരുന്നതു്.

അടുത്തതായി രണ്ടാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു ധൎമ്മത്തിന്റെ ലേഖ വരയ്ക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്നു നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി $2x^2 + 3x - 2$ എന്ന ധൎമ്മം എടുക്കുക. ഇതിന്റെ ലേഖ ഒരു ഋജുരേഖ ആയിരിക്കുമോ? ഒന്നാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഒരു ധൎമ്മത്തിന്റെ ലേഖ വരയ്ക്കുന്നതിന് ബിന്ദുക്കൾ നിൎണ്ണയിക്കുന്നതുപോലെ $2x^2 + 3x - 2$ എന്ന ധൎമ്മത്തിന്റെ ലേഖ വരയ്ക്കുന്നതിനായി മൂന്നോ നാലോ ബിന്ദുക്കൾ നിൎണ്ണയിക്കുക. ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു ഋജുരേഖയിലല്ല സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതെന്നു കാണാവുന്നതാണ്. അതായത് ഈ ധൎമ്മത്തിന്റെ ലേഖ ഒരു വക്രരേഖയാണെന്നു മനസ്സിലാക്കേണ്ടതാണ്. രണ്ടാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള ഏതൊരു ധൎമ്മമെടുത്താലും അതിന്റെ ലേഖ ഒരു വക്രരേഖയായിരിക്കും. ഈ വക്രരേഖ വരയ്ക്കുന്നതിന് എട്ടോ പത്തോ ബിന്ദുക്കളെങ്കിലും നിൎണ്ണയിക്കേണ്ടതാണ്. $2x^2 + 3x - 2$ എന്ന ധൎമ്മത്തിന്റെ ഏതാനും ബിന്ദുക്കൾ നിൎണ്ണയിച്ച് ലേഖ വരച്ചിരിക്കുന്നതു നോക്കുക. ലേഖ വരയ്ക്കുന്നതിനുള്ള ബിന്ദുക്കൾ നിൎണ്ണയിക്കുമ്പോൾ x ന്റെ വിലയായി ന്യൂനസംഖ്യകൾകൂടി എടുക്കേണ്ടതാണെന്ന് ഓൎമ്മിക്കേണ്ടതാണ്.

$x =$	0	+ 1	—1	+ 2	—2	—3	—4	$-\frac{1}{2}$
$2x^2+3x-2=$	—2	+ 3	—3	+ 12	0	7	18	—3



രേഖ വരച്ചുനോക്കുമ്പോൾ (0, — 2), (— 1, — 3) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾക്കിടയ്ക്കു് കൂടുതൽ ബിന്ദുക്കൾ നിർണ്ണയിച്ചാലേ രേഖയുടെ ആ ഭാഗം സൂക്ഷ്മമായി വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കയുള്ളു എന്നു മനസ്സിലാകും. അതുകൊണ്ടു് ആ ഭാഗത്തു് ഒന്നോ രണ്ടോ ബിന്ദുക്കൾകൂടി നിർണ്ണയിക്കേണ്ടതാണു്.

രേഖയിലുള്ള ഏതൊരു ബിന്ദു എടുത്താലും അതിന്റെ x നിയാമകവും y നിയാമകവും തമ്മിൽ $y = 2x^2 + 3x - 2$ എന്ന ബന്ധം കാണുമെന്നു വ്യക്തമാണല്ലോ. x നു് ഒരു നിശ്ചിതവിലയനുസരിച്ചു് $2x^2 + 3x - 2$ എന്ന ധർമ്മത്തിന്റെ വില കാണുന്നതിനും, മറിച്ചു് $2x^2 + 3x - 2$ എന്ന ധർമ്മത്തിനു് ഒരു നിശ്ചിതവിലയുള്ളപ്പോൾ അതിനനുസരണമായ x ന്റെ വിലയെന്തെന്നും രേഖയിൽനിന്നും നിശ്ചയിക്കാവുന്നതാണു്. ഉദാഹരണമായി $x = 1.5$ ആയാൽ $2x^2 + 3x - 2$ ന്റെ വില 7 ആണെന്നു് രേഖയിൽനിന്നും കാണാവുന്നതാണു്. $2x^2 + 3x - 2$ ന്റെ വില 3 ആയാൽ x ന്റെ വിലയെന്തു്? x നു് 1, — 2.5 എന്നീ വിലകൾ ഉള്ളപ്പോൾ $2x^2 + 3x - 2$ ന്റെ വില 3 ആണു് എന്നു് രേഖയിൽനിന്നും കാണാം.

