1080

വരഗണിതപ്രവേശിക

[Malayalam]

VARAGANITHA PRAVESIKA

[An Introduction To Calculus]

By

P. K. KORU

First Impression, 1959 December
Copies Two Thousand

RIGHTS HELD AND PUBLISHED BY
KERALA SAHITYA AKADEMI

PRINTED AT
THE MANGALODAYAM PRESS
TRICHUR

Price: Rs. 2

വരഗണിതപ്രവേശിക

[An Introduction To Calculus]

ഗ്രന്ഥകർത്താ:

പി. കെ. കോരു

(കേരളസാഹിത്യഅക്കാദമിവക
പ്രസിദ്ധീകരണം)

α

വില: 2 ഉറുപ്പിക.

1959

ഒന്നാംപതിപ്പ്;
കോപ്പി 2000

തൃശ്ശിവപേരൂർ
മംഗളോദയം പ്രസ്സിൽ
അച്ചടിച്ചതു്.

കവർ:
കൃഷ്ണാ & കമ്പനി
തൃശ്ശൂർ.

ആമുഖം

ഏതാണ്ടു് 1957 മാൎച്ച്മാസത്തിൽ കേരളസാഹിത്യഅക്കാഡമിയുടെ ഒരു സമ്മേളനത്തിൽവെച്ച കാൽക്കലസ്സ് എന്ന ഗണിതഭാഗത്തിൽ ഒരു ചെറിയ പുസ്തകമെഴുതാമെന്നു ഞാനേററു. ജ്യോതിർഗണിതത്തിൽ മന്ദസംസ്കാരത്തിന്നു കേരളീയർ ഇപ്പോൾ സ്വീകരിച്ചിട്ടുള്ള സൂത്രം കാൽക്കലസ്സ് വഴി വരുത്തുവാൻ കുറെ സൌകൎയ്യമുള്ളതിനാലാണു് ഞാൻ അതു് ഏററതു്. പക്ഷേ നല്ലതായ ഒരു കാൽക്കലസ്സ് പുസ്തകമെഴുതേണമെങ്കിൽ, മലയാളഭാഷയിൽ ഇപ്പോൾ ഉപയോഗിച്ചുവരുന്ന പുസ്തകങ്ങളിൽ കാണുന്നതിനെക്കാൾ കുറെ ഉയൎന്ന ബീജഗണിതം, ത്രികോണമിതി, ക്ഷേത്രഗണിതം എന്നിവയും സ്ഥിതിചലനനിരൂപണങ്ങളും ഉപയോഗിക്കേണ്ടിവരും. ഇവയിൽ അല്പം ചിലതെങ്കിലും ഉപയോഗിക്കാതെ ഗണനീയമായ ഒരു കാൽക്കലസ്സ് പുസ്തകം എഴുതാനും വയ്യാ. പുസ്തകത്തിന്റെ ആദ്യഭാഗങ്ങളിൽ ആ വക ഗണിതഭാഗങ്ങളാണു് പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുള്ളതു്. പിന്നീടുള്ള ചില അദ്ധ്യായങ്ങളിൽ മാത്രമേ കാൽക്കലസ്സ് ഗണിതം പ്രതി

പാദിച്ചിട്ടുള്ളു. എങ്കിലും ആ സംഗതികൾ നല്ലവണ്ണം ഗ്രഹിച്ചാൽ കാൽക്കുലസ്സിന്റെ സ്വഭാവം മനസ്സിലാകുമെന്നു മാത്രമല്ല, കുറെക്കൂടി ഉയൎന്ന ഭാഗങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കുവാനും ഉപയോഗിക്കുവാനും അതു വളരെ സഹായകമാകുമെന്നു ഞാൻ ദൃഢമായി വിശ്വസിക്കുന്നു. മലയാളത്തിൽ ഈവിധം പുസ്തകങ്ങൾ എഴുതുവാനുള്ള ഒരു രീതിയും സങ്കേതങ്ങളും ഇതിൽ ഇദംപ്രഥമമായി അവതരിപ്പിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ടു്.

ഈ ഗണിതശാഖയ്ക്കു മലയാളത്തിൽ പേരു് എന്തായിരിക്കണമെന്നു് ആലോചനയ്ക്കു വിഷയമായിരുന്നു. പ്രഗണിതം എന്നൊരു പേരു് ചില നിഘണ്ടുക്കളിൽ കാണാം. അതിന്നു് ഉച്ചാരണസുഖം പോരെന്നു തോന്നി. അതിനാൽ 'വരഗണിതം' എന്ന പേർ സ്വീകരിച്ചു. വരാംഗം എന്നതിന്നു നല്ല അംഗം എന്നൎത്ഥമുണ്ടെങ്കിൽ, വരഗണിതം എന്നതിന്നു നല്ല ഗണിതം എന്നൎത്ഥമായിക്കൂടേ-എന്നു കരുതി. 'വരശംകു' എന്നു ജ്യോതിൎഗ്ഗണിതത്തിൽ പ്രയോഗമുണ്ടു്.

ആംഗ്ലേയപുസ്തകങ്ങളിൽ സമാകലനത്തിന്നുപയോഗിക്കുന്ന ചിഹ്നം ഭംഗിയുള്ളതും എഴുതുവാൻ സുഖകരവുമാണു്. അതു് ഈ പുസ്തകത്തിൽ സ്വീകരിച്ചിട്ടുണ്ടു്. π എന്ന ചിഹ്നവും സ്വീകരിച്ചിട്ടുണ്ടു്.

സാങ്കേതികചിഹ്നങ്ങളെക്കൊണ്ടും നീണ്ട ശ്രേണികളെക്കൊണ്ടും മററും ഈ പുസ്തകം അച്ചടിപ്പാൻ കുറെ പ്രയാസമുണ്ട്. അതു തൃശ്ശൂര് മംഗളോദയം കമ്പനി ഏറെറടുത്തു ഭംഗിയായി നിവ്വഹിച്ചതിന്നു് എൻെറ നന്ദിയും സന്തോഷവും ഞാൻ ഇവിടെ പ്രസ്താവിക്കുന്നു. കേരളസാഹിത്യഅക്കാഡമിയുടെ സഹായം എൻെറ അഭിഷ്ടത്തിന്നനുസരിച്ചു വന്നതിൽ ഞാൻ സന്തുഷ്ടനാണു്. അക്കാഡമിയോടും ഞാൻ നന്ദി പറയുന്നു.

പുസ്തകത്തിൽ ന്യൂനതകൾ ഉണ്ടാവാം. പണ്ഡിതന്മാരുടെ സൌഹാർദ്ദംവഴി അതു തീർത്തുകളയാം. ഗണിതപണ്ഡിതന്മാരും, ഗണിതപ്രേമികളും, ഭാഷാഭിമാനികളും ഈ പുസ്തകത്തെ സ്വാഗതംചെയ്യുമെന്നു ഞാൻ സവിനയം പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു.

ചിററാട്ടുകര,
4—7—1959.

ഗ്രന്ഥകർത്താ.

ശുദ്ധിപത്രം

ഭാഗം	വരി	അബദ്ധം	സുബദ്ധം
4	23	$(16\text{ക}^2 - 100\text{ക} + 12\frac{1}{2})^2$	$(16\text{ക}^2 - 100\text{ക} + 12\frac{1}{2}^2)$
40	7	$\begin{vmatrix} -\alpha \\ -\alpha \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} -\alpha \\ +\alpha \end{vmatrix}$
85	12	അതിനാൽ	എന്നാൽ
112	9	$\frac{\text{ഭം}^2\text{വ}}{\text{ഭംയ}} = 30$	$\frac{\text{ഭം}^2\text{വ}}{\text{ഭംയ}^2} = 30$
113	8	$\frac{\text{ഭം}^2\text{വ}}{\text{ഭംയ}^3}$	$\frac{\text{ഭം}^2\text{വ}}{\text{ഭംയ}^2}$

ഉള്ളടക്കം

പുസ്തകത്തിൽ കൊടുത്ത അഭ്യാസങ്ങളുടെ ഉത്തരങ്ങളും സാങ്കേതികപദങ്ങളുടെ ഇംഗ്ലീഷുതുല്യങ്ങളോടുകൂടിയ ഒരു അകാരാദിയും ഒടുവിൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

അദ്ധ്യായം 1

ഗണിതസ്വഭാവം

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൻെറ ഉത്ഭവം സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടുള്ള പ്രയോഗങ്ങളിൽനിന്നാണല്ലോ. സംഖ്യകൾ സാധാരണ ഉപയോഗിക്കുന്ന ഭാഷയുടെ ഒരു ഭാഗമെന്ന നിലയിൽ വളൎന്നുണ്ടാകുന്നു. ഒരു സംഘത്തിൽ ഒരു പുരുഷനും ഒരു സ്ത്രീയും ഒരു കുട്ടിയുമുണ്ടെന്നു വെയ്ക്കുക. ഒരു കുട്ടിയുംകൂടിച്ചേൎന്നാൽ സംഘം വൎദ്ധിക്കുന്നു. ആ സംഘത്തിൽ ഒരു പുരുഷനും ഒരു സ്ത്രീയും രണ്ടു കുട്ടികളും ഉണ്ടെന്നു പറയേണ്ടിവരും. ഇങ്ങിനെ ഓരോന്നായിച്ചേൎന്നു് ഒന്നു്, രണ്ടു്, മൂന്നു്, നാലു് മുതലായ സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകുന്നു. സംഖ്യകൾക്കു് അതിൎത്തിയില്ലാതെ വൎദ്ധിക്കാം. ഓരോ സംഖ്യക്കും ഒരു പ്രത്യേകപേരു വേണമെന്നുവെച്ചാൽ ആ പേരുകൾ ഓൎമ്മ വെയ്ക്കുവാനും പറയുവാനും കഷ്ടപ്പെടേണ്ടിവരും. അതുകൊണ്ടു സംഖ്യകൾക്കു വ്യവസ്ഥകൾ കല്പിക്കപ്പെടുന്നു. പത്തു് ഒററകൾ ഒന്നിച്ചാൽ ഒരു പത്തു്, പത്തു പത്തുകൾ ഒന്നിച്ചാൽ ഒരു നൂറു്, പത്തു നൂറുകൾ ഒന്നിച്ചാൽ ഒരായിരം എന്നിങ്ങിനെ ആ വ്യവസ്ഥ പോകുന്നു. ഇങ്ങിനെ 18 സ്ഥാനങ്ങൾ എന്ന വ്യവസ്ഥ ഭാരതീയഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ പ്രസിദ്ധമത്രേ.

"ഏക,ദശ,ശത,സഹസ്ര,ായുത,ലക്ഷ,പ്രയുത,കോടയഃ, ക്രമശഃ
അൎബ്ബുദ,മബ്ജം, ഖൎവ്വ,നിഖൎവ്വ,മഹാപത്മ,ശങ്കവസ്തസ്മാൽ
ജലധിശ്ചാന്ത്യം,മദ്ധ്യം,പരാൎദ്ധ,മിതി ദശഗുണോത്തരാഃ സംജ്ഞാഃ
സംഖ്യായാഃ സ്ഥാനാനാം വ്യവഹാരാൎത്ഥം കൃതാഃ പൂൎവ്വൈഃ"

എന്നു ലീലാവതിയിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നു.

ഈ വ്യവസ്ഥയ്ക്കനുസരിച്ച സംഖ്യകൾ എഴുതുന്ന ഒരു ക്രമവും ആവിർഭവിച്ചു. അതിൽ ശൂന്യം (ഒന്നുമില്ലായ്മ) എന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ചിഹ്നത്തിന്നു് ഏററവും പ്രാധാന്യമുണ്ടെന്നു കാണാം. ഈ പ്രസ്താവിച്ച ദശാത്മകവ്യവസ്ഥയുടേയും, ശൂന്യത്തിന്നുള്ള ചിഹ്നത്തിൻേറയും ഉപജ്ഞാതാക്കൾ ഭാരതീയരാണെന്നു പ്രത്യേകം സ്മരണീയമാണു്.

സംസ്കാരം വർദ്ധിച്ചതോടെ സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടുള്ള വ്യവഹാരങ്ങളും വളൎന്നുവന്നു. ക്രമേണ സംകലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം, ത്രൈരാശികം, വൎഗ്ഗാനയനം, വൎഗ്ഗമൂലാനയനം, ഘനാനയനം, ഘനമൂലാനയനം എന്നീ ക്രിയകളും, ഭിന്നം മുതലായ സങ്കല്പങ്ങളും അവയെക്കൊണ്ടുള്ള ക്രിയകളും, ക്ഷേത്രവിജ്ഞാനഗണിതങ്ങളും ഉത്ഭവിച്ചു് അഭിവൃദ്ധി പ്രാപിച്ചു. ഗണിതം ഒരു ശാസ്ത്രമായിത്തീൎന്നു. അക്കങ്ങളെക്കൊണ്ടുള്ള ഗണിതത്തിന്നു് 'അങ്കഗണിത'മെന്നു പറയുന്നു. സംഖ്യ പൂൎണ്ണവസ്തുക്കളേയും അവയുടെ ഭാഗങ്ങളേയും ആണല്ലോ കുറിക്കുന്നതു്. സംഖ്യകളെല്ലാം വളരെ സ്പഷ്ടങ്ങളാണു്. അതിനാൽ അങ്കഗണിതത്തെ സ്പഷ്ടഗണിതം അല്ലെങ്കിൽ വ്യക്തഗണിതം എന്നു പറയുന്നു.

വ്യക്തമല്ലാത്ത സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടും മേല്പറഞ്ഞ ഗണിതക്രിയകൾ ചെയ്യേണ്ടിവരും. അപ്പോൾ ഗണിതത്തിന്നു് അവ്യക്തഗണിതം അല്ലെങ്കിൽ ബീജഗണിതം എന്നു പറയുന്നു. ഒന്നുരണ്ടു് ഉദാഹരണങ്ങളിൽനിന്നു് അതിൻെറ ഉപകാരം അല്പം വ്യക്തമാക്കാം.

ഒരു വാണിയൻ പട്ടണത്തിൽ പ്രവേശിക്കുമ്പോൾ തൻെറ കയ്യിലുള്ളതിൽനിന്നു 10 പണം ചിലവാക്കി ബാക്കിയുള്ളതു് ഇരട്ടിപ്പിച്ചു് അതിൽനിന്നു പത്തു പണം സ്വന്തആവശ്യങ്ങൾക്കും 10 പണം ദാനംചെയ്യുവാനും ചിലവാക്കി പട്ടണംവിട്ടു പോകുന്നു. ഇങ്ങിനെ 3 പട്ടണങ്ങളെ വിടുമ്പോൾ അയാളുടെ

കയ്യിൽ മുമ്പുണ്ടായിരുന്നതിന്റെ 3 മടങ്ങു പണം കണ്ടാൽ മുമ്പു് എത്ര പണമുണ്ടായിരുന്നു? (ഭാസ്കരീയബീജഗണിതത്തിൽനിന്നു്)

ഇവിടെ പറഞ്ഞതെല്ലാം ഓൎമ്മയുണ്ടാവാം. ആദ്യമുണ്ടായിരുന്നതു മറന്നുപോയിരിക്കാം. അതു് അറിവാനായി ഗണിതം വേണം. അജ്ഞാതമായിത്തീൎന്ന ഈ സംഖ്യയെ ഒരക്ഷരംകൊണ്ടു (വേറെ ചിഹ്നമായാലും വേണ്ടില്ല) സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഭാരതീയഗണിതഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ ഇതിനെ യാവത്താവൽ എന്നതിന്റെ ആദ്യക്ഷരമായ 'യ' എന്നക്ഷരംകൊണ്ടാണു് സൂചിപ്പിക്കാറു്. ഒന്നിലധികം അവ്യക്തരാശികൾ ഉണ്ടാകുമ്പോൾ കാ, നീ മുതലായ അക്ഷരങ്ങളും ഉപയോഗിക്കാറുണ്ടു്. ഈ പതിവനുസരിച്ചു വണിക്കിന്റെ കയ്യിൽ ആദ്യമുണ്ടായിരുന്ന സംഖ്യയെ യ പണമെന്നു കരുതുക. എന്നാൽ 3 പട്ടണങ്ങളിൽ വരവുചിലവു കണക്കാക്കിയാൽ അയാളുടെ കൈവശമുള്ള പണത്തിന്നു് ഒരു വ്യഞ്ജകം കാണാം.

1-ാംപട്ടണം വിടുമ്പോൾ ഉള്ള പണം

$$= 2(\text{യ}-10)-20=2\text{യ}-40$$

2-ാംപട്ടണം വിടുമ്പോൾ ഉള്ള പണം

$$= 2(2\text{യ}-50)-20=4\text{യ}-120$$

3-ാംപട്ടണം വിടുമ്പോൾ ഉള്ള പണം

$$=2(4\text{യ}-130)-20=8\text{യ}-280.$$

ഇതു് ആദ്യമുള്ളതിന്റെ മൂന്നു മടങ്ങാകയാൽ,

$$8\text{യ}-280=3\text{യ}$$

$$\therefore\ 5\text{യ}-280=0$$

$$\therefore\ 5\text{യ}=280$$

$$\text{യ}=56.$$

വണിക്കിന്റെ കൈവശം ആദ്യമുണ്ടായിരുന്നതു് 56 പണമായിരുന്നുവെന്നു വരുന്നു. ഇതാണു് അവ്യക്തരാശികളെക്കൊണ്ടുള്ള ഒരു ഉപകാരം. ഇവിടെ '$8\text{യ}-280=3\text{യ}$' എന്നതിനെ ഒരു

സമീകാരമെന്നു പറയുന്നു. അതിൽനിന്നു് അവ്യക്തത്തെ വ്യക്തമാക്കുന്ന ക്രിയയ്ക്കു സമീകാരഭഞ്ജനമെന്നു പറയുന്നു.

ഭൌതികശാസ്ത്രങ്ങളിലെ പരീക്ഷണങ്ങളിൽനിന്നും അനുമാനങ്ങളിൽനിന്നും ഒരു കല്ലോ ഭാരമുള്ള മററു വസ്തുക്കളോ നിലത്തുനിന്നു 48 അടി ഉയരെ വെച്ച് സെക്കണ്ടിൽ 100 അടിപ്രകാരം മേല്പോട്ടു പ്രക്ഷേപിച്ചു ക സെക്കണ്ട് കഴിഞ്ഞാൽ നിലത്തുനിന്നുള്ള അതിൻെറ ഉയരം

$$48+100\text{ക}-16\text{ക}^2$$

അടിയാണെന്നു് അറിയാം. ഓരോ സെക്കണ്ടിൻേറയും അന്ത്യത്തിൽ ചെന്ന ഉയരം പട്ടികയായി താഴെ കൊടുക്കുന്നു. പട്ടിക

സെക്കണ്ട്	0	1	2	3	4	5	6	7
ഉയരം (അടി)	48	132	184	204	192	148	.72	_ 36

യിൽനിന്നു പലതും ഗ്രഹിക്കാം. (1) 3 സെക്കണ്ടു് അവസാനിക്കുന്നതുവരെ കല്ലു മേല്പോട്ടു പോയിട്ടുണ്ടു്. (2) 4 സെക്കണ്ടു് അവസാനിക്കുന്നതിന്നു മുമ്പായി കല്ലു് കീഴ്പോട്ടു വന്നുതുടങ്ങി. (3) 7 സെക്കണ്ടു് അവസാനിക്കുന്നതിന്നുമുമ്പു് അതു നിലംപതിച്ചു. ഇത്രയും കാണുമ്പോൾ, കൃത്യം ഏതു സമയത്തു കല്ലു് മേല്പോട്ടു പോകുന്നതു നിലച്ചു, കല്ലു് എത്ര സമയം മേല്പോട്ടു പോയി, കൃത്യം ഏതു സമയത്തു് അതു നിലംപതിച്ചു മുതലായ പ്രശ്നങ്ങൾ ഉത്ഭവിക്കുന്നു. ഈ പ്രശ്നങ്ങൾക്കു സമാധാനം അവ്യക്തഗണിതംകൊണ്ടുതന്നെ കാണാം.

$$48+100\text{ക}-16\text{ക}^2$$
$$=48-(16\text{ക}^2-100\text{ക}+12\tfrac{1}{2})^2+(12\tfrac{1}{2})^2$$
$$=204\tfrac{1}{4}-(4\text{ക}-12\tfrac{1}{2})^2$$

ഇവിടെ $(4\text{ക}-12\frac{1}{2})^2$ന്നു് ഏററവും താണവില ശൂന്യമെന്നും, അതു $\text{ക}=3\frac{1}{8}$ ആകുമ്പോൾ പ്രാപിക്കുന്നുവെന്നും കാണാം. അതി

നാൽ ക $=3\frac{1}{8}$ എന്നാകുമ്പോൾ ഉയരത്തെ കുറിക്കുന്ന വ്യഞ്ജകം അതിൻെറ ഏററവും വലിയ വിലയെ പ്രാപിക്കുന്നു. എന്നു വെച്ചാൽ പ്രക്ഷേപണത്തിനുശേഷം $3\frac{1}{8}$ സെക്കണ്ട് കഴിയു മ്പോൾ കല്ല് ഏററവും കവിഞ്ഞ ഉയരത്തെത്തുന്നു.

ഇനി കൃത്യം ഏതു സമയത്തു കല്ലു നിലംപതിക്കുന്നുവെന്നു കൂടി കാണണം. നിലംപതിക്കുമ്പോൾ കല്ലിൻെറ ഉയരം ശൂന്യം.

$$\therefore \quad 48+100\text{ക}-16\text{ക}^2=0$$

$$\therefore \quad 204\tfrac{1}{4}-(4\text{ക}-12\tfrac{1}{2})^2=0$$

$$(4\text{ക}-12\tfrac{1}{2})^2=204\tfrac{1}{4}$$

$$4\text{ക}-12\tfrac{1}{2}=\pm\sqrt{204\tfrac{1}{4}}=\pm 14{\cdot}29$$

$$\therefore \quad \text{ക.} \quad =\frac{\pm 14{\cdot}29+12{\cdot}5}{4}$$

$$=6{\cdot}7 \text{ അഥവാ } -{\cdot}45$$

അതിനാൽ 6·7 സെക്കണ്ട് തികയാറാവുമ്പോൾ കല്ല് നിലംപ തിക്കുന്നു. $-0{\cdot}45$ എന്നതിൻെറ സാരം പിന്നീട്ട പറയാം.

$48+100\text{ക}-16\text{ക}^2$ എന്ന വ്യഞ്ജകത്തിൻെറ വില അതി ലുള്ള ബീജസംഖ്യയായ ക എന്നതിൻെറ വിലയെ ആശ്രയി ച്ചിരിക്കുന്നു. ക മാറുമ്പോൾ വ്യഞ്ജകവും മാറുന്നു. ഇങ്ങിനെ സങ്കല്പിച്ചിരിക്കെ ക എന്നതിനെ സ്വയംചലരാശിയെന്നും വ്യ ഞ്ജകത്തെ അനുചലരാശിയെന്നും പറയുന്നു. ഗണിതത്തിൻെറ ആവശ്യത്തിനുവേണ്ടി വ്യഞ്ജകത്തിന്നു ഒരു വില കല്പിച്ച് അതിലുള്ള ബീജസംഖ്യക്കു് എന്തു വില എന്നാലോചിക്കാം. അപ്പോൾ വ്യഞ്ജകത്തെ സ്വയംചലരാശിയായും ബീജത്തെ അനുചലരാശിയായും കല്പിക്കാം. വിലകളുടെ ആശ്രിതത്വം പല പ്രകാരത്തിലും കല്പിക്കാമെന്നു ക്രമേണ കാണുന്നതാണു്.

പ്രപഞ്ചത്തിലെ സകല വസ്തുക്കളും മാറിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. ചില മാററങ്ങൾ അതിസൂക്ഷ്മങ്ങളാകയാൽ നാം അവയെ കാണുകയോ അറികയോ ചെയ്യുന്നില്ലെന്നേയുള്ളു. അതിനാൽ വ്യഞ്ജകം ഒന്നുമാത്രമേ വസ്തുക്കളുടെ ഗണിതപരമായ പ്രതീകമാകുന്നുള്ളു. ഈ പ്രതീകങ്ങളിൽ വരുന്ന മാററങ്ങളുടെ സ്വഭാവം അറിഞ്ഞാൽമാത്രമേ അവയുടെ സ്വഭാവം കുറേക്കൂടി നല്ലവണ്ണം അറിവാൻ സാധിക്കയുള്ളു. അതിനാൽ ബീജസംഖ്യകളിലും അവയുടെ വ്യഞ്ജകങ്ങളിലും അന്യോന്യം ആശ്രയിച്ചുണ്ടാകുന്ന മാററങ്ങളുടെ സ്വഭാവം നല്ലവണ്ണം ഗ്രഹിക്കുവാനുള്ള പരിശ്രമം മൂന്നുനാലു ശതവഷമായി ലോകമെങ്ങുമുള്ള ഗണിതപണ്ഡിതന്മാർ ചെയ്തുവരുന്നു. വ്യഞ്ജകത്തെ അറിഞ്ഞാൽ അതിൽ വരുന്ന മാററങ്ങൾ ബീജത്തേയോ ബീജങ്ങളേയോ എങ്ങിനെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു എന്നും, ഈ ആശ്രയരൂപം അറിഞ്ഞാൽ വ്യഞ്ജകം എന്തായിരിക്കുമെന്നും അറിവാനാണ് പരിശ്രമം. ഈ ഗണിതശാഖയെ <u>പ്രഗണിതം</u> അല്ലെങ്കിൽ വരഗണിതമെന്നു പറയുന്നു. വരഗണിതത്തെ ഇംഗ്ലീഷിൽ കാൽകുലസ്സ് എന്നു പറയുന്നു. വ്യക്താവ്യക്തഗണിതങ്ങളെക്കൊണ്ടു സാധിക്കാത്തവ വരഗണിതംകൊണ്ടു സാധിക്കയും, അവ്യക്തഗണിതംകൊണ്ടു പ്രയാസപ്പെട്ടു സാധിക്കുന്നവയെ വരഗണിതം ക്ഷിപ്രസാദ്ധ്യമാക്കയും ചെയ്യുന്നു. എന്നുമാത്രമല്ല, പ്രകൃതിയിലെ ചില വസ്തുബന്ധങ്ങളെ വരഗണിതസംജ്ഞകളെക്കൊണ്ടല്ലാതെ കൃത്യമായി വിവരിക്കുവാൻ സാധിക്കയില്ല.

വരഗണിതത്തിൻെറ സ്വഭാവം ഒരുവിധം ഗ്രഹിക്കണമെങ്കിൽ, ബീജഗണിതത്തിലേയും ത്രികോണമിതി എന്ന ക്ഷേത്രഗണിതത്തിലേയും ചില പ്രധാനതത്വങ്ങളെങ്കിലും അറിഞ്ഞിരിക്കണം. അതിനാൽ ഇനിയത്തെ അഞ്ചു ചെറിയ അദ്ധ്യായങ്ങളിൽ അവയെ സംക്ഷിപ്തമായി വിവരിക്കുന്നു.

അദ്ധ്യായം 2

ഗമകനിയമങ്ങൾ

ക ഒരു അവ്യക്തസംഖ്യയെന്നു വെയ്ക്കുക. എന്നാൽ ക$\times$ക എന്നതിനെ ക^{2} (ക-വൎഗ്ഗം) എന്നും ക$\times$ക$\times$ക എന്നതിനെ ക^{3} (ക-ഘനം) എന്നും ക$\times$ക$\times$ക$\times$ക എന്നതിനെ ക^{4} (ക-സ-ഘാതം 4) എന്നും എഴുതിവരുന്നു. ഇവിടെ ക എന്നതു് ഒരു മൂലസംഖ്യയും ക^{2}, ക^{3}, ക^{4}, ക^{5}........മുതലായവ ക എന്നതിൻെറ വൎഗ്ഗം, ഘനം, സമചതുഷ്ഘാതം, സമപഞ്ചഘാതം മുതലായവയുമാകുന്നു. ഇനി സ എന്നതു് ഒരു ധനപൂൎണ്ണസംഖ്യയെന്നുവെച്ചാൽ,

$$\text{ക}^{\text{സ}} = \text{ക}\times\text{ക}\times\text{ക}\times\text{ക}\times\text{............സ ഘടകങ്ങളോളം.}$$

ഇവിടെ സ എന്നതിനെ ക$^{\text{സ}}$ എന്നതിലെ 'ഗമകം' എന്നു പറയുന്നു. ന എന്നതു മറെറാരു ധനപൂൎണ്ണസംഖ്യയെങ്കിൽ,

$$\text{ക}^{\text{ന}} = \text{ക}\times\text{ക}\times\text{ക}\times\text{ക}\times\text{...........ന ഘടകങ്ങളോളം.}$$

അതിനാൽ,

$$\text{ക}^{\text{സ}}\times\text{ക}^{\text{ന}} = \text{ക}\times\text{ക}\times\text{ക}\times\text{....(സ}+\text{ന) ഘടകങ്ങളോളം}$$

$$= \text{ക}^{\text{സ}+\text{ന}} \qquad \text{I}$$

ഇതിനെ പ്രഥമഗമകനിയമമെന്നു പറയുന്നു.

$$\frac{\text{ക}^{\text{സ}}}{\text{ക}^{\text{ന}}} = \frac{\text{ക}\times\text{ക}\times\text{ക}\times\text{..............സ ഘടകങ്ങളോളം}}{\text{ക}\times\text{ക}\times\text{ക}\times\text{.............ന ഘടകങ്ങളോളം}}.$$

അതിനാൽ സ എന്നതു ന എന്നതിനേക്കാൾ വലുതെങ്കിൽ

$$\cdot\ \frac{\text{ക}^{\text{സ}}}{\text{ക}^{\text{ന}}} = \text{ക}^{\text{സ}-\text{ന}} \qquad \text{II}$$

സ എന്നതു ന എന്നതിനേക്കാൾ ചെറുതെങ്കിൽ

$$\frac{ക^{സ}}{ക^{ന}} = \frac{1}{ക^{ന-സ}} \qquad II$$

ഇവ രണ്ടുംകൂടി ദ്വിതീയഗമകനിയമമാകുന്നു.

ഇനി ഗ എന്നതു മറെറാരു അവ്യക്തരാശിയെങ്കിൽ

$$(ക.ഗ)^{സ} = ക.ഗ \times ക.ഗ \times ക.ഗ \times \ldots\text{സ ഘടകങ്ങളോളം}$$

$$= ക \times ക \times ക \times \ldots\ldots\text{സ ഘടകങ്ങളോളം}$$

$$\times ഗ.ഗ.ഗ \times \ldots\ldots\text{സ ഘടകങ്ങളോളം}$$

$$\therefore \quad (ക.ഗ)^{സ} = ക.^{സ} ഗ^{സ} \qquad III$$

ഇതു തൃതീയഗമകനിയമമാകുന്നു.

$$(ക^{സ})^{ന} = ക.^{സ} ക.^{സ} ക.^{സ} \ldots\ldots\ldots\text{ന ഘടകങ്ങളോളം.}$$

$$= ക^{സ+സ+സ+സ+\ldots\ldots\text{ന പദങ്ങളോളം.}}$$

$$= ക^{സ.ന} \qquad IV$$

ഇതു ചതുർത്ഥഗമകനിയമം.

ഉദാഹരണങ്ങൾ:

1. ചുരുക്കുക. $\frac{6^3 . 8^2}{9^3 . 4^3}$

$$\frac{6^3 . 8^2}{9^3 . 4^3} = \frac{(2.3)^3 . (2^3)^2}{(3^2)^3 . (2^2)^3} = \frac{2^3 . 3^3 . 2^6}{3^6 . 2^6} = \frac{2^9 . 3^3}{2^6 . 3^6}$$

$$= \frac{2^{9-6}}{3^{6-3}} = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}.$$

2. ചുരുക്കുക: $\dfrac{(3\text{യ}^2\ \text{ര}^3)^2.\ (4\text{യ}^3.\ \text{ര}^2)^4}{(6\text{യ}^4.\ \text{ര}^3)^2}$

$$\frac{(3\text{യ}^2.\ \text{ര}^3)^2.\ (4\text{യ}^3.\ \text{ര}^2)^4}{(6\text{യ}^4.\ \text{ര}^3)^2}$$

$$=\frac{3^2.\ \text{യ}^4.\ \text{ര}^6.\ 2^8.\ \text{യ}^{12}.\ \text{ര}^8}{2^2.\ 3^2.\ \text{യ}^8.\ \text{ര}^6}=\underline{\underline{2^6.\ \text{യ}^8.\ \text{ര}^8.}}$$

ഗമകങ്ങൾ പൂൎണ്ണധനസംഖ്യകൾതന്നെ ആവണമെന്നില്ല. ശൂന്യമോ, ഭിന്നമോ, ഋണസംഖ്യയോ ആവാം. എന്നാൽ ഗമകനിയമങ്ങൾ സൎവ്വത്ര സാധുവാകണമെങ്കിൽ, ആ വിധം ഗമകങ്ങൾ കലൎന്ന സംഖ്യകൾക്കോ, അവ്യക്തരാശികൾക്കോ എന്തൎത്ഥം കല്പിക്കണമെന്നു് അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ടതാകുന്നു.

(1) യ^0 എന്നാലെന്തൎത്ഥം?

ഒന്നാം ഗമകനിയമമനുസരിച്ചു്,

$$\text{യ}^{\text{സ}}\times\text{യ}^{0}=\text{യ}^{\text{സ}+0}=\text{യ}^{\text{സ}}.$$

$$\therefore\quad \text{യ}^{0}=\frac{\text{യ}^{\text{സ}}}{\text{യ}^{\text{സ}}}=1.$$

അതിനാൽ ഏതു രാശിയുടേയും ഗമകം ശൂന്യമെങ്കിൽ അതു് ഒന്നിനു തുല്യമെന്നു കരുതേണ്ടതാകുന്നു.

(2) മ, ന എന്നവ പൂൎണ്ണധനസംഖ്യകളെങ്കിൽ, $\text{യ}^{\frac{\text{മ}}{\text{ന}}}$ എന്നതിന്നെന്തൎത്ഥം?

ചതുൎത്ഥഗമകനിയമമനുസരിച്ചു്,

$$\left(\text{യ}^{\frac{\text{മ}}{\text{ന}}}\right)^{\text{ന}}=\text{യ}^{\frac{\text{മ}}{\text{ന}}\times\text{ന}}=\text{യ}^{\text{മ}}.$$

ഇരുഭാഗത്തേയും ന-ാമത്തെ മൂലം കണ്ടാൽ,

$$യ^{\frac{മ}{ന}} = \sqrt[ന]{യ^{മ}}$$

ഇവിടെ മ $= 1$ എന്നുവെച്ചാൽ $യ^{\frac{1}{ന}} = \sqrt[ന]{യ}$.

$$\therefore \quad യ^{മ} = \left(\sqrt[ന]{യ}\right)^{ന} \cdot \left(\sqrt[ന]{യ}\right)^{ന} \cdot \left(\sqrt[ന]{യ}\right)^{ന} \text{.......മ ഘടകങ്ങളോളം.}$$

$$= \left(\sqrt[ന]{യ}\right)^{ന.മ}$$

ഇരുഭാഗത്തും ന-ാമത്തെ മൂലം കണ്ടാൽ

$$\sqrt[ന]{യ^{മ}} = \left(\sqrt[ന]{യ}\right)^{മ}$$

അതിനാൽ,

$$യ^{\frac{മ}{ന}} = \sqrt[ന]{യ^{മ}} = \left(\sqrt[ന]{യ}\right)^{മ}.$$

(3) മ എന്നതു ഭിന്നമോ അഭിന്നമോ ആയ ധനസംഖ്യയെങ്കിൽ,

$യ^{-മ}$ എന്നതിൻെറ അത്ഥമെന്തു്?

ഒന്നാംഗമകനിയമമനുസരിച്ചു്,

$$യ^{-മ} \times യ^{മ} = യ^{(-മ)+(+മ)} = യ^{0} = 1.$$

$$\therefore \quad യ^{-മ} = \frac{1}{യ^{മ}}.$$

ഉദാഹരണങ്ങൾ

1. $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = 2$

2. $4^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}$

3. $8^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{2} = 2^{2} = 4$, അഥവാ

$$= \sqrt[3]{8^{2}} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

4. $\text{യ}^{\text{മ}-\text{ന}}.\ \text{യ}^{\text{ന}-\text{ഭ}}.\ \text{യ}^{\text{ഭ}-\text{മ}}.$

$$= \text{യ}^{(\text{മ}-\text{ന})+(\text{ന}-\text{ഭ})+(\text{ഭ}-\text{മ})}$$

$= \text{യ}^{0} = 1.$ അഥവാ,

$$= \text{യ}^{\text{മ}}.\ \text{യ}^{-\text{ന}}.\ \text{യ}^{\text{ന}}.\ \text{യ}^{-\text{ഭ}}.\ \text{യ}^{\text{ഭ}}.\ \text{യ}^{-\text{മ}}$$

$$= \frac{\text{യ}^{\text{മ}}}{\text{യ}^{\text{ന}}}.\ \frac{\text{യ}^{\text{ന}}}{\text{യ}^{\text{ഭ}}}.\ \frac{\text{യ}^{\text{ഭ}}}{\text{യ}^{\text{മ}}} = \frac{\text{യ}^{\text{മ}+\text{ന}+\text{ഭ}}}{\text{യ}^{\text{ന}+\text{ഭ}+\text{മ}}} = 1$$

5. $\sqrt{8}$, $\sqrt[3]{23}$ ഇവയിൽ ഏതാണു് വലുതു്?
രണ്ടുസംഖ്യകളുടേയും 6-ാം സ്വാഘാതം കാണുക.

$$\left(\sqrt{8}\right)^{6} = \left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{6} = 8^{3} = 512.$$

$$\left(\sqrt[3]{23}\right)^{6} = \left(23^{\frac{1}{3}}\right)^{6} = 23^{2} = 529.$$

ഇതിൽനിന്നു $\sqrt[3]{23}$ ആണു് $\sqrt{8}$ നെക്കാൾ വലുതെന്നു വരുന്നു.

അദ്ധ്യായം 3

ന്യാസഗണഭേദങ്ങൾ

1. ന്യാസഭേദങ്ങൾ

ക്ലപ്തസംഖ്യയോളം സാധനങ്ങൾ ഉണ്ടെന്നുവെയ്ക്കുക. അവയിൽ കുറെ സാധനങ്ങളേയോ, മുഴുവൻ സാധനങ്ങളേയോ എത്ര വിവിധപ്രകാരങ്ങളിൽ നിരത്തിവെയ്ക്കാം എന്നു പലപ്പോഴും ആലോചിക്കേണ്ടിവരും. ഓരോ പ്രകാരത്തിന്നും ഒരു പ്രത്യേകന്യാസം അല്ലെങ്കിൽ ന്യാസഭേദം എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി 1, 3, 5, 7, 9 എന്ന അഞ്ച് അക്കങ്ങളെകൊണ്ടു വ്യത്യാസപ്പെട്ട രണ്ടക്കങ്ങളുള്ള എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം എന്നാലോചിക്കാം. രണ്ടക്കങ്ങളിൽ ഒന്നു പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തും മറേറതു ഒററയുടെ സ്ഥാനത്തും ആയിരിക്കും. ആദ്യം പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് അക്കം വെയ്ക്കാം. അതു 5 അക്കങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലുമക്കമാകാവുന്നതുകൊണ്ടു 5 വിധത്തിൽ ചെയ്യാം. ഇതു വെച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ ബാക്കി 4 അക്കങ്ങളേ ഉള്ളു. അതിലൊന്ന് ഒററയുടെ സ്ഥാനത്തു വെയ്ക്കാം. അതു 4 പ്രകാരത്തിൽ. അതിനാൽ പത്തിന്റെ സ്ഥാനത്ത് അക്കംവെച്ച ഓരോ വിധത്തിന്നും വ്യത്യാസപ്പെട്ട രണ്ടക്കങ്ങൾ ഉള്ള 4 സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാകുന്നു. അതിനാൽ ആകെ ഉണ്ടാകാവുന്ന വിവിധസംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= 5 \times 4 = 20$.

ഇങ്ങിനെ ആലോചിച്ചാൽ വ്യത്യാസപ്പെട്ട 3 അക്കങ്ങൾ ഉള്ള സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= 5 \times 4 \times 3 = 60$.

4 വിഭിന്നാങ്കങ്ങളുള്ള സംഖ്യകൾ $= 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$.

5 അക്കങ്ങളുള്ള സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം. $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, ഇതും 120 തന്നെ.

അക്കങ്ങൾ വിഭിന്നമാകണ്ട എന്നുണ്ടെങ്കിൽ ആകെ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം ക്രമേണ 5, 5×5, 5×5×5, 5×5×5×5, 5×5×5×5×5 എന്നായി വരുമെന്നും ഈ ആലോചനയിൽ നിന്നുതന്നെ വ്യക്തമത്രെ.

ഇനി വിഭിന്നമായ സ സാധനങ്ങളിൽനിന്നു ര സാധനങ്ങളെ എത്ര വിധത്തിൽ നിരത്താമെന്നു കാണാം. ഇതിന്നായി ര സ്ഥാനങ്ങളെ സങ്കല്പിക്കുക. ഇതിൽ ആദ്യസ്ഥാനത്തു സ വിധത്തിൽ ഒരു സാധനത്തെ വെയ്ക്കാം. അതു വെച്ചുകഴിഞ്ഞാൽ (സ—1) സാധനങ്ങൾ ശേഷിക്കും. അതിനാൽ രണ്ടാംസ്ഥാനത്തു (സ—1) വിധത്തിൽ ഒരു സാധനത്തെ വെയ്ക്കാം. അതിൽനിന്നു് ആദ്യസ്ഥാനത്തു വെയ്ക്കുന്ന ഓരോ സാധനത്തിന്നും (സ—1) ഭേദങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നു. അപ്പോൾ ആകെ രണ്ടു സാധനങ്ങൾ നിരത്താവുന്ന ഭേദങ്ങൾ സ (സ—1) എന്നു്. മൂന്നാമത്തെ സാധനം (സ—2) വിധത്തിൽമാത്രം മൂന്നാംസ്ഥാനത്തു വെയ്ക്കാം. അതിനാൽ ആകെ 3 സാധനങ്ങൾ നിരത്താവുന്ന ഭേദങ്ങൾ സ (സ—1) (സ—2). ഇപ്രകാരം തുടൎന്നാലോചിക്കാം. (ര—1) സാധനങ്ങൾ നിരത്തിക്കഴിഞ്ഞാൽ (സ—$\overline{\text{ര}-1}$) സാധനങ്ങൾ ബാക്കിയാവും. അതിനാൽ അന്ത്യസ്ഥാനത്തു സാധനം വെയ്ക്കാവുന്നവിധം (സ—ര+1) എന്നു്. അതിനാൽ ആകെ ര സാധനങ്ങൾ നിരത്താവുന്ന ഭേദങ്ങൾ

സ (സ—1) (സ—2)..........(സ—ര+2) (സ—ര+1).

ഈ ന്യാസഭേദങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ സ·$\text{ന്യ}_{\text{ര}}$ എന്നതുകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

സ. $\text{ന്യ}_{\text{ര}}$ = സ (സ—1) (സ—2)..........(സ—ര+1).

1, 2, 3 തുടങ്ങി സ എന്നൊരു ഇഷ്ടസംഖ്യവരെയുള്ള സംഖ്യകളെ ഒന്നായിപ്പെരുക്കിയ ഫലത്തെ $\underline{|\text{സ}}$ എന്നെഴുതുന്നു. ഇതിനെ 'ഏകാദ്യേകോത്തരഘാതം സാന്തം' എന്നു പറയുന്നു.