'x നു് എന്തു വിലയായാൽ $2x^2 + 3x - 2$ ന്റെ വില 3 ആകും?' എന്ന ചോദ്യവും '$2x^2 + 3x - 2 = 3$ എന്ന സമവാക്യത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക' എന്ന ചോദ്യവും ഒന്നാകയാൽ നാം ഇപ്പോൾ ഈ സമവാക്യം രേഖാരീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുകയാണു് ചെയ്തതു്.

നാം വരച്ച രേഖ ഉപയോഗിച്ചു് $2x^2 + 3x - 2 = c$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഏതൊരു സമവാക്യവും നിർദ്ധാരണംചെയ്യാമെന്നു വ്യക്തമാണു്.

$2x^2 + 3x - 2 = 0$ എന്ന സമവാക്യം ഈ ലേഖ ഉപയോഗിച്ചു നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക. ലേഖ x അക്ഷത്തെ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ x നിയാമകങ്ങളാണ് നിർദ്ധാരണ മൂല്യങ്ങൾ (*solutions*) എന്നു വ്യക്തമാണ്. ലേഖയിൽനിന്നും $x = \frac{1}{2}$, $x = -2$ എന്നിവയാണ് സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണമൂല്യങ്ങൾ എന്നു കാണാം.

ലേഖ വരയ്ക്കുന്നതിനാവശ്യമായ ബിന്ദുക്കൾ നിർണ്ണയിക്കുന്നതിന് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന രീതി അവലംബിക്കുന്നതു സൗകര്യമായിരിക്കും.

	x	0	1	-1	2	-2	-3	-4	$-\frac{1}{2}$
	$2x^2$	0	2	2	8	8	18	32	$\frac{1}{2}$
	$3x - 2$	-2	1	-5	4	-8	-11	-14	$-3\frac{1}{2}$
$y=$	$2x^2 + 3x - 2$	-2	3	-3	12	0	7	18	-3

അഭ്യാസം 28

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന സമവാക്യങ്ങളെ ലേഖാരീതിയിൽ നിദ്ധാരണംചെയ്യുക.

1. $2x^2 - 5x - 12 = 0$
2. $2x^2 + 5x - 3 = 0$

3. $3 + 5x - 2x^2 = 0$

4. $2 - 3x - 2x^2 = 0$

5. $x^2 + x - 6 = 0$

6. $x^2 - 4x + 3 = 0$

7. $8 + 10x - 3x^2 = 0$

8. $2x^2 - 5x - 3$ എന്ന ധമ്മത്തിന്റെ ലേഖ വരയ്ക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ചു് താഴെ പറയുന്ന സമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

(a) $2x^2 - 5x - 3 = 0$

(b) $2x^2 - 5x - 3 = 4$

(c) $2x^2 - 5x - 3 = 1$

9. $3 - x - 2x^2$ എന്ന ധമ്മത്തിന്റെ ലേഖ വരയ്ക്കുക. ഇതുപയോഗിച്ചു് $3 - x - 2x^2 = 0$ എന്ന സമവാക്യവും $3 - x - 2x^2 = -2$ എന്ന സമവാക്യവും നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

2. രണ്ടാം ഡിഗ്രിയിലുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിനു് അല്പംകൂടി ലഘുവായ ഒരു മാർഗ്ഗം ഉണ്ടു്. $2x^2 + 3x - 2$ എന്ന സമവാക്യം എടുക്കുക. ഈ സമവാക്യത്തെ ആദ്യമായി $2x^2 = -3x + 2$ എന്നെഴുതുക. അടുത്തതായി $2x^2$ എന്ന ധമ്മത്തിന്റെ ലേഖയും $-3x + 2$ എന്ന ധമ്മത്തിന്റെ ലേഖയും ഒരേ അക്ഷങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു് വരയ്ക്കുക. ഈ രണ്ടു ലേഖകളും തമ്മിൽ ഖണ്ഡിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ x നിയാമകങ്ങൾ $2x^2 = -3x + 2$ എന്ന ബന്ധം പുലത്തുമെന്നു വ്യക്തമാണു്. അതായതു് ഈ ബിന്ദുക്കളുടെ x

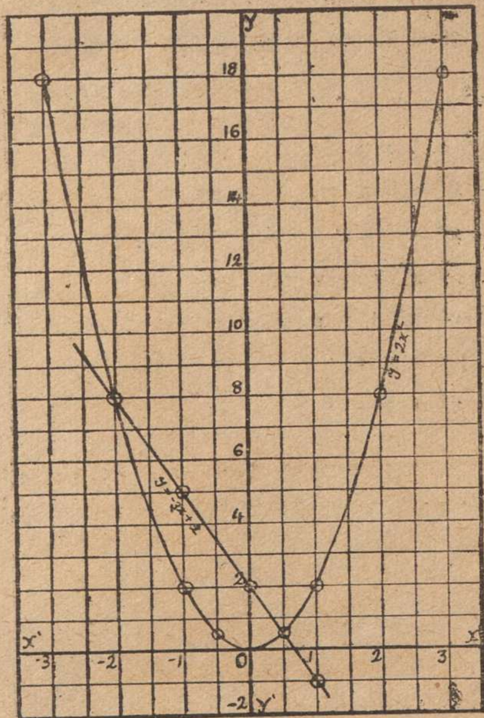
നിയാമകങ്ങൾ. $2x^2 = -3x + 2$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ (അതായതു് $2x^2 + 3x - 2 = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ) നിർദ്ധാരണമൂല്യങ്ങളാണു്.

$2x^2$ എന്ന ധർമ്മത്തിന്റെ ലേഖ വരയ്ക്കുന്നതിനു വേണ്ട ബിന്ദുക്കൾ നിർണ്ണയിക്കുന്നതും ലേഖ വരയ്ക്കുന്നതും വളരെ എളുപ്പമാണു്. $-3x + 2$ എന്ന ധർമ്മത്തിന്റെ ലേഖ ഒരു നേർവരയായതുകൊണ്ടു് ഇതും എളുപ്പത്തിൽ വരയ്ക്കാം. അതുകൊണ്ടു് ആകെക്കൂടി നോക്കുമ്പോൾ ഈ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണംചെയ്യുന്നതു് ആദ്യത്തെ രീതിയെക്കാൾ എളുപ്പമാണു്.

$2x^2$, $-3x + 2$ എന്നീ ധർമ്മങ്ങളുടെ ലേഖകൾ വരച്ചു് $2x^2 + 3x - 2 = 0$ എന്ന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണംചെയ്തിരിക്കുന്നതു നോക്കുക.

x	0	$\pm\frac{1}{2}$	± 1	± 2	± 3
$y=2x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2	8	18

x	1	0	-1
$y = -3x + 2$	-1	2	5



ലേഖയിൽനിന്നും $x = \frac{1}{2}$, $x = -2$ എന്നിവയാണ്

നിർദ്ധാരണമൂല്യങ്ങളെന്നു കാണാം.

അഭ്യാസം 29.

മുകളിലത്തെ ഖണ്ഡികയിൽ വിവരിച്ചിരിക്കുന്ന രീതിയിൽ നിൎദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

1. $x^2 - x - 6 = 0$
2. $x^2 + 4x + 3 = 0$
3. $2x^2 + 5x - 12 = 0$
4. $2x^2 - 3x - 2 = 0$
5. $-2x^2 + 5x - 2 = 0$
6. $-2x^2 + 7x - 3 = 0$
7. $x^2 + 3x + 1 = 0$
8. $2x^2 + 5x + 2 = 0$

ഉത്തരങ്ങൾ

അദ്ധ്യായം 1. (1) 4, 3, 13 (2) 39, —66. (3) 336, 0 (4) (*a*) 1, (*b*) 4, (*c*) —3.

അദ്ധ്യായം 2 (1) $a^2 + a c - b c - b^2$ (2) $x^4 - y^4$ (3) $x^2 y + x y^2 + y^2 z + y z^2 + z^2 x + z x^2 + 2 x y z$.