ചുരുക്കത്തിൽ 'ഏകാദ്യേകോത്തരഘാതം സ' എന്നുപറയാം. ഇവിടെ കിട്ടിയ ഫലത്തെ ഒന്നു ചുരുക്കി എഴുതാം.

$$\text{സ. ന്യ}_{\text{ര}} = \text{സ}\,(\text{സ}-1)\,(\text{സ}-2)\ldots\ldots(\text{സ}-\text{ര}+1)$$

$$= \frac{\text{സ}(\text{സ}-1)(\text{സ}-2)\ldots(\text{സ}-\text{ര}+1)\times(\text{സ}-\text{ര})(\text{സ}-\text{ര}-1)\ldots 2.1}{(\text{സ}-\text{ര})\,(\text{സ}-\text{ര}-1)\ldots\ldots 3\times2\times1}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{\text{സ}}}{\lfloor\underline{\text{സ}-\text{ര}}}$$

സ സാധനങ്ങളെ എല്ലാം നിരത്താവുന്ന ഭേദങ്ങൾ സ $(\text{സ}-1)$ $(\text{സ}-2)\ldots\ldots 3.2.1 = \lfloor\underline{\text{സ}}$ എന്നു വ്യക്തം. ഇവിടെ കണ്ട സൂത്രത്തിൽനിന്നു

$$\text{സ. ന്യ}_{\text{സ}} = \frac{\lfloor\underline{\text{സ}}}{\lfloor\underline{\text{സ}-\text{സ}}} = \frac{\lfloor\underline{\text{സ}}}{\lfloor\underline{0}}.$$

ഇതു $\lfloor\underline{\text{സ}}$ എന്നതിന്നു തുല്യമാകയാൽ, $\lfloor\underline{0}$ എന്നതിന്നു 1 എന്നർത്ഥം കല്പിക്കേണ്ടിവരുന്നു.

സാധനങ്ങളെല്ലാം വിഭിന്നമായിരിക്കുമ്പോൾ സ സാധനങ്ങളെ അത്ര സ്ഥാനങ്ങളിൽ നിരത്താവുന്നവിധം $\lfloor\underline{\text{സ}}$. എന്നാൽ ഈ സാധനങ്ങളിൽ ന എണ്ണം ഒരുപോലെയുള്ളവയാണെങ്കിൽ, അവയെ അന്യോന്യം മാററിവെയ്ക്കുന്നതിനാൽ ന്യാസത്തിൽ ഒരു ഭേദവും വരുന്നില്ല. ന സാധനങ്ങളെ ന സ്ഥാനങ്ങളിൽ നിരത്താവുന്നവിധം $\lfloor\underline{\text{ന}}$ ആകുന്നു. ഇവയെ എല്ലാം കൂടി ഒരു ന്യാസഭേദമായേ കരുതിക്കൂട്ടു. എന്നുവെച്ചാൽ യഥാർത്ഥന്യാസഭേദങ്ങളിൽ ഓരോന്നിൽനിന്നും $\lfloor\underline{\text{ന}}$ ഭേദങ്ങൾ ഉത്ഭവിച്ചാലേ $\lfloor\underline{\text{സ}}$ ഭേദങ്ങൾ ഉണ്ടാകയുള്ളു. അതിനാൽ സ സാധനങ്ങളിൽ ന സാധനങ്ങൾ ഒരുപോലെയാണെങ്കിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ന്യാസഭേദസംഖ്യ $= \dfrac{\lfloor\underline{\text{സ}}}{\lfloor\underline{\text{ന}}}$. ന സാധനങ്ങൾക്കുപുറമെ മ സാധനങ്ങളും വേറെ വിധത്തിൽ ഒരുപോലെയെങ്കിൽ അവയെ എല്ലാം നിരത്താവുന്നവിധം $= \dfrac{\lfloor\underline{\text{സ}}}{\lfloor\underline{\text{ന}}\,\lfloor\underline{\text{മ}}}$.

ഉദാഹരണങ്ങൾ

1. 5 ഇന്ദ്രനീലങ്ങളേയും 4 വൈഡൂൎയ്യങ്ങളേയും 3 വൈരകല്ലുകളേയും എത്ര വിധത്തിൽ നിരത്തിപ്പതിക്കാം.

$$\text{പതിക്കാവുന്നവിധം} = \frac{\underline{|5+4+3}}{\underline{|5} \times \underline{|4} \times \underline{|3}}$$

$$= \frac{6.7.8.9.10.11.12}{4.3.2.1 \times 3.2.1}$$

$$= \frac{7.8.9.10.11}{2} = \underline{\underline{27,720}}$$

2. 0, 2, 4, 6, 8 ഈ അക്കങ്ങളെല്ലാം 5 സ്ഥാനങ്ങളിൽ ഉപയോഗിച്ച് എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

$\underline{|5}$-ൽനിന്നു 0 അന്ത്യസ്ഥാനത്തു വരുന്നവയുടെ എണ്ണമായ $\underline{|4}$ കളയണം.

∴ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= \underline{|5} - \underline{|4} = (5-1)\underline{|4} = \underline{\underline{96}}.$

3. 7, 5, 3, 1. ഈ അക്കങ്ങൾ നാലും നാലു സ്ഥാനങ്ങളിൽവെച്ച് എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം? ആ സംഖ്യകളുടെ ആകത്തുകയെന്ത്?

സംഖ്യകളുടെ ആകെ എണ്ണം $= \underline{|4} = 24$

ഇവയിൽ 7 ആദ്യസ്ഥാനത്തു വരുന്ന സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം $= \underline{|3}$. അതുകൊണ്ടു മാത്രം ആകത്തുകയിൽ വരുന്ന ഭാഗം $= 7 \times \underline{|3}$. ഇങ്ങിനെ 7 തന്നെ 10-ന്റെ സ്ഥാനത്തു വരുന്നതുകൊണ്ടുള്ള ഭാഗം $= 70 \times \underline{|3}$. നൂറിന്റെ സ്ഥാനത്തും ആയിരത്തിന്റെ സ്ഥാനത്തും 7 വരുന്നതുകൊണ്ടുള്ള ഭാഗങ്ങൾ ക്രമേണ $700 \times \underline{|3}$, $7000 \times \underline{|3}$. അതിനാൽ 7 മാത്രം പല സ്ഥാനങ്ങളിലും വരുന്നതുകൊണ്ട് ആകത്തുകയിൽ വരുന്ന ഭാഗം $= 7777 \times \underline{|3}$. ഇങ്ങിനെ മററു അക്കങ്ങളെക്കൊണ്ടു വരുന്ന ഭാഗങ്ങൾ $5555 \times \underline{|3}$, $3333 \times \underline{|3}$, $1111 \times \underline{|3}$. അതിനാൽ,

ആകെത്തുക $=(7777+5555+3333+1111)\times \underline{|3}$

$=(7+5+3+1)\times 1111\times 6=17776\times 6$

$=\underline{1,06,656}.$

അഭ്യാസങ്ങൾ

1. 5 കുട്ടികളെ ഒരു ബെഞ്ചിന്മേൽ എത്രവിധം ഇരുത്താം?

2. 10 വെള്ളക്കാരേയും 4 ചീനക്കാരേയും, ഓരോ ചീനക്കാരനും രണ്ടു വെള്ളക്കാരുടെ ഇടയിൽ വരത്തക്കവണ്ണം എത്രവിധത്തിൽ ഒരു പന്തിയിൽ ഇരുത്താം?

3. 9 ആനകളെ ഒരു വരിയായി എത്ര വിധത്തിൽ നിൎത്താം? അതിൽ ഒരു പ്രത്യേക ആന നടുക്കും, മററു രണ്ടു പ്രത്യേക ആനകൾ അററങ്ങളിലും വരത്തക്കവണ്ണം അവയെ എത്ര വിധത്തിൽ ഒരേ വരിയിൽ നിൎത്താം?

4. ഒരു കുട്ടിയുടെ കൈവശം 6 വെള്ളപ്പൂക്കളും 6 നീലപ്പൂക്കളും ഉണ്ടു്. 12-ം വെവ്വേറെ തരത്തിലുള്ളവയാകുന്നു. രണ്ടു വെള്ളപ്പൂക്കളോ രണ്ടു നീലപ്പൂക്കളോ ഒരുമിച്ചു വരാത്തവിധം അവയെ എത്ര വിധത്തിൽ നിരത്തിവെയ്ക്കാം?

5. 1 തൊട്ടു 9 വരെ അക്കങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു സ്ഥാനങ്ങളിൽ വെവ്വേറെ അക്കങ്ങളായി 4 സ്ഥാനങ്ങളുള്ള എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം? ആ സംഖ്യകളുടെ യോഗമെത്ര?

6. ഈ അക്കങ്ങളെക്കൊണ്ടുതന്നെ സ്ഥാനങ്ങളിൽ ഒരേ അക്കങ്ങൾ വരുന്നതിന്നു വിരോധമില്ലെങ്കിൽ 4 സ്ഥാനമുള്ള എത്ര സംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

7. 1001മുതൽ 9999വരെ സംഖ്യകളിൽ 0 അക്കമോ അക്കങ്ങളോ ആയി വരുന്ന സംഖ്യകൾ എത്ര?

8. 10 കുട്ടികളിൽ 4 പേർ പെൺകുട്ടികളാകുന്നു. ആ നാലു പെൺകുട്ടികളും ഒരുമിച്ചു വരുമാറു 10 കുട്ടികളേയും ഒരേ വരിയിൽ എത്രവിധം ഇരുത്താം?

2. ഗണഭേദങ്ങൾ

സ വിവിധസാധനങ്ങളിൽനിന്നു ര സാധനങ്ങളുള്ള ഗണങ്ങൾ എത്രവിധം കിട്ടുമെന്നും പലപ്പോഴും ആലോചിക്കേണ്ടിവരും. ഈ ഗണഭേദങ്ങളുടെ സംഖ്യയെ സ. $\text{ഗ}_{\text{ര}}$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇവിടെ ഗണത്തിലുള്ള വ്യക്തികളെമാത്രമേ ആലോചിക്കേണ്ടു. അവയുടെ സ്ഥാനഭേദങ്ങളെ ആലോചിക്കേണ്ടതില്ല. സ്ഥാനഭേദങ്ങളെക്കരുതാതെ ഉണ്ടാക്കിയ ഓരോ ഗണത്തിൽനിന്നും $\underline{|\text{ര}}$ ന്യാസഭേദങ്ങളെ വരുത്താം. ഇങ്ങിനെ എല്ലാ ഗണങ്ങളിൽനിന്നും ഉണ്ടാക്കാവുന്ന ന്യാസഭേദങ്ങളെ കൂട്ടിയാൽ സ വിവിധസാധനങ്ങളിൽനിന്നു ര സാധനങ്ങൾ അടങ്ങിയ ന്യാസഭേദങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നു. അതിനാൽ,

$$\text{സ. ഗ}_{\text{ര}} \times \underline{|\text{ര}} = \text{സ. ന്യ}_{\text{ര}}.$$

$$\therefore \quad \text{സ. ഗ}_{\text{ര}} = \frac{\text{സ. ന്യ}_{\text{ര}}}{\underline{|\text{ര}}} = \frac{\underline{|\text{സ}}}{\underline{|\text{ര}}\ \underline{|\text{സ-ര}}}.$$

ര സാധനങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു ഗണം ഉണ്ടാക്കുമ്പോൾ (സ-ര) സാധനങ്ങൾ അടങ്ങിയ മറെറാരു ഗണം സ്വയമേവ ഉണ്ടാകുന്നു. അതിനാൽ

$$\text{സ. ഗ}_{\text{ര}} = \text{സ. ഗ}_{\text{സ-ര}}.$$

സ സാധനങ്ങളിൽനിന്നു ഒന്നോ അധികമോ ഉള്ളതായി ഉണ്ടാക്കാവുന്ന ഗണങ്ങളുടെ എണ്ണം $= \text{സ. ഗ}_1 + \text{സ. ഗ}_2 + \text{സ. ഗ}_3 + \ldots\ldots + \text{സഗ}_{\text{സ}-2} + \text{സഗ}_{\text{സ}-1} + \text{സഗ}_{\text{സ}}$. എന്നു വ്യക്തം. ഇതു വേറെ വിധത്തിലും ആലോചിക്കാം. ഗണത്തിലെ വ്യക്തികളുടെ എണ്ണം ക്ലിപ്തമല്ലാത്തതിനാൽ ഓരോ സാധനത്തേയും ഗണത്തിലേക്കു സ്വീകരിക്കയോ സ്വീകരിക്കാതിരിക്കയോ ചെയ്യാം. ഇങ്ങിനെ ഓരോ സാധനംകൊണ്ടും 2 പ്രകാരം ചെയ്യാം. ഇങ്ങിനെ സ സാധനങ്ങളെക്കൊണ്ടു ചെയ്യുമ്പോൾ

$2^{സ}$ പ്രകാരഭേദങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നു. ഇതിൽ ഒരു സാധനവും സ്വീകരിക്കാത്തതും പെട്ടും. അതു ഗണഭേദമല്ല. അതിനാൽ ഒന്നോ അധികമോ സാധനങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഗണങ്ങളുടെ ഭേദങ്ങൾ

$$=2^{സ}-1$$

അതിനാൽ,

$$സ.ഗ_1+സ.ഗ_2+സ.ഗ_3+\ldots+സ.ഗ_{സ-1}$$
$$+സ.ഗ_{സ}=2^{സ}-1.$$

ഉദാഹരണം:

$$6ഗ_1+6.ഗ_2+6.ഗ_3+6.ഗ_4+6.ഗ_5+6ഗ_6$$
$$=6+15+20+15+6+1=63.$$

$$2^6-1=2\times2\times2\times2\times2\times2-1=64-1=63.$$

യ വിവിധസാധനങ്ങളിൽനിന്നും വേറെ വ വിവിധസാധനങ്ങളിൽനിന്നും ര സാധനങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഗണഭേദങ്ങൾ

$$=(യ+വ).\ ഗ_{ര}.$$

ഇതു മറെറാരുപ്രകാരം ആലോചിക്കാം. താഴെ കാണുന്ന പ്രകാരത്തിലും ര സാധനങ്ങൾ എടുക്കാം.

ര സാധനങ്ങൾ യ-വിൽനിന്നു്, 0 സാധനം
വ-വിൽനിന്നു $=യ.ഗ_{ര}$ വിധം

ര—1 സാധനങ്ങൾ യ-വിൽനിന്നു്, 1 സാധനം
വ-വിൽനിന്നു $=യഗ_{ര-1}\times വ.ഗ_1$ വിധം

ര—2 സാധനങ്ങൾ യ-വിൽനിന്നു്, 2 സാധനങ്ങൾ
വ-വിൽനിന്നു $=യഗ_{ര-2}\times വ.ഗ_2$ വിധം

ര—3 സാധനങ്ങൾ യ-വിൽനിന്നു്, 3 സാധനങ്ങൾ
വ-വിൽനിന്നു $=യ.ഗ_{ര-3}\times വ.ഗ_3$ വിധം

ഇങ്ങിനെ ഏതെങ്കിലും ഒരു കൂട്ടത്തിൽ വേണ്ടുന്ന സാധനങ്ങൾ ഇല്ലാതാകുവോളം ചെയ്യേണ്ടിവരും. എല്ലാംകൂടി കൂട്ടിയാൽ, കിട്ടുന്ന സംഖ്യ $(\text{യ}+\text{വ}).\text{ഗ}_{\text{ര}}$ എന്നതിന്നു തുല്യമാകും. അതിനാൽ,

$$(\text{യ}+\text{വ}).\text{ഗ}_{\text{ര}}=\text{യ}.\text{ഗ}_{\text{ര}}+\text{യ}.\text{ഗ}_{\text{ര}-1}\times\text{വ}.\text{ഗ}_1+\text{യ}.\text{ഗ}_{\text{ര}-2}\times\text{വ}.\text{ഗ}_2+\dots$$

$$\dots\dots+\text{യ}.\text{ഗ}_2\times\text{വ}.\text{ഗ}_{\text{ര}-2}+\text{യ}.\text{ഗ}_1\times\text{വ}.\text{ഗ}_{\text{ര}-1}+\text{വ}.\text{ഗ}_{\text{ര}}.$$

ഇവിടെ വലത്തുപക്ഷത്തു് എല്ലാ പദങ്ങളും ഉണ്ടായിരിക്കേണമെന്നില്ല. ഉണ്ടായിരിക്കേണമെങ്കിൽ ര എന്നതു് യ എന്നതിനെക്കാളും വ എന്നതിനെക്കാളും വലുതായിരിപ്പാൻ പാടില്ല. ര എന്നതു യ എന്നതിനെക്കാൾ വലുതെങ്കിൽ $\text{യ}.\text{ഗ}_{\text{ര}}$, $\text{യ}.\text{ഗ}_{\text{ര}-1}$, $\text{യ}.\text{ഗ}_{\text{ര}-2}$ മുതലായവയിൽ വരുന്ന ര, $\text{ര}-1$, $\text{ര}-2$ മുതലായവ യ എന്നതിനെക്കാൾ വലുതായിവരുന്ന ഗണഭേദങ്ങൾ ഉണ്ടാകയില്ല. അതിനാൽ ആ ഗണഭേദസംഖ്യകൾ ശൂന്യം. ഇപ്രകാരം വ സാധനങ്ങളിൽനിന്നുണ്ടാകുന്ന ഗണങ്ങളുടെ സംഖ്യകളേയും കരുതണം.

ഉദാഹരണം 1.

5 ആങ്കുട്ടികളിൽനിന്നും 4 പെങ്കുട്ടികളിൽനിന്നും കൂടി 3 കുട്ടികളെ എത്രവിധം തിരഞ്ഞെടുക്കാം?

ആദ്യത്തെപ്രകാരം ഗണഭേദസംഖ്യ

$$=9.\text{ഗ}_3=\frac{9\times8\times7}{1\times2\times3}=\underline{84}$$

രണ്ടാമത്തെപ്രകാരം ഗണഭേദസംഖ്യ

$$=5.\text{ഗ}_3+5\text{ഗ}_2\times4\text{ഗ}_1+5\text{ഗ}_1\times4\text{ഗ}_2+4.\text{ഗ}_3.$$

$$=10+10\times4+5\times6+4=84.$$

ഉദാഹരണം 2.

8 ഹിന്തുക്കളിൽനിന്നും 5 മാപ്പിളമാരിൽനിന്നും 9 ആളുകളെ തിരഞ്ഞെടുക്കാവുന്ന വിധമെത്ര?

ആദ്യത്തെപ്രകാരം ഗണഭേദങ്ങൾ

$$=13.ഗ_9=13.ഗ_4=\frac{13\times12\times11\times10}{1\times2\times3\times4}=\underline{\underline{715}}$$

രണ്ടാമത്തെപ്രകാരം ഗണഭേദങ്ങൾ

$$=8.ഗ_8\times5.ഗ_1+8ഗ_7\times5ഗ_2+8.ഗ_6\times5ഗ_3$$
$$+8ഗ_5.\ 5.ഗ_4+8.ഗ_4.\ 5.ഗ_5.$$
$$=1\times5+8\times10+28\times10+56\times5+70\times1.$$
$$=5+80+280+280+70=\underline{\underline{715}}$$

ഇതിൽ $8.ഗ_9$, $5.ഗ_6$, $5.ഗ_7$, $5.ഗ_8$, $5.ഗ_9$ ഇവയെല്ലാം ശൂന്യമാകയാൽ അവയെ വിട്ടിരിക്കുന്നു.

ഇവിടെ കണ്ട സൂത്രത്തിൻെറ പ്രാധാന്യം ഇനിയത്തെ അദ്ധ്യായത്തിൽനിന്നു കാണാം.

സ സാധനങ്ങളിൽനിന്നു ര സാധനങ്ങളുള്ള ഗണങ്ങളെ ഒരു പ്രത്യേകസാധനം ഉൾപ്പെട്ട ഗണങ്ങളെന്നും അതുൾപ്പെടാത്ത ഗണങ്ങളെന്നുമായി വേർതിരിക്കാം. ഇങ്ങിനെ (ര-1) സാധനങ്ങളോ (ര-2) സാധനങ്ങളോ ഉള്ള ഗണങ്ങളെപ്പററിയും ആലോചിക്കാം. അതിനാൽ

$$സ.\ ഗ_ര=(സ-1).\ ഗ_{ര-1}+(സ-1).\ ഗ_ര$$
$$(സ-1)ഗ_{ര-1}=(സ-2).\ ഗ_{ര-2}+(സ-2)ഗ_{ര-1}$$
$$(സ-2).ഗ_{ര-2}=(സ-3).\ ഗ_{ര-3}+(സ-3).\ ഗ_{ര-2}$$

*   *   *   *

$$(സ-ര+1)\ ഗ_1=(സ-ര).\ ഗ_0+(സ-ര).\ ഗ_1$$
$$(സ-ര).\ ഗ_0=(സ-ര).\ ഗ_{സ-ര}=1.$$

ഇടത്തും വലത്തുമുള്ളവയെ വെവ്വേറെ കൂട്ടി രണ്ടിൽനിന്നും പൊതുവിലുള്ളവയെ തള്ളിയാൽ,

$$സ. ഗ_ര = (സ-1). ഗ_ര + (സ-2). ഗ_{ര-1} +$$
$$(സ-3). ഗ_{ര-2} + \ldots\ldots + (സ-ര). ഗ_1 + 1$$ എന്നു വരും.

ഉദാഹരണം

$$8. ഗ_5 = \frac{\underline{|8}}{\underline{|5}. \underline{|3}} = \frac{6.7.8}{1.2.3} = 56.$$

$$8. ഗ_5 = 7. ഗ_5 + 6. ഗ_4 + 5. ഗ_3 + 4. ഗ_2 + 3. ഗ_1 + 1$$
$$= 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1$$
$$= \underline{\underline{56.}}$$

അഭ്യാസം

1. 10 തരം പഴങ്ങളിൽനിന്നു 4 തരം എത്രവിധം തിരഞ്ഞെടുക്കാം?

2. 15 സ്ത്രീകളിൽനിന്നു നർസ് ട്രെയിനിങ്ങിന്നു 10 സ്ത്രീകളെ എത്ര വിധത്തിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം?

3. 16 ഉദ്യോഗാർത്ഥികളിൽനിന്നു 2 ഗുമസ്ഥന്മാരേയും 4 അററൻഡർമാരേയും എത്ര വിധത്തിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം?

4. 4 തരം പുഷ്പങ്ങളിൽനിന്നു 9 ഒരു തരത്തിൽനിന്നും 7 മറെറാരു തരത്തിൽനിന്നും 5 വേറെ ഒരു തരത്തിൽനിന്നും എടുത്തു്, ആ 21 പുഷ്പങ്ങളെക്കൊണ്ടു് ഒരു മാലയുണ്ടാക്കുവാൻ ഒരു ബാലിക തീർച്ചയാക്കി. എത്രതരത്തിൽ പൂക്കൾ തിരഞ്ഞെടുക്കാം, എത്രതരം മാലകൾ ഉണ്ടാക്കാം?

5. 25-ം 20-ം കുട്ടികളുള്ള രണ്ടു ക്ലാസ്സുകളിൽ ഓരോന്നിൽനിന്നും 4 കുട്ടികളെ ഒരു മത്സരക്കളിക്കു് എത്ര വിധത്തിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കാം?

6. ഏഴുതരം ചായങ്ങളിൽനിന്നു കലൎത്തിയും കലൎത്താതേയും എത്ര തരം ചായങ്ങൾ കിട്ടും?

7. ഒരു രത്നവ്യാപാരി 4 വൈരക്കല്ലുകളും 5 പച്ചക്കല്ലുകളും 6 പവിഴങ്ങളും വില്ക്കുവാൻ ഒരു ധനികനെ സമീപിച്ചു. രത്നങ്ങളെല്ലാം വിഭിന്നങ്ങളായിരുന്നു. ഓരോ തരത്തിൽനിന്നു് ഒന്നെങ്കിലും ചേൎത്തു് ആകെ 5 രത്നങ്ങൾ വാങ്ങണമെന്നു വിചാരിച്ച ധനികന്നു് എത്ര വിധത്തിൽ അതു ചെയ്യാം?

അദ്ധ്യായം 4

ദ്വിപദഘാതവിസ്തരണം

രണ്ടു വ്യക്തമോ അവ്യക്തമോ ആയ രാശികളുടെ യോഗത്തെ ദ്വിപദമെന്നു പറയുന്നു. അതിന്റെ വർഗ്ഗത്തേയും ഘനത്തേയും വർഗ്ഗവർഗ്ഗാദികളേയും രാശികളുടെ വർഗ്ഗഘനാദികളും മററു ഘാതങ്ങളും ചേൎന്ന ശ്രേണിയായിക്കാണുവാനുള്ള മാർഗ്ഗമാകുന്നു ഇവിടെ വിവരിക്കുന്നതു്.

അവ്യക്തഗുണനംകൊണ്ടു്

$$(\text{യ}+\text{ര})^2 = \text{യ}^2 + 2\ \text{യ}.\ \text{ര} + \text{ര}^2.$$

$$(\text{യ}+\text{ര})^3 = \text{യ}^3 + 3\ \text{യ}^2\text{ര} + 3\ \text{യ}\ \text{ര}^2 + \text{വ}^3.$$

മുതലായ ഫലങ്ങൾ കിട്ടും. ഇവയിൽ ഒന്നാമത്തേതിൽനിന്നു രണ്ടാമത്തേതു്, രണ്ടാമത്തേതിൽനിന്നു $(\text{യ}+\text{ര})^4$ന്റെ വിസ്തരണം, അതിൽനിന്നു $(\text{യ}+\text{ര})^5$ എന്നതിന്റേതു് ഇങ്ങിനെ മേല്ക്കുമേൽ വരുത്താം. എല്ലാ വിസ്തരണത്തിലും ആദ്യന്തപദങ്ങളുടെ ഗുണകാരം 1തന്നെ. $(\text{യ}+\text{ര})$ എന്നതിൽ പദങ്ങളുടെ ഗുണകാരങ്ങൾ 1, 1 എന്നു്. $(\text{യ}+\text{ര})^2$ത്തിന്റെ വിസ്തരണത്തിലെ ഗുണകാരങ്ങൾ 1, 2, 1. $(\text{യ}+\text{ര})^3$ത്തിന്റെ വിസ്തരണത്തിൽ ഗുണകാരങ്ങൾ 1, 3, 3, 1. ഒരു വിസ്തരണത്തിന്റെ ഗുണകാരങ്ങൾ എഴുതിയാൽ, അടുത്തു് ഉയൎന്ന വിസ്തരണത്തിലെ ഗുണകാരങ്ങൾ കിട്ടുവാൻ താഴെ പറയുംപ്രകാരം ചെയ്താൽ മതി. ആദ്യത്തെ ഗുണകാരം 1തന്നെ. രണ്ടാമത്തെ ഗുണകാരം കിട്ടുവാൻ താഴ്ന്ന വിസ്തരണത്തിലെ ആദ്യത്തേയും രണ്ടാമത്തേയും ഗുണകാരങ്ങൾ കൂട്ടുക. മൂന്നാമത്തേതിന്നു താഴ്ന്നതിലെ രണ്ടാമത്തേയും മൂന്നാമത്തേയും കൂട്ടുക. ഇങ്ങിനെ ഒടുങ്ങുവോളം. അവസാനം 1-ം ആയിരിക്കും:

(യ + ര)	എന്നതിലെ	ഗുണകാരങ്ങൾ	1	1					
(യ + ര)^{2}	,,	,,	1	2	1				
(യ + ര)^{3}	,,	,,	1	3	3	1			
(യ + ര)^{4}	,,	,,	1	4	6	4	1		
(യ + ര)^{5}	,,	,,	1	5	10	10	5	1	

ഇങ്ങിനെ മീതെ മീതെയുള്ളവയുടെ ഗുണകാരങ്ങൾ കാണാം.

(യ + ര)^{4} = യ^{4} + 4 യ^{3}ര + 6 യ^{2}ര^{2} + 4 യര^{3} + ര^{4}.

(യ + ര)^{5} = യ^{5} + 5 യ^{4}ര + 10യ^{3}ര^{2} + 10യ^{2}ര^{3}
+ 5യ. ര^{4} + ര^{5}.

ഇങ്ങിനെ (യ + ര)^{6} തുടങ്ങിയവയുടെ വിസ്തരണങ്ങളും എഴുതാം. എന്നാൽ ഒരു ഘാതം കണ്ട ഉടനെ പരാപേക്ഷകൂടാതെ അതിനെ വിസ്തരിച്ചെഴുതുന്നതു് ഉപരിഗണിതത്തിൽ അത്യധികം ഉപയോഗപ്രദമാകുന്നു. ഇതിന്നുള്ള മാൎഗ്ഗം ആലോചിക്കാം.

(യ + ക) (യ + ഗ) (യ + ദ) (യ + ത) (യ + ന)

ഇപ്രകാരമൊന്നിന്റെ വിസ്തരണത്തിന്റെ സ്വഭാവമെന്തെന്നു നോക്കാം. ഒരു വ്യഞ്ജകത്തെ മറെറാരു വ്യഞ്ജകം കൊണ്ടു പെരുക്കുമ്പോൾ ഒന്നിനെ ഗുണ്യമെന്നും മറേറതിനെ ഗുണകാരമെന്നും കല്പിച്ചു്, ഗുണകാരത്തിലെ ഓരോ പദംകൊണ്ടും ഗുണ്യത്തിലെ ഓരോ പദത്തേയും ഗുണിച്ചു ഫലങ്ങളെ ഒന്നിച്ചു ചേൎക്കുന്നു. ഇതിനെ ലീലാവതിയിലും മററും ഖണ്ഡഗുണനന്യായമെന്നു പറയും. അതുപ്രകാരം,

(യ + ക) (യ + ഗ) = യ^{2} + യക + യഗ + കഗ.

ഇതുപോലെ മൂന്നോ അധികമോ വ്യഞ്ജകങ്ങളെ ഒരുമിച്ചു പെരുക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ഘാതത്തിലെ പദങ്ങൾ ഓരോന്നും ഓരോ വ്യഞ്ജകത്തിൽനിന്നും ഓരോ പദം വീതമുള്ള പദങ്ങൾ ഒരുമിച്ചു പെരുക്കിയവയായിരിക്കും. മേലെഴുതിയ 5 വ്യഞ്ജകങ്ങ

ളുടെ ഘാതത്തിൽ പദങ്ങളുടെ സ്വരൂപം യ^5, യ^{4}ഗ, യ^{3}കഗ, യ^{2}കഗദ, യ ക ഗ ദ ത, ക ഗ ദ ത ന എന്ന വിധത്തിലായിരിക്കും. എല്ലാററിൻേറയും വൃദ്ധി അഞ്ചുതന്നെ. പെരുക്കുമ്പോൾ ഓരോ ഘടകത്തിൽനിന്നും പദത്തെ ഈരണ്ടുവിധം സ്വീകരിക്കാം. അതിനാൽ ആകെ കിട്ടുന്ന പെരുക്കങ്ങളുടെ എണ്ണം $2\times2\times2\times2\times2=32$ ആയിരിക്കും. ഇതു് ഒന്നുകൂടി വ്യവസ്ഥയോടെ ആലോചിക്കാം.

എല്ലാ ഘടകങ്ങളിൽനിന്നും യ തന്നെ എടുത്തു് ഒന്നിച്ചു പെരുക്കിയാൽ, യ^5 എന്ന ഒരു പദം മാത്രമുണ്ടാകും.

4 ഘടകങ്ങളിൽനിന്നു യ എന്നും ബാക്കിയുള്ളതിൽനിന്നു യ ഒഴിച്ചുള്ളതും എടുത്തു പെരുക്കിയാൽ യ^4 കലന്ന 5 പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകും. ഇതു ക, ഗ, ദ, ത, ന എന്ന അഞ്ചു വ്യത്യസ്തസാധനങ്ങളിൽനിന്നു് ഒരു സാധനം മാത്രം അടങ്ങിയ ഗണങ്ങളുടെ സംഖ്യയാകുന്നു. അതായതു $5.ഗ_1=5$.

3 ഘടകങ്ങളിൽനിന്നു യ എന്നും ബാക്കിയുള്ളവയിൽനിന്നു യ ഒഴിച്ചുള്ളവയും എടുത്തു പെരുക്കിയാൽ യ^3 കലന്ന $5.ഗ_2=10$ പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകും.

2 ഘടകങ്ങളിൽനിന്നു യ എന്നും ബാക്കിയുള്ളവയിൽനിന്നു യ ഒഴിച്ചുള്ളവയും എടുത്തു പെരുക്കിയാൽ യ^2 കലന്ന $5.ഗ_3=10$ പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകും.

1 ഘടകത്തിൽനിന്നു യ എന്നും ബാക്കിയുള്ളവയിൽനിന്നു യ ഒഴിച്ചുള്ളവയും എടുത്തു പെരുക്കിയാൽ യ കലന്ന $5.ഗ_4=5$ പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകും.

ഒന്നിൽനിന്നും യ എടുക്കാതെ യ ഒഴിച്ചുള്ളവ മാത്രം എടുത്തു പെരുക്കിയാൽ, യ കലരാത്ത $5.ഗ_5=1$ പദം മാത്രം ഉണ്ടാകുന്നു.

ഇങ്ങിനെയാണ് ആകെ 32 പദങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നത്.

ഈ മുപ്പത്തിരണ്ടു പദങ്ങളേയും വ്യവസ്ഥയിൽ എഴുതി, അവയിൽ ക, ഗ, ദ, ത, ന ഇവ ഒരോന്നിന്നും ര പ്രതിന്യസിച്ചാൽ ഇപ്പോൾ പറഞ്ഞ 32 പദങ്ങൾ എല്ലാം $യ^5$, $5യ^4ര$, $10യ^3ര^2$, $10യ^2ര^3$, $5യ^4.ര$, $ര^5$ എന്നവയാകുന്നു. അതിനാൽ,

$$(യ+ര)^5 = യ^5 + 5യ^4ര + 10യ^3ര^2 + 10യ^2.ര^3 + 5യ.ര^4 + ര^5$$

അഥവാ,

$$(യ+ര)^5 = യ^5 + 5.ഗ_1 യ^4ര + 5.ഗ_2 യ^3ര^2 + 5.ഗ_3 യ^2.ര^3 + 5യ_4.ര^4 + ര^5$$

ഘാതത്തിലെ ഘടകസംഖ്യ എന്തുതന്നെയായാലും ഇപ്രകാരംതന്നെ ആലോചിക്കാം. അതിനാൽ, സ ഒരഭിന്നധനസംഖ്യയെങ്കിൽ,

$$(യ+ര)^സ = യ^സ + സ.ഗ_1.യ.^{സ-1}ര + സഗ_2.യ.^{സ-2}ര^2 + \ldots\ldots + സ.ഗ_സ ര.^സ$$

$$= യ^സ + \frac{സ}{1}.യ.^{സ-1}.ര + \frac{സ(സ-1)}{1.2}യ.^{സ-2}ര^2$$

$$+ \frac{സ(സ-1)\,(സ-2)}{1.2.3.}യ^{സ-3}ര^3$$

$$+ \ldots\ldots \frac{സ(സ-1)(സ-2)\ldots\ldots(സ-ന+1)}{1.2.3.\ldots\ldots(സ-ന)}$$

$$+ യ^{സ-ന}ര^ന + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + ര^സ$$

ഇതിൽ ര$=1$ എന്നുവെച്ചാൽ,

$$(\text{യ}+1)^{\text{സ}}=\text{യ}^{\text{സ}}+\frac{\text{സ}}{1}\text{യ}^{\text{സ}-1}+\frac{\text{സ}(\text{സ}-1)}{1.2}\text{യ}^{\text{സ}-2}$$

$$+\frac{\text{സ}(\text{സ}-1)(\text{സ}-2)}{1.2.3}\text{യ}^{\text{സ}-3}$$

$$+\frac{\text{സ}(\text{സ}-1)(\text{സ}-2)(\text{സ}-3)}{1.2.3.4}\text{യ}^{\text{സ}-4}+\ldots+1.$$

ര$=$യ എന്നും യ$=1$ എന്നും വെച്ചാൽ,

$$(1+\text{യ})^{\text{സ}}=1+\frac{\text{സ}}{1}\text{യ}+\frac{\text{സ}(\text{സ}-1)}{1.2}\text{യ}^2$$

$$+\frac{\text{സ}(\text{സ}-1)(\text{സ}-2)}{1.2.3}\text{യ}^3$$

$$+\frac{\text{സ}(\text{സ}-1)(\text{സ}-2)(\text{സ}-3)}{1.2.3.4}\text{യ}^4+\ldots\ldots$$

$$+\text{സ}.\text{യ}^{\text{സ}-1}+\text{യ}^{\text{സ}}$$

ഉദാഹരണങ്ങൾ.

1. $(1.02)^8$ എന്നതിന്റെ വില 4 ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക കൃത്യമായിക്കാണുക.

$$(1.02)^8=(1+.02)^8=1+\frac{8}{1}(.02)+\frac{8.7}{1.2}(.02)^2$$

$$+\frac{8.7.6}{1.2.3}(.02)^3+\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}(.02)^4+\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}(.02)^5+\ldots$$

$$=1+8(.02)+28(.02)^2+56(.02)^3$$

$$+70(.02)^4+56(.02)^5+\ldots\ldots$$

$$=1+.16+.0112+.000448+.00001120$$

$$=1.17165920=\underline{\underline{1.1717}}$$

2. $(1—യ)^{8}$നെ വിസ്തരിക്കുക.

$$(1—യ)^{8}=1+\frac{8}{1}(—യ)+\frac{8.7}{1.2}(—യ)^{2}+\frac{8.7.6}{1.2.3}(—യ)^{3}$$

$$+\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}(—യ)^{4}+\frac{8.7.6}{1.2.3}(—യ)^{5}$$

$$+\frac{8.7}{1.2}(—യ)^{6}+\frac{8}{1}(—യ)^{7}+(—യ)^{8}.$$

$$=1—8യ+28യ^{2}—56യ^{3}+70യ^{4}$$

$$—56യ^{5}+28യ^{6}—8യ^{7}+യ^{8}.$$

അഭ്യാസം

1. താഴെ കാണുന്നവയെ വിസ്തരിക്കുക.

(1) $(1+യ)^{4}$ (2) $(1—യ)^{4}$ (3) $(1+യ)^{5}$

(4) $(1—യ)^{5}$ (5) $(1+യ)^{6}$ (6) $(1—യ)^{6}$

(7) $(1+2യ)^{4}$ (8) $(1—3യ)^{5}$ (9) $(2യ+3ര)^{4}$.

2. $(2+യ)^{12}$നെ വിസ്തരിച്ചെഴുതിയാൽ $യ^{4}$ എന്നതിന്റെ ഗുണകാരമെന്തു്?

3. $(1+യ)^{10}(3യ^{2}+2യ+5)$ എന്നതിനെ വിസ്തരിച്ചാൽ $യ^{3}$ന്റേയും $യ^{4}$ന്റേയും ഗുണകാരങ്ങളെന്തു്?

4. $(1+യ)^{6}(1—യ)^{7}$ ഇതിനെ വിസ്തരിച്ചാൽ $യ^{5}$ന്റെ ഗുണകാരമെത്ര?

5. $(1—യ^{2})^{5}$; $(1+യ^{3})^{4}$; $(യ^{2}+ര^{2})^{4}$ ഇവയെ വിസ്തരിക്കുക.

6. $1+\frac{6}{1}.\ 3+\frac{6.5}{1.2}.\ 9+\frac{6.5.4}{1.2.3}.\ \ 27+\frac{6.5}{1.2}.\ \ 81$

$+\frac{6}{1}.\ 243+729$ എത്ര?

7. $1+\frac{സ}{1}.\ \frac{1}{2}+\frac{സ(സ-1)}{1.2}.\left(\frac{1}{2}\right)^2+\ldots\ldots$

$+\left(\frac{1}{2}\right)^{സ}=\left(\frac{3}{2}\right)^{സ}$ എന്നു കാണിക്കുക.

8. $(1+യ+യ^2)^4$ എന്നതിനെ പൂർത്തിയായി വിസ്തരിക്കുക. $[1+യ+യ^2]^4$ എന്നതിനെ $[1+യ(1+യ)]^4$ എന്നു മാററിയെഴുതി ക്രിയചെയ്യുക.

ദ്വിപദങ്ങൾക്കു ഋണമോ ഭിന്നമോ ആയ ഗമകങ്ങൾ വന്നാലും അവയെ ധനാഭിന്നഗമകം വന്നതുപോലെതന്നെ വിസ്തരിക്കാം. പദങ്ങൾക്കു് അവസാനമുണ്ടാകയില്ലെന്നേയുള്ളു.

$$(യ+വ).ഗ_{ര}=യ.ഗ_{ര}+യ.ഗ_{ര-1}\times വഗ_1+യ.ഗ_{ര-2}$$
$$\times വഗ_2+\ldots\ldots+യ.ഗ_2\times വ.ഗ_{ര-2}$$
$$+യഗ_1.\ വ.ഗ_{ര-1}+വ.ഗ_{ര}$$

എന്നു ഗണഭേദസംഖ്യാനയനത്തിൽ കണ്ടു. ഇവിടെ യ, വ, ര എന്നവ അഭിന്നധനസംഖ്യകളാകുന്നു. ഏതു ധനാഭിന്നസംഖ്യകളുമാവാം. ര എന്നതു (യ+വ) എന്നതിനേക്കാൾ വലുതാകുവാൻ പാടില്ലെന്നേയുള്ളു. സമീകാരത്തിലെ വലത്തെ പക്ഷത്തെ വിസ്തരിച്ചെഴുതി ഉപസംഹരിച്ചാൽ ഇടത്തെപക്ഷം കിട്ടാതെ നിവൃത്തിയില്ല. വിസ്തരിച്ചെഴുതിയ നിലയിൽ യ, വ എന്ന സംഖ്യകൾ ധനമായാലും ഋണമായാലും ഭിന്നമായാലും അഭിന്നമായാലും ഉപസംഹാരക്രിയ ഒരുപോലെയിരിക്കും. അതിനാൽ യ, വ എന്നവയുടെ ഏതുതരം വിലയ്ക്കും ഇ

ടത്തും വലത്തുമുള്ള പക്ഷങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും. ഈ തത്വത്തെ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞന്മാർ 'തുല്യക്രപദ്ധത' എന്നു പറഞ്ഞുവരുന്നു. ഒരു കാര്യം ഓർക്കുവാനുണ്ടു്. യ, വ എന്നവയുടെ പൂർണ്ണമോ ഭിന്നമോ ആയ വിലകൾക്കു് യ.ഗ$_{ര}$ എന്നതോ വ.ഗ$_{ര}$ എന്നതോ ഒരു ഗുണഭേദസംഖ്യയേയും സൂചിപ്പിക്കുന്നില്ല. അതിനാൽ സ എന്നതിന്നു് ഏതുതരം വിലയായാലും

$$\frac{സ(സ-1)(സ-2)\ldots\ldots(സ-ര+1)}{1.2.3.4\ldots\ldots ര.}$$

എന്നതിനെ ഗ $\binom{സ}{ര}$ എന്ന ചിഹ്നംകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുക. അങ്ങിനെവെച്ചാൽ യ, വ എന്നവക്കു് ഏതുതരം വിലയായാലും,

$$ഗ\binom{യ+വ}{ര}=ഗ\binom{യ}{ര}+ഗ\binom{യ}{ര-1}.ഗ\binom{വ}{1}$$
$$+ഗ\binom{യ}{ര-2}.ഗ\binom{വ}{2}+\ldots\ldots+ഗ\binom{വ}{ര}.$$

ഇതിന്നു വാണ്ടർമോൻന്യായമെന്നു പറയുന്നു.

താഴെ കാണുന്നവ രണ്ടു ശ്രേണികളാകുന്നു.

$$1+ഗ\binom{ക}{1}യ+ഗ\binom{ക}{2}യ^2+ഗ\binom{ക}{3}യ^3+\ldots\ldots$$

$$1+ഗ\binom{ദ}{1}യ+ഗ\binom{ദ}{2}യ^2+ഗ\binom{ദ}{3}യ^3+\ldots\ldots$$

ഇവയെപ്പെരുക്കിയാൽ,

$$1+\left\{ഗ\binom{ക}{1}+ഗ\binom{ദ}{1}\right\}യ+\left\{ഗ\binom{ക}{2}+ഗ\binom{ക}{1}.\right.$$
$$\left.ഗ\binom{ദ}{1}+ഗ\binom{ദ}{2}\right\}യ^2+\left\{ഗ\binom{ക}{3}+ഗ\binom{ക}{2}.\right.$$
$$\left.ഗ\binom{ദ}{1}+ഗ\binom{ക}{1}.ഗ\binom{ദ}{2}+ഗ\binom{ദ}{3}\right\}യ^3+\ldots\ldots$$

എന്ന ശ്രേണിയുണ്ടാകും. ഇതു വാണ്ടർമോൻന്യായപ്രകാരം

$$=1+ഗ\binom{ക+ദ}{1}യ+ഗ\binom{ക+ദ}{2}യ^2$$

$$+ഗ\binom{ക+ദ}{3}യ^3+\dots\dots$$

ഇനി ഇതിനെ

$$1+ഗ\binom{ന}{1}യ+ഗ\binom{ന}{2}യ^2+ഗ\binom{ന}{3}യ^3+\dots\dots$$

എന്നതുകൊണ്ടു പെരുക്കിയാൽ കിട്ടുന്ന ഫലം

$$=1+ഗ\binom{ക+ദ+ന}{1}യ+ഗ\binom{ക+ദ+ന}{2}യ^2$$

$$+ഗ\binom{ക+ദ+ന}{3}യ^3,\dots\dots$$

ഇങ്ങിനെ മേല്ക്കുമേൽ ഫലങ്ങൾ ഉളവാകും. ക, ദ, ന മുതലായവ ഓരോന്നും $\frac{സ}{ല}$ എന്നതിന്നു തുല്യമെന്നും സ, ല അഭിന്നധനസംഖ്യകളെന്നും കല്പിച്ചാൽ,

$$\left\{1+ഗ\binom{\frac{സ}{ല}}{1}യ+ഗ\binom{\frac{സ}{ല}}{2}യ^2+ഗ\binom{\frac{സ}{ല}}{3}യ^3+\dots\dots\right\}^{ല}$$

$$=1+ഗ\binom{സ}{1}യ+ഗ\binom{സ}{2}യ^2+ഗ\binom{സ}{3}യ^3+\dots\dots$$

എന്നു വരുന്നു. സ അഭിന്നധനസംഖ്യയായതിനാൽ, ഇതു് $(1+യ)^{സ}$ എന്നതിന്നു തുല്യമാകുന്നു. അതിനാൽ

$$(1+\text{യ})^{\text{സ}} = \left\{ 1+\text{ഗ}\left(\frac{\frac{\text{സ}}{\text{ല}}}{1}\right)\text{യ}+\text{ഗ}\left(\frac{\frac{\text{സ}}{\text{ല}}}{2}\right)\text{യ}^2\right.$$

$$\left.+\text{ഗ}\left(\frac{\frac{\text{സ}}{\text{ല}}}{3}\right)\text{യ}^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\right\}^{\text{ല}}$$

രണ്ടുപക്ഷങ്ങളുടേയും ല-ാമത്തുമൂലം തുല്യമാകയാൽ,

$$(1+\text{യ})^{\frac{\text{സ}}{\text{ല}}} = 1+\text{ഗ}\left(\frac{\frac{\text{സ}}{\text{ല}}}{1}\right)\text{യ}+\text{ഗ}\left(\frac{\frac{\text{സ}}{\text{ല}}}{2}\right)\text{യ}^2$$

$$+\text{ഗ}\left(\frac{\frac{\text{സ}}{\text{ല}}}{3}\right)\text{യ}^3+\ldots\ldots$$

$$=1+\frac{\frac{\text{സ}}{\text{ല}}}{1}\text{യ}+\frac{\frac{\text{സ}}{\text{ല}}\left(\frac{\text{സ}}{\text{ല}}-1\right)}{1.2}.\text{യ}^2$$

$$+\frac{\frac{\text{സ}}{\text{ല}}\left(\frac{\text{സ}}{\text{ല}}-1\right)\left(\frac{\text{സ}}{\text{ല}}-2\right)}{1.2.3}\text{യ}^3+\ldots\ldots$$

$\frac{\text{സ}}{\text{ല}}$ ഒരു ധനഭിന്നമാണെന്നല്ലോ സങ്കല്പം. അതിനാൽ ഗമകം ധനഭിന്നമായിരുന്നാലും ദ്വിപദവിസ്തരണം സാധുവെന്നുവരുന്നു.

ഇനി സ ഭിന്നമോ അഭിന്നമോ ആയ ഋണസംഖ്യയെന്നും, ദ അതിനെക്കാൾ അങ്കവിലയുള്ള ഒരു ധനസംഖ്യയെന്നും വെ

ണ്ടുക. എന്നാൽ $(സ+ദ)$ എന്നതു ഭിന്നമോ അഭിന്നമോ ആയ ധനസംഖ്യയെന്നു വരും. വാണ്ടർമോൻന്യായപ്രകാരം,

$$1+ഗ\binom{സ+ദ}{1}യ+ഗ\binom{സ+ദ}{2}യ^2+ഗ\binom{സ+ദ}{3}യ^3+\ldots$$

$$=\left\{1+ഗ\binom{സ}{1}യ+ഗ\binom{സ}{2}യ^2+ഗ\binom{സ}{3}യ^3+\ldots\ldots\right\}$$

$$\times\left\{1+ഗ\binom{ദ}{1}യ+ഗ\binom{ദ}{2}യ^2+ഗ\binom{ദ}{3}യ^3+\ldots\ldots\ldots\right\}$$

ദ, $(സ+ദ)$ എന്നവ രണ്ടും ധനമാകയാൽ,

$$(1+യ)^{സ+ദ}=\left\{1+ഗ\binom{സ}{1}യ+ഗ\binom{സ}{2}യ^2+ഗ\binom{സ}{3}യ^3+\ldots\right\}(1+യ)^{ദ}$$

രണ്ടു പക്ഷങ്ങളേയും $(1+യ)^{ദ}$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ,

$$(1+യ)^{സ}=1+ഗ\binom{സ}{1}യ+ഗ\binom{സ}{2}യ^2+ഗ\binom{സ}{3}യ^3+\ldots\ldots$$

സ ഋണഭിന്നമോ ഋണാഭിന്നമോ എന്നാണല്ലോ സങ്കല്പം. അതിനാൽ ദ്വിപദഗമകങ്ങളുടെ ഋണഭിന്നാഭിന്നവിലകൾക്കും ദ്വിപദവിസ്തരണം സാധുവാകുന്നു.

ഉദാഹരണങ്ങൾ:

1. $(1+യ)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{2}}{1}യ+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1.2}യ^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1.2.3}യ^3+\ldots$

$$=1+\tfrac{1}{2}യ-\frac{1}{2.4}യ^2+\frac{1.3}{2.4.6}യ^3-\ldots\ldots$$

2. $(1+\text{യ})^{\frac{2}{3}}=1+\frac{\frac{2}{3}}{1}\text{യ}+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{1.2}\text{യ}^2+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{1.2.3}\text{യ}^3-\ldots$

$$=1+\tfrac{2}{3}\text{യ}-\frac{2.1}{3.6}\text{യ}^2+\frac{2.1.4}{3.6.9}\text{യ}^3-\frac{2.1.4.7}{3.6.9.12}\text{യ}^4+\ldots$$

3. $(1+\text{യ})^{-1}=1+\frac{-1}{1}\text{യ}+\frac{-1\,(-1-1)}{1.2}\text{യ}^2$

$$+\frac{-1\,(-1-1)\,(-1-2)}{1.2.3}\text{യ}^3+\ldots.$$

$$=1-\text{യ}+\text{യ}^2-\text{യ}^3+\text{യ}^4-\text{യ}^5+\ldots\ldots$$

4. $(1-\text{യ})^{-1}=1+\text{യ}+\text{യ}^2+\text{യ}^3+\text{യ}^4+\text{യ}^5+\ldots\ldots$

5. $(1+\text{യ})^{-2}=1+\frac{-2}{1}\text{യ}+\frac{-2\,(-3)}{1\cdot2}\text{യ}^2$

$$+\frac{-2\,(-3)\,(-4)}{1.2.3}\text{യ}^3+\ldots.$$

$$=1-2\text{യ}+3\text{യ}^2-4\text{യ}^3+\ldots\ldots$$

6. $(1-\text{യ})^{-2}=1+2\text{യ}+3\text{യ}^2+4\text{യ}^3+\ldots\ldots$

7. $(1+\text{യ})^{-3}=1+\frac{-3}{1}.\,\text{യ}+\frac{(-3)\,(-4)}{1\cdot2}\text{യ}^2$

$$+\frac{(-3)\,(-4)\,(-5)}{1\cdot2\cdot3}\text{യ}^2+\ldots.$$

$$=1-3\text{യ}+\frac{3\cdot4}{1\cdot2}\text{യ}^2-\frac{4\cdot5}{1\cdot2}\text{യ}^3+\ldots\ldots$$

ഈ വിസ്തരണങ്ങളായി സാമാന്യമൊന്നു പരിചയപ്പെടുന്നതു സഹായമായിരിക്കും.

$(\text{യ}+\text{ര})^{\text{സ}}$ എന്നതിലെ ഗമകമായ സ ധനവും അഭിന്നവുമാണെങ്കിൽ, വിസ്തരണത്തിൽ വരുന്ന അവ്യക്തരാശ്യുഘാതങ്ങളുടെ ഗുണകാരങ്ങളിൽ വരുന്ന സ, സ—1, സ—2 മുതലായവ

യിൽ ഒന്നു ശ്രൂന്യമായിത്തീരും. അതോടെ വിസ്തരണത്തിലെ പദങ്ങൾ അവസാനിക്കും. ഇങ്ങിനെ ക്ലപ്തമായ പദസംഖ്യയുള്ള ശ്രേണിയെ നിയതശ്രേണിയെന്നു പറയുന്നു. സ ഭിന്നമോ ഋണമോ ആയാൽ സ—1, സ—2 മുതലായവയിൽ ഒന്നും ശ്രൂന്യമാകയില്ല. അതിനാൽ പദങ്ങൾ അവസാനമില്ലാതെ പോകും. ഇപ്രകാരമുള്ള ശ്രേണിയെ അനിയതശ്രേണിയെന്നു പറയുന്നു.

ശ്രേണി അനിയതമായിവന്നാലും അതിലെ അനന്തപദങ്ങളിൽനിന്നുണ്ടാകുന്ന ഫലം പരിമിതമാകാം. ഫലം നിശ്ചിതമായ ഒരവധിയോടു ക്രമേണ അടുത്തുവരും. ആ വിധം അനിയതശ്രേണികളെ ഉപഗമങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots$ എന്ന അനിയതശ്രേണിയുടെ ഫലം ക്രമേണ 2നോടു് അടുത്തുവരുന്നു. ഫലം 2നെ ഒരിക്കലും കവിയുകയില്ല. ഈ വിധം ഉപഗമമായ അനിയതശ്രേണികൾ മാത്രമേ ഗണിതത്തിൽ ഉപയോഗമായിത്തീരുന്നുള്ളു. ഫലം ഒരവധിയുംകൂടാതെ വർദ്ധിച്ചുവരുന്ന ശ്രേണികളെ അപഗമങ്ങളെന്നു പറയുന്നു. $(1-\text{യ})^{-1}$ എന്നതിൻെറ വിസ്തരണത്തിൽ വരുന്ന $1+\text{യ}+\text{യ}^2+\text{യ}^3+\ldots\ldots$ എന്ന ശ്രേണി യ എന്നതിൻെറ വില 1ൽ കുറവാണെങ്കിൽ അതു് ഉപഗമവും ഒന്നിന്നു തുല്യമോ ഒന്നിനെക്കാൾ അധികമോ ആണെങ്കിൽ അപഗമവുമാകുന്നു. അപഗമമാകുമ്പോൾ ശ്രേണി ദ്വിപദഘാതത്തിന്നു സമാനമെന്നു കരുതിക്കൂടാ.

കണ്ടാൽ ഉപഗമമെന്നു തോന്നുന്ന ശ്രേണി

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$$

യഥാൎത്ഥത്തിൽ അപഗമമാകുന്നു. ആദ്യത്തെ പദം $\frac{1}{2}$, പിന്നത്തെ 2 എണ്ണം കൂടിയാൽ $(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})=\frac{1}{2}$യെക്കാൾ വലുതും, പിന്നത്തെ 4 എണ്ണം കൂട്ടിയാൽ $(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})=\frac{1}{2}$യെക്കാൾ വലിയതും ആകുന്നു. പിന്നത്തെ 8 എണ്ണം പിന്നത്തെ 16 എണ്ണം മുതലായ

വയെല്ലാം $\frac{1}{2}$യെക്കാൾ വലുതത്രെ. ഇങ്ങിനെ $\frac{1}{2}$യെക്കാൾ വലു തായ കൂട്ടങ്ങളുടെ എണ്ണവും അനന്തമാകയാൽ ശ്രേണീഫലവും അനന്തമായിത്തീരും. എന്നാൽ $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\ldots\ldots$ എന്നതു ഉപഗമമാകുന്നു. ശ്രേണിയെ താഴെ കാണുംപ്രകാരം 2 വിധത്തിൽ എഴുതാം. (1) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{7})+\ldots\ldots$ എന്നിങ്ങിനെ. ഇതിൽനിന്നു ശ്രേണീഫലം ധനമെന്നു വരുന്നു. (2) $\frac{1}{2}-(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})-(\frac{1}{5}-\frac{1}{6})-\ldots\ldots$ എന്നിങ്ങിനെ. ഇതിൽനിന്നു ശ്രേണീഫലം $\frac{1}{2}$യെക്കാൾ കവിയുകയില്ലെന്നും വരുന്നു. ശ്രേണികൾ ഉപഗമങ്ങളോ, അപഗമങ്ങളോ എന്നറിവാനുള്ള മാൎഗ്ഗങ്ങൾ ബീജഗണിതപുസ്തകങ്ങളിൽ സവിസ്തരം പ്രതിപാദിച്ചിരിക്കും.

അഭ്യാസം

1. $(1-യ)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}യ+\frac{1.3}{2.4}യ^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}യ^3$

$+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}യ^4+\ldots\ldots$എന്നു കാണിക്കുക.

2. താഴെ കാണുന്നവയെ 5 പദങ്ങളോളം വിസ്തരിക്കുക.

$(1+യ)^{\frac{1}{3}}$, $(1-യ)^{\frac{1}{3}}$, $(1+യ)^{-\frac{1}{3}}$, $(1-യ)^{-\frac{1}{3}}$.

3. $(1.3)^{\frac{2}{5}}$ എന്നതിന്റെ വില 3 ദശാംശസ്ഥാനത്തിന്നു കൃത്യമായി കാണുക.

4. 18ന്റെ ഘനമൂലം 2 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യമായി കാണുക. [$\frac{18}{27}=\frac{2}{3}=1-\frac{1}{3}$. ഇതിന്റെ ഘനമൂലം $(1-\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$. ഇതു മൂന്നോ നാലോ ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കണ്ടു്, അതിനെ 27ന്റെ ഘനമൂലമായ 3കൊണ്ടു പെരുക്കുക.]

5. $(1+2യ)^{-\frac{2}{5}}$ എന്നതിൻറ വിസ്താരത്തിൽ $യ^4$ ൻറ ഗുണകാരമെത്ര?

6. $\dfrac{(1-യ)^{\frac{2}{3}}}{(1+യ)^3}$ എന്നതിനെ 4 പദങ്ങൾവരെ ഒരു ശ്രേണിയായി മാററുക.

7. $(1-യ+യ^2)^4$ എന്നതിനെ പൂർണ്ണമായി വിസ്തരിക്കുക.

8. $\dfrac{1+യ+യ^2}{(1+യ)^2}$ എന്നതിൻറ വിസ്തരണത്തിൽ $യ^9$ ൻേറയും $യ^സ$ ൻേറയും ഗുണകാരങ്ങൾ കാണുക.

9. $$1+\frac{2സ}{3}+\frac{2സ(2സ+2)}{3.6}+\frac{2സ(2സ+2)(2സ+4)}{3.6.9}+\dots\dots$$

$$=2^{സ}\left\{1+\frac{സ}{3}+\frac{സ(സ+1)}{3.6}+\frac{സ(സ+1)(സ+2)}{3.6.9}+\dots\dots\right\}$$

എന്നു കാണിക്കുക.

10. $$1+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}.\ \frac{5}{8}+\frac{3}{4}.\ \frac{5}{8}.\ \frac{7}{12}+\dots\dots=\sqrt{8}$$

എന്നു കാണിക്കുക.

11. $$1-\frac{1}{2}.\ \frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}.\ \frac{1}{2^2}-\frac{1.3.5}{2.4.6}.\ \frac{1}{2^3}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}.\ \frac{1}{2^4}-\dots\dots=\sqrt{\frac{2}{3}}$$

[9, 10, 11 ഈ ചോദ്യങ്ങളിലെ ശ്രേണികളെ ദ്വിപദ വിസ്തരണത്തിലെ ശ്രേണീരൂപങ്ങളിലേക്കു മാററുക.]

12. $(1-2\text{യ}+3\text{യ}^2-4\text{യ}^3+\ldots\ldots)^{-\text{സ}}$ എന്നതിൻെറ വിസ്തരണത്തിൽ $\text{യ}^{\text{സ}}$ എന്നതിൻെറ ഗുണകാരം കാണുക.

അദ്ധ്യായം 5

ഗമകശ്രേണി

ദ്വിപദഘാതവിസ്തരണന്യായേന,

$$\left(1+\frac{ക}{സ}\right)^{സ}=1+\frac{സ}{1}\left(\frac{ക}{സ}\right)+\frac{സ(സ-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{ക}{സ}\right)^{2}+\ldots\ldots$$

$$=1+ക+\frac{1\left(1-\frac{1}{സ}\right)}{1\cdot 2}\cdot ക^{3}$$

$$+\frac{1\left(1-\frac{1}{സ}\right)\left(1-\frac{2}{സ}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}ക^{3}+\ldots\ldots\ldots$$

ഇവിടെ സ എന്നതിന്നു എന്തു വിലയുമാവാം. സ അപരിമിതമെന്നുവെച്ചാൽ $\frac{1}{സ}, \frac{2}{സ}, \frac{3}{സ}$ മുതലായവ ശൂന്യമാകയും $1\left(1-\frac{1}{സ}\right)$, $1\left(1-\frac{1}{സ}\right)\left(1-\frac{2}{സ}\right)$ മുതലായവ 1ന്നു തുല്യമാകയും ചെയ്യുന്നു. അതിനാൽ,

$$\underset{സ=a}{ധി}\left(1+\frac{ക}{സ}\right)^{സ}=1+\frac{ക}{1}+\frac{ക^{2}}{\underline{|2}}+\frac{ക^{3}}{\underline{|3}}+\frac{ക^{4}}{\underline{|4}}+\ldots\ldots\ldots$$

വലത്തുപക്ഷത്തിന്നു ഗമകശ്രേണിയെന്നു പറയുന്നു.

'അപരിമിതം' എന്നതിന്നു് അളവില്ലാതെ വർദ്ധിച്ചതു്, അനന്തം എന്നർത്ഥം ഇപ്രകാരം കല്പിക്കുന്ന വിലയെ a എന്ന ചിഹ്നംകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. മിതമായ ഏതു സംഖ്യയേയും ഇതുകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഫലം ശൂന്യം.

ധ1
സ=α എന്നതിന്റെ സാരവും വിശദമാക്കാം. $\frac{3യ+5}{2യ+1}$
എന്നതു ഭിന്നരൂപമായ ഒരു വ്യഞ്ജകമാകുന്നു. ഇതിന്റെ വില യ എന്ന ബീജസംഖ്യയുടെ വിലയെയാണല്ലോ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുക. യ എന്നതിന്റെ പല വിലകൾക്കും വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വില താഴെ പട്ടികയായി കൊടുക്കുന്നു. യ എന്നതിന്നു—

യ	−4	−3	−2	−1	−½	0	1	2	3	4	5	10	20
വ്യ	1	·8	·33	−2	−α −α	5	2·67	2·2	2	1·89	1·82	1·67	1·59

4തൊട്ടു—1വരെ വില കല്പിക്കുമ്പോൾ വ്യഞ്ജകമൂല്യം ക്രമേണ താണുവരുന്നു. യ=−½ ആകുമ്പോൾ അംശം 3½യും ഛേദം ശൂന്യവുമാകയാൽ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വില അനന്തമാകുന്നു. എന്നാൽ ഛേദം കേവലശൂന്യമാകാതെയും ഋണാത്മകത്വം വിടാതേയും അണുപ്രായമാകുമ്പോൾ വ്യഞ്ജകം—αമാകയും, ഋണാത്മകത്വം വിട്ടു ധനമായി അണുപ്രായമാകുന്നതോടുകൂടി വ്യഞ്ജകം പെട്ടെന്നു +αമാകയും ചെയ്യുന്നു. പിന്നീടു യ കയറുന്നതോടുകൂടി വ്യഞ്ജകം ചുരുങ്ങുന്നു. എത്രകണ്ടു ചുരുങ്ങും? യ എന്നതിന്നു വളരെ വലിയ വിലയാകുമ്പോൾ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വിലയെന്തു്?

യ=+100 എന്നിരിക്കുമ്പോൾ വ്യഞ്ജകം$=\frac{305}{201}=1{\cdot}517$. ഇതു 1·5ൽനിന്നു് അല്പം മാത്രം അധികമാകുന്നു. യ=500 എന്നു വരുമ്പോൾ വ്യഞ്ജകം$=\frac{1505}{1001}=1{\cdot}504$. ഈ വില 1·5നോടു കുറെക്കൂടി അടുത്തു. യ അനന്തമായിരിക്കുമ്പോൾ വില എന്തു്? വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ അംശച്ഛേദങ്ങളെ യ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, വ്യഞ്ജകത്തിന്നു രൂപഭേദം വന്നാലും മൂല്യഭേദമുണ്ടാകയില്ല.

$$\text{വ്യഞ്ജകം} = \frac{3യ+5}{2യ+1} = \frac{3+\frac{5}{യ}}{2+\frac{1}{യ}}$$

യ അനന്തമാകുമ്പോൾ $\frac{5}{യ}$, $\frac{1}{യ}$ ഇവ രണ്ടും ശൂന്യമാകുന്നു. അതിനാൽ വ്യഞ്ജകമൂല്യം $=\frac{3}{2}=1{\cdot}5$. ഇവിടെ വ്യഞ്ജകമൂല്യം ക്രമേണ കുറഞ്ഞു കുറഞ്ഞു 1·5ൽ എത്തുന്നു. ഇതിൽനിന്നു കുറയുവാനും കഴികയില്ല. ഇതിന്നു ബീജസംഖ്യ അനന്തമാകുമ്പോൾ വ്യഞ്ജകത്തിൻെറ അവധിവില എന്നു പറയുന്നു. യ എത്രതന്നെ വൎദ്ധിച്ചാലും വ്യഞ്ജകം 1·5 എന്ന അവധിയെ സമീപിക്കയല്ലാതെ കടന്നു ചുരുങ്ങുകയില്ല. ഈ സ്ഥിതിയെയാകുന്ന

ധി
യ$=\infty$ എന്നതു സൂചിപ്പിക്കുന്നതു്. ഇങ്ങിനെ പല വ്യഞ്ജകങ്ങളിലും ബീജസംഖ്യയുടേയോ സംഖ്യകളുടേയോ വിലകളിൽ സംഭവിക്കും. യ എന്നതിൻെറ വില താണുതാണു് ഋണാത്മകമായ അനന്തമാകുമ്പോഴും അവധിവില 1·5 തന്നെയെന്നു കാണാം.

യ എന്നതിൻെറ വില $-\infty$ എന്നതിൽനിന്നു കയറിക്കയറി $-\frac{1}{2}$ പ്രാപിക്കാറാകുമ്പോൾ വ്യഞ്ജകം $-\infty$മാകുന്നു. യ എന്നതിൻെറ വില $+\infty$ത്തിൽനിന്നു് ഇറങ്ങിയിറങ്ങി $-\frac{1}{2}$യാകുമ്പോൾ വ്യഞ്ജകം $+\infty$മാകുന്നു.

ഗമകശ്രേണിയെ അല്പം വ്യത്യാസപ്പെട്ട രീതിയിലും വരുത്താം.

$$\left(1+\frac{1}{\text{സ}}\right)^{\text{കസ}}=1+\frac{\text{കസ}}{1}\cdot\frac{1}{\text{സ}}+\frac{\text{കസ}(\text{കസ}-1)}{1\cdot2}\cdot\frac{1}{\text{സ}^2}$$

$$+\frac{\text{കസ}(\text{കസ}-1)(\text{കസ}-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{\text{സ}^3}+\ldots\ldots$$

$$=1+\text{ക}+\frac{\text{ക}\left(\text{ക}-\frac{1}{\text{സ}}\right)}{1\cdot2}+\frac{\text{ക}\left(\text{ക}-\frac{1}{\text{സ}}\right)\left(\text{ക}-\frac{2}{\text{സ}}\right)}{1\cdot2\cdot3}+\ldots\ldots$$

$$\therefore \underset{\text{സ}=a}{\text{ധി}}\left(1+\frac{1}{\text{സ}}\right)^{\text{കസ}}=1+\text{ക}+\frac{\text{ക}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{ക}^3}{\underline{|3}}+\frac{\text{ക}^4}{\underline{|4}}+\ldots\ldots$$

ക$=1$ എന്നുവെച്ചാൽ,

$$\underset{\text{സ}=a}{\text{ധി}}\left(1+\frac{1}{\text{സ}}\right)^{\text{സ}}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\frac{1}{\underline{|4}}+\ldots\ldots\ldots$$

ഈ ശ്രേണിയുടെ വിലയെ ധാതുകം എന്നു പറയുന്നു.

ഇതു 9 ദശാംശസ്ഥാനത്തോളം കൃത്യമായി 2·718281829. ധാതുകത്തിൻെറ കൃത്യവിലയെ മേലാൽ ധ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നതുമാണു്.

$$\left\{\left(1+\frac{1}{\text{സ}}\right)^{\text{സ}}\right\}^{\text{ക}}=\left\{1+\frac{1}{\text{സ}}\right\}^{\text{കസ}}.$$

$$\therefore \underset{\text{സ}=a}{\text{ധി}}\left\{\left(1+\frac{1}{\text{സ}}\right)^{\text{സ}}\right\}^{\text{ക}}=\underset{\text{സ}=a}{\text{ധി}}\left(1+\frac{1}{\text{സ}}\right)^{\text{കസ}}.$$

$$\therefore\left(1+\frac{1}{1}+\frac{1}{\underline{|2}}+\frac{1}{\underline{|3}}+\ldots\ldots\right)^{\text{ക}}$$

$$=\left(1+\frac{\text{ക}}{1}+\frac{\text{ക}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{ക}^3}{\underline{|3}}+\ldots\ldots\ldots\right)$$

ഇങ്ങിനെ ധാതുകത്തിൻെറ ഇഷ്ടസാക്ഷാതതെ, ഘാതസംഖ്യയുടെ അതേ ശ്രേണിയിൽനിന്നുണ്ടാക്കാം.

$മ^{ക}$ എന്ന സംഖ്യയിൽ മ എന്നതിനെ മൂലമെന്നും ക എന്നതിനെ ഗമകമെന്നും പറയുന്നുവെന്നു കണ്ടിട്ടുണ്ടു്. $മ^{ക} \times മ^{ഗ}$ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഘാതമാണല്ലോ. ഈ ഘാതം $മ^{ക+ഗ}$ എന്നതിന്നു തുല്യമെന്നും കണ്ടുകഴിഞ്ഞു. ഇവിടെ ഗുണനം ഗമകങ്ങളുടെ സങ്കലനംകൊണ്ടു സാധിക്കുന്നു. $മ^{ക} \div മ^{ഗ} = മ^{ക-ഗ}$ എന്നതിൽ ഹരണം വ്യവകലനംകൊണ്ടും $\sqrt[ഗ]{മ^{ക}} = മ^{\frac{ക}{ഗ}}$ എന്നതിൽ മൂലാനയനം (വ്യൽക്രമണം) ഹരണംകൊണ്ടും സാധിക്കുന്നു. അതിനാൽ നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന സംഖ്യകളെയെല്ലാം ഒരു മൂലസംഖ്യയുടെ സമഘാതങ്ങളായി എഴുതിവെയ്ക്കുവാൻ സാധിച്ചാൽ, അവയിൽ ഉപയോഗിച്ച ഗമകങ്ങളുടെ സങ്കലനംകൊണ്ടു ഗുണനവും, വ്യവകലനംകൊണ്ടു ഹരണവും ഗുണനഹരണങ്ങളെക്കൊണ്ടു സമഘാതമൂലാനയനങ്ങളും (അഥവാ ഉൽക്രമണവ്യൽക്രമണങ്ങളും) നിർവ്വഹിക്കാം. ഈവിധം ഗുണനാദികളിൽ ഗമകത്തെ ഘാതാങ്കമെന്നു പറയുന്നു.

$$മ^{ക} = ഖ.$$

ഖ എന്നതിനെ ഇഷ്ടസംഖ്യയെന്നും, മ എന്നതിനെ മൂലസംഖ്യയെന്നും ക എന്നതിനെ ഇഷ്ടസംഖ്യയുടെ ഘാതാങ്കമെന്നും ഇവിടെപ്പറയുന്നു. ഇതിലന്തർഭവിച്ച നിർവ്വചനത്തെത്തന്നെ

$ക = \frac{ഘാതാങ്കം}{മ}$. ഖ, അഥവാ $\frac{ഘാ}{മ}$ ഖ എന്നു പഠിച്ചുവരുന്നു. മൂലസംഖ്യയെ ഉദ്ദിഷ്ടസംഖ്യയുടെ ഘാതാങ്കത്തോളം ഉൽക്രമിച്ചാൽ ഫലം ഉദ്ദിഷ്ടസംഖ്യയാകുന്നു.

$$ക^{\frac{ഘാ}{മ}ഖ} = ഖ.$$

ഈ കാൎയ്യങ്ങൾക്കുവേണ്ടി ഗമകനിയമങ്ങളെത്തന്നെ നാം താഴെ കാണുംപ്രകാരം പഠിച്ചുവെയ്ക്കുന്നു.

(1) $മ^{ക} \times മ^{ഗ} = മ^{ക+ഗ}$. ഇതിന്നു പകരമായി "ഒരു ഘാതത്തിൻെറ ഘാതാങ്കം അതിൻെറ ഘടകങ്ങളുടെ ഘാതാങ്കയോഗമാകുന്നു."

(2) $മ^{ക} \div മ^{ഗ} = മ^{ക-ഗ}$. ഇതിന്നുപകരമായി "ഒരു ഹരണഫലത്തിൻെറ ഘാതാങ്കം ഹാര്യത്തിൻെറ ഘാതാങ്കത്തിൽനിന്നു ഹാരകത്തിൻെറ ഘാതാങ്കം കളഞ്ഞ ശിഷ്ടമാകുന്നു."

(3) $(മ^{ക})^{ഗ} = മ^{കഗ}$. ഇതിന്നുപകരം "ഒരിഷ്ടസംഖ്യയെ മറെറാരു ഇഷ്ടസംഖ്യയോളം ഉൽക്രമിച്ചാൽ, ഫലത്തിൻെറ ഘാതാങ്കം ആദ്യസംഖ്യയുടെ ഘാതാങ്കത്തെ ഉൽക്രമഘാതാങ്കംകൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിന്നു തുല്യമാകുന്നു."

$\sqrt[ഗ]{മ^{ക}} = മ^{ക.\frac{1}{ഗ}}$ എന്നതുകൊണ്ടു വ്യൽക്രമത്തിന്നുള്ള നിയമവും ഇതിൽ ഉൾപ്പെടുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന്നായി താഴെ പട്ടികയിൽ 2 എന്ന മൂലസംഖ്യയെ അപേക്ഷിച്ച ചില ഭിന്നങ്ങളുടേയും അഭിന്നങ്ങളുടേയും ഘാതാങ്കങ്ങൾ കൊടുക്കുന്നു.

സംഖ്യ	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
ഘാതാങ്കം	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

സംഖ്യ	1	·5	·25	·125	·0625	·03125	·01565
ഘാതാങ്കം	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6

(1) 128നെ ·125കൊണ്ടു പെരുക്കണമെന്നു വെയ്ക്കുക. ഈ രണ്ടു സംഖ്യകളുടേയും ഘാതാങ്കങ്ങൾ 7 എന്നും —3 എന്നു

മാകുന്നു. ഇവയുടെ യോഗം 4. പട്ടികയിൽനിന്നു് ഇതു 16ന്റെ ഘാതാങ്കമാണെന്നു കാണാം.

അതിനാൽ $128 \times \cdot 125 = 16$.

(2) 8നെ ·0625കൊണ്ടു ഹരിക്കണമെന്നു വെയ്ക്കുക. ഇവയുടെ ഘാതാങ്കങ്ങൾ 3 എന്നും —4 എന്നും. $3-(-4)=7$. ഇതു 128ന്റെ ഘാതാങ്കം. അതിനാൽ $8 \div 0{\cdot}0625 = 128$.

(3) $\sqrt{256} = (256)^{\frac{1}{4}}$. ഇവിടെ 256ന്റെ ചതുൎത്ഥമൂലം കാണണം. 256ന്റെ ഘാതാങ്കം 8. ഇതിനെ $\frac{1}{4}$കൊണ്ടു പെരുക്കിയാൽ 2 കിട്ടും. ഇതു 4ന്റെ ഘാതാങ്കമാകുന്നു. അതിനാൽ $\sqrt[4]{256} = 4$.

(4) $(64)^{\frac{4}{3}}$. 64ന്റെ ഘാതാങ്കം 6. ഇതിനെ $\frac{4}{3}$കൊണ്ടു പെരുക്കിയാൽ 8. ഇതു 256ന്റെ ഘാതാങ്കം. അതിനാൽ $(64)^{\frac{4}{3}} = 256$.

ധാതുകം മൂഖമായി സംഖ്യകളുടെ ഘാതാങ്കങ്ങൾ ശ്രേണി വഴി കാണാം. ആ ശ്രേണിക്കു ഘാതാങ്കശ്രേണിയെന്നു പറയുന്നു.

ഘാതാങ്കശ്രേണി.

ധ$^{\text{ക}}$ = ഖ എങ്കിൽ ഘാ$_{\text{ധ}}$ ഖ = ക, ഖ = ധ$^{\text{ഘാ}_{\text{ധ}}}$ ഇതനുസരിച്ചു്,

$$(1+\text{യ}) = \text{ധ}^{\text{ഘാ}_{\text{ധ}}(1+\text{യ})}$$

$$\therefore \quad (1+\text{യ})^{\text{സ}} = \text{ധ}^{\text{സ.ഘാ}_{\text{ധ}}(1+\text{യ})}$$

ഇരുപക്ഷങ്ങളേയും ശ്രേണീരൂപത്തിലെഴുതാം.

$$(1+\text{യ})^{\text{സ}} = 1 + \frac{\text{സ}}{1}.\text{യ} + \frac{\text{സ}(\text{സ}-1)}{\underline{|2}}\text{യ}^2$$
$$+ \frac{\text{സ}(\text{സ}-1)(\text{സ}-2)}{\underline{|3}}\text{യ}^3 + \dots\dots$$

$$\text{ധ}^{{}^{\text{സഘാ}}_{\text{ധ}}(1+\text{യ})} = 1 + \frac{\left\{{}^{\text{ഘാ}}_{\text{ധ}}(1+\text{യ})\right\}\text{സ}}{1}$$

$$+ \frac{\left\{{}^{\text{ഘാ}}_{\text{ധ}}(1+\text{യ})\right\}^2\text{സ}^2}{\underline{|2}} + \dots\dots\dots\dots$$

രണ്ടു ശ്രേണികളിലും സ എന്നതിന്നു് എന്തു വില കല്പിച്ചാലും അവ തുല്യമാകയാൽ, രണ്ടിലും സ എന്നതിൻെറ ഗുണകാരങ്ങൾ തുല്യമാകണം.

രണ്ടാമത്തേതിൽ ഗുണകാരം

$$\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}\,(1+\text{യ})\ \text{എന്നു.}$$

ഒന്നാമത്തേതിൽ സ എന്നതിൻെറ ഗുണകാരം പല പദങ്ങളിൽനിന്നും എടുത്തു ചേർക്കേണ്ടിവരും. ആദ്യത്തെ പദം 1 ആകയാൽ അതിൽ സ ഇല്ല.

2-ാംപദത്തിൽ

സ-യുടെ ഗുണകാരം = യ.

3-ാം ,, ,, $= \frac{-\text{യ}^2}{1\cdot 2} = -\frac{\text{യ}^2}{2}$

4-ാം ,, ,, $= \frac{(-1)\ (-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\text{യ}^3 = +\frac{\text{യ}^3}{3}$

5-ാം ,, ,, $= \frac{(-1)\ (-2)\ (-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\text{യ}^4 = -\frac{\text{യ}^4}{4}$

ഇങ്ങിനെ മേലാലും. ഇവയെല്ലാംകൂടി കൂട്ടിയാൽ

$$\text{യ} - \frac{\text{യ}^2}{2} + \frac{\text{യ}^3}{3} - \frac{\text{യ}^4}{4} + \frac{\text{യ}^5}{5} - \frac{\text{യ}^6}{6} + \dots\dots$$

$$\therefore\ \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}\,(1+\text{യ}) = \text{യ} - \frac{\text{യ}^2}{2} + \frac{\text{യ}^3}{3} - \frac{\text{യ}^4}{4} + \frac{\text{യ}^5}{5} - \dots$$

ഈ ശ്രേണി യ ഒന്നിന്നു സമമോ, ഒന്നിനെക്കാൾ ചെറുതോ ആയാൽ ഉപഗമമെന്നു കണ്ടുകഴിഞ്ഞു.

യ എന്നതിന്നുപകരം —യ എന്നു വെച്ചാൽ,

$$\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}(1-\text{യ}) = -\text{യ} - \frac{\text{യ}^2}{2} - \frac{\text{യ}^3}{3} - \frac{\text{യ}^4}{4} - \frac{\text{യ}^5}{5} - \ldots\ldots$$

ഇതു യ ഒന്നിനേക്കാൾ ചെറുതായിരിക്കുമ്പോൾ മാത്രം ഉപഗമമാകുന്നു. മറ്റെല്ലായ്പ്പോഴും അപഗമമത്രെ.

പ്രയോഗത്തിൽ 10 മൂലാങ്കമായി സംഖ്യകളുടെ ഘാതാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഇവിടെ കണ്ട ശ്രേണികൾ മന്ദോപഗമങ്ങളാണ്. അതിനാൽ ശീഘ്രോപഗമങ്ങളായ ഘാതാങ്കശ്രേണികളെ ഇവയിൽനിന്നു വരുത്തുന്നു.

$$\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}} \cdot \frac{1+\text{യ}}{1-\text{യ}} = \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}(1+\text{യ}) - \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}(1-\text{യ})$$

$$= \text{യ} - \frac{\text{യ}^2}{2} + \frac{\text{യ}^3}{3} - \frac{\text{യ}^4}{4} + \ldots\ldots$$

$$-\left(-\text{യ} - \frac{\text{യ}^2}{2} - \frac{\text{യ}^3}{3} - \frac{\text{യ}^4}{4} + \ldots\ldots\right)$$

$$= 2\left(\text{യ} + \frac{\text{യ}^3}{3} + \frac{\text{യ}^5}{5} + \frac{\text{യ}^7}{7} + \ldots\ldots\right)$$

ഇതിൽ $\frac{1+\text{യ}}{1-\text{യ}}$ എന്നതിന്നുപകരം $\frac{\text{ന}+1}{\text{ന}}$ എന്നു വെയ്ക്കുക. അപ്പോൾ $\frac{1+\text{യ}}{1-\text{യ}} = \frac{\text{ന}+1}{\text{ന}}$ അതിനാൽ

$$\text{ന} + \text{നയ} = \text{ന} - \text{നയ} + 1 - \text{യ}.$$

$$\therefore \text{യ} + 2\text{നയ} = 1 \text{ അതിനാൽ } \text{യ} = \frac{1}{2\text{ന}+1}.$$

$$\therefore \ {}^{\text{ലോ}}_{\text{ധ}}\frac{ന+1}{ന}=2\left(\frac{1}{2ന+1}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2ന+1)^3}+\tfrac{1}{5}\ \frac{1}{(2ന+1)^5}+\ldots\ldots\ldots\right)$$

അഥവാ,

$$\frac{\text{ലോ}}{\text{ധ}}(ന+1)=\frac{\text{ലോ}}{\text{ധ}}(ന)+2\left(\frac{1}{2ന+1}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2ന+1)^3}+\tfrac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2ന+1)^5}+\ldots\ldots\right)$$

ഇതു കുറെ വേഗം ഉപഗമിക്കുന്ന ശ്രേണിയാകുന്നു.