അദ്ധ്യായം 3. (1) $x^4 - 6 x^2 - x + 6$ (2) $2 x^4 - 16 x^3 + 27 x^2 - 31 x + 15$ (3) $4 y^5 - y^3 + 4 y$ (4) $a^7 + 4 a^6 + 15 a^5 + 26 a^4 + 35 a^3$.

അദ്ധ്യായം 4. (1) $6 x^4 - 19 x^3 + 35 x^2 - 32 x + 16$ (2) $2 x^5 - 18 x^4 + 37 x^3 - 11 x^2 - 9 x - 1$ (3) $a^8 + a^7 - 7 a^6 - 2 a^5 + 14 a^4 - 2 a^3 - 7 a^2 + a + 1$ (4) $x^6 + 5 x^3 - 16 x^2 + 12 x + 4$ (5) $4 x^5 - 14 x^4 + 21 x^3 - 13 x^2 - x + 3$ (6) $6 y^4 + 9 y^3 + 10 y^2 + 27 y + 18$.

അദ്ധ്യായം 5. (1) $x^4 - 3 x^3 y + x y^3 + 2 x^2 y^2 - 2 y^4$ (2) $x^4 + x^2 y^2 + y^4$ (3) $p^6 - 3 p^5 q - 3 p^4 q^2 - 18 p^3 q^3 + 27 p^2 q^4 - 9 p q^5 - q^6$ (4) $a^5 + a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 - a b^4 - b^5$ (5) $a^5 - a^4 b + a^3 b^2 + a^2 b^3 - a b^4 + b^5$ (6) $x^5 + 4 x^4 y + 10 x^3 y^2 + 32 x^2 y^3 + 56 x y^4 + 32 y^5$.

അദ്ധ്യായം 6. (1) $27 a^3 + 8 b^3 + c^3 - 18 a b c$ (2) $x^3 + y^3 + 3 x y - 1$ (3) $2 a^3 + 6 a^2 c + 3 a c^2 - a^2 b - a b^2 + 3 b^2 c - 5 b^2 c - 2 c^3 - 3 a b c$ (4) $x y^2 - x^2 y + y z^2 - y^2 z + z x^2 - z^2 x$ (5) $x^2 y^2 + x^2 z^2 + 2 x^2 y z - y^2 z^2$.

അദ്ധ്യായം 7. (1) $3 x + 1$ (2) $a^2 + 14 a$ (3) $9y^2 + 9 y + 5$ (4) $7 x^2 + 5 xy + 2 y^2$ (5) $2 x^3 - 3x^2 + 2x$

(6) $x^2 - x + 1$ (7) $x^4 + x^3 - x - 1$ (8) $x^4 + 4x + 5$
(9) $x^3 + x - y$ (10) $x^4 - x^3 y + x^2 y^2 - x y^3 + y^4$.

അദ്ധ്യായം 8. (1) $3m^2 - 5m - 6$ (2) $a^2 + 3a + 3$
(3) $-27x^3 + 54x^2 - 36x + 8$ (4) $2x^3 - 3x^2 + 2x$
(5) $x^2 - x + 1$ (6) $x^2 + 4x + 15$.

അദ്ധ്യായം 9. (1) $(x + 2)$ ശിഷ്ടം 15. (2) $2y + 1$ ശിഷ്ടം 15. (3) $2x^3 + 4x^2 + 5x + 16$ ശിഷ്ടം 28 (4) $x^2 + x + 7$ ശിഷ്ടം $26x - 18$ (5) $x^2 - 4x - 9$ ശിഷ്ടം $-31x^2 + 6x - 10$.

അദ്ധ്യായം 10. (1) $(2x + y)$ (2) $x^3 - 1$ (3) $x^2 - y^2$ (4) $x - \frac{1}{2}$ (5) $1 - 3x$ (6) $m^2 + \frac{1}{3}$ (7) $\frac{a}{2} - 3b$
(8) $\frac{x}{y} - \frac{y}{x}$ (9) $x - y - 3$. (10) $x + y + a + b$
(11) $x^2 + x + 1$ (12) $x - y + z$ (13) $a + b + 2$
(14) $a^2 + b - c$.