ന $=1$ എന്നുവെച്ചാൽ $2ന+1=3$

$$\therefore \ \frac{\text{ലോ}}{ന}\cdot 2=0+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\ \frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\ \frac{1}{3^5}+\ldots\ldots\right)$$

$$=0\cdot693147154$$

ന $=2$ എന്നുവെച്ചാൽ $2ന+1=5$

$$\therefore \ \frac{\text{ലോ}}{ന}\cdot 3=\frac{\text{ലോ}}{ന}2+2\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\cdot\ \frac{1}{5^3}+\frac{1}{5}\cdot\ \frac{1}{5^5}+\ldots\right)$$

$$=1\cdot098612264.$$

$$\frac{\text{ലോ}}{\text{ധ}}\cdot 9=\frac{\text{ലോ}}{\text{ധ}}\cdot 3^2=2\ {}^{\text{ലോ}}_{\text{ധ}}\ 3=2\cdot1972244$$

സൂത്രത്തിൽ ഇനി ന $=9$ എന്നുവെയ്ക്കുക. $2ന+1=19.$

എന്നാൽ

$$\frac{\text{ലോ}}{\text{ധ}}10=\frac{\text{ലോ}}{\text{ധ}}9+2\left\{\frac{1}{19}+\frac{1}{3}\cdot\ \frac{1}{19^3}+\frac{1}{5}\cdot\ \frac{1}{19^5}+\ldots\ldots\right\}$$

$$=2\cdot30258504$$

ഇതിന്റെ സാരം

$\text{ധ}^{2\cdot30258504}=10$ എന്നാകുന്നു.

$$\therefore \ \frac{\text{ലോ}}{\text{ധ}}10=2\cdot30258504$$

ഇവിടെ കണ്ട വിധത്തിൽ അല്പം ക്ലേശിച്ചു സംഖ്യകളുടെ ധാതുകാപേക്ഷിതമായ ഘാതാങ്കങ്ങളെ വരുത്താം. അവയെ പിന്നെ ദശാപേക്ഷിതഘാതാങ്കങ്ങളായി മാററുന്നു. അതിന്നെന്തു ചെയ്യണമെന്നും ആലോചിക്കാം. ദശാപേക്ഷിതഘാതാങ്കങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാൻ വെറും 'ഘാ' എന്നെഴുതിയാൽ മതി. താഴെ മൂലമായ 10 കാണിക്കാറില്ല.

$$\text{ധ}^{\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}10} = 10$$

$$\therefore \left(\text{ധ}^{\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}10}\right)^{\text{മ}} = (10)^{\text{മ}} = \text{ഖ} \text{ എന്നു വെയ്ക്കുക.}$$

$$\therefore \text{ധ}^{\text{മ}.\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}10} = 10^{\text{മ}.} = \text{ഖ}$$

$$\therefore \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}\text{ഖ} = \text{മ}.\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}10;\ \underline{\text{ഘാഖ}} = \text{മ}.$$

$$\underline{\text{ഘാഖ}} = \text{മ} = \text{മ}.\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}10 \div \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}10 = \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}\text{ഖ} \div \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}10$$

ഇതിൽനിന്നു് ഏതെങ്കിലും സംഖ്യയുടെ ധാതുകാപേക്ഷിതഘാതാങ്കത്തെ പത്തിന്റെ ധാതുകാപേക്ഷിതഘാതാങ്കംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ആ സംഖ്യയുടെ ദശാപേക്ഷിതഘാതാങ്കമുണ്ടാകുമെന്നു വരുന്നു.

അല്ലെങ്കിൽ ഒരു സംഖ്യയുടെ ധാതുകാപേക്ഷിതഘാതാങ്കത്തെ $\frac{1}{\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}10}$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം.

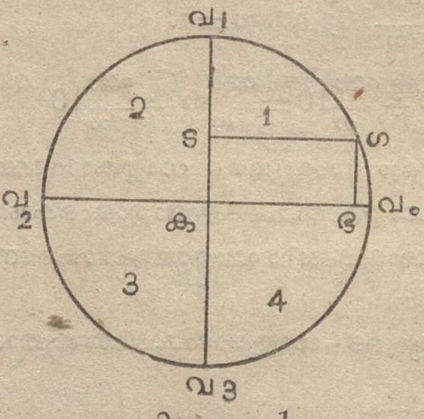
$$\frac{1}{\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}10} = \frac{1}{2·30258504} = 0·43429448.$$

ഇതിന്നു ഘാതാങ്കപരിവർത്തകം എന്നു പേര്.

അദ്ധ്യായം 6

ജ്യാവിവരണം

സമവൃത്തത്തെ മിക്കപ്പോഴും വിശേഷണംകൂടാതെ വൃത്തമെന്നു പറയുന്നു. വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽക്കൂടിപ്പോകുന്നതും പരിധിയാൽ ഇരുഭാഗത്തും പരിച്ഛിന്നമായതും ആയ നേർവരയ്ക്കു വ്യാസം എന്നു പറയുന്നു. അന്യോന്യം ലംബമായ രണ്ടു വ്യാസങ്ങളെക്കൊണ്ടു വൃത്തത്തിന്റെ അകവും പരിധിയും 4 സമഖണ്ഡങ്ങളാക്കപ്പെടുന്നു. ഇവയെ വലത്തുനിന്നു് ഇടത്തോട്ടു പ്രഥമ, ദ്വിതീയ, തൃതീയ, ചതുർത്ഥപാദങ്ങളെന്നു പറയുന്നു. പ്രഥമചതുർത്ഥപാദങ്ങളുടെ സന്ധിയിൽനിന്നു് ഇഷ്ടദൈർഘ്യത്തോളം ഒരു ചാപത്തെ കല്പിച്ചാൽ അതു വ്യാസാർദ്ധത്തിൽനിന്നു തുടങ്ങുന്ന സ്ഥാനത്തെ ചാപമൂലമെന്നും അവസാനിക്കുന്ന സ്ഥാനത്തെ ചാപാഗ്രമെന്നും പറയുന്നു. ചാപാഗ്രം പ്രഥമപാദത്തിലോ, മറ്റേതെങ്കിലും പാദത്തിലോ ആവാം. ചാപാഗ്രത്തിൽനിന്നു ചാപമൂലസ്പർശിയായ വ്യാസത്തിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരത്തെ ചാപത്തിന്റെ ഭുജജ്യാവെന്നും, ഈ വ്യാസത്തിന്നു ലംബമായ വ്യാസത്തിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരത്തെ കോടിജ്യാവെന്നും പറയുന്നു. പരിലേഖത്തിൽ $വ_0$ ഗ, ഗ ഭ, ഗ ട എന്നിവ ക്രമേണ ചാപ, ഭുജജ്യാ, കോടിജ്യാവുകളാകുന്നു.



പരിലേഖം 1.
പ്രഥമാദിവൃത്തപാദങ്ങൾ.

ഭാരതീയർ വൃത്തപാദചാപത്തെ 3 രാശികളായും ഓരോ രാശിയെ 30 ഭാഗ(അംശ)ങ്ങളായും, ഓരോ ഭാഗത്തെ 60 കല (ലിപ്ത)കളായും, ഓരോ കലയെ 60 വികല (വിലിപ്ത)കളായും ഭാഗിച്ചു ഗണിതവ്യവഹാരങ്ങൾ നിർവ്വഹിച്ചു. വൃത്തപരിധിയിൽ ആകെ 21600 കലകൾ ഉണ്ടു്. ഭാരതീയർ വ്യാസത്തേയും വ്യാസാർദ്ധത്തേയും ജ്യാവുകളേയും അതാതു വൃത്തത്തിന്റെ കലകളെക്കൊണ്ടുതന്നെ അളന്നു. വ്യാസാർദ്ധം ഇങ്ങിനെ ഏതാണ്ടു 3438 (കുറെക്കൂടി കൃത്യമായി 3437·75) കലകളാകുന്നു. വ്യാസാർദ്ധം മൂന്നു രാശിയുടെ ജ്യാവായതുകൊണ്ടു ത്രിരാശിജ്യാവെന്നർത്ഥത്തിൽ 'ത്രിജ്യാ'വെന്നു പറയപ്പെടുന്നു. ഭാരതീയാചാര്യന്മാരിൽ അനേകം പേരും ലഘുഗണിതത്തിന്നുവേണ്ടി ത്രിജ്യാവ് 120 എന്നു കല്പിച്ചു് ആ അംശംകൊണ്ടു ജ്യാവുകൾ അളന്നിട്ടുണ്ടു്. പാശ്ചാത്യപണ്ഡിതന്മാർ ത്രിജ്യാവിനെ 1 എന്നുകല്പിച്ചു് അതുകൊണ്ടു ജ്യാവുകളെ ഭിന്നസംഖ്യകളായി അളന്നുവരുന്നു. പ്രമാണം എന്തുതന്നെയായാലും ത്രിജ്യാവും മററു ജ്യാവുകളും ഒരേ പ്രമാണംകൊണ്ടുതന്നെ അളക്കേണ്ടതാകുന്നു. എന്നാൽ ഭുജജ്യാവർഗ്ഗവും കോടിജ്യാവർഗ്ഗവുംകൂടി കൂട്ടിയാൽ ത്രിജ്യാവർഗ്ഗമായിത്തീരും. പാശ്ചാത്യമാർഗ്ഗം ഗണിതത്തിൽ പല സൌകര്യങ്ങളും നല്കുന്നതുകൊണ്ടും, ഇതെല്ലാം ഇവിടെ വിവരിക്കുന്നതു വരഗണിതാർത്ഥമായതുകൊണ്ടും, വരഗണിതം ഏതാണ്ടു മുഴുവൻ പാശ്ചാത്യമായതുകൊണ്ടും ഈ പുസ്തകത്തിൽ ത്രിജ്യാവിനെ സദാ 1 എന്നുതന്നെ കല്പിക്കുന്നു.

ഭാരതീയർ ചെയ്തതുപോലെത്തന്നെ പാശ്ചാത്യരും ചാപങ്ങളെ അംശങ്ങളാ(Degrees)യും, കലകളായും (Minutes) വികലകളായും (Seconds) അളന്നുപോന്നു. പാശ്ചാത്യപുസ്തകങ്ങളിൽ

26 ഡിഗ്രി 15 മിനുട്ടു് 42 സെക്കണ്ടു്

എന്നതിനെ 26° 15′ 42″ എന്നെഴുതുന്നു.

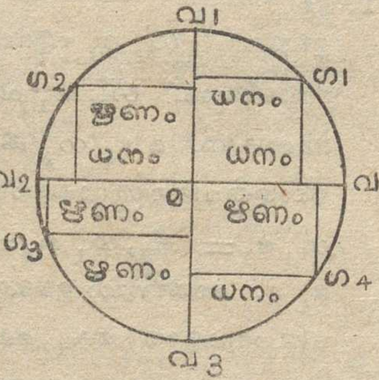
ഈ പ്രമാണങ്ങളെക്കൊണ്ടുതന്നെ അതാതു ചാപങ്ങൾ വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ അഭിമുഖീകരിക്കുന്ന കോണുകളേയും അളക്കുന്നു. വൃത്തപാദം കേന്ദ്രത്തിൽ അഭിമുഖീകരിക്കുന്ന കോണു് ഒരു സമകോണു് (Right angle) എന്നു പറയപ്പെടുന്നു. ഒരു സമകോണിന്നു 90° ആണെന്നു കാണാം. വ്യാസാർദ്ധത്തിൻെറ മാനം 1 എന്നു സങ്കല്പിക്കുന്നതിന്നനുസരിച്ചു്; വ്യാസാർദ്ധത്തിന്നു തുല്യമായ ചാപത്തിൻേറയും ആ ചാപം കേന്ദ്രത്തിൽ അഭിമുഖീകരിക്കുന്ന കോണിൻേറയും മാനം 1 എന്നുവെയ്ക്കുന്നതു യുക്തവും, സൌകര്യപ്രദവും, പൂർവ്വശാസ്ത്രാനുസാരവും ആകുന്നു. ഇവിടെ മാനപ്രമാണമാകുന്ന ചാപത്തിന്നും, കോണിന്നും 'കരകം' (Radian) എന്നു പറയുന്നു.

ഏതു വൃത്തത്തിൻേറയും പരിധിയെ അതിൻെറ വ്യാസംകൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ ഒരേ സംഖ്യതന്നെ കിട്ടും. ഇതു ക്ഷേത്രഗണിതന്യായങ്ങളെക്കൊണ്ടു സ്ഥാപിക്കാം. എന്നാൽ ഈ സംഖ്യയെ കൃത്യമായി ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യകൊണ്ടോ, ഭിന്നം ചേർത്ത പൂർണ്ണസംഖ്യകൊണ്ടോ പറയുവാൻ സാധിക്കയില്ല. അതിനാൽ ആ സംഖ്യയെ π (പൈ) എന്ന യവനലിപികൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചുപോരുന്നു. ദേവനാഗരി 'പ' വേണ്ടുന്നവർക്കു് ഉപയോഗിക്കാം. π യുടെ സുമാറുവില $3\frac{1}{7}$ ആകുന്നു. കുറെ സൂക്ഷ്മമായ വില 3·1416 എന്നും സൂക്ഷ്മതരമായതു 3·1415926536 എന്നുമാകുന്നു. വൃത്തപരിധിയിൽ 2π വ്യാസാർദ്ധങ്ങൾ ഒതുങ്ങുന്നതിനാൽ 2π കരകങ്ങൾ കൂടിയാൽ 360° ആകും.

$$1 \text{ കരകം} = \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ - 17' - 44''\!\cdot 806.$$

പ്രഥമചതുർത്ഥപാദസന്ധിയിൽ മൂലമെന്നു കല്പിക്കുന്ന ചാപത്തിൻെറ അഗ്രം പ്രഥമപാദത്തിലെന്നപോലെ മററു ഏതു പാദത്തിലുമാവാമെന്നു പറഞ്ഞുവല്ലോ. അപ്പോഴും പ്രഥമപാദമൂലഗതമായ വ്യാസത്തിലേയ്ക്കു ചാപാഗ്രത്തിൽനിന്നുള്ള ദൂരം ചാപ

ത്തിൻെറ ഭുജജ്യാവും പ്രഥമപാദചാപാഗ്രഗതമായ വ്യാസത്തിലേയ്ക്കുള്ള ദൂരം ചാപത്തിൻെറ കോടിജ്യാവുമായിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ ഈ ഭുജകോടിജ്യാവുകൾക്കു ധനർണ്ണത കല്പിക്കാറുണ്ടു്. പ്രഥമദ്വിതീയപാദങ്ങളുടെ വശത്തുള്ള ഭുജജ്യാവുകൾ ധനവും, തൃതീയചതുർത്ഥപാദങ്ങളുടെ വശത്തുള്ളവ ഋണവുമാകുന്നു. ചതുർത്ഥപ്രഥമപാദങ്ങളുടെ വശത്തുള്ള കോടിജ്യാവുകൾ ധനവും, ദ്വിതീയതൃതീയപാദങ്ങളുടെ വശത്തുള്ളവ ഋണവുമാകുന്നു. പരിലേഖത്തിൽ മ വൃത്തകേന്ദ്രമാകുന്നു. വ എന്ന വ്യാസാഗ്രം തുടങ്ങി പരിധിവഴി ഗ$_1$, ഗ$_2$, ഗ$_3$, ഗ$_4$ വരെയുള്ള ചാപങ്ങൾ ക്രമേണ പ്രഥമ, ദ്വിതീയ, തൃതീയ, ചതുർത്ഥ പാദങ്ങളിൽ അവസാനിക്കുന്നു. അവയുടെ ഭുജകോടിജ്യാവുകളും ആ ജ്യാവുകളുടെ ധനർണ്ണതകളും പരിലേഖത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ധനർണ്ണത ഇങ്ങിനെ ഓർമ്മവെയ്ക്കാം. പ്രഥമചതുർത്ഥപാദസന്ധിഗതമായ വ്യാസത്തെ സമനിരപ്പെന്നും അതിന്നു ലംബമായ വ്യാസത്തെ അധോർദ്ധ്വമെന്നും സങ്കല്പിച്ചു്, ആദ്യത്തേതിൻെറ മേൽഭാഗത്തുള്ള ഭുജജ്യാവുകളെ ധനമെന്നും താഴെയുള്ളവയെ ഋണമെന്നും, രണ്ടാമത്തേതിൻെറ വലത്തുള്ള കോടിജ്യാവുകളെ ധനമെന്നും, ഇടത്തുള്ളവയെ ഋണമെന്നും കരുതുന്നു.

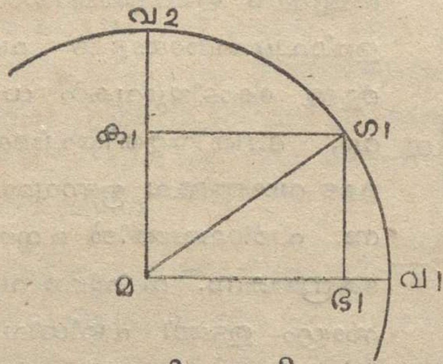


പരിലേഖം 2.
ജ്യാവുകളുടെ ധനർണ്ണത.

ചാപങ്ങളെത്തന്നെ പ്രഥമചതുർത്ഥപാദസന്ധിയിൽനിന്നു പരിധിവഴി ഇടത്തോട്ടു സങ്കല്പിക്കുന്നതു കൂടാതെ വലത്തോട്ടും സങ്കല്പിക്കാം. അപ്പോൾ ആ ചാപങ്ങൾതന്നെ ഋണാത്മകങ്ങളാ

യി കരുതപ്പെടുന്നു. ചാപങ്ങളെപ്പററി പറഞ്ഞതെല്ലാം അതാതു ചാപങ്ങൾക്കു് എതിരായി നില്ക്കുന്ന കോണുകൾക്കും യോജിച്ചതെന്നു കാണുമല്ലോ.

പരിലേഖത്തിൽ മ-കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തത്തിൻെറ പ്രഥമ പാദത്തെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. വ$_1$ ഗ$_1$ എന്ന ചാപത്തിൻെറ ഭുജജ്യാവു് ഗ$_1$ ഭ$_1$ എന്നും കോടിജ്യാവു് ഗ$_1$ ക$_1$ എന്നുമാകുന്നു. മ ഭ$_1$ ഗ$_1$ ക$_1$ ഒരായതചതുരശ്രമാകയാൽ ഗ$_1$ ഭ$_1$ = മക$_1$, ഗ$_1$ ക$_1$ = ഭ$_1$ മ. അതിനാൽ ഭുജകോടിജ്യാവുകളായി മക$_1$, മഭ$_1$ എന്നവയേയും കരുതാം. ക$_1$ ഗ$_1$, മ ഭ$_1$ ഇവയെ



പരിലേഖം 3.

വ$_2$ ഗ$_1$ എന്ന ചാപത്തിൻെറ ഭുജജ്യാവായും, ഗ$_1$ ഭ$_1$, ക$_1$ മ ഇവയെ വ$_2$ ഗ$_1$ എന്നതിൻെറ കോടിജ്യാവായും കരുതാം.

ഭുജജ്യാ (വ$_1$ ഗ$_1$) = കോടിജ്യാ (വ$_2$ ഗ$_1$)

കോടിജ്യാ (വ$_1$ ഗ$_1$) = ഭുജജ്യാ (വ$_2$ ഗ$_1$).

ഇതിൽനിന്നു്,

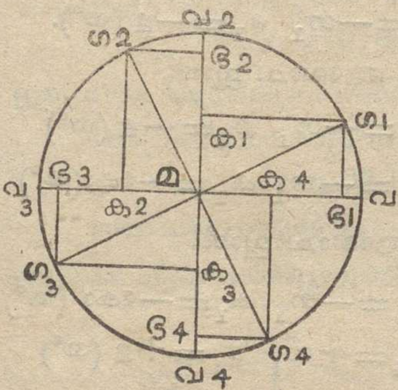
ഭു യ$^\circ$ = കോ(90° − യ$^\circ$) എന്നും

കോ യ$^\circ$ = ഭു(90° − യ$^\circ$) എന്നും

കിട്ടുന്നു. വ$_2$ ഗ$_1$, വ$_1$ ഗ$_1$ എന്ന ചാപങ്ങളെ അന്യോന്യം കോടികളായിക്കരുതുന്നു.

ഇനി ദ്വിതീയ, തൃതീയ, ചതുർത്ഥപാദങ്ങളിൽ അഗ്രമായ ചാപങ്ങളുടേയും അവയ്ക്കെതിരായ കോണുകളുടേയും ഭുജകോടി

ജ്യാവുകളെ പ്രഥമപാദത്തിലെ ചാപങ്ങളുടേയും കോണുകളുടേയും ജ്യാവുകളെക്കൊണ്ടുതന്നെ പ്രതിപാദിക്കാമെന്നു കാണാം. പരിലേഖത്തിൽ മ കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തവും അന്യോന്യം ലംബമായ $\text{വ}_1 \text{വ}_3$, $\text{വ}_2 \text{വ}_4$ എന്ന രണ്ടു വ്യാസങ്ങളും കാണാം. $\text{വ}_1 \text{ഗ}_1$ പ്രഥമപാദത്തിലെ ഒരു ചാപമാകുന്നു. $\text{വ}_2\text{ഗ}_2$, $\text{വ}_3\text{ഗ}_3$, $\text{വ}_4 \text{ഗ}_4$ എന്നവ അതിന്നു തുല്യമാകുന്നു. $\text{വ}_1 \text{ഗ}_1 = \text{യ}^\circ$ എന്നു വെച്ചാൽ, $\text{വ}_1\text{ഗ}_2 = 90^\circ + \text{യ}^\circ$, $\text{വ}_1 \text{ഗ}_3 = 180^\circ + \text{യ}^\circ$, $\text{വ}_1 \text{ഗ}_4 = 270^\circ + \text{യ}^\circ$. എല്ലാ ചാപങ്ങളും പരിധി വഴിക്കു് എടത്തോട്ടായി കാണണമെന്നു വെച്ചിരിക്കുന്നു.



പരിലേഖം 4.

പരിലേഖത്തെ മ എന്ന കേന്ദ്രത്തിന്നു ചുററും 90° ഇടത്തോട്ടു തിരിച്ചുവെന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ, പരിലേഖത്തിൽ പ്രഥമപാദത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ള രേഖകളെല്ലാം ദ്വിതീയപാദത്തിലെ രേഖകളോടു ചേൎന്നു നില്ക്കും. അപ്രകാരം ഇടത്തോട്ടുതന്നെ 180° തിരിച്ചുവെന്നുവെച്ചാൽ പ്രഥമപാദരേഖകൾ തൃതീയപാദരേഖകളോടും, 270° ഇടത്തോട്ടു തിരിച്ചതായി സങ്കല്പിച്ചാൽ, ചതുൎത്ഥപാദരേഖകളോടും ചേൎന്നു നില്ക്കും. അതിനാൽ

$$\text{ഗ}_1 \text{ഭ}_1 = \text{ഗ}_2 \text{ഭ}_2 = \text{ഗ}_3 \text{ഭ}_3 = \text{ഗ}_4 \text{ഭ}_4$$

$$\text{ഗ}_1 \text{ക}_1 = \text{ഗ}_2 \text{ക}_2 = \text{ഗ}_3 \text{ക}_3 = \text{ഗ}_4 \text{ക}_4.$$

ഇവ അളവുകൊണ്ടു തുല്യമെങ്കിലും ചിലതു ധനവും, ചിലതു ഋണവുമെന്ന ഭേദമുണ്ടു്.

ഇനി 90° തിരിഞ്ഞ സ്ഥിതിയെപ്പററി ആലോചിച്ചാൽ,

$$\text{ഭു}\ (90^\circ+\text{യ}^\circ)=\text{ഗ}_2\,\text{ക}_2=+\text{ഗ}_1\,\text{ക}_1=+\text{കോ}(\text{യ}^\circ)*$$

$$\text{കോ}(90^\circ+\text{യ}^\circ)=\text{ഗ}_2\ \text{ഭ}_2=-\text{ഗ}_1\ \text{ഭ}_1=-\text{ഭു}\ (\text{യ}^\circ).$$

180° തിരിഞ്ഞ സ്ഥിതിയെപ്പററി ആലോചിച്ചാൽ,

$$\text{ഭു}\ (180^\circ+\text{യ}^\circ)=\text{ഗ}_3\ \text{ഭ}_3=-\text{ഗ}_1\ \text{ഭ}_1=-\text{ഭു}\ (\text{യ}^\circ).$$

$$\text{കോ}(180^\circ+\text{യ}^\circ)=\text{ഗ}_3\,\text{ക}_3=-\text{ഗ}_1\,\text{ക}_1=-\text{കോ}(\text{യ}^\circ)$$

270° തിരിഞ്ഞ നിലയെപ്പററി ആലോചിച്ചാൽ,

$$\text{ഭു}\ (270^\circ+\text{യ}^\circ)=\text{ഗ}_4\,\text{ക}_4=-\text{ഗ}_1\,\text{ക}_1=-\text{കോ}\ (\text{യ}^\circ)$$

$$\text{കോ}(270^\circ+\text{യ}^\circ)=\text{ഗ}_4\ \text{ഭ}_4=+\text{ഗ}_1\ \text{ഭ}_1=+\text{ഭു}\ (\text{യ}^\circ)$$

ഈ ബന്ധങ്ങളെല്ലാം ഉരുവിട്ടു പഠിച്ചു വലയണമെന്നില്ല. രണ്ടു സംഗതികൾ ഓത്താൽ മതി. (1) 90°യുടേയോ 270°യുടേയോ യോഗംകൊണ്ടു ഭുജജ്യാവ് കോടിജ്യാവായും കോടിജ്യാവ് ഭുജജ്യാവായും മാറുന്നു. എന്നാൽ 180°യുടെ യോഗം ജ്യാവിൻെറ ജാതിയിൽ മാററം വരുത്തുന്നില്ല. 360°യോ അതിൻെറ മടങ്ങുകളോ ചേൎന്നുകൊണ്ടു ജ്യാവ് ജാതിയിലോ ധനൎണ്ണത്വയിലോ മാറുന്നില്ല. (2) ധനൎണ്ണത എല്ലായ്പോഴും അതാതു് അംശങ്ങൾ ചേൎന്ന ചാപത്തിൻേറയോ കോണിൻേറയോ സ്ഥിതി ഏതു പാദത്തിലാണെന്നുള്ളതിനെ മാത്രം ആശ്രയിച്ചിരിക്കും.

ഉദാഹരണം: 640°യുടെ ഭുജജ്യാവെത്ര? 640°യിൽനിന്നു 360° കളഞ്ഞാൽ 280°. 280° 10°യോടു 270° ചേൎന്നതാകുന്നു. ചാപാഗ്രം ചതുൎത്ഥപാദത്തിലാകയാൽ ഭുജജ്യാവ് ഋണം.

---

* ഭു (യ°) അഥവാ ഭു യ° എന്നതിന്നു യ° അളവുള്ള ചാപത്തിൻേറയോ കോണിൻേറയോ ഭുജജ്യാവെന്നും കോ (യ°) അഥവാ കോ യ° എന്നതിന്നു് യ° അളവുള്ള ചാപത്തിൻേറയോ, കോണിൻേറയോ കോടിജ്യാവെന്നും അൎത്ഥം. വ്യാസാൎദ്ധമാനം 1 എന്നു തന്നെ സൎവ്വത്ര സങ്കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

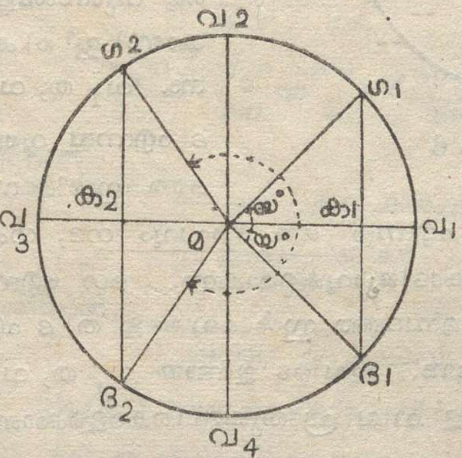
കൂടാതെ 10°യോടു 270° ചേരുമ്പോൾ ഭുജജ്യാവു കോടിജ്യാവായി മാറുന്നു. അതിനാൽ

$$ഭു\ (640^\circ) = ഭു\ (360^\circ + 280^\circ) = ഭു\ (280^\circ)$$
$$= ഭു\ (270^\circ + 10^\circ) = -\ കോ\ (10^\circ).$$

ഈ വിധം കോടിജ്യാവിന്നുമാലോചിക്കാം.

$$കോ(640^\circ) = കോ(360^\circ + 280^\circ) = കോ\ (280^\circ)$$
$$= കോ(270^\circ + 10^\circ) = +\ ഭു\ (10^\circ).$$

ഋണചാപങ്ങളുടേയും കോണുകളുടേയും ഭുജകോടിജ്യാവുകളേയും പ്രഥമപാദജ്യാവുകളായി മാററാം. പരിലേഖത്തിൽ മുമ്പത്തെപ്പോലെ മ കേന്ദ്രമായും $വ_1\ വ_3$, $വ_2\ വ_4$ അന്യോന്യം ലംബമായ രണ്ടു വ്യാസങ്ങളായും ഒരു വൃത്തത്തെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. $വ_1\ ഗ_1$, $വ_1\ ഗ_2$ ഇടത്തോട്ടുവെച്ച രണ്ടു ധനചാപങ്ങളും, $വ_1\ ദ_1$, $വ_1\ ദ_2$ അവയ്ക്കു തുല്യമായി ഇടത്തോട്ടുവെച്ച രണ്ടു ഋണചാപങ്ങളുമാകുന്നു. ഇവയുടെ ഭുജകോടിജ്യാവുകളേയും പരിലേഖത്തിൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ടു്. $വ_1 ഗ_1 =$ യ° എന്നും $വ_1\ ഗ_2 =$ ന°യെന്നും വെയ്ക്കുക. എന്നാൽ

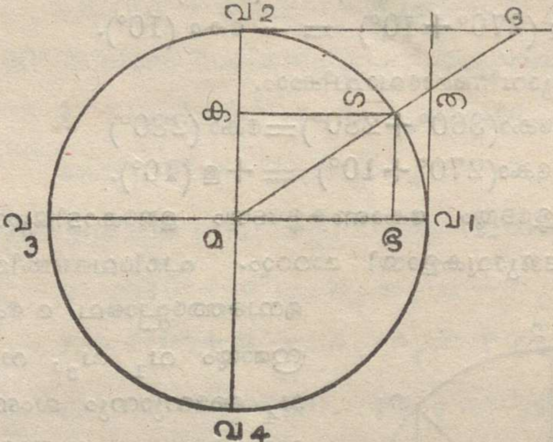


പരിലേഖം 5.

$$വ_1\ ദ_1 = -യ^\circ,\ വ_1 ദ_2 = -ന^\circ.$$

$$ഭു\ (-യ^\circ) = ദ_1\ ക_1 = -ഗ_1\ ക_1 \quad = -ഭു\ (യ^\circ)$$
$$കോ(-യ^\circ) = മക_1 \quad = കോ\ (യ^\circ)$$
$$ഭു\ (-ന^\circ) = ദ_2\ ക_2 = -ഗ_2\ ക_2 \quad = -ഭു\ (ന^\circ)$$
$$കോ(-ന^\circ) = മക_2 \quad = കോ(യ^\circ)$$

ഗണിതത്തിൽ വൃത്തസംബന്ധികളായ മററു രേഖകൾക്കും വളരെ പ്രാധാന്യമുണ്ടു്. അവയിൽ ചിലതിനെ ഈ ഭാഗത്തു തന്നെ വിവരിക്കാം. പരിലേഖത്തിൽ മ കേന്ദ്രമായ ഒരു വൃത്തവും അന്യോന്യം ലംബമായ വ$_1$ വ$_3$, വ$_2$ വ$_4$ എന്ന രണ്ടു വ്യാസങ്ങളും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. വ$_1$ ത, വ$_2$ ദ എന്നവ വൃത്തത്തെ സ്പർശിക്കുന്ന രേഖകളാകുന്നു.



പരിലേഖം 6

വ$_1$ ഗ എന്നതു് ഒരു ചാപവും ഗഭ, ഗക എന്നവ അതിൻെറ ഭുജകോടിജ്യാവുകളുമാകുന്നു. മഗ എന്ന വ്യാസാർദ്ധത്തെ നീട്ടിയാൽ മുമ്പറഞ്ഞ സ്പർശരേഖകളെ ത, ദ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ ഛേദിക്കുന്നു. ഇവിടെ ഉണ്ടായ വ$_1$ ത, വ$_2$ ദ, മത, മദ എന്ന രേഖകളെ ചില പ്രത്യേകപേരുകളെക്കൊണ്ടറിയുന്നു. അതു പറയാം.

വ$_1$ ത — വ$_1$ ഗ എന്ന ചാപത്തിൻെറ സ്പർശകം അഥവാ താനകം.
വ$_2$ ദ — ,, ,, കോടിസ്പർശകം, കോടിതാനകം
മത — ,, ,, ഛേദകം
മദ — ,, ,, കോടിഛേദകം

വ$_1$ ഗ എന്ന ചാപം യ° എന്നുവെച്ചാൽ ഇവയെ ക്രമേണ, താ (യ°), കോ. താ (യ°), ഛേ (യ°), കോ. ഛേ (യ°) എന്നെഴുതാറുണ്ടു്. ഇവയും ഭുജകോടിജ്യാവുകളും തമ്മിൽ പല ബന്ധങ്ങ

ളും ഉണ്ടു്. അവയെ വിവരിക്കാം. വ്യാസാർദ്ധമായ ബന്ധം വിശദീകരിപ്പാൻ വ്യാസാർദ്ധത്തെ ര എന്നു സൂചിപ്പിച്ചു് അന്ത്യഘട്ടങ്ങളിൽ മാത്രം ര എന്നതിന്നുപകരം 1 എന്നുവെയ്ക്കുന്നതാണു്. ഇതു പ്രത്യേകം ഓർത്തിരിക്കണം.

മഭഗ, മവ$_1$ത എന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശങ്ങളാകുന്നു.

$$\therefore \frac{\text{വ}_1\text{ത}}{\text{ഭഗ}} = \frac{\text{മവ}_1}{\text{മഭ}}$$

മഗക, മദവ$_2$ ഇവയും സദൃശങ്ങളാകുന്നു.

$$\therefore \frac{\text{വ}_2\text{ദ}}{\text{കഗ}} = \frac{\text{മവ}_2}{\text{മക}}$$

$$\therefore \frac{\text{വ}_1\text{ത}}{\text{ഭഗ}} \times \frac{\text{വ}_2\text{ദ}}{\text{കഗ}} = \frac{\text{മവ}_1}{\text{മഭ}} \times \frac{\text{മവ}_2}{\text{മക}}.$$

എന്നാൽ,

$$\text{ഭഗ} = \text{മക}, \ \text{കഗ} = \text{മഭ}.$$

$$\therefore \quad \text{ഭഗ}.\ \text{കഗ} = \text{മക}.\ \text{മഭ}$$

അതിനാൽ,

$$\text{വ}_1\text{ത}. \quad \text{വ}_2\text{ദ} = \text{മവ}_1.\ \text{മവ}_2 = \text{ര}^2$$

$$\therefore \quad \text{താ}\ (\text{യ}^\circ).\ \text{കോ: താ}\ (\text{യ}^\circ) = \text{ര}^2 = 1. \qquad \text{I}$$

മഭഗ, മവ$_1$ത എന്നവയുടെ സാദൃശ്യത്തിൽനിന്നുതന്നെ.

$$\frac{\text{മത}}{\text{മഗ}} = \frac{\text{മവ}_1}{\text{മഭ}}$$

$$\therefore \ \text{മത}.\ \text{മഭ} = \text{മവ}_1.\ \text{മഗ} = \text{ര}^2.$$

$$\text{ഛേ}\ (\text{യ}^\circ).\ \text{കോ}\ (\text{യ}^\circ) = \text{ര}^2 = 1$$

അഥവാ,

$$\text{ഛേ}\ (\text{യ}^\circ) = \frac{\text{ര}^2}{\text{കോ}\ (\text{യ}^\circ)} = \frac{1}{\text{കോ}(\text{യ}^\circ)} \qquad \text{II}$$

മഗക, മദവ$_2$ എന്നവയുടെ സാദൃശ്യത്താൽ,

$$\frac{\text{മദ}}{\text{മഗ}}=\frac{\text{മവ}_2}{\text{മക}}$$

$$\therefore\ \text{മദ}.\ \text{മക}=\text{മവ}_2\times\text{മഗ}=\text{ര}^2.$$

$$\therefore\ \text{കോ: ഛേദ}\ (\text{യ}^\circ).\ \text{ഭു}\ (\text{യ}^\circ)=\text{ര}^2=1.$$

അഥവാ,

$$\text{കോ: ഛേദ}\ (\text{യ}^\circ)=\frac{\text{ര}^2}{\text{ഭു}\ (\text{യ}^\circ)}=\frac{1}{\text{ഭു}\ (\text{യ}^\circ)} \qquad \text{III}$$

ഇനിയും, മഭഗ, മവ$_1$ത എന്നവയുടെ സാദൃശ്യത്താൽ

$$\frac{\text{വ}_1\text{ത}}{\text{ഭഗ}}=\frac{\text{മവ}_1}{\text{മഭ}}$$

$$\therefore\ \text{വ}_1\text{ത}=\text{ഭഗ}\times\frac{\text{മവ}_1}{\text{മഭ}}=\text{മവ}_1\times\frac{\text{ഭഗ}}{\text{മഭ}}.$$

$$\therefore\ \text{താ}(\text{യ}^\circ)=\text{ര}.\ \frac{\text{ഭു}\ (\text{യ}^\circ)}{\text{കോ}(\text{യ}^\circ)}=\frac{\text{ഭു}\ (\text{യ}^\circ)}{\text{കോ}(\text{യ}^\circ)}. \qquad \text{IV}$$

മഗക, മദവ$_2$ എന്നവയുടെ സാദൃശ്യത്താൽത്തന്നെ

$$\frac{\text{വ}_2\text{ദ}}{\text{കഗ}}=\frac{\text{മവ}_2}{\text{മക}}$$

$$\text{വ}_2\text{ദ}=\text{കഗ}.\frac{\text{മവ}_2}{\text{മക}}=\text{മവ}_2.\frac{\text{കഗ}}{\text{മക}}.$$

$$\therefore\ \text{കോ: താ}\ (\text{യ}^\circ)=\text{ര}.\ \frac{\text{കോ}(\text{യ}^\circ)}{\text{ഭു}(\text{യ}^\circ)}=\frac{\text{കോ}(\text{യ}^\circ)}{\text{ഭു}(\text{യ}^\circ)} \qquad \text{V}$$

ഭുജജ്യാവർഗ്ഗവും കോടിജ്യാവർഗ്ഗവും കൂട്ടിയാൽ ത്രിജ്യാവർഗ്ഗത്തിന്നു തുല്യമാണല്ലോ.

$$ഭു^2(യ) + കോ^2(യ) = ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗം = ര^2.$$

രണ്ടുപക്ഷങ്ങളേയും ക്രമേണ ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗം, $കോ^2(യ)$ $ഭു^2(യ)$ ഇ വയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ,

$$\frac{ഭു^2(യ)}{ര^2} + \frac{കോ^2(യ)}{ര^2} = 1.$$

അഥവാ,

$$ഭു^2(യ) + കോ^2(യ) = ര^2 = 1. \qquad \text{VI—1}$$

$$\frac{ഭു^2(യ)}{കോ^2(യ)} + 1 = \frac{ര^2}{കോ^2(യ)} = \frac{1}{ര^2}\left(\frac{ര^2}{കോ(യ)}\right)^2$$

അഥവാ,

$$\frac{1}{ര^2}.\ താ^2(യ) + 1 = ഛേ^2(യ).\frac{1}{ര^2}$$

$$ഛേ^2(യ) = ര^2 + താ^2(യ).$$

$$\therefore\ ഛേ^2(യ) = 1 + താ^2(യ). \qquad \text{VI—2}$$

$$1 + \frac{കോ^2(യ)}{ഭു^2(യ)} = \frac{ര^2}{ഭു^2(യ)} = \frac{1}{ര^2}\left(\frac{ര^2}{ഭു(യ)}\right)^2$$

അഥവാ,

$$1 + \frac{കോ:താ^2(യ)}{ര^2} = കോ:ഛേ^2 യ.\frac{1}{ര^2}$$

$$കോ:ഛേ^2(യ) = ര^2 + കോ:താ^2(യ)$$

$$\therefore\ കോ:ഛേ^2(യ) = 1 + താ^2(യ) \qquad \text{VI—3}$$

ഭുജ, കോടി, താനകം, ഛേദകം മുതലായ വാക്കുകൾ ഉ ണ്ടായവിധം സ്മരിപ്പിക്കുവാനും അവ തമ്മിലുള്ള ക്ഷേത്രപരമായ

ബന്ധങ്ങൾ കണ്ടുകൊള്ളുവാനുംവേണ്ടി ഇതുവരെയുള്ള വിവരണങ്ങളെല്ലാം പുരാതനസമ്പ്രദായങ്ങൾ അനുസരിച്ചാണു്. ആ സമ്പ്രദായം ഭാവനോദ്ദീപകങ്ങളുമാണു്. ആധുനികപാശ്ചാത്യപുസ്തകങ്ങളിൽ ഭുജകോടിജ്യാവുകളേയും ഭുജകോടിതാനകങ്ങളേയും ഛേദകങ്ങളേയും ഭുജജ്യാവ്, കോടിജ്യാവ്, ത്രിജ്യാവ് ഇവയുടെ അനുപാതങ്ങൾ (Ratios) ആയിട്ടാണു് നിർവ്വചിച്ചിട്ടുള്ളതു്. അങ്ങിനെ നിർവ്വചിച്ച സൂത്രങ്ങൾ വരുത്തുമ്പോൾ വ്യാസാർദ്ധം 1 എന്നു കല്പിച്ച വിധത്തിൽ കിട്ടിയ ഫലങ്ങൾ കിട്ടുകയും ചെയ്യും. മേലാൽ സർവ്വത്ര വ്യാസാർദ്ധം ഒന്നു് എന്നുതന്നെ കല്പിച്ച ഫലങ്ങളേ ഉപയോഗിക്കയുള്ളു.

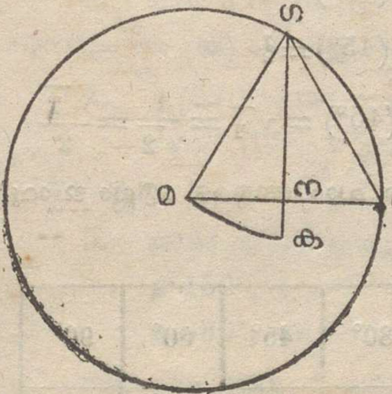
ഇനി 0°, 30°, 45°, 60°, 90° എന്നീ ചാപങ്ങളുടേയും കോണുകളുടേയും ജ്യാവുകൾ കാണാം.

ചാപം ശൂന്യമാണെങ്കിൽ ഭുജജ്യാവും, താനകജ്യാവും ശൂന്യമായിരിക്കുമെന്നു സ്പഷ്ടം. അതിനാൽ ത്രിജ്യാവായ 1നെ ഇവയെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടുന്ന കോടിഛേദകവും, കോടിതാനകവും അനന്തമായിരിക്കും. കോടിജ്യാവ് ത്രിജ്യാവിന്നു തുല്യമാകയാൽ 1തന്നെ. 1നെ കോടിജ്യാവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന ഛേദകജ്യാവും 1തന്നെയാണെന്നു സ്പഷ്ടം.

ചാപം 90° ആയിരിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ ഭുജജ്യാവ് വ്യാസാർദ്ധതുല്യമായ 1ഉം ഭുജജ്യാവിനെക്കൊണ്ടു 1നെ ഹരിച്ചുണ്ടാവുന്ന കോടിഛേദകവും 1തന്നെ. കോടിജ്യാവും കോടിതാനകവും ശൂന്യമെന്നു സ്പഷ്ടം. അതിനാൽ അവയുടെ വ്യുൽക്രമരാശികളായ ഛേദകജ്യാവും താനകവും അനന്തമായിരിക്കയും ചെയ്യും.

30°യുടേയും 60°യുടേയും ജ്യാവുകൾ കാണുവാൻ പറയുന്നു. പരിലേഖത്തിൽ ഒരു വൃത്തവും മവഗ എന്ന ഒരു സമഭുജത്രികോണവും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. വഗ എന്ന ചാപം 60°. ഇതു പ്രാഥമികക്ഷേത്രഗണിതത്തിൽനിന്നുതന്നെ സ്പഷ്ടമ

ത്രെ. ഗന എന്നതു മവ എന്ന വ്യാസാർദ്ധത്തിന്നു ലംബമാകുന്നു. വ്യാസാർദ്ധം 1 എന്നു സങ്കല്പിച്ചാൽ മന $=$ നവ $=\frac{1}{2}$ എന്നു സ്പഷ്ടം. അതിനാൽ ഗന $=\sqrt{1-(\frac{1}{2})^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ഇതു $60°$യുടെ ഭുജജ്യാവാകുന്നു. $60°$യുടെ കോടിജ്യാവ് $=$ മന $=\frac{1}{2}$. താനകജ്യാവ് $=$ ഭുജജ്യാ $\div$ കോടിജ്യാ $=\frac{\sqrt{3}}{2}\div\frac{1}{2}=\sqrt{3}$



പരിലേഖം 7

കോടിതാനകം $=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

ഛേദകജ്യാവു് $= 1 \div$ കോടിജ്യാവു് $= 2$. കോടിഛേദകജ്യാവു് $= 1 \div$ ഭുജജ്യാവു് $= 1 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

ഇനി ഗ കേന്ദ്രമായി മ എന്നതിൽക്കൂടി ഒരു വൃത്തം സങ്കല്പിച്ചാൽ മഗക എന്ന കോണും മക എന്ന ചാപവും $30°$യെന്നു സ്പഷ്ടം. മന അതിന്റെ ഭുജജ്യാവു് $=\frac{1}{2}$. ഗന അതിന്റെ കോടിജ്യാവ് $=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

അഥവാ ഭു$(30°)=$ ഭു$(90° - 60°)=$ കോ$(60°)=\frac{1}{2}$.

കോ$(30°)=$ കോ$(90° - 60°)=$ ഭു$(60°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ഇവയിൽനിന്നു മുമ്പത്തെപ്പോലെ താനകാദിജ്യാവുകളും വരുത്താം.

$45°$ വൃത്തപാദാർദ്ധമാകയാൽ അതിന്റെ ഭുജജ്യാവും കോടിജ്യാവും തുല്യമാകുന്നു. എന്നാൽ

$$\text{ഭു}^2(45°)+\text{കോ}^2(45°)=1$$

രണ്ടു ജ്യാവുകളും തുല്യമാകയാൽ

$$2\ \text{ഭു}^2(45^\circ)=2\ \text{കോ}^2(45^\circ)=1$$

$$\therefore\quad \text{ഭു}^2(45^\circ)=\text{കോ}^2(45^\circ)=\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore\quad \text{ഭു}\ (45^\circ)=\text{കോ}(45^\circ)=\sqrt{\tfrac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

താഴെ പട്ടികയിൽ മുമ്പറഞ്ഞ ചാപങ്ങളുടെ എല്ലാ ജ്യാവുകളും കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ചാപം	0°	30°	45°	60°	90°
ഭുജജ്യാ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
കോടിജ്യാ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
താനകജ്യാ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	α
കോടിതാനകജ്യാ	α	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
ഛേദകം	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	α
കോടിച്ഛേദകം	α	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

അഭ്യാസം

1. പട്ടികയിൽ കാണുന്ന ചാപങ്ങളുടെ ഭുജകോടിജ്യാവുകളിൽനിന്നു താനകാദി 4 ജ്യാവുകളും വരുത്തി പട്ടിക ശരിയോ എന്നു് ഒത്തു നോക്കുക.

2. താ(യ)$=\sqrt{3}$ എന്നതിൽനിന്നു ഛേദകജ്യാ വരുത്തി അതിൽനിന്നു മററു ജ്യാവുകൾ വരുത്തുക.

3. കോ: ഛേ (യ)$=2$ എന്നതിൽനിന്നു കോ: താ (യ) എന്നതും താ (യ) എന്നതും വരുത്തുക.

4. ഭു $(270°+$യ$°)=$ഭു $(270°-$യ$°)$ എന്നും

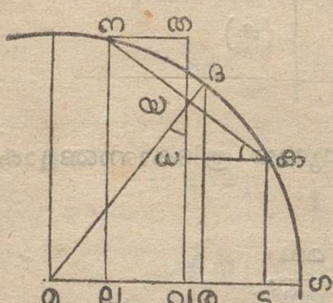
കോ$(270°+$യ$°)+$കോ$(270°-$യ$°)=0$ എന്നും കാണിക്കുക.

5. താഴെ പറയുന്ന ജ്യാവുകൾ കാണുക.

ഭു $150°$, കോ $210°$, ഭു $240°$, കോ $240°$,

ഭു $330°$, കോ $330°$, ഭു $(420°)$, കോ $840°$.

രണ്ടു ചാപങ്ങളുടെ ഭുജകോടിജ്യാവുകൾ അറിഞ്ഞാൽ അവയുടെ യോഗത്തിൻേറയും അന്തരത്തിൻേറയും ഭുജകോടിജ്യാവുകളെ കാണാം. പരിലേഖത്തിൽ മ വൃത്തകേന്ദ്രവും മഗ ഒരു വ്യാസാദ്ധവുമാകുന്നു. ഗദ എന്നതു രണ്ടു ചാപങ്ങളിലുംവെച്ചു വലിയതു്. ദക$=$ദന. ഇവ ചെറിയതുമാകുന്നു. വലിയതിൻെറ മാനം യ എന്നും ചെറിയതിൻെറ മാനം വ എന്നും വെയ്ക്കുക. എന്നാൽ, ഗത$=$യ$+$വ, ഗക$=$യ$-$വ. ഇവയുടെ ഭുജജ്യാവുകൾ നല, കട എന്നവ.



പരിലേഖം 8.

കോടിജ്യാവുകൾ മല, മട എന്നവ. ഗദ എന്ന വലിയ ചാപത്തിൻെറ ഭുജകോടിജ്യാവുകൾ ദര, മര എന്നവ. മദ എന്ന രേഖ കന എന്ന സമസ്തജ്യാവിനെ യ എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു. യവ എന്നതു മഗ എന്ന വ്യാസാദ്ധത്തിന്നു ലംബം. ഇതിനെ മേല്പോട്ടു നീട്ടി അതിലേയ്ക്കു നത എന്ന ലംബം വരഞ്ഞിരിക്കുന്നു. കധ എന്നതും ആ രേഖയിലേയ്ക്കുതന്നെ ലംബമാകു

ന്നു. നയ, യക ഇവ രണ്ടും നദ (=കദ) എന്ന ചെറിയ ചാപത്തിന്റെ ഭുജജ്യാവും, മയ എന്നതു അതിന്റെ കോടിജ്യാവുമാകുന്നു.

$$\angle\text{മയവ} + \angle\text{യമവ} = 90^\circ,\quad \angle\text{മയവ} + \angle\text{വയക} = 90^\circ.$$

$$\therefore\ \angle\text{മയവ} + \angle\text{യമവ} = \angle\text{മയവ} + \angle\text{വയക}.$$

$$\therefore\ \angle\text{യമവ} = \angle\text{വയക} (= \angle\text{ധയക})\ \therefore$$

$$\angle\text{യവമ} = \angle\text{യധക}\ (\text{സമകോണങ്ങൾ})$$

$$\therefore\ \angle\text{മയവ} = \angle\text{യകധ}.$$

അതിനാൽ, യധക, യമവ എന്ന ത്രികോണങ്ങൾ സദൃശങ്ങളാകുന്നു.

$$\therefore\ \frac{\text{യധ}}{\text{മവ}} = \frac{\text{യക}}{\text{മയ}} = \frac{\text{ധക}}{\text{യവ}}.$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\ \text{യധ} &= \text{യക}.\frac{\text{മവ}}{\text{മയ}}, \\ \text{ധക} &= \text{യക}.\frac{\text{യവ}}{\text{മയ}}. \end{aligned}\right\}\ (\text{ക})$$

യധക, യനത എല്ലാവിധത്തിലും തുല്യമായ ത്രികോണങ്ങളാകുന്നു. അതിനാൽ,

$$\left.\begin{aligned} \text{യത} &= \text{യധ} = \text{യക}.\frac{\text{മവ}}{\text{മയ}} = \text{യന}.\frac{\text{മവ}}{\text{മയ}}, \\ \text{നത} &= \text{ധക} = \text{യക}.\frac{\text{യവ}}{\text{മയ}} = \text{യന}\ \frac{\text{യവ}}{\text{മയ}}. \end{aligned}\right\}\ (\text{ഗ})$$

എന്നാൽ യമവ, ദമര എന്ന ത്രികോണങ്ങളുടെ സാദൃശ്യത്താൽ,

$$\frac{\text{മവ}}{\text{മയ}} = \frac{\text{മര}}{\text{മദ}},\qquad \frac{\text{യവ}}{\text{മയ}} = \frac{\text{ദര}}{\text{മദ}}$$

$$\therefore\ \text{മവ} = \text{മര}.\frac{\text{മയ}}{\text{മദ}},\ \text{യവ} = \text{ദര} \times \frac{\text{മയ}}{\text{മദ}}.\qquad (\text{ങ})$$

എന്നുമാത്രമല്ല,

$$യത = യധ = യക. \frac{മര}{മദ}, നത = ധക = യക. \frac{ദര}{മദ}.$$ (ജ) ഇ

തിൽനിന്നു്,

$$ഭു (യ + വ) = ലന = വത = വയ + യത$$

$$= രദ. \frac{മയ}{മദ} + യക. \frac{മര}{മദ}.$$ (ങ), (ജ) ഇവയിൽനിന്നു്.

$$= ഭു(യ). \frac{കോ(വ)}{1} + ഭു(വ). \frac{കോ(യ)}{1}$$

$$= \underline{ഭു(യ). കോ(വ) + ഭു(വ). കോ(യ)} \qquad \mathrm{I}$$

$$ഭു (യ — വ) = കട = ധവ = വയ — ധയ.$$

$$= രദ. \frac{മയ}{മദ} — യക. \frac{മര}{മദ}.$$ (ങ), (ജ) ഇവയിൽനിന്നു്.

$$= ഭു(യ). \frac{കോ(വ)}{1} — ഭു(വ). \frac{കോ(യ)}{1}$$

$$= \underline{ഭു(യ). കോ(വ) — ഭു(വ). കോ(യ)} \qquad \mathrm{II}$$

$$കോ(യ + വ) = മല = മവ — ലവ = മവ — നത.$$

$$= മര. \frac{മയ}{മദ} — യന. \frac{ദര}{മദ}.$$ (ങ), (ജ) ഇവയിൽനിന്നു്.

$$= കോ(യ). \frac{കോ(വ)}{1} — ഭു(വ) \frac{ഭു(യ)}{1}$$

$$= \underline{കോ(യ). കോ(വ) — ഭു(യ). ഭു(വ)} \qquad \mathrm{III}$$

$$\text{കോ}(\text{യ}-\text{വ})=\text{മട}=\text{മവ}+\text{വട}=\text{മവ}+\text{ധക}.$$

$$=\text{മര}.\frac{\text{മയ}}{\text{മദ}}+\text{യക}.\frac{\text{ദര}}{\text{മദ}}.\ (\text{ങ}),\ (\text{ജ})\ \text{ഇവയിൽനിന്നു്}.$$

$$=\text{കോ}(\text{യ}).\frac{\text{കോ}(\text{വ})}{1}+\text{ഭു}(\text{വ}).\frac{\text{ഭു}(\text{യ})}{1}$$

$$=\text{കോ}(\text{യ}).\ \text{കോ}(\text{വ})+\text{ഭു}(\text{വ}).\text{ഭു}(\text{യ}) \qquad \text{IV}$$

ഈ നാലും ത്രികോണഗണിതത്തിൽ മൌലികമായ സൂത്രങ്ങളാകുന്നു.

ഈ അവസരത്തിൽ പുതുമന സോമയാജിയുടെ കരണപദ്ധതി എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിലെ 8-ാം അദ്ധ്യായം 8-ാം ശ്ലോകത്തിൽ പറഞ്ഞതു കേരളീയൎക്കു രസകരമാകണം.

"അന്യോന്യകോടിഹതയോ-
രഭിമതഗുണയോസ്ത്രിജീവയാ ഹൃതയോഃ
യോഗവിയോഗൌ സ്യാതാ-
മഭിമതഗുണചാപയോഗവിവരഗുണൌ.

സാരം:—അന്യോന്യം കോടിജ്യാവുകളെക്കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു ത്രിജ്യാവുകൊണ്ടു ഹരിച്ച അഭിമതഭുജജ്യാവുകളുടെ യോഗവും അന്തരവും അഭിമതജ്യാവുകളിൽനിന്നുള്ള ചാപങ്ങളുടെ യോഗത്തിൻേറയും അന്തരത്തിൻേറയും ജ്യാവുകളാകുന്നു.

ഇതിൽ യോഗാന്തരചാപങ്ങളുടെ ഭുജജ്യാവുകളെ കാണുവാനേ പറഞ്ഞിട്ടുള്ളു. നാം ത്രിജ്യാവു് ഒന്നു് എന്നു സ്വീകരിക്കയാൽ ത്രിജ്യാവുകൊണ്ടുള്ള ഹരണം വേണ്ടെന്നുമാത്രം ഭേദം.

$$\text{ഭു}(\text{യ}+\text{വ})=\text{ഭു}(\text{യ}).\ \text{കോ}(\text{വ})+\text{കോ}(\text{യ}).\ \text{ഭു}(\text{വ})$$

എന്ന സൂത്രത്തിൽ വ എന്നതിന്നു യ എന്നു വെച്ചാൽ,

$$\text{ഭു}(2\text{യ})=\text{ഭു}(\text{യ})\ \text{കോ}(\text{യ})+\text{കോ}(\text{യ})\ \text{ഭു}(\text{യ})$$

$$\therefore\quad \text{ഭു}\ 2\text{യ}=2\ \text{ഭു}(\text{യ}).\ \text{കോ}(\text{യ}).$$

$$\text{കോ}(\text{യ}+\text{വ})=\text{കോ}(\text{യ}).\,\text{കോ}(\text{വ})-\text{ള}(\text{യ}).\,\text{ള}(\text{വ})$$

എന്ന സൂത്രത്തിൽ $\text{വ}=\text{യ}$ എന്നുവെച്ചാൽ,

$$\underline{\text{കോ}\ 2\text{യ}=\text{കോ}^2(\text{യ})-\text{ള}^2(\text{യ}).}$$

എന്നാൽ $\text{കോ}^2(\text{യ})=1-\text{ള}^2(\text{യ})$, $\text{ള}^2(\text{യ})=1-\text{കോ}^2(\text{യ})$

അതിനാൽ, $\text{കോ}(2\text{യ})=1-2\text{ള}^2(\text{യ})$, അഥവാ,

$$=2\text{കോ}^2(\text{യ})-1.$$

ഇതിൽനിന്നു $\text{ള}^2(\text{യ})=\dfrac{1-\text{കോ}(2\text{യ})}{2}$ എന്നും,

$$\text{കോ}^2(\text{യ})=\frac{1+\text{കോ}(2\text{യ})}{2}$$ എന്നും വരുന്നു.

$$\text{ള}(2\text{യ}+\text{യ})=\text{ള}(2\text{യ})\ \text{കോ}(\text{യ})+\text{കോ}(2\text{യ}).\,\text{ള}(\text{യ})$$
$$=2.\text{ള}(\text{യ}).\,\text{കോ}^2(\text{യ})+\text{ള}(\text{യ})\left(1-2\,\text{ള}^2(\text{യ})\right)$$
$$=2\,\text{ള}(\text{യ})\left(1-\text{ള}^2(\text{യ})\right)+\text{ള}(\text{യ})\left(1-2\text{ള}^2(\text{യ})\right)$$

$$\therefore\ \text{ള}(3\text{യ})=\underline{3\,\text{ള}(\text{യ})-4.\,\text{ള}^3(\text{യ})}$$

$$\text{കോ}(2\text{യ}+\text{യ})=\text{കോ}\ 2\text{യ}.\ \text{കോയ}-\text{ള}(2\text{യ}).\,\text{ള}(\text{യ})$$
$$=\left(2\text{കോ}^2(\text{യ})-1\right)\text{കോയ}-2\left(1-\text{കോ}^2(\text{യ})\right).\ \text{കോ}.(\text{യ})$$

$$\therefore\ \text{കോ}(3\text{യ})=\underline{4\ \text{കോ}^3(\text{യ})-3\ \text{കോ}(\text{യ})}$$

$$\text{താ}(\text{യ}+\text{വ})=\frac{\text{ള}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{കോ}(\text{യ}+\text{വ})}$$
$$=\frac{\text{ള}(\text{യ}).\,\text{കോ}(\text{വ})+\text{കോ}(\text{യ}).\,\text{ള}(\text{വ})}{\text{കോ}(\text{യ}).\,\text{കോ}(\text{വ})-\text{ള}(\text{യ}).\,\text{ള}(\text{വ})}$$

അംശഛേദങ്ങളെ $\text{കോ}(\text{യ}).\,\text{കോ}(\text{വ})$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ,

$$\text{താ}(\text{യ}+\text{വ})=\frac{\text{താ}(\text{യ}).+\text{താ}(\text{വ})}{1-\text{താ}(\text{യ}).\ \text{താ}(\text{വ})}$$

ഈ ഫലത്തിൽ $\text{വ}=\text{യ}$ എന്നുവെച്ചാൽ,

$$\text{താ}(2\text{യ})=\frac{2\ \text{താ}(\text{യ})}{1-\text{താ}^{2}(\text{യ})}.$$

$$\text{കോ:താ}(\text{യ}+\text{വ})=\frac{\text{കോ}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{ജ്യ}(\text{യ}+\text{വ})}$$

$$=\frac{\text{കോ}(\text{യ}).\ \text{കോ}(\text{വ})-\text{ജ്യ}(\text{യ}).\ \text{ജ്യ}(\text{വ})}{\text{ജ്യ}(\text{യ}).\ \text{കോ}(\text{വ})+\text{കോ}(\text{യ}).\ \text{ജ്യ}(\text{വ})}$$

അംശച്ഛേദങ്ങളെ $\text{ജ്യ}(\text{യ}).\ \text{ജ്യ}(\text{വ})$ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ,

$$\text{കോ:താ}(\text{യ}+\text{വ})=\frac{\text{കോ: താ}(\text{യ}).\ \text{കോ: താ}(\text{വ})-1}{\text{കോ: താ}(\text{യ})+\text{കോ: താ}(\text{വ})}$$

ഈ ഫലത്തിൽ $\text{വ}=\text{യ}$ എന്നുവെച്ചാൽ,

$$\text{കോ: താ}(2\text{യ})=\frac{\text{കോ: താ}^{2}(\text{യ})-1}{2\ \text{കോ: താ}(\text{യ})}$$

$$\begin{aligned}\text{ജ്യ}(\text{യ}+\text{വ})+\text{ജ്യ}(\text{യ}-\text{വ})\\ &=\text{ജ്യ}(\text{യ}).\ \text{കോ}(\text{വ})+\text{കോ}(\text{യ})\ \text{ജ്യ}(\text{വ})\\ &\quad+\text{ജ്യ}(\text{യ}).\ \text{കോ}(\text{വ})-\text{കോ}(\text{യ})\ \text{ജ്യ}(\text{വ}).\\ &=2\ \text{ജ്യ}(\text{യ}).\ \text{കോ}(\text{വ}).\end{aligned}$$

ഇവിടെ $(\text{യ}+\text{വ})$ എന്നതിന്നു മ എന്നും $(\text{യ}-\text{വ})$ എന്നതിന്നു ന എന്നും വെച്ചാൽ,

$$\text{യ}=\frac{\text{മ}+\text{ന}}{2},\quad \text{വ}=\frac{\text{മ}-\text{ന}}{2}$$

$$\therefore\ \text{ജ്യ}(\text{മ})+\text{ജ്യ}(\text{ന})=2.\ \text{ജ്യ}\left(\frac{\text{മ}+\text{ന}}{2}\right)\text{കോ}\left(\frac{\text{മ}-\text{ന}}{2}\right)\qquad \text{I}$$

$$ള(യ+വ)—ള(യ—വ)$$

$$=ള(യ). കോ(വ)+കോ(യ). ള(വ)$$

$$—\left(ള(യ). കോ(വ)—കോ(യ). ള(വ)\right)$$

$$=2 കോ(യ). ള(വ).$$

(യ+വ)=മ എന്നും (യ—വ)=ന എന്നും വെച്ചാൽ,

$$ള(മ)—ള(ന)=2 കോ \left(\frac{മ+ന}{2}\right) ള \left(\frac{മ—ന}{2}\right) \qquad \text{II}$$

$$കോ(യ+വ)+കോ(യ—വ)$$

$$=കോ(യ). കോ(വ)—ള(യ). ള(വ)$$

$$+കോ(യ). കോ(വ)+ള(യ). ള(വ)$$

$$=2 കോ(യ). കോ(വ)$$

(യ+വ)=മ എന്നും (യ—വ)=ന എന്നും വെച്ചാൽ,

$$കോ(മ)+കോ(ന)=2. കോ \left(\frac{മ+ന}{2}\right) കോ \left(\frac{മ—ന}{2}\right) \qquad \text{III}$$

$$കോ(യ+വ)—കോ(യ—വ)$$

$$=കോ(യ). കോ(വ)—ള(യ). ള(വ)$$

$$—\left(കോ(യ). കോ(വ)+ള(യ). ള(വ)\right).$$

$$=—2. ള(യ). ള(വ)$$

(യ+വ)=മ എന്നും (യ—വ)=ന എന്നും വെച്ചാൽ,

$$കോ(മ)—കോ(ന)=—2 ള \left(\frac{മ+ന}{2}\right). ള \left(\frac{മ—ന}{2}\right) \qquad \text{IV}$$

ഈ നാലും ചില യോഗാന്തരങ്ങളെ ഘാതങ്ങളാക്കുവാൻ ഉപയോഗമുണ്ടു്.

ഉദാഹരണം 1. ള(യ)+കോ(യ) എന്നതിനെ ഘാതരൂപത്തിലാക്കുക.

$$\text{ള}(\text{യ}) + \text{കോ}(\text{യ}) = \text{ള}(\text{യ}) + \text{ള}(90^\circ - \text{യ})$$

$$= 2.\ \text{ള}\left(\frac{\text{യ} + 90^\circ - \text{യ}}{2}\right).\ \text{കോ.}\left(\frac{\text{യ} - 90^\circ + \text{യ}}{2}\right)$$

$$= 2.\ \text{ള.}\ (45^\circ).\ \text{കോ}(\text{യ} - 45^\circ)$$

ഉദാഹരണം 2. $\text{ള}(5\text{യ} + 3\text{വ}) - \text{ള}(\text{യ} - \text{വ})$

$$= 2\text{കോ}\left(\frac{5\text{യ} + 3\text{വ} + \text{യ} - \text{വ}}{2}\right)\ \text{ള}\left(\frac{5\text{യ} + 3\text{വ} - \text{യ} + \text{വ}}{2}\right)$$

$$= 2\ \text{കോ.}\ (3\text{യ} + \text{വ}).\ \text{ള}(2\text{യ} + 2\text{വ})$$

$$= 4.\ \text{കോ}\ (3\text{യ} + \text{വ}).\ \text{കോ}\ (\text{യ} + \text{വ})\ \text{ള.}\ (\text{യ} + \text{വ})$$

അഭ്യാസം

1. താഴെ കാണുന്നവ സ്ഥാപിക്കുക.

(i) $\dfrac{1 - \text{കോ}\ (2\text{യ})}{1 + \text{കോ}\ (2\text{യ})} = \text{താ}^2(\text{യ}).$

(ii) $\dfrac{\text{ള}(2\text{യ})}{1 + \text{കോ}\ (2\text{യ})} = \text{താ}(\text{യ})$

(iii) $\dfrac{\text{ള}\ (2\text{യ})}{1 - \text{കോ}\ (2\text{യ})} = \text{കോ:}\ \text{താ}\ (\text{യ})$

2. $\text{ള}\ (30^\circ) = \frac{1}{2}$ എന്നതിൽനിന്നു കോ 30°യും അതിൽ നിന്നു ള 15°യും കോ 15°യും കാണുക.

3. $\text{കോ}(2\text{യ}) = \dfrac{1 - \text{താ}^2(\text{യ})}{1 + \text{താ}^2(\text{യ})}$ എന്നും,

$\text{ള}\ (2\text{യ}) = \dfrac{2\text{താ}(\text{യ})}{1 + \text{താ}^2(\text{യ})}$ എന്നും കാണിക്കുക.

4. $യ + വ + ര = 180^\circ$ എങ്കിൽ

(i) $ജ(യ) + ജ(വ) + ജ(ര)$

$$= 4\ കോ\left(\frac{യ}{2}\right) .\ കോ\left(\frac{വ}{2}\right) .\ കോ\left(\frac{ര}{2}\right)$$

(ii) $ജ(യ) - ജ(വ) + ജ(ര)$

$$= 4\ ജ\left(\frac{യ}{2}\right) .\ കോ\left(\frac{വ}{2}\right) .\ ജ\left(\frac{ര}{2}\right)$$

ഇവ സ്ഥാപിക്കുക.

5. $ജ(2യ) = കോ\ (3യ)$ എങ്കിൽ $യ = 18^\circ$ എന്നു കാണിക്കുക. അതിന്നുശേഷം സമീകാരത്തിൽനിന്നു $ജ\ (18^\circ) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ എന്നു കാണിക്കുക.

വ്യസ്തജ്യാവൃകം

$ജ(യ) = ദ$ എന്നുവെയ്ക്കുക. ഇവിടെ യ എന്നതു് ഒരു ചാപത്തിന്റെയോ, അതു വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽ അഭിമുഖീകരിക്കുന്ന കോണിന്റെയോ അളവും, ജ(യ) അല്ലെങ്കിൽ ദ എന്നതു് ആ ചാപത്തിൽനിന്നോ കോണിൽനിന്നോ ഉണ്ടാവുന്ന ജജ്യാവുമാകുന്നു. ഈ ജജ്യാവിനെ യ എന്നതിന്റെ ഒരു 'വൃത്തി'യെന്നു പറയാം. ഈ സംഗതിയെ $വൃ(യ) = ജ(യ)$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ജ(യ) എന്നതു യ എന്നതിന്റെ ഒരു പ്രത്യേകവൃത്തിയെന്നു സാരം. മററു വൃത്തികളെ $വൃ_1(യ)$, $വൃ_2(യ)$, $വൃ_3(യ)$ മുതലായ ചിഹ്നങ്ങളെക്കൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കയും ചെയ്യുന്നു. ദ എന്നതു യ എന്നതിന്റെ അതാതു മാനങ്ങളിൽനിന്നു് ഈ പ്രത്യേകവൃത്തി വഴിയായി ഉണ്ടാകുന്ന ഫലങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

യ എന്നതിൽനിന്നു ദ എന്നതിന്റെ മാനത്തെ വരുത്തുന്നതുപോലെ ദ എന്നതിൽനിന്നു് അതിന്റെ ഒരു പ്രത്യേകവൃത്തി

വഴിയായി യ എന്നതിന്റെ മാനവും വരുത്താം. ദ എന്നതിന്റെ ആ വൃത്തിയെ വൃ(യ) എന്നതിന്റെ വ്യസ്തവൃത്തിയെന്നു പറകയും $വൃ^{-1}$(യ) എന്നു സൂചിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. വൃ(യ)=ദ എങ്കിൽ $വൃ^{-1}$(ദ)=യ. പ്രസ്തുത ഉദാഹരണത്തിൽ ഭു(യ)=ദ എങ്കിൽ $ഭു^{-1}$(ദ)=യ. $ഭു^{-1}$(ദ) എന്നതിനെ ദ എന്നതിന്റെ വ്യസ്തഭുജജ്യാവെന്നു പറയുന്നു. അതുപോലെ $കോ^{-1}$(ദ), $താ^{-1}$(ദ) എന്നവയെ ക്രമേണ വ്യസ്തകോടിജ്യാവെന്നും വ്യസ്തതാനകജ്യാവെന്നും പറയുന്നു.

വേറെയൊരുദാഹരണവും പറയാം. $യ^2+2യ=ദ^2$ എങ്കിൽ $\sqrt{ദ^2+1}-1=യ$. ഇവിടെ $യ^2+2യ\equiv വൃ_1(യ)$ എങ്കിൽ $\sqrt{ദ^2+1}-1$ എന്നതു $വൃ_1^{-1}$ (ദ) ആകുന്നു.

യ, വ എന്ന രണ്ടു ചാപങ്ങളുടെ ഭുജജ്യാവുകൾ അറിഞ്ഞാൽ (യ+വ), (യ—വ) എന്നവയുടെ ഭുജകോടിജ്യാവുകളെ നമുക്കു കാണാം. ഇതുപയോഗിച്ചുതന്നെ ദ, ന എന്നു ഭുജജ്യാവുകളായ ചാപങ്ങളുടെ യോഗമോ അന്തരമോ എത്രയെന്നു നമുക്കു കാണാം.

ഉദാഹരണം 1. $ഭു^{-1}(ദ)+ഭു^{-1}(ന)$ എത്ര?

$ഭു^{-1}(ദ)=യ$, $ഭു^{-1}(ന)=വ$ എന്നു വെയ്ക്കുക. എന്നാൽ,

$ഭു(യ)=ദ$, $ഭു(വ)=ന$,

$കോ(യ)=\sqrt{1-ദ^2}$, $കോ(വ)=\sqrt{1-ന^2}$.

$$ഭു(യ+വ)=ഭു(യ).\,കോ(വ)+കോ(യ).\,ഭു(വ)$$

$$=ദ\sqrt{1-ന^2}+ന\sqrt{1-ദ^2}$$

$$\therefore\ ഭു^{-1}(ദ)+ഭു^{-1}(ന)=ഭു^{-1}\left\{ദ\sqrt{1-ന^2}+ന\sqrt{1-ദ^2}\right\}$$

ഉദാഹരണം 2. $താ^{-1}(ദ)+താ^{-1}(ന)$ എത്ര?

$താ^{-1}(ദ) = യ$ എന്നും $താ^{-1}(ന) = വ$ എന്നും വെയ്ക്കുക.

$$താ(യ + വ) = \frac{താ(യ) + താ(വ)}{1 - താ(യ).\ താ(വ)} = \frac{ദ + ന}{1 - ദ.\ ന}$$

$$\therefore\quad താ^{-1}(ദ) + താ^{-1}(ന) = താ^{-1}\left\{\frac{ദ + ന}{1 - ദ.\ ന}\right\}$$

ഉദാഹരണം 3. $2താ^{-1}\frac{1}{3} = താ^{-1}\frac{3}{4}$ എന്നു കാണിക്കുക.

$താ^{-1}\frac{1}{3} = യ$. എന്നാൽ $താ\ (യ) = \frac{1}{3}$.

$$താ(2യ) = \frac{2താ\ (യ)}{1 - താ^2(യ)} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore\quad 2താ^{-1}\frac{1}{3} = താ^{-1}\frac{3}{4}$$

ഉദാഹരണം 4. $താ^{-1}(\frac{1}{2}) + താ^{-1}(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$ എന്നു കാണിക്കുക.

2-ാം ഉദാഹരണത്തിൽനിന്നു്.

$$താ^{-1}\frac{1}{2} + താ^{-1}\frac{1}{3} = താ^{-1}\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}.\frac{1}{3}} = താ^{-1}1 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}.$$

ഉദാഹരണം 5. $4.താ^{-1}\frac{1}{5} - താ^{-1}\frac{1}{239}$ എത്ര?

$$2\ താ^{-1}\frac{1}{5} = താ^{-1}\frac{2 \times \frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}.\frac{1}{5}} = താ^{-1}.\frac{5}{12}.$$

$$4താ^{-1}\frac{1}{5} = 2.താ^{-1}\frac{5}{12} = താ^{-1}.\frac{2 \times \frac{5}{12}}{1 - \frac{25}{144}} = താ^{-1}\frac{120}{119}$$

$$\text{താ}^{-1}.\frac{120}{119}-\text{താ}^{-1}1.=\text{താ}^{-1}.\frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}\times 1}=\text{താ}^{-1}.\frac{1}{239}$$

$$\therefore\ \text{താ}^{-1}\frac{120}{119}-\frac{\pi}{4}=\text{താ}^{-1}.\frac{1}{239}$$

$$\therefore\ \text{താ}^{-1}\frac{120}{119}-\text{താ}^{-1}.\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\ 4\text{താ}^{-1}\frac{1}{5}-\text{താ}^{-1}\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$$

വരഗണിതം

അദ്ധ്യായം 7

ഏകസമാകലനങ്ങൾ

3യ + 7 എന്നതു യ എന്ന ചലരാശിയിൽ ഒരു വ്യഞ്ജകമാകുന്നു. അഥവാ അതു യ എന്ന ചലരാശിയുടെ ഒരു വൃത്തിയാകുന്നു. ഈ വസ്തുതയെ വൃ(യ) ≡ 3യ + 7 എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇവിടെ യ എന്നതു് ഒരു സ്വയംചലവും വൃ(യ) എന്നതു് അനുചലവുമാകുന്നു. സ്വയംചലത്തിന്നു −2, −1, 0, +1, +2 മുതലായ വിലകൾ കല്പിക്കുമ്പോൾ വൃ(യ) എന്ന അനുചലത്തിന്നു +1, +4, +7, +10, +13 മുതലായ വിലകൾ മാറി മാറി വരുന്നു.

അനുചലത്തെ ര എന്നു സൂചിപ്പിച്ചാൽ ര = 3യ + 7. അതിനാൽ $\text{യ} = \frac{\text{ര} - 7}{3}$. ഇവിടെ ര എന്നതിനെ സ്വയംചലമെന്നും, യ എന്നതിനെ അനുചലമെന്നും കല്പിക്കാം. എന്നുവെച്ചാൽ യ എന്നതിനെ ര എന്നതിൻെറ ഒരു വൃത്തിയായി കല്പിക്കാം. അഥവാ $\text{യ} \equiv \text{വൃ}_1(\text{ര}) \equiv \frac{\text{ര} - 7}{3}$. വൃ എന്നും വൃ_1 എന്നും ഉള്ളവ അന്യോന്യം വ്യസ്തമായ വൃത്തികളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ര എന്നതിന്നു −2, −1, 0, +1, +2 എന്ന വിലകൾ കല്പിക്കുമ്പോൾ യ എന്നതിന്നു $-3, -\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, -2, -\frac{5}{3}$ മുതലായ പരിമാണങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നു. സാമാന്യമായി രണ്ടു ചലരാശികളെ ഒരു സമീകാരംകൊണ്ടു ബന്ധിപ്പിച്ചിരുന്നാൽ, ഒന്നിനെ സ്വയംചലമെന്നും മറേറതിനെ അനുചലമെന്നും കരുതാം.

3യ + 7 എന്നതിൽ സ്വയംചലത്തിൽ വരുന്ന മാററങ്ങളുടെ 3 മടങ്ങായിട്ടാണു് വൃത്തിയിൽ വരുന്ന മാററങ്ങളെ കാണുന്നതു്. അതേവിധത്തിൽ $\frac{\text{ര}-7}{3}$ എന്ന വൃത്തിയിൽ സ്വയംചലത്തിൽ വരുന്ന മാററങ്ങളുടെ മൂന്നിലൊന്നായിട്ടാണു് വൃത്തിയിൽ വരുന്ന മാററങ്ങൾ കാണുന്നതു്. ഇങ്ങിനെ എല്ലായ്പോഴും സ്വയംചലത്തിൽ വരുന്ന മാററങ്ങളുടെ ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യാഗുണിതമാകണമെന്നില്ല വൃത്തിയിൽ വരുന്ന മാററങ്ങൾ. ഉദാഹരണമായി യ എന്നതിൻെറ മറെറാരു വൃത്തിയെ പരിശോധിക്കാം.

$$\text{വൃ}_2(\text{യ}) \equiv \text{യ}^2 - 3\text{യ} + 7.$$

എന്നു വെയ്ക്കുക. യ എന്നതിൻെറ പരിമാണവും അതനുസരിച്ചുള്ള വൃത്തിയുടെ പരിമാണവും താഴെ പട്ടികയിൽ കാണിക്കുന്നു.

യ	−5	−4	−3	−2	−1	0	+1	+2	+3	+4	+5
വൃ_2(യ)	+47	+35	+25	+17	+11	+7	+5	+5	+7	+11	+17

ഇവിടെ യ എന്നതിന്നു് ഒരേ നിരപ്പിൽ മാററം വരുന്നു. എന്നാൽ വൃത്തിയിൽ മാററം പല സ്ഥാനത്തും പലവിധമാകുന്നു. യ എന്നതു −5 തൊട്ടു +5 വരെ അധികമധികമായി മാറുമ്പോൾ വൃത്തിയിൽ ക്രമേണ −12, −10, −8, −6, −4, −2, 0, +2, +4, +6 എന്നുള്ള മാററങ്ങൾ സംഭവിക്കുന്നു. യ = +1 ന്നു് വൃ(യ) = 5, യ = +2 ന്നു് വൃ(യ) = 5. അതിനാൽ ഈ ഇടയിൽ ശരാശരി മാററം ശൂന്യമാകുന്നു. യ = 2 ന്നു് വൃ(യ) = +5, യ = 3 ന്നു് വൃ(യ) = 7. അതിനാൽ ഈ ഇടയിൽ ശരാശരി മാററം $\frac{7-5}{3-2} = 2$. യ = 3 ന്നു് വൃ(യ) = +7, യ = +4 ന്നു് വൃ(യ) = 11. അതിനാൽ ഈ ഇടയിൽ ശരാശരി മാററം $= \frac{11-7}{4-3} = 4$. ഇവയെല്ലാം ശരാശരി മാററങ്ങളാണു്. എ

ന്നാൽ യ ഒരു പ്രത്യേകഘട്ടത്തിലെത്തുമ്പോൾ, വൃത്തിയിൽ വരുന്ന മാററത്തിൻെറ കൃത്യമായ തോതു് എന്താണെന്നു കാണുവാൻ ഒരുപായം വേണം. അതു താഴെ പറയുന്നു.

യ എന്നതിന്നു ല എന്ന ഒരു ലഘുസംഖ്യയോളം മാററം വരുമ്പോൾ വൃത്തിയിൽ വരുന്ന മാററം—അതും ലഘുവായിരിക്കും മിക്കപ്പോഴും—എന്തെന്നു കാണാം. അതിനെ ല കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ, ആ ചുരുങ്ങിയ ഇടയിൽ മാററത്തിൻെറ തോതു കിട്ടും. പിന്നീടു് ഈ ഇട ചുരുക്കി അണുപ്രായമാക്കിയാൽ യ എന്ന സ്ഥാനത്തുള്ള മാററത്തിൻെറ കൃത്യമായ തോതും കാണാം.

$$\text{ശരാശരി തോതു്} = \frac{\text{വൃ}_2(\text{യ}+\text{ല}) - \text{വൃ}_2(\text{യ})}{(\text{യ}+\text{ല}) - \text{യ}}$$

$$= \frac{\{(\text{യ}+\text{ല})^2 - 3(\text{യ}+\text{ല}) + 7\} - (\text{യ}^2 - 3\text{യ} + 7)}{\text{ല}}$$

$$= \frac{(2\text{യ} - 3)\text{ല} + \text{ല}^2}{\text{ല}} = (2\text{യ} - 3) + \text{ല}.$$

$$\text{കൃത്യമായ തോതു്} = \underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}} \left\{ (2\text{യ} - 3) + \text{ല} \right\} = \underline{2\text{യ} - 3}$$

ഇതിൻെറ സാരം യ എന്നതുകൊണ്ടു സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഘട്ടത്തിൽ വൃത്തിയിൽ വരുന്ന മാററത്തിൻെറ തോതു് $(2\text{യ} - 3)$ എന്നാകുന്നു. ഈ തോതിന്നു $\text{യ}^2 - 3\text{യ} + 7$ എന്ന വൃത്തിയുടെ യ—ബന്ധിയായ <u>ഭേദകഗുണം</u> എന്നു പറയുന്നു. ശൂന്യപ്രായമായ ല എന്നതിനെ യ എന്നതിൻെറ <u>ഭേദകം</u> എന്നു പറയുന്നു. ഭേദകത്തെ ഭേദകഗുണംകൊണ്ടു പെരുക്കിയാൽ യ എന്നതിൻെറ വൃത്തിയിൽ വരുന്ന ലഘുഭേദകമുണ്ടാകുന്നു. ഇതു വൃത്തിഭേദകം. ല എന്ന ഭേദകത്തേയും വൃത്തിഭേദകത്തേയും ക്രമേണ ഭംയ എന്നും ഭംവൃ$_2$(യ) എന്നും സൂചിപ്പിക്കാം. അപ്പോൾ,

$$\text{ഭംവൃ}_2(\text{യ}) = (2\text{യ} - 3)\ \text{ഭംയ}.$$

ഇവിടെ സ്വയംചലത്തിലും അതിൻെറ വൃത്തിയിലും വരു

ന്ന ഭേദങ്ങൾ അണുപ്രായങ്ങളാകയാൽ അവയെ <u>അണുകങ്ങൾ</u> എന്നു പറയുന്നു. ഈ അർത്ഥത്തിൽ ഭംയ, ഭംവൃ$_2$(യ) എന്നവയെ വെവ്വേറെ മാനങ്ങളെന്ന നിലയിൽ വേർപെടുത്തി സംകലനാദിക്രിയകൾ ചെയ്യാം. എന്നാൽ അവ കേവലശൂന്യങ്ങളാകുമ്പോൾ അവയുടെ തോതു സ്ഥിരമായി ക്ലിപ്തമായ സംഖ്യയെന്ന നിലയെ സ്വീകരിക്കുന്നു. അതാണു് ഭേദകഗുണം അഥവാ ഭേദകഗുണകം. ഭേദകഗുണത്തെ

$$\frac{\text{ഭംവൃ(യ)}}{\text{ഭംയ}} \text{ എന്നോ } \frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}} \text{ വൃ (യ).}$$

എന്നോ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇങ്ങിനെ എഴുതുന്നേടത്തൊക്കെ യ എന്നതിലെ അണുഭേദം കേവലശൂന്യമാകുന്ന അവധിയെ പ്രാപിച്ചുവെന്നു സങ്കല്പിക്കുന്നു. അവിടെ $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}$ എന്നതു ക്രിയാവിശേഷം മാത്രമാകുന്നു. ഈ ക്രിയാവിശേഷം വൃത്തിമേൽ ചെയ്യേണ്ടതുമാണു്.

ഉദാഹരണത്തിൽ ഭേദകഗുണം (2യ—3) എന്നു കണ്ടു. അതിനാൽ യ=—3 എന്ന ഘട്ടത്തിൽ മാററത്തിൻെറ തോതു് —9, യ=4 എന്ന ഘട്ടത്തിൽ തോതു് 5, യ=5 എന്ന ഘട്ടത്തിൽ തോതു് 7 എന്നിങ്ങിനെ വരുന്നു. ഈ ഘട്ടങ്ങളിൽ യ എന്നതിലുള്ള വർദ്ധനവു് ഒന്നിന്നു വൃത്തിയിലേതു —9, +5, +7 എന്നിവിധം വർദ്ധിക്കുന്നു. തോതിന്നു നിലനില്പില്ല. അതു ക്ഷണികമാകുന്നു.