അദ്ധ്യായം 11. (1) $a^2 - a + 1$ (2) $2x^2 - 3x + 5$
(3) $3x^2 - 2x - 1$ (4) $y^2 - 2y + 1$ (5) $2x^2 + x - 2$
(6) $a^2 - 5a + 1$.

അദ്ധ്യായം 12. (6) $x^4 + 3x^2 + 9$ (7) $x^4 + 2x^2 + 4$
(8) $a^4 + \frac{1}{9}a^2 b^2 + \frac{1}{81} b^4$.

അദ്ധ്യായം 13.

(3) $(a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ac)$
(4) $(x + 3y - 1)(x^2 + 9y^2 + 1 - 3xy + 3y + x)$
(5) $(1 - l - m)(1 + l^2 + m^2 + l - lm + m)$
(6) $(a^2 + x - 1)(a^4 + x^2 + 1 - a^2 x + x + a^2)$
(7) $(2m - n - a)(4m^2 + n^2 + a^2 + 2mn - na + 2am)$
(8) $\left(x + \frac{y}{3} + 1\right)\left(x^2 + \frac{y^2}{9} + 1 - \frac{xy}{3} - \frac{y}{3} - x\right)$

(9) $(y^2+1-\frac{x}{3})\ (y^4+1+\frac{x^2}{9}-y^2+\frac{x}{3}+\frac{x\,y^2}{3}$

(10) $(x+\frac{a}{2}+b)\ (x^2+\frac{a^2}{4}+b^2-\frac{a\,x}{2}-\frac{a\,b}{2}-bx)$

(11) $(\frac{p}{3}+q-r)\ (\frac{p^2}{9}+q^2+r^2-\frac{p\,q}{3}+q\,r+\frac{p\,r}{3})$

(12) $(3\,a-x-y-z)\ (x^2+y^2+z^2-x\,y-y\,z-z\,x)$

(13) $m^3+n^3+r^3-3\,m\,n\,r$

(14) $27\,x^3-8y^3-z^3-18\,x\,y\,z$

(15) $a^3+b^3-1+3\,a\,b$ (16) $x^3+y^3+\frac{1}{8}-\frac{3}{2}\,x\,y$

അദ്ധ്യായം 14. (1) 12 (2) —57 (3) —50 (4) 71 (5) 31 (6) 0.

അദ്ധ്യായം 15. (1) $4\,a^2$ (2) 0 (3) $-3\,a^3$ (4) $-2\,b^5$ (5) $2\,b^4$ (6) 0.

അദ്ധ്യായം 16. (4) $(x-1)\ (x-2)\ (2\,x+1)$ (5) $(x+1)\ (x-2)\ (2\,x+1)$ (6) $(x-1)\,(x+2)\,(x+3)$ (7) $(x+2)\,(x+3)\,(x+4)$ (8) $(x+2)\,(x+3)\,(2x-1)$ (9) $(x+1)\ (x+2)\ (x+3)\ (x-3)$ (10) $(x+2)\ (x-3)\ (x-4)\ (2\,x+1)$ (11) $(x-1)\,(x+1)\,(x+2)\ (2\,x+1)$ (12) $(x+2)\ (x+2)\ (2\,x+1)\ (2\,x-1)$. (13) $(x+2)\ (x+1)$ (14) $(x-3)\ (x+2)\ (x+3)\ (x-1)$ (15) 13 (16) —2.

അദ്ധ്യായം 17 (1) 6, 72 (2) 3, 36 (3) 6, 108 (4) 6, 1080 (5) 12, 2700 (6) 18, 2520 (7) 14, 420 (8) 21, 630.

അദ്ധ്യായം 18. (1) a^3, $12\,a^4$ (2) a^2, $a^3\,x\,y$ (3) a^2, a^4 (4) y, $x\,y\,z$ (5) $2\,x^2\,y^2$, $6\,x^3\,y^4$ (6) $3a^2b^2$, $36\,a^3\,b^3$ (7) $2\,p\,q^2$, $4\,p^3\,q^3$ (8) $3\,b^2\,y$, $36\,b^3\,y^3$ (9) $b^2\,c^3$, $b^3\,c^7$ (10) $3\,a^2x^6$, $6\,a^3\,x^7$ (11) $7\,xyz$, $14\,x^2\,y^3\,z^2$

(12) $13\,x\,z$, $78\,a\,b\,c\,x^3 y^4 z^3$ (13) $5\,a^2 b^2 c^2$, $150\,a^4 b^4 c^5$ (14) $5\,x\,y\,z$, $300\,a^2 b^3 x^4 y^4 z^4$ (15) $x+y$, $x\,y\,(x+y)$ (16) $(a-b)$, $6\,(a-b)$ (17) $x\,(x-y)$, $x^2 y\,(x+y)(x-y)(x-z)$ (18) $a\,b\,(a-b)$, $a\,b^2 c\,(a-b)(c-a)(b+a)$ (19) y^2, $y^3\,(x+1)(x+2)$ (20) $(x+1)(x+2)$, $(x+1)(x+2)(x+3)(x-5)$ (21) $6\,(x^2+y^2)$, $36\,(x^4-y^4)$ (22) $2\,a\,(a+b)$, $12\,a\,b^2\,(a+b)^2(a-b)^2$.

അദ്ധ്യായം 19 (1) $x+2\,y$, $12\,(x+2\,y)$ (2) $x-y$, $xy\,(x-y)^2$ (3) $(a+b)$, $a\,(a^2-b^2)$ (4) $x+y$, $(x+y)^2(x-y)$ (5) $a\,(a-b)$, $2\,a^2\,(a-b)$ (6) $a\,(a-x)$, $a^2\,(a^2-x^2)$ (7) $a-2\,b$, $4\,a\,(a^2-4b^2)$ (8) $b\,(a+b)$, $a\,b\,x\,(a^2-b^2)$ (9) $3\,a+1$, $(3\,a+1)^2(3\,a-1)$ (10) $(x-y)^2$, $(x-y)^3$. (11) $x+2\,y$, $(x+2\,y)(x-y)(x^2-2\,x\,y+4\,y^2)$ (12) $p+2$, $(p+1)(p+2)(p+3)$ (13) $m-1$, $(m+5)(m+6)(m-1)$ (14) $3\,q+1$, $(3\,q+1)(2\,q+5)(q+4)$ (15) $y+1$, $(y+1)^2(y-2)$ (16) $y\,(x-1)$, $x\,y\,(x-1)(x^2+x+1)$ (17) $a+b$, $a^2\,(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$ (18) $b-3$, $(b-3)(b+3)(b^2-1)$ (19) $(a-1)^2$, $(a-1)^2(a+1)$ (20) $x-3a$, $x\,(x-3a)(x^2+3\,a\,x+9\,a^2)$ (21) $(3x+1)$, $(5\,x+1)(4\,x-1)(3\,x+1)$ (22) $2\,a+1$, $(2a+1)(a+4)(a+5)(a-2)$ (23) $b^2\,(3\,b+2)$, $b^3\,(3b+2)(b+2)(b+3)(b-6)$ (24) $3\,(x-2)$, $18\,x\,y\,(x-2)^2(x+2)$ (25) $(x-1)$, $(x-1)(x+1)(x+2)(x+3)$ (26) 1, $a\,(a+3)(a-1)(a+1)(a-4)(a-3)$ (27) $(2\,b-1)$, $(2\,b-1)^2(2\,b+1)(b+5)(b-5)(b+1)^2$ (28) $x\,y\,z\,(x-y)(y-z)(z-x)$ (29) $a^4 b^2\,(b-c)(b+c)$ (30) $a^2 b^2 c^2\,(a-b)(b-c)(c-a)$ (31) $(a-1)(a+1)^2(a^2+1)$ (32) $(x+y)(x-y)(x^4+x^2 y^2+y^4)$.

അദ്ധ്യായം 20 (1) 1 (2) 1 (3) 19 (4) 23 (5) 13 (6) 31

അദ്ധ്യായം 21. (1) $x+3$ (2) $a(a^2-3a+7)$ (3) $2y^2-7$ (4) $2b-1$ (5 x^2-3x+2 (6) $4a^2+3$ (7) $y^2-13y+5$ (8) $1+2b-5b^2$ (9) c^2-8 (10) $p-2$ (11) q^2-5) (12) x^2+2x+1 (13) $x^2-2xy+y^2$ (14) $a+5b$ (15) $b+1$ (16) $3c^2+1$ (17) $2y^2-3$ (18) p^2+p+1 (19) $3x^2+2a^2$) (20) a^2+a+1 (21) $b+1$.