ഭേദകഗുണത്തെ പ്രതിപാദിക്കുന്ന വരഗണിതശാഖയ്ക്കു <u>ഭേദകഗണിതമെന്നു</u> പറയുന്നു. ചില രാശിയിലെ ഭേദകാണുകത്തെ ഭേദകഗുണംകൊണ്ടു പെരുക്കിയാൽ വൃത്തിയിലെ ഭേദകാണുകമുണ്ടാകുമെന്നു കണ്ടുവല്ലോ. എന്നിരിക്കെ, ചലരാശിയുടെ ശൂന്യംതൊട്ടു് ഒരു പ്രത്യേകവിലവരെയുള്ള സകലവൃത്തിഭേദകാണുകങ്ങളേയും ഒന്നിച്ചു സംകലനം ചെയ്താൽ ആ പ്രത്യേകവിലയ്ക്കു

വൃത്തിയുടെ വില വരുമെന്നു സ്പഷ്ടമത്രെ. പക്ഷേ ഇതു യ$=0$ എന്ന സ്ഥാനത്തുനിന്നു കയറിയ വില മാത്രമാകുന്നു. ചലരാശിയുടെ പ്രത്യേകവില യ എന്നുതന്നെ വെയ്ക്കുക. എന്നാൽ സങ്കലനഫലമായി ചലരാശിയുടെ വൃത്തിയിൽ യ കലന്ന ഭാഗമെല്ലാം ഉണ്ടാകും. ചലരാശിയെ ആശ്രയിക്കാതെ സ്ഥിരമായി നില്ക്കുന്ന ഭാഗം മാത്രം ഇതിൽ ഉൾപ്പെടുകയില്ല. ഇങ്ങിനെ ചെയ്യുന്ന സങ്കലനത്തെ അഥവാ സമാകലനത്തെ,

$$\int_0^{\text{യ}} \left\{ \frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}} \text{വൃയ} \right\} \text{ഭംയ}$$

എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതുന്നു. ഉദാഹരണത്തിൽ ഭേദകഗുണം (2യ—3). അതിനാൽ ഇവിടെ സമാകലനത്തെ,

$$\int_0^{\text{യ}} (2\text{യ} - 3)\, \text{ഭംയ}$$

എന്നെഴുതുന്നു. ഇങ്ങിനെയുള്ള സമാകലനത്തെ പ്രതിപാദിക്കുന്ന വരഗണിതശാഖയ്ക്കു <u>സമാകലഗണിതമെന്നു</u> പറയുന്നു. സമാകലനത്തെ ചെയ്യുന്ന ഇടയുടെ അതിരുകൾ സ്പഷ്ടമായുള്ളപ്പോഴേ സമാകലനത്തെ $\int_0^{\text{യ}}$ എന്ന രൂപത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കാറുള്ളു. അല്ലെങ്കിൽ $\int$ എന്നു മാത്രം കാണിക്കും. ഈ അടയാളം യവനഭാഷയിലെ സ (=s) എന്ന ലിപിയുടെ ഒരു രൂപവിശേഷമാകുന്നു. സ എന്ന ലിപിയുടെ വലത്തെ അററം എന്നും സങ്കല്പിക്കാം.

ഇനി വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ അഥവാ വൃത്തികളുടെ അവയവങ്ങളായി വരുന്ന പദങ്ങളുടെ ഭേദകഗുണങ്ങളെ കാണാം. ഇവയെ യഥാസ്ഥിതി കലർത്തി വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഭേദകഗുണങ്ങളെത്തന്നെ അനായാസേന കാണുവാനും സാധിക്കും.

(1) യാതൊരു മാററവും വരാത്ത ദൃഢരാശിയുടെ ഭേദക ഗുണം ശൂന്യമെന്നു സ്പഷ്ടം. ദൃഢരാശിയെ ഢ എന്നു സൂചിപ്പി ച്ചാൽ,

$$\frac{\text{ഭം}\text{ഢ}}{\text{ഭം}\text{യ}}=0.$$

(2) $\text{യ}^{\text{ക}}$ എന്നതിൽ യ ചലരാശിയും ക സ്ഥിരരാശിയു മാകുന്നു.

$$\frac{\text{ഭം}.\text{യ}^{\text{ക}}}{\text{ഭം}\text{യ}}=\text{ധി}_{\text{ല}=0}\ \frac{(\text{യ}+\text{ല})^{\text{ക}}-\text{യ}^{\text{ക}}}{(\text{യ}+\text{ല})-\text{യ}.}$$

$$=\text{ധി}_{\text{ല}=0}\frac{\text{യ}^{\text{ക}}+\frac{\text{ക}}{1}\text{യ}.^{\text{ക}-1}\text{ല}+\frac{\text{ക}(\text{ക}-1)}{1\cdot2}.\text{യ}.^{\text{ല}-2}\text{ല}^2+\ldots-\text{യ}^{\text{ക}}}{\text{ല}}$$

$$=\text{ധി}_{\text{ല}=0}\left\{\frac{\text{ക}}{1}.\text{യ}^{\text{ക}-1}+\frac{\text{ക}(\text{ക}-1)}{1\cdot2}.\text{യ}.^{\text{ക}-2}\text{ല}+\ldots\ldots\right\}$$

$$=\text{ക}.\ \text{യ}^{\text{ക}-1}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{ഭം}\text{യ}^{\text{ക}}}{\text{ഭം}\text{യ}}=\text{ക}.\ \text{യ}^{\text{ക}-1}$$

$\text{ക}=0$ എങ്കിൽ, $\text{യ}^{\text{ക}}=1$. ഇതു് ഒരു ദൃഢരാശിയായതിനാൽ അവിടെ ഈ നിയമം നോക്കേണ്ടതില്ല.

$$\frac{\text{ഭം}\text{യ}^{\text{ക}}}{\text{ഭം}\text{യ}}=\text{ക}.\ \text{യ}^{\text{ക}-1}$$

$$\therefore\quad \text{ഭം}\text{യ}^{\text{ക}}=\text{ക}.\text{യ}.^{\text{ക}-1}\text{ഭം}\text{യ}$$

ഇവിടെ ഇടത്തും വലത്തുമുള്ളവ $\text{യ}^{\text{ക}}$ എന്നതിൽ വരുന്ന ഭേദക ങ്ങളാകുന്നു. അതിനാൽ ഈ ഭേദകങ്ങളെല്ലാംകൂടി കൂട്ടിയാൽ ശൂന്യംതൊട്ടു യ വരെയുള്ള ഭേദകങ്ങളെല്ലാംകൂടി കൂട്ടിയതെന്നു വരുന്നു. അതായതു് $\text{യ}^{\text{ക}}$ എന്നു കിട്ടും. അതിനാൽ,

$$\int \text{ക}.\text{യ}^{\text{ക}-1}\,\text{ഭം}\text{യ} = \int \text{ഭം}.\text{യ}^{\text{ക}} = \text{യ}^{\text{ക}}.$$

ക ഒരു നിശ്ചിതസംഖ്യമാത്രമാകയാൽ, അത്ര $\text{യ}.^{\text{ക}-1}\text{ഭം}\text{യ}$ എന്ന ഭേദകങ്ങൾ കൂട്ടിയാൽ $\text{ക}.\text{യ}^{\text{ക}-1}\text{ഭം}\text{യ}$ എന്നതിലെ ഭേദകം കിട്ടും. അതിനാൽ $\int \text{ക}.\text{യ}^{\text{ക}-1}\text{ഭം}\text{യ}$ എന്നതു $\text{ക}.\int \text{യ}.^{\text{ക}-1}\text{ഭം}\text{യ}$ എന്നതിന്നു തുല്യമാകുന്നു.

$$\text{ക}\int \text{യ}^{\text{ക}-1}\,\text{ഭം}\text{യ} = \text{യ}^{\text{ക}}$$

എന്ന സൂത്രത്തിൽ ക എന്നതിന്നുപകരം $\text{ക}+1$ എന്നുവെച്ചാൽ,

$$(\text{ക}+1)\int \text{യ}^{\text{ക}}\,\text{ഭം}\text{യ} = \text{യ}^{\text{ക}+1}$$

$$\therefore\quad \underline{\int \text{യ}^{\text{ക}}\,\text{ഭം}\text{യ} = \frac{1}{\text{ക}+1}.\,\text{യ}^{\text{ക}+1}}$$

എന്നു വരും. സമാകലിതത്തോട്ട് ഒരു അനിശ്ചിതദൃഢരാശി കൂട്ടുകയും ചെയ്യാം. $(\text{ക}+1)$ ശൂന്യമാകുമ്പോൾ അഥവാ $\text{ക}=-1$ എന്നുള്ളപ്പോൾ ഈ സൂത്രം സാധുവല്ല. $\int \text{യ}^{-1}\text{ഭം}\text{യ} = \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}\,\text{യ}$ എന്നു പിന്നീടു കാണാം.

ഉദാഹരണങ്ങൾ:

$$\frac{\text{ഭം}\text{യ}^5}{\text{ഭം}\text{യ}} = 5.\,\text{യ}^4 \qquad \frac{\text{ഭം}.\text{യ}^{-3}}{\text{ഭം}\text{യ}} = -3.\text{യ}^{-4}$$

$$\frac{\text{ഭം}\text{യ}^{\frac{1}{2}}}{\text{ഭം}\text{യ}} = \tfrac{1}{2}\text{യ}^{-\frac{1}{2}} \qquad \frac{\text{ഭം}.\text{യ}^{-\frac{1}{2}}}{\text{ഭം}\text{യ}} = -\tfrac{1}{2}.\text{യ}^{-\frac{3}{2}}$$

$$\int \text{യ}^5\,\text{ഭം}\text{യ} = \tfrac{1}{6}\text{യ}^6 \qquad \int \text{യ}^{-\frac{1}{2}}\,\text{ഭം}\text{യ} = 2.\text{യ}^{\frac{1}{2}}$$

$$(3)\ \frac{\text{ഭം}.\text{ഡ}^{\text{യ}}}{\text{ഭംയ}} = \underset{\text{ല}=0}{\text{ഡി}} \frac{\text{ഡ}^{\text{യ}+\text{ല}} - \text{ഡ}^{\text{യ}}}{\text{ല}} = \underset{\text{ല}=0}{\text{ഡി}}.\ \frac{\text{ഡ}^{\text{യ}}}{\text{ല}} \left(\text{ഡ}^{\text{ല}} - 1\right)$$

$$= \underset{\text{ല}=0}{\text{ഡി}} \frac{\text{ഡ}^{\text{യ}}}{\text{ല}} \left(1 + \frac{\text{ല}}{1} + \frac{\text{ല}^2}{1.2} + \frac{\text{ല}^3}{1.2.3} + \ldots - 1\right)$$

$$= \underset{\text{ല}=0}{\text{ഡി}} \frac{\text{ഡ}^{\text{യ}}}{\text{ല}} \left(\text{ല} + \frac{\text{ല}^2}{1.2} + \frac{\text{ല}^3}{1.2.3} + \ldots\right)$$

$$= \text{ഡ}^{\text{യ}}.$$

$$\frac{\text{ഭം}.\text{ഡ}^{\text{യ}}}{\text{ഭംയ}} = \text{ഡ}^{\text{യ}}$$

ഇതിൽനിന്നു്

$$\int \text{ഡ}^{\text{യ}}\, \text{ഭംയ} = \text{ഡ}^{\text{യ}}.$$

$$(4)\ \frac{\text{ഭം}.\overset{\text{ഘാ}}{\text{ഡ}}.\text{യ}}{\text{ഭംയ}} = \underset{\text{ല}=0}{\text{ഡി}} \frac{\overset{\text{ഘാ}}{\text{ഡ}}(\text{യ}+\text{ല}) - \overset{\text{ഘാ}}{\text{ഡ}}\,\text{യ}}{\text{ല}.}$$

$$= \underset{\text{ല}=0}{\text{ഡി}}.\ \frac{\overset{\text{ഘാ}}{\text{ഡ}}.\ \frac{\text{യ}+\text{ല}}{\text{യ}}}{\text{ല}} = \underset{\text{ല}=0}{\text{ഡി}}.\ \frac{\overset{\text{ഘാ}}{\text{ഡ}}\left(1+\frac{\text{ല}}{\text{യ}}\right)}{\text{ല}}$$

$$= \underset{\text{ല}=0}{\text{ഡി}}.\ \frac{1}{\text{ല}} \left(\frac{\text{ല}}{\text{യ}} - \tfrac{1}{2}.\ \frac{\text{ല}^2}{\text{യ}^2} + \tfrac{1}{3}.\ \frac{\text{ല}^3}{\text{യ}^3} - \ldots\right)$$

$$= \underset{\text{ല}=0}{\text{ഡി}}.\ \left(\frac{1}{\text{യ}} - \tfrac{1}{2}.\ \frac{\text{ല}}{\text{യ}^2} + \tfrac{1}{3}\ \frac{\text{ല}^2}{\text{യ}^3} - \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{\text{യ},}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ഭം} \frac{\text{ലോ}}{\text{ധ}} \text{യ}}{\text{ഭംയ}} = \frac{1}{\text{യ}} = \text{യ}^{-1}$$

ഇതിൽനിന്നു്

$$\int \text{യ}^{-1}\, \text{ഭംയ} = \frac{\text{ലോ}}{\text{ധ}}\, (\text{യ})$$

$$(5) \quad \frac{\text{ഭം.ളയ}}{\text{ഭംയ}} = \underset{\text{ല}=0.}{\text{ധി}} \quad \frac{\text{ള}(\text{യ}+\text{ല}) - \text{ളയ}}{\text{ല}}$$

$$= \underset{\text{ല}=0.}{\text{ധി}} \quad \frac{\text{ളയ.കോല} + \text{കോയ.ളല} - \text{ളയ}}{\text{ല}}$$

യ $90°$യെക്കാൾ ചെറുതായിരിക്കുമ്പോഴൊക്കെ ളയ, യ, തായ ഇവ മൂന്നും ക്രമേണ വലുപ്പമധികമുള്ള പരിമാണങ്ങളെന്നു പരിലേഖങ്ങളിൽനിന്നു വ്യക്തമത്രെ. മൂന്നിനേയും ളയകൊണ്ടു ഹരിച്ചാലുള്ള 1, $\frac{\text{യ}}{\text{ളയ}}$, $\frac{1}{\text{കോയ}}$ എന്ന ഫലങ്ങളും അങ്ങിനെതന്നെയാകുന്നു. യ ശൂന്യപ്രായമാകുമ്പോൾ $\frac{1}{\text{കോയ}} = 1.$ അതിനാൽ

$$\underset{\text{യ}=0}{\text{ധി}} \quad \frac{\text{യ}}{\text{ളയ}} = 1. \quad \therefore \quad \underset{\text{യ}=0}{\text{ധി}} \quad \frac{\text{ളയ}}{\text{യ}} = 1.$$

$\frac{\text{തായ}}{\text{യ}} = \frac{\text{ള}(\text{യ})}{\text{യ}}. \ \frac{1}{\text{കോയ}}.$ അതിനാൽ യ ശൂന്യമാകുമ്പോൾ

കോ.യ 1ഉം, $\frac{\text{ള}(\text{യ})}{\text{യ}}$ 1ഉം ആകുന്നു. $\therefore \ \underset{\text{യ}=0}{\text{ധി}} \quad \frac{\text{തായ}}{\text{യ}} = 1.$

$$\therefore \quad \frac{\text{ഭംളയ}}{\text{ഭംയ}} = \underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}} \left\{ \frac{\text{ളയ}}{\text{ല}}. \quad \text{കോല} + \text{കോയ}. \frac{\text{ളല}}{\text{ല}} - \frac{\text{ളയ}}{\text{ല}} \right\}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ഭംളയ}}{\text{ഭംയ}} = \text{കോയ}.$$

ഇതിൽനിന്നു

$$\int \text{കോയ}.\text{ഭ}\circ\text{യ} = \text{ഛയ}.$$

$$(6)\quad \frac{\text{ഭ}\circ\text{കോയ}}{\text{ഭ}\circ\text{യ}} = \underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}} \frac{\text{കോ}(\text{യ}+\text{ല}) - \text{കോയ}}{\text{ല}}$$

$$= \underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}} \frac{\text{കോയ}.\text{കോല} - \text{ഛയ}.\text{ഛല} - \text{കോയ}}{\text{ല}}$$

$$= \underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}} \frac{\text{കോയ} - \text{ഛയ}.\text{ല} - \text{കോയ}}{\text{ല}}$$

$$\therefore \frac{\text{ഭ}\circ\text{കോയ}}{\text{ഭ}\circ\text{യ}} = -\text{ഛയ}$$

ഇതിൽനിന്നു

$$\int -\text{ഛയ}\ \text{ഭ}\circ\text{യ} = \text{കോയ}$$

$$\therefore \int \text{ഛയ}\ \text{ഭ}\circ\text{യ} = -\text{കോയ}$$

$$(7)\quad \frac{\text{ഭ}\circ.\text{തായ}}{\text{ഭ}\circ\text{യ}} = \underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}} \frac{\text{താ}(\text{യ}+\text{ല}) - \text{തായ}}{\text{ല}}$$

$$= \underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}}.\ \frac{1}{\text{ല}} \left\{ \frac{\text{തായ}+\text{താല}}{1-\text{തായ}.\text{താല}} - \text{തായ} \right\}$$

$$= \underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}}.\ \frac{1}{\text{ല}} \left\{ \frac{\text{താല}\,(1+\text{താ}^2\text{യ})}{1-\text{തായ}.\ \text{താല}} \right\}$$

എന്നാൽ അവധിയിൽ താല ശൂന്യമാകയും $\frac{\text{താല}}{\text{ല}}$ എന്നതു 1നു തുല്യമാകയും ചെയ്യുന്നു.

$$\therefore \frac{\text{ഭം താ യ}}{\text{ഭം യ}} = 1 + \text{താ}^2\text{യ} = \text{ഛേ}^2\text{യ}.$$

ഇതിൽനിന്നു

$$\int \text{ഛേ}^2\text{യ ഭം യ} = \int (1 + \text{താ}^2\text{യ})\text{ഭം യ} = \text{താ യ}$$

(8) $\text{ജ്}^{-1}\text{യ} = \text{ര}$ എന്നു വെയ്ക്കുക. എന്നാൽ $\text{യ} = \text{ജ്ര}$.

$$\frac{\text{ഭം ജ്ര}}{\text{ഭം ര}} \cdot \frac{\text{ഭം ര}}{\text{ഭം യ}} = \frac{\text{ഭം. ജ്ര}}{\text{ഭം യ}} = \frac{\text{ഭം യ}}{\text{ഭം യ}} = 1$$

$$\therefore \frac{\text{ഭം. ര}}{\text{ഭം യ}} = \frac{1}{\frac{\text{ഭം ജ്(ര)}}{\text{ഭം ര}}} = \frac{1}{\text{കോ. ര}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{ജ്}^2\text{ര}}}$$

$$\therefore \frac{\text{ഭം. ജ്}^{-1}\text{യ}}{\text{ഭം യ}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{യ}^2}} = \left(1 - \text{യ}^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$\text{യ} = 0$ തൊട്ടു $\text{യ} = 90^\circ$വരെ ഇവിടെ വർഗ്ഗമൂലത്തിന്നു ധനത്വം കല്പിക്കണമെന്നു വ്യക്തം.

ഇതിൽനിന്നു

$$\int (1 - \text{യ}^2)^{-\frac{1}{2}} \text{ഭം യ} = \text{ജ്}^{-1}\text{യ}.$$

(9) $\text{കോ}^{-1}\text{യ} = \text{ര}$ എന്നു വെയ്ക്കുക. എന്നാൽ $\text{യ} = \text{കോ ര}$.

$$\frac{\text{ഭം കോ ര}}{\text{ഭം ര}} \cdot \frac{\text{ഭം ര}}{\text{ഭം യ}} = \frac{\text{ഭം കോ ര}}{\text{ഭം യ}} = \frac{\text{ഭം യ}}{\text{ഭം യ}} = 1.$$

$$\therefore \frac{\text{ഭം ര}}{\text{ഭം യ}} = \frac{1}{\frac{\text{ഭം കോ ര}}{\text{ഭം ര}}} = \frac{-1}{\text{ജ്ര}} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \text{യ}^2}}$$

$$\therefore \frac{\text{ഭം കോ}^{-1}\text{യ}}{\text{ഭം യ}} = -\left(1 - \text{യ}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

ഇതിൽനിന്നു

$$\text{കോ}^{-1}\text{യ} = -\int (1-\text{യ})^{-\frac{1}{2}}\text{ഭം}\text{യ}.$$

10. $\text{താ}^{-1}\text{യ} = \text{ര}$ എന്നു വെയ്ക്കുക. എന്നാൽ $\text{യ} = \text{താ}.\text{ര}$.

$$\frac{\text{ഭം}\text{താ}.\text{ര}}{\text{ഭം}.\text{ര}}.\ \frac{\text{ഭം}\text{ര}}{\text{ഭം}\text{യ}} = \frac{\text{ഭം}.\text{താ}(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{യ}} = \frac{\text{ഭം}\text{യ}}{\text{ഭം}\text{യ}} = 1.$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ഭം}.\text{ര}}{\text{ഭം}\text{യ}} = \frac{1}{\frac{\text{ഭം}.\ \text{താ}\text{ര}}{\text{ഭം}\text{ര}}} = \frac{1}{1+\text{ത}^2\text{ര}} = \frac{1}{1+\text{യ}^2}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ഭം}.\text{ത}^{-1}\text{യ}}{\text{ഭം}\text{യ}} = \frac{1}{1+\text{യ}^2} = (1+\text{യ}^2)^{-1}$$

ഇതിൽനിന്നു്,

$$\int \left(1+\text{യ}^2\right)^{-1} \text{ഭം}\text{യ} = \text{താ}^{-1}\text{യ}.$$

ഇവിടെ കണ്ട എല്ലാ സമാകലനഫലങ്ങളിലും ഒരു ദൃഢരാശികൂടി ചേൎക്കണമെന്നു വിസ്മരിക്കരുതു്. ദൃഢരാശിയുടെ വില ഇന്നതെന്നു ചില ജ്ഞാതസ്ഥിതികളിൽനിന്നു നിശ്ചയിക്കാം. അപ്പോൾ അതു ധനമോ, ഋണമോ, ശൂന്യമോ ആവാം.

ഇവിടെ കണ്ട ഭേദകഗുണങ്ങളും സമാകലനഫലങ്ങളും വരഗണിതത്തിൽ മൌലികസ്ഥാനമുള്ളവയും ഗണിതവിദ്യാൎത്ഥികളാൽ സദാ ഓൎക്കേണ്ടവയും ആകയാൽ ആ ഫലങ്ങളെ ഒരുമിച്ചു കൊടുക്കുന്നു.

1. $\dfrac{\text{ഭം}\text{യ}^{\text{ക}}}{\text{ഭം}\text{യ}} = \text{ക}.\text{യ}^{\text{ക}-1}$ $\qquad \int \text{യ}^{\text{ക}}\ \text{ഭം}\text{യ} = \dfrac{1}{\text{ക}+1}.\text{യ}^{\text{ക}+1}$

2. $\dfrac{\text{ഭം}.\text{ധ}^{\text{യ}}}{\text{ഭം}\text{യ}} = \text{ധ}^{\text{യ}}$ $\qquad \int \text{ധ}^{\text{യ}}\ \text{ഭം}\text{യ} = \text{ധ}^{\text{യ}}$

$$3.\quad \frac{\text{ഭം}\,\frac{\text{ഘ്ലാ}}{\text{ധ}}\,\text{യ}}{\text{ഭംയ}} = \text{യ}^{-1} \qquad \int \text{യ}^{-1}\,\text{ഭംയ} = \frac{\text{ഘ്ലാ}}{\text{ധ}}\,\text{യ}.$$

$$4.\quad \frac{\text{ഭംജ്യയ}}{\text{ഭംയ}} = \text{കോയ}. \qquad \int \text{കോയ}.\text{ഭംയ} = \text{ജ്യയ}.$$

$$5.\quad \frac{\text{ഭംകോയ}}{\text{ഭംയ}} = -\text{ജ്യയ}. \qquad \int \text{ജ്യയ}.\ \text{ഭംയ} = -\text{കോയ}.$$

$$6.\quad \frac{\text{ഭംതായ}}{\text{ഭംയ}} = 1 + \text{താ}^{2}\text{യ} \qquad \int (1 + \text{താ}^{2}\text{യ})\ \text{ഭംയ} = \text{തായ}.$$

$$7.\quad \frac{\text{ഭംജ്യ}^{-1}\text{യ}}{\text{ഭംയ}} = (1 - \text{യ}^{2})^{-\frac{1}{2}} \qquad \int (1 - \text{യ}^{2})^{-\frac{1}{2}}\,\text{ഭംയ} = \text{ജ്യ}^{-1}\text{യ}$$

$$8.\quad \frac{\text{ഭംകോ}^{-1}\text{യ}}{\text{ഭംയ}} = -(1 - \text{യ}^{2})^{-\frac{1}{2}} \qquad \int (1 - \text{യ}^{2})^{-\frac{1}{2}}\,\text{ഭംയ} = -\text{കോ}^{-1}\text{യ}$$

$$9.\quad \frac{\text{ഭം.താ}^{-1}\text{യ}}{\text{ഭംയ}} = (1 + \text{യ}^{2})^{-1} \qquad \int (1 + \text{യ}^{2})^{-1}\,\text{ഭംയ} = \text{താ}^{-1}\text{യ}.$$

മററു പ്രധാനമായ ചില സമാകലനഫലങ്ങളും പിന്നീടു വരുന്ന ഉദാഹരണങ്ങളിൽ കാണും.

വ്യഞ്ജകങ്ങൾ മിക്കവാറും യോഗ,വിയോഗ,ഗുണന,ഹരണഫലങ്ങളും അവയുടെ കലപ്പുകളും ആയി വരുന്നു. അതിനാൽ യോഗാദിഫലങ്ങളുടെ ഭേദകഗുണകങ്ങളും സമാകലിതങ്ങളും വരുത്തുവാനുള്ള മാർഗ്ഗം പറയുന്നു.

ര, വ എന്നവ യ എന്ന ചലരാശിയുടെ രണ്ടു വൃത്തികളെന്നും ര_1, വ_1 എന്നവ അവയുടെ യ-ബന്ധിയായ ഭേദകഗുണകങ്ങളെന്നും യം എന്നതു യ എന്നതിന്റെ ഭേദകാണുകമെന്നും വെയ്ക്കുക.

(1) യോഗത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഭേദകാണുകം ഓരോ അംഗങ്ങളിലും ഉണ്ടാകുന്ന ഭേദകാണുകങ്ങളുടെ യോഗമെന്നും, അവ്വണ്ണം

തന്നെ അംഗങ്ങളുടെ സമാകലനയോഗമാണ് അംഗയോഗത്തിൻെറ സമാകലനമെന്നും വ്യക്തമത്രെ. അതിനാൽ,

$$\frac{\text{ഭം}(\text{ര}+\text{വ})}{\text{ഭംയ}} = \frac{\text{ഭംര}+\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}} = \frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}} + \frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}.$$

അതിനാൽ,

$$\int (\text{ര}+\text{വ})\text{ഭംയ} = \int \text{രഭംയ} + \int \text{വഭംയ}.$$

(2) വിയോഗഫലത്തിലും ഈ യുക്തിതന്നെ.

$$\frac{\text{ഭം}(\text{ര}-\text{വ})}{\text{ഭംയ}} = \frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}} - \frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}.$$

$$\int (\text{ര}-\text{വ})\text{ഭംയ} = \int \text{ര.ഭംയ} - \int \text{വ.ഭംയ}.$$

(3) $$\frac{\text{ഭം}(\text{ര.വ})}{\text{ഭംയ}} = \underset{\text{യം}=0}{\text{ധി.}} \frac{(\text{ര}+\text{ര}_1\text{യം})(\text{വ}+\text{വ}_1\text{യം}) - \text{ര.വ}}{\text{യം}}$$

$$= \underset{\text{യം}=0}{\text{ധി}} \frac{(\text{ര}+\text{ര}_1\text{യം})(\text{വ}+\text{വ}_1\text{യം}) - \text{രവ}}{\text{യം}}.$$

$$= \underset{\text{യം}=0}{\text{ധി}} \frac{\text{രവ}_1\text{യം}+\text{വര}_1\text{യം}+\text{ര}_1\text{വ}_1\text{യം}^2}{\text{യം}}$$

$$= \underset{\text{യം}=0}{\text{ധി}} (\text{രവ}_1+\text{വര}_1+\text{ര}_1\text{വ}_1.\text{യം})$$

$$= \text{രവ}_1 + \text{വര}_1$$

എന്നുവെച്ചാൽ,

$$\frac{\text{ഭം}(\text{ര}\times\text{വ})}{\text{ഭംയ}} = \text{ര.}\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}} + \text{വ.}\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}$$

ഇങ്ങിനെ ഘാതത്തിൻെറ ഭേദകഗുണാനയനം.

രണ്ടുപക്ഷങ്ങളേയും ഭംയ അപേക്ഷയാ സമാകലനം ചെയ്താൽ,

$$ര \times വ = \int \left(ര. \frac{ഭ൦വ}{ഭ൦യ} \right) ഭ൦യ. + \int \left(വ. \frac{ഭ൦ര}{ഭ൦യ} \right) ഭ൦യ.$$ ഇവിടെ $\frac{ഭ൦ര}{ഭ൦യ}$ $(= ര_1)$ എന്നതിനെ ര എന്നുകല്പിച്ചാൽ, ര എന്നതിനെ $\int ര.ഭ൦യ$ എന്നു കല്പിക്കേണ്ടിവരും. അങ്ങിനെ ചെയ്താൽ,

$$വ \times \int ര.ഭ൦യ = \int \left\{ (f ര.ഭ൦യ). \frac{ഭ൦വ}{ഭ൦യ} \right\} ഭ൦യ$$

$$+ \int (വ.ര) ഭ൦യ$$

$$\therefore \int (വ \times ര) ഭ൦യ = വ \times \int ര.ഭ൦യ$$

$$- \int \left\{ (f ര.ഭ൦യ) \times \frac{ഭ൦വ}{ഭ൦യ} \right\} ഭ൦യ.$$

ഇതിന്നു് അംശികസമാകലനമെന്നു പറയുന്നു.

ഇതിനെ ഒന്നു ഭാഷയായിപ്പറയാം. "രണ്ടു ഘടകങ്ങളിൽ ഒന്നിനെ പ്രഥമമെന്നും മററതിനെ ദ്വിതീയമെന്നും കല്പിച്ചു്, ദ്വിതീയത്തിൻെറ സമാകലനംകൊണ്ടു പ്രഥമത്തെപ്പെരുക്കി അതിൽനിന്നു് ആ സമാകലനത്തെത്തന്നെ പ്രഥമത്തിൻെറ ഭേദകംകൊണ്ടു പെരുക്കി കിട്ടിയതിനെ സമാകലനം ചെയ്ത ഫലം കളഞ്ഞാൽ ഘാതത്തിൻെറ സമാകലനമായി." ഇതനുസരിച്ചു സൂത്രം മാററി എഴുതാം. ഘടകങ്ങളെ $ര_1$, $ര_2$ എന്നുവെയ്ക്കുക. എന്നാൽ

$$\int (ര_1 \times ര_2) ഭ൦യ = ര_1 \times \int ര_2 ഭ൦യ$$

$$- \int \left\{ (f ര_2 ഭ൦യ) \frac{ഭ൦ര_1}{ഭ൦യ} \right\} ഭ൦യ$$

അംശികസമാകലനത്തിന്നു് ഉദാഹരണം.

$\int$ യ.ധ^{യ}.ഭംയ. ഇവിടെ യ പ്രഥമവും ധ^{യ} ദ്വിതീയവു മായി കല്പിക്കുന്നു. എന്നാൽ,

$$\int യ.ധ^{യ}\, ഭംയ = ധ^{യ} \times യ - \int ധ^{യ} \times 1\, ഭംയ.$$

$$= ധ^{യ}.യ - ധ^{യ} = ധ^{യ}\,(യ-1)$$

മറെറാരുദാഹരണം.

$$\int യ^{2}.\, കോയ\, ഭംയ = യ^{2} \times \int കോ(യ).ഭംയ$$

$$- \int f\, കോയ\, ഭംയ.2യ\, ഭംയ$$

$$= യ^{2}.ഭുയ - 2\int ഭുയ.\, യ\, ഭംയ.$$

എന്നാൽ ഇതേവിധത്തിൽത്തന്നെ.

$$\int ഭുയ.\, യ\, ഭംയ = യ.\int ഭുയ\, ഭംയ - \int f ഭുയ ഭംയ \times 1 ഭംയ$$

$$= -\, യ\, കോയ + \int കോയ\, ഭംയ$$

$$= -\, യ\, കോയ + ഭുയ.$$

$$\therefore \int യ^{2}.കോയ.ഭംയ = യ^{2}.ഭുയ - 2(-യ.\, കോയ + ഭുയ)$$

$$= (യ^{2}-2)ഭുയ + 2യ.കോയ$$

മൂന്നോ അധികമോ ഘടകങ്ങൾ ഒന്നായിപ്പെരുക്കിയതി ൻെറ ഭേദകഗുണം കാണുവാൻ താഴെ പറയുംപ്രകാരം ചെയ്യാം.

$വ_{1}$, $വ_{2}$, $വ_{3}$ എന്നവ യ എന്നതിൻെറ വെവ്വേറെ വൃത്തി കളെന്നു വെയ്ക്കുക.

$$\frac{\text{ഘ്ലാ}}{\text{ന}}.\left(\text{വ}_1.\text{വ}_2.\text{വ}_3\right)=\frac{\text{ഘ്ലാ}}{\text{ധ}}\text{വ}_1+\frac{\text{ഘ്ലാ}}{\text{ധ}}\text{വ}_2+\frac{\text{ഘ്ലാ}}{\text{ധ}}\text{വ}_3$$

$$\therefore\ \frac{\text{ഭം}\frac{\text{ഘ്ലാ}}{\text{ധ}}\left(\text{വ}_1.\text{വ}_2.\text{വ}_3\right)}{\text{ഭംയ}}=\frac{\text{ഭം}\frac{\text{ഘ്ലാ}}{\text{ധ}}\text{വ}_1}{\text{ഭംയ}}+\frac{\text{ഭം}\frac{\text{ഘ്ലാ}}{\text{ധ}}\text{വ}_2}{\text{ഭംയ}}+\frac{\text{ഭം}\frac{\text{ഘ്ലാ}}{\text{ധ}}\text{വ}_3}{\text{ഭംയ}}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{\text{വ}_1.\text{വ}_2.\text{വ}_3}.\frac{\text{ഭം}\left(\text{വ}_1.\text{വ}_2.\text{വ}_3\right)}{\text{ഭംയ}}=\frac{1}{\text{വ}_1}.\ \frac{\text{ഭംവ}_1}{\text{ഭംയ}}+\frac{1}{\text{വ}_2}.\ \frac{\text{ഭംവ}_2}{\text{ഭംയ}}$$

$$+\frac{1}{\text{വ}_3}.\ \frac{\text{ഭംവ}_3}{\text{ഭംയ}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{ഭം}\left(\text{വ}_1.\text{വ}_2.\text{വ}_3\right)}{\text{ഭംയ}}=\text{വ}_2\text{വ}_3.\ \frac{\text{ഭംവ}_1}{\text{ഭംയ}}+\text{വ}_3\text{വ}_1.\ \frac{\text{ഭംവ}_2}{\text{ഭംയ}}$$

$$+\text{വ}_1\text{വ}_2.\ \frac{\text{ഭംവ}_3}{\text{ഭംയ}}$$

ഉദാഹരണം

$$\frac{\text{ഭം}\left(\text{യ}.\ \text{ളയ}.\ \text{ധ}^{\text{യ}}\right)}{\text{ഭംയ}}=\text{ളയ}.\ \text{ധ}^{\text{യ}}.\ \frac{\text{ഭംയ}}{\text{ഭംയ}}+\text{ധ}^{\text{യ}}.\text{യ}.\frac{\text{ഭംളയ}}{\text{ഭംയ}}$$

$$+\text{യ}.\text{ളയ}.\frac{\text{ഭംധ}^{\text{യ}}}{\text{ഭംയ}}$$

$$=\text{ളയ}.\text{ധ}^{\text{യ}}+\text{ധ}^{\text{യ}}.\text{യ}.\text{കോയ}+\text{യ}.\text{ളയ}.\text{ധ}^{\text{യ}}$$

$$\underline{=\text{ധ}^{\text{യ}}.\text{ളയ}+\text{യ}.\text{ധ}^{\text{യ}}\left(\text{കോയ}+\text{ളയ}\right)}$$

$$(4)\quad \frac{\text{ഭം}\dfrac{\text{ര}}{\text{വ}}}{\text{ഭംയ}} = \underset{\text{യം}=0}{\text{ധി}}\ \frac{\dfrac{\text{ര}+\text{ര}_1\text{യം}}{\text{വ}+\text{വ}_1\text{യം}} - \dfrac{\text{ര}}{\text{വ}}}{\text{യം}}$$

$$= \underset{\text{യം}=0}{\text{ധി}}\ \frac{\text{വര}+\text{വ}.\text{ര}_1\text{യം}-\text{വ}.\text{ര}-\text{വ}_1\text{രയം}}{\text{യം}(\text{വ}+\text{വ}_1\text{യം}).\,\text{വ}}$$

$$= \underset{\text{യം}=0}{\text{ധി}}\ \frac{\text{വര}_1-\text{വ}_1\text{ര}}{\text{വ}^2+\text{വ}_1.\text{യം}}$$

$$= \frac{\text{വ}.\text{ര}_1-\text{വ}_1\text{ര}}{\text{വ}^2}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{ഭം}\dfrac{\text{ര}}{\text{വ}}}{\text{ഭംയ}} = \frac{\text{വ}.\dfrac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}} - \text{ര}.\dfrac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}}{\text{വ}^2}$$

ഉദാഹരണം.

$$\frac{\text{ഭം}\dfrac{\text{യ}^2}{\text{ളയ}}}{\text{ഭംയ}} = \frac{\text{ളയ}.2\text{യ}-\text{യ}^2.\text{കോയ}}{\text{ള}^2\text{യ}}$$

$$= \frac{\text{യ}}{\text{ള}^2\text{യ}}\ (2\text{ളയ}-\text{യ}.\ \text{കോയ})$$

പലപ്പോഴും ഒരു വൃത്തി മറെറാരു വൃത്തിയുടെ വൃത്തിയായി വരും. $(\text{യ}^2-1)^3-2(\text{യ}^2-1)$ എന്നതു (യ^2-1) എന്നതിൻെറ ഒരു വൃത്തിയാകുന്നു. എന്നാൽ യ^2-1 എന്നതുതന്നെ യ എന്നതിൻെറ ഒരു വൃത്തിയത്രെ. ഇങ്ങിനെ വൃത്തിയുടെ വൃത്തിയായി വ്യഞ്ജകങ്ങൾ വരുമ്പോൾ, വളരെ ക്ലേശിക്കാതെ അവയുടെ ഭേദകഗുണങ്ങളെ കാണാം.

ര $\equiv$ വൃ$_1$(വ) എന്നും വ $\equiv$ വൃ$_2$(യ) എന്നും വെയ്ക്കുക. $\dfrac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}$ ആണു് നമുക്കറിയേണ്ടതെന്നും വെയ്ക്കു.

ല$=$യ എന്നതിൽ വരുന്ന അല്പഭേദം എന്നും,

ല$_1=$വ എന്നതിൽ വരുന്ന അല്പഭേദം എന്നും,

ല$_2=$ര എന്നതിൽ വരുന്ന അല്പഭേദം എന്നും വെയ്ക്കുക.

ല ശൂന്യമാകുമ്പോൾ ല$_1$ ശൂന്യമാകുകയും അപ്പോൾ ല$_2$ ശൂന്യമാകുകയും ചെയ്യുമെന്നു സ്പഷ്ടം. (ഇതിന്നു വൃത്തികൾ അഭഗ്നങ്ങളാവണമെന്നു പിന്നീടു കാണാം.)

$$\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}=\underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}}.\ \frac{(\text{ര}+\text{ല}_2)-\text{ര}}{(\text{യ}+\text{ല})-\text{യ}}$$

$$=\underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}}\left\{\frac{(\text{ര}+\text{ല}_2)-\text{ര}}{(\text{വ}+\text{ല}_1)-\text{വ}}\times\frac{(\text{വ}+\text{ല}_1)-\text{വ}}{(\text{യ}+\text{ല})-\text{യ}}\right\}$$

$$=\underset{\text{ല}_1=0}{\text{ധി}}.\ \frac{(\text{ര}+\text{ല}_2)-\text{ര}}{\text{ല}_1}\times\underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}}\ \frac{(\text{വ}+\text{ല}_1)-\text{വ}}{\text{ല}}$$

$$=\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}}\times\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}=\frac{\text{ഭംവ്യ}_1(\text{വ})}{\text{ഭംവ}}\times\frac{\text{ഭംവ്യ}_2(\text{യ})}{\text{ഭംയ}}.$$

ഉദാഹരണം.

ര$=$(യ$^2-1)^3-2($യ$^2-1)^2$ എങ്കിൽ, $\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}$ കാണുക.

(യ$^2-1$)നെ വ എന്നു കല്പിച്ചാൽ,

$$\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}=\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}}.\ \frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}=\frac{\text{ഭം}(\text{വ}^3-2\text{വ}^2)}{\text{ഭംവ}}.\ \frac{\text{ഭം}(\text{യ}^2-1)}{\text{ഭംയ}}$$

$$=(3\text{വ}^2-4\text{വ})2\text{യ}$$

$$=2\text{യ}(\text{യ}^2-1)\ (3\text{യ}^2-7)$$

മറെറാരുദാഹരണം

$$\text{വ} = \text{ഭ്ജ}^3\text{യ} - \text{കോ}^3\text{യ}$$

$$\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}} = \frac{\text{ഭംഭ്ജ}^3\text{യ}}{\text{ഭംഭ്ജയ}} \cdot \frac{\text{ഭംഭ്ജയ}}{\text{ഭംയ}} - \frac{\text{ഭംകോ}^3\text{യ}}{\text{ഭംകോയ}} \cdot \frac{\text{ഭംകോയ}}{\text{ഭംയ}}$$

$$= 3\text{ഭ്ജ}^2\text{യ}.\ \text{കോയ} + 3\text{കോ}^2\text{യ}.\ \text{ഭ്ജയ}.$$

$$= \underline{3\text{ഭ്ജയ}.\ \text{കോയ}\ (\text{ഭ്ജയ} + \text{കോയ})}$$

ഇവിടെ കണ്ട ഭേദകഗുണാനയനയുക്തിയനുസരിച്ച സമാകലനങ്ങളും നിർവ്വഹിക്കാം. അതിന്നു പ്രതിക്ഷേപസമാകലനമെന്നു പേര്.

ഉം. 1 $\int \{3\,(\text{യ}^2 - 1)^2 - 4(\text{യ}^2 - 1)\}\ 2\text{യ}.\text{ഭംയ}.$

$$= \int (3\text{വ}^2 - 4\text{വ})\ \text{ഭംവ}.$$

($\text{യ}^2 - 1 = \text{വ}$ എന്നുവെച്ച്)

$$= \text{വ}^3 - 2\text{വ}^2.$$

$$= \underline{(\text{യ}^2 - 1)^3 - 2(\text{യ}^2 - 1)^2}$$

ഉം 2. $\int \text{ഭ്ജ}^3\text{യ}.\ \text{കോയ}.\ \text{ഭംയ}$

$$= \int \text{ഭ്ജ}^3\text{യ}.\ \text{ഭംഭ്ജയ}. \qquad (\text{ഭംഭ്ജയ} = \text{കോയ}.\ \text{ഭംയ}.)$$

$$= \underline{\tfrac{1}{4}.\text{ഭ്ജ}^4\text{യ}.}$$

ഉം 3. $\int \frac{\text{ഭംയ}}{\sqrt{1 - \text{യ}^2}}$ കാണുക.

യ = ഭ്ജര എന്നുവെയ്ക്കുക.

എന്നാൽ ഭംയ = കോ.ര ഭംര, $\sqrt{1 - \text{യ}^2} = \text{കോര}.$

$$\therefore \quad \int \frac{\text{ഭ०യ}}{\sqrt{1-\text{യ}^2}} = \int \frac{\text{കോ}\text{ര}.\text{ഭ०ര}}{\text{കോര}.} = \int \text{ഭ०ര} = \text{ര} = \underline{\underline{\text{ള}^{-1}.\ \text{യ}}}$$

യ$=0$ ആകുമ്പോൾ ര$=0$, യ$=1$ ആകുമ്പോൾ ര$=\frac{\pi}{2}$.

$$\therefore \quad \int_0^1 \frac{\text{ഭ०യ}}{\sqrt{1-\text{യ}^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ഭ०ര}$$

ഈ കിട്ടിയതിൻെറ അത്ഥം ര ശൂന്യം തൊട്ട $\frac{\pi}{2}$ ആകുന്നതുവരെയുള്ള ഭേദകാണങ്ങളുടെ യോഗം എന്നാണല്ലോ. സമാകലനഫലത്തിൽ ര$=\frac{\pi}{2}$ എന്നു വെച്ച കിട്ടുന്ന ഫലത്തിൽനിന്നു ര$=0$ ആകുമ്പോഴുള്ള ഫലം കളഞ്ഞാൽ മതി. ഇതിനെ $\Big[\text{ര}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$ എന്നെഴുതുന്നു. ഈവിധം ഉദാഹരണങ്ങളെ പിന്നീട്ടം കാണാം. തുടന്നു്,

$$\int_0^1 \frac{\text{ഭ०യ}}{\sqrt{1-\text{യ}^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ഭ०ര} = \Big[\text{ര}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

ഉ० 4. $\int \frac{\text{ഭ०യ}}{1-\text{യ}^2} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\text{യ}} + \frac{1}{1-\text{യ}}\right) \text{ഭ०യ}$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\text{ഭ०യ}}{(1+\text{യ})} + \frac{1}{2}\int \frac{\text{ഭ०യ}}{1-\text{യ}.}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\text{ഭ०}(1+\text{യ})}{1+\text{യ}} - \frac{1}{2}.\int \frac{\text{ഭ०}(1-\text{യ})}{1-\text{യ}.}$$

$$= \frac{1}{2}.\ \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}(1+\text{യ}) - \frac{1}{2}.\ \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}.(1-\text{യ})$$

$$= \underline{\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}\left(\frac{1+\text{യ}}{1-\text{യ}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

അഭ്യാസം

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഭേദകഗുണങ്ങൾ കാണുക.

1. (i) $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}(5\text{യ}^4+3\text{യ}^2+6)$ (ii) $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}(\text{ളയ}+\text{കോയ})$

(iii) $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}(1+\text{യ}^2)(2+\text{യ}^3)$ (iv) $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}\text{യ}^3.\text{ളയ}.$

(v) $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}\ \text{യ}^2.\text{കോയ}$ (vi) $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}.}\ \text{ധ}^2\ \text{ളയ}.$

(vii) $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}\ \text{ധ}^{\text{യ}}\ \text{കോയ}.$ (viii) $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}\ \frac{1-\text{യ}^2}{1+\text{യ}^2}$

(ix) $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}\ \frac{1+\text{യ}^2}{1-\text{യ}^2}$

(x) $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}\left\{(\text{യ}^2+\text{യ}+1)^2-2(\text{യ}^2+\text{യ}+1)+4\right\}$

(xi) $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}\ (\text{ള}^3\text{യ}+\text{കോ}^2\text{യ})$ (xii) $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}.\ \frac{\text{ളയ}-\text{കോയ}}{\text{ളയ}+\text{കോയ}}$

2. താഴെ കാണുന്നവയെ സമാകലനം ചെയ്യുക.

(i) $\int \frac{\text{ള}(\text{യ})}{\text{കോയ}}\ \text{ഭംയ}.$ (ii) $\int \frac{\text{കോയ}}{\text{ളയ}}\text{ഭംയ}.$

(iii) $\int \frac{\text{ഭംയ}}{1+\text{കയ}}$ (iv) $\int \frac{\text{ഭംയ}}{1-\text{കയ}}.$

(v) $\int \frac{\text{ഭംയ}}{\text{യ}^2-1}$ (vi) $\int \frac{\text{ഭംയ}}{4-\text{യ}}$

(vii) $\int \frac{\text{ഭംയ}}{4+\text{യ}^2}$ (viii) $\int \frac{\text{ഭംയ}}{\text{യ}^2-5\text{യ}+6}$

(ix) $\int \frac{\text{ഭംയ}}{\text{യ}^3}$ (x) $\int \frac{\text{ഭംയ}}{(\text{കയ}+1)^3}$

(xi) $\int \frac{\text{ഭംയ}}{\text{ക}^2+\text{യ}^2}$ (xii) $\int \frac{\text{ഭംയ}}{\sqrt{\text{ക}^2-\text{യ}^2}}$

(xiii) $\int \frac{\text{ഭംയ}}{\text{യ}^2+4\text{യ}+3}$ (xiv) $\int \frac{\text{ഭംയ}}{\text{യ}^2+4\text{യ}+5}$

അദ്ധ്യായം 8

ചില വരഗണിതപ്രയോഗങ്ങൾ

(1) വൃത്തപരിധ്യായനവും ജ്യാഗണിതവും.

വ്യസ്തജ്യാവുകളുടെ ഭേദകഗുണങ്ങളെ വ്യുത്യസ്തരീതികളിൽ സമാകലനം ചെയ്തു ചാപങ്ങളെ അവയുടെ ഭുജകോടിജ്യാവുകൾ വഴി കാണാം.

$\text{ഭു}^{-1}\text{യ}$ എന്ന വ്യസ്തജ്യാവിന്റെ ഭേദകഗുണാകാരം $(1-\text{യ}^2)^{-\frac{1}{2}}$ എന്നാണല്ലോ. ഇതിൽ യ എന്നതിന്നു പകരം ഭുര എന്നുവെച്ചു സമാകലനംചെയ്താൽ ഫലം ര അഥവാ $\text{ഭു}^{-1}\text{യ}$ എന്നു കിട്ടുമെന്നു മുമ്പു കണ്ടു. $\text{യ}=0$ എന്ന സ്ഥാനം തൊട്ടു $\text{യ}=1$ എന്ന സ്ഥാനംവരെയുള്ള ഭേദകാണുകങ്ങളുടെ യോഗം $\frac{\pi}{2}$, എന്നുവെച്ചാൽ വൃത്തപരിധി പാദത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധാത്മകമായ അളവു്.

$(1-\text{യ}^2)^{-\frac{1}{2}}$. ഭംയ എന്നതിനെ മററു പ്രകാരത്തിലും സമാകലനം ചെയ്യാം.

$$\int(1-\text{യ}^2)^{-\frac{1}{2}}\,\text{ഭംയ}=\int\left(1+\tfrac{1}{2}.\text{യ}^2+\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\text{യ}^4+\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{6}\text{യ}^6+\ldots\right)\text{ഭംയ}$$

$$=\text{യ}+\tfrac{1}{2}.\frac{\text{യ}^3}{3}+\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\frac{\text{യ}^5}{5}+\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{6}.\frac{\text{യ}^7}{7}+\ldots\ldots$$

$$\therefore\ \text{ഭു}^{-1}\text{യ}=\text{യ}+\tfrac{1}{2}.\frac{\text{യ}^3}{3}+\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\frac{\text{യ}^5}{5}+\tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{5}{6}.\frac{\text{യ}^7}{7}+\ldots\ldots$$

യ ശൂന്യമാകുമ്പോൾ രണ്ടു പക്ഷങ്ങളും ശൂന്യമെന്നു വരുന്നു. അതിനാൽ സമാകലനത്തിൽ ചേർക്കേണ്ട ധ്രുവരാശി ശൂന്യമാകുന്നു.

യ എന്നതു ഭുജജ്യാവും ഭു$^{-1}$യ എന്നതു യ ഭുജജ്യാവാകുന്ന വൃത്ത പരിധ്യംശവുമാകയാൽ ഭുജജ്യാവറിഞ്ഞാൽ ഇതിൽനിന്നു് അതിൻെറ പരിധ്യംശം കണക്കാക്കുവാൻ സാധിക്കും. യ$=1$ എന്നു വരുമ്പോൾ പരിധ്യംശം വൃത്തപാദമായിരിക്കും. അതിനാൽ,

$$\frac{\pi}{2}=1+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{7}+\ldots\ldots$$

ഈ ശ്രേണി അതിൻെറ സൂക്ഷ്മഫലത്തോടു അതിമന്ദമായേ ഉപഗമിക്കുന്നുള്ളു.

എന്നാൽ യ$=\frac{1}{2}$ എന്നുവെച്ചാൽ പരിധ്യംശം വൃത്തപാദത്തിൻെറ മൂന്നിലൊന്നും അൎദ്ധപരിധിയുടെ ആറിലൊന്നുമാകും. അപ്പോൾ,

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2^5}+\ldots\ldots$$

എന്നു കിട്ടുന്നു. ഈ ശ്രേണി സൂക്ഷ്മഫലത്തെ കുറെക്കൂടി വേഗതയിൽ ഉപഗമിക്കും. എങ്കിലും π ടെ സൂക്ഷ്മവില കിട്ടുവാൻ നല്ലവണ്ണം അദ്ധ്വാനിക്കേണ്ടിവരും.

$$\text{കോ}^{-1}\text{യ}=-\int(1-\text{യ}^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\text{ഭ}_\circ\text{യ}$$

ഇതിൽനിന്നു്,

$$=-\left(\text{യ}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\text{യ}^3}{3}+\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\frac{\text{യ}^5}{5}+\ldots\right)+\text{ധ്രുവ}$$

രാശി എന്നു കിട്ടുന്നു. യ$=0$ എന്നുവരുമ്പോൾ വലത്തുഭാഗത്തു ധ്രുവരാശിയും ഇടത്തുഭാഗത്തു $\frac{\pi}{2}$ഉം വരുന്നു. അതിനാൽ, ധ്രുവരാശി$=\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \quad \text{കോ}^{-1}\text{യ} = \frac{\pi}{2} - \text{യ} - \tfrac{1}{2}.\frac{\text{യ}^3}{3} - \tfrac{1}{2}.\ \tfrac{3}{4}.\ \frac{\text{യ}^5}{5} - \ldots\ldots\ldots$$

യ$=\frac{1}{2}$ എന്നുവെച്ചാൽ കോയ$^{-1}$യ$=\frac{\pi}{3}$. അപ്പോൾ

$$\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{3}.\ \frac{1}{2^3} - \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{4}.\tfrac{1}{5}.\ \frac{1}{2^5} - \ldots\ldots$$

അതിനാൽ,

$$\frac{\pi}{6} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{3}.\frac{1}{2^3} + \tfrac{1}{2}.\tfrac{3}{5}.\tfrac{1}{5}.\ \frac{1}{2^5} = \ldots\ldots\ldots$$

എന്നു ജ്ഞ$^{-1}$യ എന്നതിൽനിന്നു കിട്ടിയ ശ്രേണിതന്നെ ഉണ്ടാകുന്നു.

വ്യസ്തതാനകത്തിൽനിന്നു കിട്ടുന്ന ശ്രേണി ചാപം കാണുവാൻ ഇതിനെക്കാൾ സഹായകമാകുന്നു.

$$\frac{\text{ഭംത}^{-1}\text{യ}}{\text{ഭംയ}} = (1 + \text{യ}^2)^{-1}$$

$$= 1 - \text{യ}^2 + \text{യ}^4 - \text{യ}^6 + \ldots\ldots$$

$$\therefore \int \text{ഭംത}^{-1}\text{യ} = \int 1 - \text{യ}^2 + \text{യ}^4 - \text{യ}^6 + \ldots\ldots \text{ഭംയ}$$

$$\therefore \quad \text{താ}^{-1}\text{യ} = \text{യ} - \frac{\text{യ}^3}{3} + \frac{\text{യ}^5}{5} - \frac{\text{യ}^7}{7} + \ldots\ldots$$

യ$=0$ എന്നുവെച്ചാൽ ഇടത്തും വലത്തും ശൂന്യം വരുന്നതിനാൽ ധ്രുവരാശി$=0$

യ$=1$ എന്നുവെച്ചാൽ താ$^{-1}$യ$=\frac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad \frac{\pi}{4} = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots\ldots$$

$$\pi = 4(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \ldots\ldots)$$

ഈ ശ്രേണിയും അതിമന്ദമായേ ഉപഗമിക്കുന്നുള്ളൂ. പരിധി ദ്വാദശാംശമായ $\frac{\pi}{6}$ന്റെ താനകജ്യാവ് $\frac{1}{\sqrt{3}}$. അതിനാൽ,

$$\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}.\frac{1}{3^2}-\tfrac{1}{7}.\frac{1}{3^3}+\dots\dots\right)$$

അഥവാ,

$$\pi=2\sqrt{3}\left(1-\tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}.\frac{1}{3^2}-\frac{1}{7}.\frac{1}{3^3}+\dots\dots\right)$$

അഥവാ,

$$\frac{\text{വൃത്തപരിധി}}{\text{വ്യാസം}}=\sqrt{12}\left(1-\tfrac{1}{3}.\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}.\frac{1}{3^2}-\tfrac{1}{7}.\frac{1}{3^3}+\dots\dots\right)$$

ഇവിടെ പ്രതിപാദിച്ച താനകാശ്രിതമായ ശ്രേണികളെല്ലാം തന്ത്രസംഗ്രഹാദി കേരളീയഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്. അവയെ കേരളീയർ വരുത്തിയ മാൎഗ്ഗം യഥാൎത്ഥത്തിൽ ഇവിടെ കണ്ടവതന്നെയെന്നു യുക്തിഭാഷാ എന്ന ഗ്രന്ഥത്തിൽനിന്നു കാണാം. പ്രതിപാദിച്ച രീതി ഇത്രയധികം സാങ്കേതികാശ്രിതമല്ലെന്നേയുള്ളൂ. കേരളീയവായനക്കാരുടെ സംമോദത്തിന്നായി തന്ത്രസംഗ്രഹാദിഗ്രന്ഥങ്ങളിൽനിന്നു ചില സൂത്രങ്ങൾ ഉദ്ധരിക്കുന്നു.

വ്യാസേ വാരിധിനിഹതേ
　　രൂപഹൃതേ വ്യാസസാഗരാഭിഹതേ—
ത്ര്യാശരാദിവിഷമസംഖ്യാ
　　ഭക്തമൃണം സ്വം പൃഥക് ക്രമാൽ കുൎയ്യാൽ.

തന്ത്രസംഗ്രഹം—അദ്ധ്യായം 2.

സാരം—വ്യാസത്തെ വാരിധി (=4)കൊണ്ടു ഗുണിച്ച രൂപം (=1)കൊണ്ടു ഹരിച്ചതിൽ വ്യാസത്തെ സാഗരം (=4)കൊണ്ടു ഗുണിച്ചതിനെ ത്രി (=3), ശരം (=5), മുതലായ വിഷമ

സംഖ്യകളെകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലങ്ങളെ വെവ്വേറെ വെച്ച് അവ യെ ക്രമേണ കളകയും കൂട്ടുകയും ചെയ്ക.

വ്യാസത്തെ വ എന്നതുകൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചാൽ,

$$\text{പരിധി} = \frac{4\text{വ}}{1} - \frac{4\text{വ}}{3} + \frac{4\text{വ}}{5} - \frac{4\text{വ}}{7} + \ldots\ldots$$

അഥവാ,

$$\frac{\text{പരിധി}}{\text{വ്യാസം}} = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots\ldots\right)$$

വ്യാസവൎഗ്ഗാദ്രവിഹതാൽ പദം സ്യാൽ പ്രഥമം ഫലം
തതസ്തത്തൽഫലാച്ചാപി യാവദിച്ഛം ത്രിഭിൎഹരേൽ
രൂപാദ്യയുഗ്മസംഖ്യാഭിൎല്ലബ്ധേഷ്വേഷു യഥാക്രമം
വിഷമാനാം യുതേസ്ത്യക്തേ യുഗ്മയോഗേ വൃതിൎഭവേൽ.

തന്ത്രസംഗ്രഹം. അ. 2

സാരം—രവി (=12) കൊണ്ടു പെരുക്കിയ വ്യാസവൎഗ്ഗ ത്തിൽനിന്നു പദം (=വൎഗ്ഗമൂലം) വരുത്തിയാൽ അതു് ഒന്നാമ ത്തെ ഫലം. അനന്തരം അതാതു ഫലത്തെ ഇച്ഛാനുസാരം 3 കൊ ണ്ടു ഹരിച്ച ഫലങ്ങളെ വരുത്തുക. രൂപം (=ഒന്നു്) മുതൽ ഒററ സംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ക്രമാനുസാരം ഈ ഫലങ്ങളെ ഹരിക്കുക. വിഷമഫലങ്ങളുടെ യോഗത്തിൽനിന്നു യുഗ്മഫലങ്ങളുടെ യോഗം കളഞ്ഞാൽ വൃതി (=പരിധി) ഉണ്ടാകും.

വ്യാസത്തെ വ എന്നു സൂചിപ്പിച്ചാൽ,

$$\text{പരിധി.} \quad \sqrt{12\text{വ}^2}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots\ldots\right)$$

എന്നു് ഇതിൻെറ സാരം.

വ്യാസം 20,000 എന്നുവെച്ചാൽ $\sqrt{12\text{വ}^2} = 69282{\cdot}03$ ഇതു് ആദ്യഫലം. പിന്നെ മററു പദങ്ങളേയും ഉണ്ടാക്കിയാൽ ഓജ ഫലയോഗം 70924·66 എന്നും യുഗ്മഫലയോഗം 8092·81 എ ന്നുമുണ്ടാകും. അന്തരം 62831·85 ഇതു പരിധി.

$$\frac{\text{പരിധി}}{\text{വ്യാസം}} = \frac{62831{\cdot}85}{20000} = 3{\cdot}1415925.$$

വ്യാസം കുറെക്കൂടി സൂക്ഷ്മമാക്കുവാൻ കുറെക്കൂടി വലിയ വ്യാസം സ്വീകരിച്ചു വേണ്ടുവോളം ഫലങ്ങളെ കണ്ടാൽ മതി.

കടത്തനാട്ടു ശങ്കരവമ്മരാജാ ഇതേ സൂത്രംതന്നെ പറഞ്ഞു പരിധി 18 സ്ഥാനത്തോളം സൂക്ഷ്മമായി കണ്ടിരിക്കുന്നു. അതും കൂടി പറയാം.

വ്യാസാൽക്ഷുണ്ണകൃതേഃ പദേശ്നിഭിരതോ
നീതേ ച തത്തൽഫലാ-
ച്ച്യാദ്യൈകാദ്യയുഗാഹൃതേഷു പരിധി-
ർഭേദോർയുഗോജൈക്യയോഃ
ഏവഞ്ചാത്ര പരാർദ്ധവിസ്തൃതിമഹാ-
വൃത്തസ്യ നാഹോക്ഷരൈഃ
സ്യാൽ ഭദ്രാംബുധിസിദ്ധജന്മഗണിത-
ശ്രദ്ധാസ്മ യൽ ഭൂപഗീഃ

സദ്രത്നമാല—തുരീയം പ്രകരണം. ശ്ലോ. 2

ഇതിൻെറ സാരവും ഗ്രന്ഥകത്താവിൻെറ ഭാഷയിൽപ്പറയുന്നു.

“വ്യാസവർഗ്ഗത്തെ പന്ത്രണ്ടിൽ ഗുണിച്ചു മൂലിച്ചതും ഇതിങ്കൽനിന്നു മൂന്നിൽ ഹരിച്ചു വന്നതും അതിങ്കൽനിന്നും അതിങ്കൽനിന്നും സതതം മൂന്നിൽത്തന്നെ ഹരിച്ചുണ്ടായവററകളും അനന്തരം ക്രമേണ ഒന്നു്, മൂന്നു്, അഞ്ചു്, ഏഴ് തുടങ്ങിയുള്ള ഓജസംഖ്യകളാൽ ആഹൃതങ്ങളായാൽ ആ സ്ഫുടഫലങ്ങളിൽ ഒററപ്പെട്ട ഏടയോഗത്തിൽനിന്നു് ഏരട്ടപ്പെട്ട ഫലയോഗത്തെ വാങ്ങി ശേഷിച്ചതു മമ്പിലേത്തെ ഇഷ്ടവ്യാസത്തിൻെറ പരിധിയാകുന്നു.***** ഈവണ്ണമായാലിവിടെ ഇഷ്ടവൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസത്തെ പരാർദ്ധ ($=10^{17}$)മായംശിച്ചാൽ ആ വൃത്തത്തിൻെറ ചുററു് ആ അംശം കൊണ്ടു് അളന്നാൽ 'ഭദ്രാംബുധിസിദ്ധജന്മഗണിതശ്രദ്ധാസ്മ

യൽ ഭൂപഗീഃ’ (=314159265358979324) എന്ന അക്ഷര സംഖ്യകൊണ്ടു ഭവിക്കും.”

പുതുമന ചോമാതിരിയുടെ കരണപദ്ധതിയിൽനിന്നും ഒരു സൂത്രം ഉദ്ധരിക്കട്ടെ.

വ്യാസാച്ചതുർഘ്നാദ് ബഹുശഃ പൃഥക്സ്ഥാൽ
ത്രിപഞ്ചസപ്താദ്യയുഗാ ഹൃതാനി
വ്യാസേ ചതുർഘ്നേ ക്രമശസ്ത്വൃണം സ്വം
കുര്യാൽ തദാ സ്യാൽ പരിധിഃ സുസൂക്ഷ്മഃ

ക. പ. ആറാം അദ്ധ്യായം. ശ്ലോ. 2

സാരം—“ഇഷ്ടവ്യാസത്തെ 4കൊണ്ടു ഗുണിച്ചു വെവ്വേറെ പലേടത്തുവെച്ചു 3, 5, 7 ഇത്യാദി അയുഗ്മസംഖ്യകളെക്കൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്നവയെ 4കൊണ്ടു പെരുക്കിയ വ്യാസത്തിൽനിന്നു ക്രമേണ കളകയും അതോടു കൂട്ടുകയും ചെയ്താൽ പരിധി സൂക്ഷ്മമാകും.”

യുക്തിപ്രകാശികാ കൈരളീവ്യാഖ്യാനം ഭാ. 173

വൃത്തപരിധി കാണുവാൻ ഇവിടെ കണ്ട ശ്രേണികളേക്കാൾ സൂക്ഷ്മതയെ ശീഘ്രതരം ഉപഗമിക്കുന്ന ശ്രേണികളേയും പാശ്ചാത്യപണ്ഡിതന്മാർ ഉപയോഗിക്കുന്നുണ്ടു്. അവയിൽ രണ്ടെണ്ണം ഇവിടെപ്പറയാം.

വ്യാസാർദ്ധം മാനപ്രമാണമായിക്കരുതിയാൽ, വൃത്തപരിധ്യഷ്ടാംശമായ $\frac{\pi}{4}$ എന്നതിൻെറ താനകജ്യാവ് 1 എന്നു നാം കണ്ടിട്ടുണ്ടു്. അതേ മാനപ്രമാണം സ്വീകരിച്ചാൽ,

$$\text{താ}^{-1}1 \text{ അഥവാ } \frac{\pi}{4} = 4.\ \text{താ}^{-1}\tfrac{1}{5} - \text{താ}^{-1}\frac{1}{239}.$$

അതിൽനിന്നു്,

$$\frac{\pi}{4}=4\left\{\frac{1}{5}-\frac{1}{5^3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{5^5}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{5^7}\cdot\frac{1}{7}+\dots\dots\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{239}-\frac{1}{239^3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{239^5}\cdot\frac{1}{5}-\dots\dots\dots\right\}$$

$\frac{\pi}{4}=\text{താ}^{-1}\,\frac{1}{2}+\text{താ}^{-1}\,\frac{1}{3}$ എന്നതിൽനിന്നു്.

$$\frac{\pi}{4}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{2^7}\cdot\frac{1}{7}+\dots\dots\right\}$$

$$+\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3^5}\cdot\frac{1}{5}-\frac{1}{3^7}\cdot\frac{1}{5}+\dots\dots\right\}$$

$$\text{ഭു}^{-1}\text{യ}=\text{യ}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\text{യ}^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\text{യ}^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\text{യ}^7}{7}+\dots\dots$$

ഇതിൽനിന്നു ചാപത്തിൻെറ ഭുജജ്യാവറിഞ്ഞാൽ ആ ചാപം ഗണിക്കാമെന്നു കണ്ടു. എന്നാൽ ചാപം അറിഞ്ഞാൽ, അതിൻെറ ഭുജജ്യാവു കണക്കാക്കുന്നതു ഗണിതത്തിൽ അതിപ്രധാനമാകുന്നു. അനുക്രമികസമീപനരീത്യാ ഈ ശ്രേണിയെ വ്യസ്തീകരിക്കാം. അതിന്നായി ഭു$^{-1}$ യ എന്നതിനെ ച എന്നു സൂചിപ്പിക്കുക. എന്നാൽ

$$\text{യ}=\text{ച}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\text{യ}^3}{3}-\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\text{യ}^5}{5}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\text{യ}^7}{7}-\dots\dots$$

പ്രഥമസമീപനമായി യ $=$ ച എന്നു സ്വീകരിക്കാം. ദ്വിതീയസമീപനത്തിന്നു ശ്രേണിയിൽ ഇനിയത്തെ പദത്തിൽ യ എന്നതിന്നുപകരം ച എന്നു വെയ്ക്കാം. എന്നാൽ

$$\text{യ}=\text{ച}-\frac{1}{\underline{|3}}\text{ച}^3.$$ എന്നുണ്ടാകും.

തൃതീയസമീപനത്തിൽ യ $=$ ച $-\frac{1}{3}$ ച^3 എന്നു വെയ്ക്കാം. അപ്പോൾ,

$$\text{യ} = \text{ച} - \frac{1}{\underline{|3}}\left(\text{ച} - \frac{1}{\underline{|3}}\text{ച}^3\right)^3 - \frac{1.3}{2.4.5}$$
$$\times\left(\text{ച} - \frac{1}{\underline{|3}}\text{ച}^3\right)^5$$

$$= \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\underline{|3}}\left(1 - \frac{\text{ച}^2}{\underline{|3}}\right)^3 - \frac{1.3\text{ച}^5}{2.4.5}\left(1 - \frac{\text{ച}^3}{\underline{|3}}\right)^5$$

ച^5ന്നു മീതെയുള്ള സമഘാതങ്ങളെ ഉപേക്ഷിച്ചാൽ,

$$\text{യ} = \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{ച}^3}{\underline{|3}}.3.\frac{\text{ച}^2}{\underline{|3}} - \frac{1.3.\text{ച}^5}{2.4.5}$$

$$= \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\underline{|3}} + \text{ച}^5\left(\frac{1}{\underline{|3}.2} - \frac{1.3}{2.4.5}\right).$$

$$= \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{ച}^5}{\underline{|5}}\left(\frac{4.5}{2} - 1.3.3\right)$$

$$= \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{ച}^5}{\underline{|5}}$$

ചതുൎത്ഥസമീപനത്തിൽ വലത്തുപക്ഷത്തുള്ള ശ്രേണിയിൽ യ എന്നതിന്നുപകരം $\text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{ച}^5}{\underline{|5}}$ എന്നു വെയ്ക്കാം. എന്നിട്ടു ച^7ന്നു മീതെയുള്ള സമഘാതങ്ങളെ ഉപേക്ഷിച്ചു സംഹരിച്ചാൽ,

$$\text{യ} = \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{ച}^5}{\underline{|5}} - \frac{\text{ച}^7}{\underline{|7}}$$

എന്നുണ്ടാവും. തുടൎന്നുപോയാൽ ഇതേ രീതിയിലുള്ള പദങ്ങൾക്കൊണ്ടു ഒരു ശ്രേണിയുണ്ടാകുന്നു. ക്രിയ ക്ലേശകരമാണു്. ഇവിടെ ന്യായം പൂൎത്തിയാകേണമെങ്കിൽ ശ്രേണിയിൽ ഒരു ഇഷ്ടപദംവരെ ഈ രീതിയിൽ വന്നാൽ പിന്നത്തെ പദവും ഈ രീതിയിൽത്തന്നെ വരുമെന്നു സ്ഥാപിക്കണം. അതിന്നു് അതിക്ലിഷ്ട

മായ ഉപസംഹാരക്രിയ ആവശ്യവുമാണ്. പദങ്ങൾ ഇതേരീതിയിൽ വന്നാലും വന്നില്ലെങ്കിലും ശ്രേണിയിൽ ച എന്നതിൻേറയും അതിൻേറ സമഘാതങ്ങളുടേയും ഗുണകാരങ്ങൾ സംഖ്യാത്മകമായിരിക്കുമെന്നു തീൎച്ചയാക്കാം. അങ്ങിനെ ഇരിക്കെ ഈ ഗുണകാരങ്ങളെ നിൎണ്ണയിപ്പാൻ ഒരു സുഗമമാൎഗ്ഗം മേലിൽ സ്ഥാപിക്കുന്നതാണ്.

ഇതേ ചാപത്തിൻേറ കോടിജ്യാവ്,

$$=\left\{ 1-\left(\text{ച}-\frac{\text{ച}^3}{\underline{|3}}+\frac{\text{ച}^5}{\underline{|5}}-\frac{\text{ച}^7}{\underline{|7}}+\ldots\ldots\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

ഇതു് ഒരു ശ്രേണിയാക്കിയാൽ ആദ്യം 1ഉം പിന്നീടു ച^2 വും അതിൻേറ സമഘാതങ്ങളും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒന്നായിരിക്കും. ഇതു തീൎച്ചയായാൽ മേലിൽ പറയുന്ന മാൎഗ്ഗത്തിൽക്കൂടി ശ്രേണീപദഗുണകാരങ്ങളെ കാണാവുന്നതാണ്.

(2) ഇനി ഭേദകഗുണകംവഴി വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ വൃദ്ധിക്ഷയങ്ങൾ അറിവാൻ മാൎഗ്ഗം പറയുന്നു.

വ $\equiv$ വ്യ (യ) എന്നതിൻേറ സാരം വ എന്നതു യ ബീജരാശിയായ ഒരു വ്യഞ്ജകമാകുന്നു എന്നാണല്ലോ. യ എന്നതിന്നു് ഒരു പ്രത്യേകവിലയുള്ളപ്പോൾ വ്യഞ്ജകത്തിൻേറ വില വൎദ്ധിക്കുകയോ കുറയുകയോ ചെയ്യുന്നതെന്നു കാണുവാൻ അതിൻേറ ഭേദകഗുണകാരം കണ്ടു് അതു് ആ ഇഷ്ടവിലയ്ക്കു ധനമോ ഋണമോ എന്നു നോക്കിയാൽ മതി.

$\frac{\text{ഭം}\text{വ}}{\text{ഭം}\text{യ}}$ എന്നതു വ്യഞ്ജകത്തിൽ വരുന്ന ഒരു ലഘുഭേദത്തെ യ എന്നതിൽ ഉള്ള ലഘുഭേദംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലം യ എന്നതിലുള്ള ലഘുഭേദം ശൂന്യപ്രായമെന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന വ്യഞ്ജകമാണല്ലോ. യ എന്നതിൻേറയും വ എന്നതിൻേറയും അണുകങ്ങൾ ധനമാകുമ്പോൾ $\frac{\text{ഭം}\text{വ}}{\text{ഭം}\text{യ}}$ എന്ന ഗുണകാരം ധന

മെന്നു സ്പഷ്ടം. അതിനാൽ ഭംയ ധനവും $\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}$ ധനവും ആയി വന്നാൽ ഭംവ ധനമെന്നു വരും. ഭംയ എന്നതിനെ സദാ ധനമായേ കരുതാറുള്ളൂ. ആ നിലയ്ക്കു $\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}$ ധനമായി കണ്ടാൽ വ്യഞ്ജകം ക്രമേണ വദ്ധിക്കുന്നു എന്നു തീച്ച്യയാക്കാം. ഭംയ ധനവും $\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}$ എന്നതു ഋണവുമായാൽ, ഭംവ ഋണമെന്നു വരും. ഇതിൽനിന്നു യ വദ്ധിക്കുന്നതോട്ടുകൂടി വ ക്ഷയിച്ചുവരുന്നുവെന്നനുമാനിക്കാം. രണ്ടുംകൂടിപ്പറഞ്ഞാൽ ഒരു വ്യഞ്ജകത്തിൻെറ ഭേദകഗുണം ധനമെങ്കിൽ ആ ഘട്ടത്തിൽ വ്യഞ്ജകം വദ്ധിക്കുന്നു, ഭേദകഗുണം ഋണമെങ്കിൽ ആ ഘട്ടത്തിൽ വ്യഞ്ജകം ക്ഷയിക്കുന്നു. —10ൽനിന്നു് ഒരു രാശി —9 ആയി മാറിയാൽ അതു വദ്ധിക്കുന്നുവെന്നു മനസ്സിലാക്കണം. വദ്ധനവ് $=(-9)-(-10)=+1$. —10ൽനിന്നു —11 ആയി മാറിയാൽ അതു ക്ഷയിക്കുന്നു. ക്ഷയം $=(-11)-(-10)=-1$.

$\frac{\text{ഭംയ}^3}{\text{ഭംയ}}=3\text{യ}^2$. ഇവിടെ ഭേദകഗുണം സദാ ധനമാകുന്നു. അതിനാൽ യ^3 എന്ന രാശി സദാ വദ്ധിക്കുന്നുവെന്നു വരുന്നു. $\text{യ}=-5$, അപ്പോൾ $\text{യ}^3=-125$, $\text{യ}=-4$ അപ്പോൾ $\text{യ}^3=-64$. യ, +1 വദ്ധിച്ചപ്പോൾ യ^3 ധനം 61 വദ്ധിച്ചുവെന്നു സാരം. $\frac{\text{ഭംയ}^2}{\text{ഭംയ}}=2\text{യ}$. ഭേദകഗുണം $=2\text{യ}$. ഇതു ഋണമാകുമ്പോൾ യ^2 ക്ഷയിക്കുന്നു, ധനമാകുമ്പോൾ യ^2 വദ്ധിക്കുന്നു. $\text{യ}=-10$, അപ്പോൾ $\text{യ}^2=+100$. $\text{യ}=-9$, $\text{യ}^2=+81$. യ എന്നതിൽ +1 വദ്ധിച്ചപ്പോൾ യ^2ൽ വന്ന ക്ഷയം 19. $\text{യ}=10$, അപ്പോൾ $\text{യ}^2=100$, $\text{യ}=11$, അപ്പോൾ $\text{യ}^2=121$. യ ഒന്നുകൊണ്ടു വദ്ധിച്ചപ്പോൾ യ^2 21കൊണ്ടു വദ്ധിച്ചുവെന്നു സാരം.

$\frac{\text{ഭംഋയ}}{\text{ഭംയ}}$ = കോയ. യ എന്നതു 0° മുതൽ 90° ആവുന്നതുവരെ കോയ ധനം. അതിനാൽ ഈ ഇടയിൽ ഋയ വദ്ധിക്കുന്നു. 90° മുതൽ 180°വരേയും പിന്നേയും 270°വരേയും കോയ ഋണം. അതിനാൽ ഈ ഇടയിൽ ഋയ ക്ഷയിച്ചുവരുന്നു.

മറെറാരുദാഹരണം.

$$\text{വ} = 2\text{യ}^3 + 3\text{യ}^2 - 36\text{യ} + 54.$$

$$\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}} = 6\text{യ}^2 + 6\text{യ} - 36 = 6\,(\text{യ}^2 + \text{യ} - 6)$$

$$= 6(\text{യ} + 3)\,(\text{യ} - 2)$$

യ = −2 എങ്കിൽ $\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}} = -24$. അതിനാൽ ഈ ഘട്ടത്തിൽ വ ക്ഷയിച്ചുവരുന്നു.

യ = +3 എങ്കിൽ $\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}} = +36$. അതിനാൽ ഈ ഘട്ടത്തിൽ വ വദ്ധിച്ചുവരുന്നു.

യ = −3 എങ്കിൽ $\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}} = 0$. അതിനാൽ ഈ ഘട്ടത്തിൽ വ എന്നതിന്നു വദ്ധനവുമില്ല, ക്ഷയവുമില്ല. അതിനാൽ ഈ ഘട്ടത്തിൽ വ വദ്ധിച്ചുവന്നു വദ്ധനവു നിലച്ചു ക്ഷയിക്കുവാൻ തുടങ്ങാം. അഥവാ ക്ഷയിച്ചുവന്നു ക്ഷയം നിലച്ചു വദ്ധനവു തുടങ്ങിയ ഘട്ടവുമാവാം. ആദ്യത്തേതിന്നു വ്യഞ്ജകത്തിൻെറ <u>ഉച്ചം</u> എന്നും രണ്ടാമത്തേതിന്നു <u>നീചം</u> എന്നും പറയുന്നു. ഉച്ചമാണെങ്കിൽ അതിന്നു മുമ്പു വദ്ധനവും പിമ്പു ക്ഷയവുമാണല്ലോ. അതിനാൽ ഈ ഘട്ടത്തിൽ $\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}$ എന്നതു ധനത്വം വിട്ടു ഋണത്വത്തിൽ പ്രവേശിക്കണം. അപ്പോൾ $\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}$ എന്നതിന്നു ക്ഷയഘ

ട്ടമാകും. അതിനാൽ അതിൻെറ ഭേദകഗുണകാരം ഋണമാകണം. ഈ ഭേദകഗുണകാരത്തിന്നു് ആദ്യവ്യഞ്ജകത്തിൻെറ ദ്വിതീയഭേദകഗുണം എന്നു പറയുന്നു. $\frac{\text{ഭം}^2\text{വ}}{\text{ഭംയ}^2}$ എന്നു് അതിന്നെ എഴുതുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇവിടെ $\frac{\text{ഭം}^2\text{വ}}{\text{ഭംയ}^2}=\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}(6\text{യ}^2+6\text{യ}-36)=12\text{യ}+6$. $\text{യ}=-3$ ആകുമ്പോൾ $\frac{\text{ഭം}^2\text{വ}}{\text{ഭംയ}^2}=-30$. അതിനാൽ ഇവിടെ ആദ്യവ്യഞ്ജകത്തിൽ ഉച്ചം ഉണ്ടാകുന്നു. $\text{യ}=+2$ എന്ന ഘട്ടത്തിൽ $\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}=6(\text{യ}^2+\text{യ}-6)=0$. ഇവിടെ ഉച്ചമോ നീചമോ ഉണ്ടാവാം.

$\frac{\text{ഭം}^2\text{വ}}{\text{ഭംയ}^2}=6(2\text{യ}+1)$. $\text{യ}=+2$ ആകുമ്പോൾ, $\frac{\text{ഭം}^2\text{വ}}{\text{ഭംയ}^2}=+30$. ഇതു ധനം. അതിനാൽ ഇവിടെ $\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}$ എന്നതു ഋണത്വത്തിൽ നിന്നു ധനത്വം പ്രാപിക്കുന്നു. ഇടയിൽ ശൂന്യമായതാണു്. അതിനാൽ ആദ്യവ്യഞ്ജകം ക്ഷയം വിട്ടു വൃദ്ധിയെ പ്രാപിക്കുന്നു. വ്യഞ്ജകത്തിന്നു് ഈ ഘട്ടത്തിൽ നീചമാകുന്നു.

ചിലപ്പോൾ ചലരാശിയുടെ ഉദ്ദിഷ്ടമൂല്യത്തിന്നു ദ്വിതീയ ഭേദകഗുണവും മാത്രമല്ല മേലാലുള്ള ഭേദകഗുണകങ്ങളും ശൂന്യമായെന്നു വരാം. അപ്പോൾ ആ ഉദ്ദിഷ്ടമൂല്യത്തിൻെറ ഇരുപുറവും വ്യഞ്ജകം കുറയുമോ, കയറുമോ എന്നു കാണുകതന്നെ വേണം. ഇരുപുറവും കുറയുന്നുവെങ്കിൽ അതു് ഉച്ചംപോലെ ഇരിക്കും. ഇരുപുറവും കയറുന്നുവെങ്കിൽ നീചംപോലെ ഇരിക്കും. ഒരു പുറത്തു കയറുകയും മറേറപുറത്തു് ഇറങ്ങുകയുമാവാം. ഇതിന്നെല്ലാം വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ആവജ്ജനഘട്ടമെന്നു പറയുന്നു.

വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഉച്ചനീചങ്ങൾ സാധാരണയായി ഏകാന്തരമായി ഉണ്ടാകുന്നു. എന്തുവെച്ചാൽ ഒരു ഉച്ചം കഴിഞ്ഞാൽ ഒരു നീചം, നീചം കഴിഞ്ഞാൽ ഉച്ചം എന്നിങ്ങനെ. അഭഗ്നവ്യഞ്ജകങ്ങളിൽ ഇതു സ്വാഭാവികമാണ്. എങ്കിലും ഒരു ഉച്ചവും ഒരു നീചവും കൂടി ചേൎന്നേക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടുച്ചങ്ങളും ഒരു നീചവും അഥവാ രണ്ടു നീചങ്ങളും ഒരുച്ചവും എന്നീവിധങ്ങളിലും ഈ കൂടിച്ചേൎച്ചയുണ്ടാവാം.

വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ദ്വിതീയഭേദകഗുണം $\frac{ഭം^2 വ}{ഭംയ^2}$ എന്നാണ് എഴുതാറുള്ളതെന്നു പറഞ്ഞുവല്ലോ. ഇതിൻേറയും ഭേദകഗുണമുണ്ടാവാം. അതിനെ $\frac{ഭം^3 വ}{ഭംയ^3}$ എന്നെഴുതുന്നു. ഇതു തൃതീയഭേദകഗുണം. ഇങ്ങിനെ മേല്ക്കുമേലുള്ള ഭേദകഗുണങ്ങളെ $\frac{ഭം^4 വ}{ഭംയ^4}$, $\frac{ഭം^5 വ}{ഭംയ^5}$ എന്നിങ്ങിനെ എഴുതിവരുന്നു.

പുസ്തകത്തിൻെറ തുടക്കത്തിൽ 48 അടി ഉയരത്തുനിന്നു സെക്കണ്ടിൽ 100 അടി വേഗത്തിൽ മേല്പോട്ടു പ്രക്ഷേപിക്കപ്പെട്ട ഒരു കല്ലിൻെറ ഉയരം ക സെക്കണ്ടു കഴിഞ്ഞാൽ $48 + 100ക — 16ക^2$ ആണെന്നു പ്രസ്താവിച്ചുവല്ലോ. അതിൽനിന്നുത്ഭവിച്ച പ്രശ്നങ്ങൾക്കു വരഗണിതംവഴി ഉത്തരം കാണാം.

ഒന്നാമതു കല്ല് എത്ര സമയം മേല്പോട്ടു സഞ്ചരിച്ചു? ആ സമയത്തിൻെറ അന്ത്യത്തിൽ പ്രഥമഭേദകഗുണം ശൂന്യവും ദ്വിതീയഭേദകഗുണം ഋണവുമായിരിക്കും.

പ്രഥമഭേദകഗുണം $= 100 — 32ക$. ഇതു ശൂന്യമാകണമെങ്കിൽ $ക = 3\frac{1}{8}$. ദ്വിതീയഭേദകഗുണം $= —32$. ഇതു ഋണവു

മാകുന്നു. അതിനാൽ $3\frac{1}{8}$ സെക്കണ്ടുനേരം കല്ല് ഉയർത്തേക്കു പോയി. പോയ ഉയരം കാണുവാൻ ഈ സമയത്തിന്റെ അന്ത്യത്തിൽ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വില കണക്കാക്കിയാൽ മതി. അതു $48+100\times3\frac{1}{8}-16\times(3\frac{1}{8})^2=204\frac{1}{4}$ അടി.