അദ്ധ്യായം 22. (1) $(y^2-3y+2)(2y^3-y^2-6y+8)$ (2) $(2p^2-9)(3p^3-15p^2+p-5)$ (3) $(5a^2-a)(4a^4-2a^3-2a+1)$ (4) $(18x^2+14x-6)(40x^4+95x^3+35x^2-20x)$ (5) $(5a-2b)(6a^4-25a^3b+26a^2b^2-b^4)$ (6) $(x-2)(x+3)$ (7) $(x+1)^2(x-1)$.

അദ്ധ്യായം 23. (1) $\dfrac{4n}{5mp}$ (2) $\dfrac{5b^2c^2}{6a^2}$ (3) $\dfrac{3xz}{5y^3}$

(4) $\dfrac{a^2c^3}{3b^2}$ (5) $\dfrac{3}{4mnp^4}$ (6) $\dfrac{2b^2c^2}{3a}$ (7) $\dfrac{ab}{(a+b)(a-b)}$

(8) x (9) $\dfrac{3}{2b}$ (10) $\dfrac{x}{b}$ (11) $\dfrac{2a-3b}{2a}$ (12) $4(x-y)$

(13) $\dfrac{p}{p^2-2q^2}$ (14) $\dfrac{1}{b(a^2+3ab+9b^2)}$ (15) $\dfrac{a}{a+1}$

(16) $\dfrac{3b}{b+2}$ (17) $\dfrac{xy}{x-2}$ (18) $\dfrac{a-3}{a+1}$ (19) $\dfrac{2y+3}{3y+2}$

(20) $\dfrac{1}{b-1}$ (21) $\dfrac{a-1}{a+1}$ (22) $\dfrac{x+y-a-b}{x+a-y-b}$ (23) $\dfrac{(x^2+y^2)(x+y)}{xy(x^2+xy+y^2)}$ (24) $\dfrac{1+p}{1-p}$ (25) $\dfrac{y^2a^2}{x^2}$ (26) $\dfrac{x+a}{x+c}$

(27) $\dfrac{(a+b)(a^2-ab+b^2)}{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$ (28) $\dfrac{y+1}{y-3}$

അദ്ധ്യായം 24. (1) $\dfrac{4a^2c^2}{9b}$ (2) $\dfrac{3mk}{2ly^2}$ (3) $\dfrac{2xz}{3}$

(4) $\dfrac{2by}{3x}$ (5) $\dfrac{a}{y^2}$ (6) $\dfrac{3a^6c^4}{2b^5}$ (7) $\dfrac{1}{3(x+a)}$ (8) $\dfrac{(a-b)^2}{a^2+b^2}$

(9) $\dfrac{7}{12}$ (10) 2 (11) $\dfrac{6a-b}{x(3a-2)}$ (12) $\dfrac{x+5}{x-6}$ (13) $\dfrac{5-y}{y}$

(14) $\dfrac{x(x-y)}{x+y}$ (15) $8ab-z^2$ (16) $\dfrac{3x}{2}$ (17) $\dfrac{7(a-7b)}{3(a-3b)}$ (18) y (19) $\dfrac{p(p-2)}{(p+1)(p-1)}$ (20) 1 (21) $\dfrac{1}{b}$ (22) $\dfrac{1}{x-8}$.

അദ്ധ്യായം 25. (1) $\dfrac{13x}{12}$ (2) $\dfrac{41ab}{18}$ (3) $\dfrac{4(y+1)}{5}$

(4) $\dfrac{25x-61}{56}$ (5) $\dfrac{17y}{36}$ (6) $\dfrac{ab+bc+ca}{abc}$

(7) $\dfrac{ayz+bzx+cxy}{xyz}$ (8) $\dfrac{b^2x-aby+a^2z}{a^2b^2}$

(9) $\dfrac{12p^2+28p-27}{8p^2}$ (10) 0 (11) $\dfrac{3(x+3y)}{8x}$

(12) $\dfrac{6y^2z+6yz^2+3xz^2+3x^2z-4x^2y+4xy^2}{12xyz}$

(13) $\dfrac{11a^3-18a^2-27a-16}{30a^3}$ (14) $\dfrac{2x+5}{(x+2)(x+3)}$

(15) $\dfrac{a+5}{(a+3)(a+4)}$ (16) $\dfrac{(a-b)x}{(x+a)(x+b)}$ (17) $\dfrac{1}{(x-4)(x-5)}$

(18) $\dfrac{2(x+6)}{(x-6)(x+2)}$ (19) $\dfrac{2p(p+1)}{x^2-p^2}$ (20) $\dfrac{2}{(a+2)(a+4)}$

(21) $\dfrac{4ay}{a^2-y^2}$ (22) $\dfrac{ax}{x^2-a^2}$ (23) $\dfrac{x+2y}{4x^2-9y^2}$

(24) $\dfrac{x-2y}{x-y}$ (25) $\dfrac{2x-y}{x-y}$ (26) $\dfrac{ab}{a-b}$ (27) $\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2-a-b)}{(a+b)(a^2+ab+b^2)}$ (28) $\dfrac{2x^3}{1-x^4}$ (29) $\dfrac{2b^4}{a^6-b^6}$

(30) $\dfrac{7a}{(a-1)(a+2)(a-3)}$ (31) $\dfrac{y^2+y+3}{y^3-1}$

(32) $\dfrac{x+4}{(x-1)(x-2)(x+3)}$

അദ്ധ്യായം 26. (1) $\dfrac{2a-b}{a-b}$ (2) $\dfrac{-4xy}{x^2-y^2}$ (3) $\dfrac{3b^2}{b^2-1}$

(4) $\dfrac{1}{1-a^2}$ (5) $2y$ (6) $\dfrac{2x^3}{(x+2)(x-2)}$ (7) $\dfrac{1}{(y-1)(y-2)(y-3)}$ (8) $\dfrac{2a^2-4a-3}{(a+1)(a-2)}$ (9) $\dfrac{3x}{x+y}$

(10) $\dfrac{-2ab}{(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)}$ (11) $\dfrac{1-6y^2}{1-4y^2}$

(12) $\dfrac{4x-5}{6(x^2-1)}$ (13) $\dfrac{a^2+b^2}{a^4+a^2b^2+b^4}$ (14) $\dfrac{2}{(x-4)(x-6)}$

(15) $\dfrac{23p}{(1+2p)(2+p)(5-9p)}$ (16) $\dfrac{1}{x+y}$ (17) $\dfrac{1}{a+2}$

(18) $\frac{7x^2+45}{6(x^4-81)}$ (19) $\frac{6}{(p+1)(p-1)(p+2)}$ (20) $\frac{7}{(x-1)(x-2)}$ (21) $\frac{k^3}{(k+l)^3}$ (22) $\frac{2y^2}{x^3-y^3}$ (23) 0

(24) $\frac{1}{1-x}$ (25) $\frac{4m^2}{(1+m)^2(1-m)^2}$ (26) $\frac{2x^2y(x+2y)}{(x+y)(x^3-y^3)}$ (27) 0 (28) $\frac{(a-b)(3a^2+b^2)}{(a+b)^3}$

(29) $\frac{p^2+8pq-6q^2}{(p-2q)(p+\;q)(p+4q)}$ (30) $\frac{xy^2}{8x^3-y^3}$.

അദ്ധ്യായം 27. (1) $\frac{12y}{4y-1}$ (2) $\frac{xn-m}{xn}$ (3) $\frac{3(2a+1)}{2(3a-1)}$ (4) $\frac{x}{3}$ (5) x (6) 1 (7) $\frac{2a-3}{2a+3}$

(8) 1.

2637

ELECTIVE BOOKS

(STANDARD XI)

1. ജീവദ്ഗണിതം 1.50

   By K. G. Sivasankaran Nair

2. ജീവതന്ത്രം 2.25

   By M. Koshy

S. B. PRESS & BOOK DEPOT,
College Lane, TRIVANDRUM—1

ജീവദ്ഗണിതം

(ELECTIVE)

STANDARD XI

(FORM VI)

K. G. Sivasankaran Nair

P. E. Punnose