മൂന്നാമതു കല്ല് എപ്പോൾ നിലംപതിക്കും? ഇതിന്നു $48+100\text{ക}-16\text{ക}^2$ എപ്പോൾ ശൂന്യമാകുമെന്നു കണ്ടാൽ മതി.

$$16\text{ക}^2-100\text{ക}-48=0$$

$$\therefore\ 4\text{ക}^2-25\text{ക}-12=0$$

$$\text{ക}=\frac{+25\pm\sqrt{625+192}}{8}$$

$$=\frac{+25\pm28{\cdot}583}{8}$$

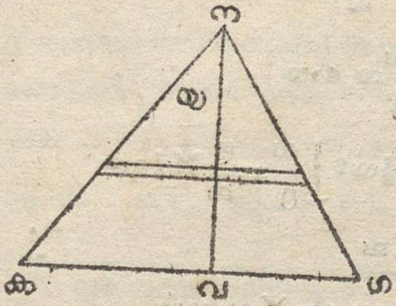
$$=\frac{53{\cdot}583}{8}\ \text{അഥവാ}\ \frac{-3{\cdot}583}{8}$$

$$=6{\cdot}698\ \text{അഥവാ}\ -{\cdot}448$$

6·698 സെക്കണ്ടിന്നു കല്ലു നിലംപതിക്കും. രണ്ടാമത്തെ ഉത്തരത്തിന്നും ഒരത്ഥമുണ്ടു്. നിലത്തുനിന്നു മേല്പോട്ടു പ്രക്ഷേപിച്ചു 48 അടി ഉയരത്തെത്തുമ്പോൾ സെക്കണ്ടിൽ 100 അടി വേഗത വരത്തക്കവണ്ണം പ്രക്ഷേപണസമയത്തിന്നു 0·448 സെക്കണ്ടു മുമ്പു കൂടുതൽ വേഗതയിൽ കല്ലു നിലത്തുനിന്നു പ്രക്ഷേപിച്ചാൽ മതി. ഈ വേഗത ഏതാണ്ടു സെക്കണ്ടിൽ 114·4 അടിയുമായിരിക്കും.

3. വർഗഗണിതംകൊണ്ടു ചില ക്ഷേത്രഫലങ്ങളും ഘനഫലങ്ങളും ചില ഭൌതികശക്തികളും അനായാസേന കണക്കാക്കാം. ആ മാർഗ്ഗങ്ങൾ താഴെ ഉദാഹരിക്കുന്നു.

i. ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം.



പരിലേഖം 9.

പരിലേഖത്തിൽ കഗന എന്നതു ഒരു ത്രികോണവും, കഗ അതിന്റെ ഉപതാനവും, നവ എന്നതു ന എന്ന കൂടത്തിൽ നിന്നു് ഉപതാനത്തിലേക്കു ലംബവുമാകുന്നു. ഉപതാനത്തിന്റെ മാനം ഭ്ര എന്നും ലംബത്തിന്റേതു ല എന്നും വെക്കുക. കൂടത്തിൽനിന്നു ലംബം വഴി യ എന്നും (യ + ഭംയ) എന്നും അകലെയായി രണ്ടു ബിന്ദുക്കളിൽക്കൂടി ഉപതാനത്തിന്നു സമാന്തരമായി സങ്കല്പിച്ച രണ്ടു രേഖകളുടെ ദൈർഘ്യങ്ങൾ

$$\text{ഭ്ര} \times \frac{\text{യ}}{\text{ല}} \text{ എന്നും } \text{ഭ്ര} \times \frac{\text{യ} + \text{ഭംയ}}{\text{ല}} \text{ എന്നും}$$

അവ തമ്മിലുള്ള അകലം ഭംയ എന്നുമാകുന്നു. രണ്ടു രേഖകളുടേയും ഇടയിലുള്ള ത്രികോണഭാഗത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം $\text{ഭ്ര} \times \frac{\text{യ}}{\text{ല}} \times \text{ഭംയ}$ എന്നതിന്റേയും $\text{ഭ്ര} \times \frac{\text{യ} + \text{ഭംയ}}{\text{ല}} \times \text{ഭംയ}$ എന്നതിന്റേയും ഇടയിലാകുന്നു. ഇവ തമ്മിലുള്ള ഭേദം $\text{ഭ്ര} \times \frac{\text{ഭംയ}}{\text{ല}} \times \text{ഭംയ}$ എന്നുമാത്രമാകുന്നു. ഭംയ എന്നതുതന്നെ ശൂന്യപ്രായമെന്നു സങ്കല്പിച്ചിരിക്കയാൽ $(\text{ഭംയ})^2$ ത്യാജ്യമെന്നു വെക്കാം. അതിനാൽ ക്ഷേത്രഫലത്തെ $\text{ഭ്ര}. \frac{\text{യ}}{\text{ല}}. \text{ഭംയ}$ എന്നുതന്നെ സ്വീകരിക്കാം. ഇതിനെ ലംബത്തിന്റെ അഗ്രംമുതൽ മൂലംവരെ സമാകലനം ചെയ്താൽ ത്രികോണക്ഷേത്രഫലമാകും. അതിനാൽ,

$$\text{ക്ഷേത്രഫലം} = \int_0^{\text{ല}} \text{ഉ} \cdot \frac{\text{യ}}{\text{ല}} \cdot \text{ഭംയ}$$

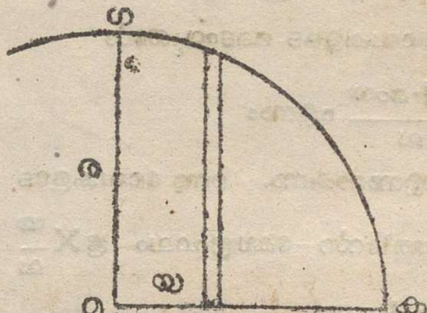
$$= \frac{\text{ഉ}}{\text{ല}} \int_0^{\text{ല}} \text{യ ഭംയ}$$

$$= \frac{\text{ഉ}}{\text{ല}} \left[\tfrac{1}{2}\text{യ}^2 \right]_0^{\text{ല}} = \frac{\text{ഉ}}{\text{ല}} \times \tfrac{1}{2}\text{ല}^2$$

$$= \underline{\tfrac{1}{2}\text{ഉ} \times \text{ല}}$$

ത്രികോണക്ഷേത്രഫലം = ½. ഉപതാനം X ലംബം.

ii. ഇനി ര വ്യാസാൎദ്ധമായ ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലം കാണുവാനുള്ള മാൎഗ്ഗം പറയുന്നു. പരിലേഖത്തിൽ ര വ്യാസാൎദ്ധമായ ഒരു വൃത്തപാദത്തെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. മ എന്ന വൃത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു യ, (യ + ഭംയ) അകലെയായി രണ്ടു അൎദ്ധജ്യാവുകളേയും കാണിച്ചിട്ടുണ്ടു്. ഇവ മഗ എന്ന വ്യാസാൎദ്ധത്തിന്നു സമാന്തരവും മക എന്ന വ്യാസാൎദ്ധത്തിന്നു ലംബങ്ങളുമാകുന്നു.



പരിലേഖം 10.

ഭംയ അണുപ്രായമാകുന്നു. അതു ശൂന്യപ്രായമാകുമ്പോൾ രണ്ടു് അൎദ്ധജ്യാവുകളും തുല്യമെന്നു കരുതാം. അപ്പോൾ അവയുടെ നീളം $\sqrt{\text{ര}^2 - \text{യ}^2}$ എന്നു വരും. അതിനാൽ രണ്ടു് അൎദ്ധജ്യാവുകളുടേയും ഇടയിലുള്ള ക്ഷേത്രഫലാണുകം $= \sqrt{\text{ര}^2 - \text{യ}^2}$. ഭംയ. ഇതിനെ യ=0 തൊട്ടു യ=ര വരെ സമാകലനം ചെയ്താൽ വൃത്തപാദത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലമായി. അതിന്റെ നാന്മടങ്ങു വൃത്തത്തിന്റെ ക്ഷേത്രഫലവുമാകുന്നു.

$$\text{വൃത്തക്ഷേത്രഫലം} = 4\int_0^{\text{ര}} \sqrt{\text{ര}^2 - \text{യ}^2}\ \text{ഭംയ}.$$

സമാകലനത്തിന്നുവേണ്ടി യ $=$ ര ജ്ഞമ എന്നു വെയ്ക്കുക. എന്നാൽ ഭംയ $=$ ര. കോമ. ഭംമ. $\sqrt{\text{ര}^2 - \text{യ}^2} = \sqrt{\text{ര}^2 - \text{ര}^2\text{ജ്ഞ}^2\text{മ}}$ $=$ ര. $\sqrt{1 - \text{ജ്ഞ}^2\text{മ}} =$ ര. കോമ. യ ശൂന്യമാകുമ്പോൾ ജ്ഞമ $= 0$, മ $= 0$. യ $=$ ര ആകുമ്പോൾ ജ്ഞമ $= 1$, മ $= \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore\ \text{വൃത്തക്ഷേത്രഫലം} = 4\int_0^{\text{ര}} \sqrt{\text{ര}^2 - \text{യ}^2}.\ \text{ഭംയ}$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ര}^2.\ \text{കോ}^2\text{മ ഭംമ}.$$

$$= 2\text{ര}^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \text{കോ } 2\text{മ})\ \text{ഭംമ}.$$

$$= 2\text{ര}^2\left[\text{മ} + \tfrac{1}{2}\text{ജ്ഞ}2\text{മ}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\text{ര}^2\left\{\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \left(0 + 0\right)\right\}$$

$$= \pi.\ \text{ര}^2.$$

വൃത്തക്ഷേത്രഫലം $= \pi \times$ വ്യാസാദ്ധവർഗ്ഗം

iii. ഒരു കൂടികയുടെ ഘനഫലം കാണുവാൻ പറയുന്നു. കൂടികയുടെ ഉപതാനമെന്ന അടിഭാഗം ഒരു പരന്ന ക്ഷേത്രമായിരിക്കും. ആകൃതി എന്തുമാകാം. ഋജുഭുജക്ഷേത്രമായാൽ സൂചീസ്തംഭമെന്നു പറയും. ഉപതാനത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലം ഭ്ര എന്നു വെയ്ക്കുക. മേലോട്ടു വരുംതോറും കൂടിക ക്രമത്തിൽ വണ്ണംകുറഞ്ഞു് അഗ്രത്തിൽ ഒരു ബിന്ദുവായി കലാശിക്കുന്നു. ആ ബിന്ദുവിന്നു കൂടികയുടെ കൂടമെന്നു പേര്. കൂടത്തിൽനിന്നു് ഉപതാ

നത്തിലേയ്ക്കുള്ള ലംബത്തിന്റെ നീളം ല എന്നു വെയ്ക്കുക. കൂട തത്തിൽനിന്നു താഴോട്ടു ലംബംവഴി യ എന്നും (യ + ഭംയ) എന്നും അകലത്തായി ഉപതാനത്തിന്നു സമാന്തരമായി രണ്ടു തലങ്ങൾ സംകല്പിക്കുക. കൂടത്തിൽ പെട്ട ഈ തല്പങ്ങളുടെ ക്ഷേത്രഫല ങ്ങൾ $ഭ \times \frac{യ^2}{ല^2}$, $ഭ \times \frac{(യ + ഭംയ)^2}{ല^2}$ എന്നും ആയിരിക്കും. ഭംയ ശൂന്യപ്രായമാകുമ്പോൾ ഇവ തുല്യമെന്നു കരുതാം. ഇവയുടെ ഇടയിൽ പെട്ട കൂടികാഭാഗത്തിന്റെ ഘനഫലം

$$=ഭ\frac{യ^2}{ല^2}.\ ഭംയ.$$

ഇതിനെ യ = 0 തൊട്ടു യ = ല വരെ സമാകലനം ചെയ്താൽ, കൂടികയുടെ ഘനപരിമാണമായി.

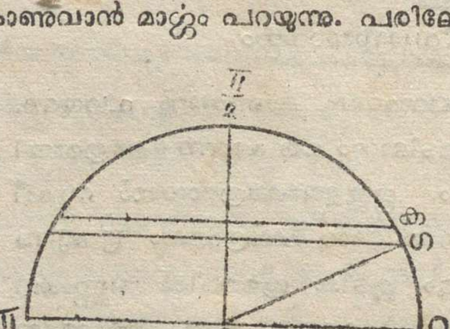
$$\text{കൂടികാഘനപരിമാണം} = \int_0^{ല} ഭ.\frac{യ^2}{ല^2}.\ ഭംയ.$$

$$= \frac{ഭ}{ല^2}\int_0^{ല} യ^2.\ ഭംയ = \frac{ഭ}{ല^2}\left[\frac{യ^3}{3}\right]_0^{ല}$$

$$= \frac{ഭ}{ല^2}\left\{\frac{ല^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right\} = \underline{\tfrac{1}{3}\ ഭ.ല}$$

കൂടികാഘനഫലം = $\frac{1}{3}$ ഉപതാനക്ഷേത്രം $\times$ ലംബം

iv. ര വ്യാസാർദ്ധമായ ഒരു ഗോളത്തിന്റെ പൃഷ്ഠതലം കാണ്മാൻ മാർഗ്ഗം പറയുന്നു. പരിലേഖത്തിൽ ര വ്യാസാർദ്ധമായ ഒരു അർദ്ധവൃത്തവും മ എന്ന വൃത്തമദ്ധ്യത്തിൽനിന്നു വ്യാസത്തിന്നു ലംബമായ വ്യാസാർദ്ധവും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. വൃത്തപരിധി 2π ര എന്നു്. ഗ, ക എന്നവ വ്യാസത്തിന്റെ വലത്തെ അററത്തു



പരിലേഖം 11.

നിന്നു പരിധി വഴി രയ എന്നും ര(യ+ഭംയ) എന്നും അകലെ യുള്ള രണ്ടു ബിന്ദുക്കളാകുന്നു. (യ, ഭംയ എന്നവ കരകാത്മകങ്ങ ളായ ചാപമാനങ്ങളാകുന്നു) അൎദ്ധവൃത്തത്തെ ലംബമായ വ്യാ സാൎദ്ധത്തിന്നു ചുററും തിരിച്ചാൽ ഒരൎദ്ധഗോളമുണ്ടാകും. അതി ൻെറ വക്രതലം ഗോളപൃഷ്ഠതലത്തിൻെറ പകുതിയത്രെ. ചുററും തിരിയുന്നതോടുകൂടി കഗ എന്ന പരിധിഭാഗം ഗോളാൎദ്ധവക്ര പൃഷ്ഠത്തിൽ ര.ഭംയ വീതിയുള്ള ഒരു മേഖലയുണ്ടാക്കുന്നു. ഈ മേ ഖലയുടെ വ്യാസാൎദ്ധം ര കോയ എന്നാകുന്നു. അതിനാൽ മേഖ ലയുടെ ക്ഷേത്രഫലം

$$=2\pi ര\text{ കോയ} \times ര\text{ഭംയ}.$$

$$=2\pi ര^2.\text{ കോയ ഭംയ}.$$

ഇതിനെ ശൂന്യം തൊട്ടു $യ=\frac{\pi}{2}$ വരെ സമാകലനം ചെയ്താൽ അൎദ്ധഗോളവക്രപൃഷ്ഠതലം കിട്ടും.

$$\therefore \text{ ഗോളപൃഷ്ഠതലം} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi.ര^2.\text{കോയ ഭംയ}.$$

$$=4\pi ര^2.\Big[\text{ജ്യ}(യ)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underline{\underline{4\pi ര^2}}$$

v. ഗോളത്തിൻെറ ഘനഫലം കാണ്മാൻ മാൎഗ്ഗം പറയു ന്നു. കഴിഞ്ഞ ഖണ്ഡികയിലെ പരിലേഖത്തിൽ ഗ, ക എന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഭ്രമണവശാലുണ്ടാക്കുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ തലങ്ങൾ വൃ ത്തകേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു ഗ, ഗ+ഭംഗ അകലെയെന്നു വെയ്ക്കുക. ഭംഗ അണുകമാകയാൽ, രണ്ടു വൃത്തങ്ങളുടേയും ക്ഷേത്രഫലങ്ങൾ തുല്യമെന്നു വെയ്ക്കാം.

$$\text{ആ ക്ഷേത്രഫലം} = \pi(ര^2 - ഗ^2).$$

അതിനാൽ രണ്ടു വൃത്തതലങ്ങളുടേയും ഇടയിലുള്ള ഗോളഭാഗ

ത്തിൻെറ ഘനപരിമാണം $\pi(ര^2-ഗ^2)$ ഭംഗ. ഇതിനെ ഗ$=0$ തൊട്ടു ഗ$=$ര വരെ സമാകലനം ചെയ്തു് ഇരട്ടിച്ചാൽ ഗോളഘനഫലമുണ്ടാകും.

$$\text{ഗോളഘനഫലം}=2\int_0^{ര}\pi\,(ര^2-ഗ^2)\,\text{ഭംഗ.}$$

$$=2\pi\int_0^{ര}(ര^2-ഗ^2)\,\text{ഭംഗ.}$$

$$=2\pi\left[ര^2ഗ-\tfrac{1}{3}ഗ^3\right]_0^{ര}$$

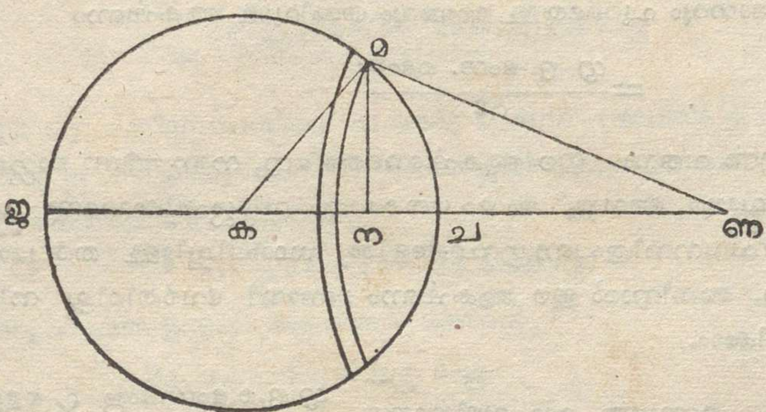
$$=2\pi.\frac{2}{3}ര^3=\frac{4\pi}{3}.\,ര^3.$$

$$\text{ഗോളഘനഫലം}=\frac{4\pi}{3}\times\text{ഗോളവ്യാസാൎദ്ധഘനം.}$$

vi. ജ്യോതിഷഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ രണ്ടു ഗ്രഹങ്ങൾ തമ്മിൽ ആകൎഷിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവയുടെ അണുക്കൾ അന്യോന്യം ആകൎഷിക്കുകയാണെന്നും, എങ്കിലും കേന്ദ്രങ്ങളിൽനിന്നു് ഒരേ അകലത്തുള്ള ദ്രവ്യത്തിൻെറ സാന്ദ്രത അതാതു ഗോളത്തിൽ തുല്യമെങ്കിൽ, ഓരോന്നിലുമുള്ള അണുക്കളെല്ലാം അതതു കേന്ദ്രങ്ങളിൽ ഒരുമിച്ചുനിന്നു് ആകൎഷിക്കുന്നപോലെ ഇരിക്കും ആ ആകൎഷണമെന്നും പ്രസ്താവിച്ചുകാണുന്നു. ഇതു വരഗണിതദ്വാരാ ഒന്നു പരിശോധിക്കാം. രണ്ടു് അണുക്കൾ തമ്മിലുള്ള ആകൎഷണം അവയുടെ ഭാരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള പെരുക്കിനെ അവ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിൻെറ വൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടുന്ന സംഖ്യയ്ക്കു് അനുപാതകമായിരിക്കുമെന്നു സേർ ഐസാക്ക് ന്യൂട്ടൻെറ കാലത്തിനു ശേഷം പ്രസിദ്ധമാണു്.

ഒന്നാമതായി ഒരു ഗോളത്തിൽനിന്നു വിട്ടുനില്ക്കുന്ന ഒരണുവും ഗോളവും തമ്മിലുള്ള ആകൎഷണത്തിൻെറ സ്വഭാവം പരിശോധിക്കാം. പരിലേഖത്തിൽ ക കേന്ദ്രമായി, ര വ്യാസാൎദ്ധ

മായി ഒരു ഗോളപൃഷ്ഠത്തേയും ഗോളത്തിന്നു പുറത്തു ഗോളകേന്ദ്ര ത്തിൽനിന്നു ദ അകലത്തായി ണ എന്ന ഒരണുവേയും കാണി



പരിലേഖം 12.

ച്ചിരിക്കുന്നു. ∠ണ ക മ എന്നതിൻെറ കരകാത്മകമായ മാനം ഋ എന്നുവെയ്ക്കുക. ര. ഭംഋ വീതിയായ ഒരു മേഖലയെ ഗോള ത്തിന്നു ചുററും കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. മേഖലയുടെ തലം കണ എ ന്ന രേഖയ്ക്കു ലംബവുമാകുന്നു. മന എന്നതു മേഖലയുടെ വലത്തുവ ശത്തുള്ള വൃത്തത്തിൻെറ വ്യാസാദ്ധമാകുന്നു. ഇതു മണ എന്ന തിന്നു ലംബവുമത്രെ. മേഖലയുടെ വലത്തുള്ള എല്ലാ ഭാഗങ്ങ ളും ണ എന്ന ബിന്ദുവിൽനിന്നു് ഒരേ അകലത്താണെന്നു കാ ണാം. ഈ അകലത്തിൻെറ മാനം റ എന്നു വെയ്ക്കുക. ഭംഋ എന്നതു് അതിലഘുവായ ഒരണുകമെങ്കിൽ മേഖലയുടെ വലത്തും ഇടത്തും ഉള്ള വൃത്തങ്ങൾ സാമാന്യം തുല്യമായിരിക്കും.

മേഖലയുടെ വീതി = ര. ഭംഋ. മേഖലയുടെ ചുററു് 2π. ര. ഭുഋ. ഇതിനെ ഗ എന്നു വെയ്ക്കുക. ഇതിൻെറ അണുകം ഭംഗ എന്നു്. ദ്ര എന്നതു് ഒരു പ്രമാണം ഗോളപൃഷ്ഠക്ഷേത്രഫലത്തി ലുള്ള ദ്രവ്യത്തിൻേറയും പുറത്തുള്ള അണുവിൻേറയും ദ്രവ്യമാന ഘാതമെന്നും ഗ്ര എന്നതു ദ്രവ്യമാനഘാതത്തെ റ² കൊണ്ടു ഹരിച്ച

കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ ആകൎഷണമാനസംഖ്യയായി മാററുന്ന ഒരു സ്ഥിരഗുണകാരമെന്നും വെച്ചാൽ, മേഖലയുടെ ഭംഗ എന്ന അണുകഭാഗവും പുറമെയുള്ള അണുവും തമ്മിലുള്ള ആകൎഷണം

$$=\frac{ഗു.\ ദ്ര.\ ഭംഗ.\ രഭംജ്ഞ}{റ^2}$$

എന്നു വരുന്നു. ഈ ആകൎഷണത്തെ മന, നണ എന്ന മാൎഗ്ഗങ്ങളിലായും, അവയ്ക്കു് അനുപാതകമായും വിശ്ലേഷിക്കാമെന്നു സ്ഥിതിചലനനിരൂപണഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ സ്ഥാപിച്ചിട്ടുള്ള തത്വമാകുന്നു. അതിനാൽ ഈ ആകൎഷണം രണ്ടായി വേർതിരിച്ചു നിരൂപിക്കാം.

ഒന്നാമത്തു മന വഴിയായതു $\frac{ഗു.ദ്ര.ര.ഭംഗ.ഭംജ്ഞ}{റ^2} \times \frac{രളജ്ഞ}{റ.}$

$=\frac{ഗുദ്രര^2}{റ^3}$. ളജ്ഞ. ഭംഗ. ഭംജ്ഞ എന്നു്. ഇതു വൃത്തത്തിൻെറ നാലുവശത്തുനിന്നും ന എന്ന കേന്ദ്രത്തിലേയ്ക്കു് ഒരേ മേഖലാതലത്തിൽ ഒരേ ശക്തിയോടുകൂടി പ്രവൎത്തിക്കുന്നതിനാൽ അന്യോന്യം എതിരായി വരികയും അന്യോന്യം നശിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

രണ്ടാമത്തു നണ മാൎഗ്ഗമായി പ്രവൎത്തിക്കുന്നതു്. ഇതു്

$$\frac{ഗു.ദ്ര.ഭംഗ.ര.ഭംജ്ഞ}{റ^2} \times \frac{നണ}{മണ} = \frac{ഗു.ദ്ര.ഭംഗ.ര.ഭംജ്ഞ}{റ^2} . \frac{(ദ - ര.കോജ്ഞ)}{റ}.$$

ഇതു് ഒരു അണുഭാഗത്തിൻെറ ആകൎഷണം മാത്രമാണു്. ഇതിനെ മേഖലയുടെ ചുററും സമാകലനം ചെയ്താൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഫലം

$$=\int_0^{ഗ} \frac{ഗു.ദ്ര.രഭംജ്ഞ\ (ദ - രകോജ്ഞ)}{റ^3}\ ഭംഗ$$

$$=ഗു.ദ്ര.ര.ഭംജ്ഞ.(ദ - രകോജ്ഞ).ഗ \div റ^3$$

$$=\frac{\text{ഗു.ദ്ര.ര.ഭംജ്യ}(\text{ദ}-\text{രകോജ്യ}).2\pi.\text{ര.ഋജ്യ}}{\text{റ}^3.}$$

$$=\frac{2\pi.\text{ഗു.ദ്ര.ര}^2(\text{ദ}-\text{രകോജ്യ})\text{ഋജ്യ.ഭംജ്യ}}{\text{റ}^3}$$

ഇതിനെ പരിലേഖത്തിലെ ച തൊട്ടു ജ വരെ (അഥവാ $\text{ജ്യ}=0$ തൊട്ടു $\text{ജ്യ}=\pi$ വരെ) സമാകലനം ചെയ്താൽ ഗോളപൃഷ്ഠത്തിൻെറ ആകഷ്ണമായി. ഇവിടെ,

$$\text{റ}^2=\text{ദ}^2+\text{ര}^2-2\text{ദ.ര.കോജ്യ}.$$

രണ്ടു പക്ഷങ്ങളുടേയും ഭേദകങ്ങൾ കണ്ടാൽ,

$$2\text{റ. ഭംറ}=2\text{ദ.ര. ഋജ്യ. ഭംജ്യ}.$$

$$\therefore\quad \text{രഋജ്യ.ഭംജ്യ}=\frac{\text{റ.ഭംറ}}{\text{ദ}}$$

എന്നു മാത്രമല്ല,

$$\text{രകോജ്യ}=\frac{\text{ദ}^2+\text{ര}^2-\text{റ}^2}{2\text{ദ}}$$

$$\therefore\quad \text{ദ}-\text{ര.കോജ്യ}=\frac{\text{ദ}^2-\text{ര}^2+\text{റ}^2}{2\text{ദ}}$$

ച എന്നേടത്തു $\text{ജ്യ}=0$, അപ്പോൾ $\text{റ}=\text{ദ}-\text{ര}$

ജ എന്നേടത്തു $\text{ജ്യ}=\pi$, ,, $\text{റ}=\text{ദ}+\text{ര}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{ഗോളപൃഷ്ഠത്തിൻെറ}\\ \text{ആകെ ആകഷ്ണം}\end{array}\right\}=2\pi.\text{ദ്ര.ഗുര}\int_0^{\pi}\frac{\text{ദ}-\text{രകോജ്യ}}{\text{റ}}.\frac{\text{രഋജ്യ}}{\text{റ}^2}\text{ഭംജ്യ}$$

$$=2\pi\text{ദ്ര.ഗു.ര}\int_{\text{ദ}-\text{ര}}^{\text{ദ}+\text{ര}}\frac{\text{ദ}^2-\text{ര}^2+\text{റ}^2}{2\text{ദ.റ}}.\frac{\text{റഭംറ}}{\text{ദ.റ}^2}$$

$$=\frac{\pi\text{ദ്ര.ഗു.ര}}{\text{ദ}^2}\int_{\text{ദ}-\text{ര}}^{\text{ദ}+\text{ര}}\frac{\text{ദ}^2-\text{ര}^2+\text{റ}^2}{\text{റ}^2}.\text{ഭംറ}$$

$$=\frac{\pi\text{ദ്ര.ഗു.ര}}{\text{ദ}^2}\int_{\text{ദ}-\text{ര}}^{\text{ദ}+\text{ര}}\left(\frac{\text{ദ}^2-\text{ര}^2}{\text{റ}^2}+1\right)\text{ഭംറ}$$

$$= \frac{\pi ദ.ഗ്ര.ര}{ദ^2}\left[-\frac{ദ^2-ര^2}{൧}+൧\right]_{ദ-ര}^{ദ+ര}$$

$$= \frac{\pi ദ.ഗ്ര.ര}{ദ^2}\left[-\frac{ദ^2-ര^2}{ദ+ര}+\frac{ദ^2-ര^2}{ദ-ര}\right.$$

$$\left.+(ദ+ര)-(ദ-ര)\right]$$

$$= \frac{\pi ദ.ഗ്ര.ര}{ദ^2}\left\{-(ദ-ര)+(ദ+ര)\right.$$

$$\left.+(ദ+ര)-(ദ-ര)\right\}$$

$$= \frac{4\pi ദഗ്ര.ര^2}{ദ^2}$$

$$= ഗ്ര.\frac{ഗോളപൃഷ്ഠദ്രവ്യം \times അണുദ്രവ്യം}{ദ^2}.$$

ഈ നിരൂപണത്തിൽ ഗോളപൃഷ്ഠം എന്നേ പറഞ്ഞുള്ളുവെങ്കിലും അതിന്നു് അല്പമായ ഒരു ഘനം സങ്കല്പിച്ചിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ ഗോളപൃഷ്ഠത്തെ ഗോളാകാരമായ ഒരു പുടമായി കല്പിച്ചു. അതിൻെറ താഴെ താഴെയായി ഘനംകുറഞ്ഞ ഗോളാകാരപുടങ്ങളെ കേന്ദ്രംവരെ സങ്കല്പിക്കാം. ഓരോന്നിലും തുല്യപ്രദേശത്തു തുല്യദ്രവ്യം ഉണ്ടായിരിക്കണമെന്നുണ്ടു്. എന്നാൽ ഓരോന്നിന്നും ഗോളപൃഷ്ഠത്തിന്നു കിട്ടിയപോലെയുള്ള ഫലം സിദ്ധിക്കും. എല്ലാം കൂടി കൂട്ടിയാൽ ഗോളവും അണുവുമായുള്ള ആകർഷണം

$$= \frac{ഗ്ര.ഗോളദ്രവ്യം \times അണുദ്രവ്യം}{ദ^2}$$

ഇവിടെ ഗ്ര എന്നതു ഗുരുത്വാകർഷണഗുണകാരമെന്ന സ്ഥിരസംഖ്യയും ദ എന്നതു കേന്ദ്രവും അണുവും തമ്മിലുള്ള അകലവുമാകുന്നു. അതിനാൽ ഗോളത്തിലെ എല്ലാ അണുക്കളും ഗോളകേന്ദ്രത്തിൽ ചേൎന്നിരുന്ന മാതിരിയാണു് പ്രവൎത്തിക്കുന്നതു്. എന്നു

വെച്ചാൽ ഇവിടെ മുഴുവൻഗോളത്തെ അതിൻെറ കേന്ദ്രത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഭാരമേറിയ ഒരു ബിന്ദുവായിക്കരുതാം.

ഇനി അണുവെ സങ്കല്പിച്ചേടത്തു് ഒരു ഗോളത്തെത്തന്നെ സങ്കല്പിച്ചാൽ അതിൻെറ ഓരോ അണുവിന്മേലുമുള്ള ആദ്യഗോളത്തിൻെറ ആകൎഷണം ആദ്യഗോളകേന്ദ്രബിന്ദുവിൽനിന്നു പ്രവൎത്തിക്കുന്നതായിക്കരുതാം. ഫലം ആദ്യഗോളകേന്ദ്രബിന്ദുവും ദ്വിതീയഗോളകേന്ദ്രബിന്ദുവും തമ്മിൽ ഗോളങ്ങളുടെ ഭാരങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള പെരുക്കിനെ കേന്ദ്രങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അകലത്തിൻെറ വൎഗ്ഗംകൊണ്ടു ഹരിച്ചുകിട്ടിയതിന്നു് അനുപാതകമായ ആകൎഷണമാകും. രണ്ടു ഗോളങ്ങളിലും അതാതു കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു തുല്യദൂരത്തുള്ള ദ്രവ്യത്തിൻെറ ഭാരം ഒരുപോലെ ഇരിക്കണം.

അഭ്യാസം

1. $യ^3 + 3യ^2 - 9യ + 3$ എന്ന വ്യഞ്ജകം എപ്പോഴെല്ലാം നീചത്തേയോ ഉച്ചത്തേയോ പ്രാപിക്കുന്നുവെന്നു കാണുക.

2. $യ^3 - 6യ^2 + 12യ - 6$ എന്ന വ്യഞ്ജകത്തിന്നു പ്രഥമഭേദകഗുണം ശൂന്യമാകുന്ന സ്ഥാനത്തു് എന്തു സംഭവിക്കുന്നുവെന്നു കാണുക.

3. 20 ഇഞ്ചു് ഉയരമുള്ള ഒരു കുഴൽതാളി മലൎത്തിവെച്ചിരിക്കുന്നു. അടിയിൽനിന്നു യ ഇഞ്ചു് ഉയരുമ്പോൾ അവിടെ സമദാനമായി സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന വൃത്താകാരമായ തലത്തിൻെറ വ്യാസം $2\frac{1}{2}യ - \frac{1}{20}യ^2$ ഇഞ്ചാകുന്നു. എന്നാൽ ആ കുഴൽതാളിയിൽ എത്ര ഘനഅടി വെള്ളംകൊള്ളും?

4. 12 അടി ഉയരമുള്ള രണ്ടു സ്തംഭങ്ങൾ 30 അടി അകലെ നില്ക്കുന്നു. അവ തമ്മിലുള്ള ഇടയിൽ ഒരു ഭിത്തി പണിതിട്ടുണ്ടു്. ഓരോ സ്തംഭത്തിൽനിന്നും യ അടി മറേറ സ്തംഭത്തിൻെറ നേക്കു നീങ്ങിയാൽ, ഉയരം $12 - \frac{യ}{4} + \frac{യ^2}{120}$ അടിയെന്ന നില

യിൽ ഭിത്തിയുടെ മുകൾഭാഗത്തിന്നു് ഒരു വളവുണ്ടു്. ഭിത്തിയുടെ ക്ഷേത്രഫലമെത്ര? രണ്ടു സ്തംഭങ്ങളുടേയും ശരിക്കു നടുവിൽ ഭിത്തിയുടെ മുകൾഭാഗത്തിന്നു് ഒടിവില്ലെന്നു കാണിക്കുക.

5. വൃത്താകാരമായ ഒരു സ്തംഭത്തിൽ ഒരാണിതറച്ചു് അതിൽ 100 അടി നീളമുള്ള ഒരു ചരടിൻെറ അററം കെട്ടിയുറപ്പിച്ചു് ഒരു കുട്ടി സ്തംഭത്തിൻെറ ചുററും മറെറ അററം വലിച്ചുപിടിച്ചു് ഒരേ വഴിക്കു പോയിക്കൊണ്ടിരിപ്പാൻ നിശ്ചയിച്ചു. ചരടു സ്തംഭത്തിൻെറ ചുററിന്നു് ഒരു സ്പൎശരേഖയെന്ന നിലയിൽ സദാ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ കുട്ടിക്കു് എത്ര ചുററു നടക്കുവാൻ കഴിയും? കുട്ടി ആകെ നടന്ന ദൂരമെത്ര? സ്തംഭത്തിൻെറ വ്യാസം 4 അടിയാകുന്നു.

6. ഒരു നേർരേഖയിൽ ഒരു ബിന്ദു കല്പിച്ചു് അവിടെനിന്നു $യ$ നീങ്ങുന്നേടത്തു രേഖക്കു ജ്യ$യ$ + കോ$യ$ എന്ന ഉയരത്തിൽ ഒരു ലംബം കല്പിക്കുന്നു. ഇങ്ങിനെ $യ = 0$ തൊട്ടു $യ = \frac{3\pi}{4}$ വരെ ലംബങ്ങളെ കല്പിച്ചാൽ ലംബങ്ങളെക്കൊണ്ടു നിറഞ്ഞ പ്രദേശത്തിൻെറ ക്ഷേത്രഫലമെത്ര? ഈ ഇടയിൽ എവിടെയുള്ള ലംബത്തിന്നാണു് ഏററവുമുയരം?

അദ്ധ്യായം 9

ചില വരഗണിതസിദ്ധാന്തങ്ങൾ.

1. ഭഗ്നാഭഗ്നവൃത്തികൾ.

ഒരു വ്യഞ്ജകത്തിലെ ബീജരാശിയുടെ വില മാറുന്നതോടു കൂടി വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ വിലയും മാറുന്നു. ബീജരാശിയിൽ ലഘുവായ ഒരു മാററം വരുമ്പോൾ ലഘുവായ ഒരു മാററം വ്യഞ്ജകത്തിലും ഉണ്ടാകുന്നു. വ്യഞ്ജകത്തിന്റെ ലഘുഭേദത്തെ ബീജരാശിയുടെ ലഘുഭേദംകൊണ്ടു ഹരിച്ച ഫലത്തിൽ ബീജരാശിയിലെ മാററം ശൂന്യമെന്നു സങ്കല്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന അവധിവിലയാണല്ലോ ഭേദകഗുണം. ഇങ്ങിനെ ബീജരാശി മാററവും വ്യഞ്ജകമാററവും ബന്ധപ്പെട്ടുപോകുമ്പോൾ വ്യഞ്ജകവില ക്രമേണ വർദ്ധിച്ചുവരികയോ ക്രമേണ കുറഞ്ഞുവരികയോ ചെയ്യുന്നു. ഈ വക വ്യഞ്ജകങ്ങളെ അഭഗ്നവ്യഞ്ജകങ്ങൾ അഥവാ അഭഗ്നവൃത്തികൾ എന്നു പറയുന്നു. എന്നാൽ ചില വ്യഞ്ജകങ്ങളിൽ ചില ഘട്ടങ്ങളിൽ ബീജരാശി അല്പം മാറുമ്പോൾ വ്യഞ്ജകം അമിതമായി മാറുന്നു. അപ്രകാരമുള്ള വ്യഞ്ജകങ്ങളെ ഭഗ്നവ്യഞ്ജകങ്ങൾ അഥവാ ഭഗ്നവൃത്തികൾ എന്നു പറയുന്നു.

$\frac{1}{1-\text{യ}}$ എന്നതു യ എന്നതിന്റെ അനന്തമായ ഋണസംഖ്യതൊട്ടു 1 വരെയുള്ള വിലകൾക്കു് അഭഗ്നമാകുന്നു. തുടക്കത്തിൽ ഫലം അണുരൂപമായ ഒരു ധനസംഖ്യയാകുന്നു. ഫലം ക്രമേണ വർദ്ധിക്കുന്നു. യ ഒന്നിനോടു് അടുക്കുംതോറും ഫലം അതിവേഗം വർദ്ധിച്ചു്, യ ഏതാണ്ടു് 1നു തുല്യമാകുമ്പോൾ ഫലം ധനവും അനന്തവുമാകുന്നു. എന്നാൽ യ ഒന്നിനേയും കടന്നു് അണുമാത്രം വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ ഫലം ഋണവും അനന്തവുമായി മാറുന്നു. ഈ ഘട്ടത്തിൽ വ്യഞ്ജകം ഭഗ്നമാകുന്നു. പിന്നീടു

യ വദ്ധിക്കുന്നതോട്ടുകൂടി ഫലവും വദ്ധിച്ചു യ ധനരൂപമായ അനന്തസംഖ്യയാകുമ്പോൾ ഫലം ഋണരൂപമായ അല്പസംഖ്യയായിത്തീരുന്നു. $\frac{1}{(1-\text{യ})(3-\text{യ})(5-\text{യ})}$ എന്നതു യ എന്നതിൻെറ വില 1, 3, 5 ഇവയെ സമീപിച്ചു കടന്നുപോകുന്ന ഘട്ടങ്ങളിലെല്ലാം ഭഗ്നമാണെന്നു കാണാം. എന്നാൽ (1—യ) എന്നതും (1—യ)(3—യ)(5—യ) എന്നതും യ എന്നതിൻെറ വില മാറുന്നതോട്ടുകൂടി ക്രമേണ മാറിവരുന്നതിനാൽ അവ അഭഗ്നങ്ങളാകുന്നു. $\text{ധ}^{\text{യ}}$, ഭുയ, കോയ എന്നവ അഭഗ്നങ്ങളാകുന്നു. തായ എന്നതു യ$=\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$ മുതലായ ഘട്ടങ്ങളിലെല്ലാം ഭഗ്നങ്ങളെന്നു കാണാം.

2. യ എന്ന ഒരു സ്വയംചലരാശിയുടെ വ്യഞ്ജകങ്ങളുടെ ഭേദകഗുണം കാണ്മവാനുള്ള മാർഗ്ഗങ്ങളാണ് ഇതുവരെ പ്രതിപാദിച്ചതു്. എന്നാൽ വ്യഞ്ജകം അത്ര വ്യക്തമായി കാണാതെ അതും സ്വയംചലരാശിയും കലന്ന ഒരു സമീകാരമായി കണ്ടേക്കാം. വ്യക്തമായി കാണുന്ന വ്യഞ്ജകത്തെ അഥവാ വൃത്തിയെ 'ലക്ഷിത'മെന്നും സമീകാരത്തിൽ കലന്നു വരുന്നതിനെ 'ഉപലക്ഷിത'മെന്നും പറയുന്നു. ഉദാഹരണമായി യ എന്നതിൻെറ ഒരു വൃത്തിയെ വ കൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ചാൽ,

$$\text{യ}(\text{വ}-\text{യ})+\text{വ}=0$$

എന്ന സമീകാരത്തിൽ വ എന്ന വ്യഞ്ജകം ഉപലക്ഷിതമാകുന്നു. ഇങ്ങിനെ വരുമ്പോൾ അതിൻെറ ഭേദകഗുണം കാണ്മവാൻ വൃത്തിയെ ലക്ഷിതമാക്കുകയോ, ഉപലക്ഷിതമായിത്തന്നെ വെയ്ക്കുകയോ ചെയ്യാം. അതു് ഇവിടെ ചെയ്തുകാട്ടുന്നു.

$$യ(വ—യ)+വ=0$$
$$വ(യ+1)=യ^2$$
$$വ=\frac{യ^2}{യ+1}.$$
$$\therefore\quad \frac{ഭംവ}{ഭംയ}=\frac{2യ(യ+1)—യ^2}{(യ+1)^2}=\frac{യ^2+2യ}{(യ+1)^2}$$

അഥവാ,

$$യ(വ—യ)+വ=0$$
$$യവ—യ^2+വ=0$$
$$വ.ഭംയ+യ.ഭംവ—2യ.ഭംയ+ഭംവ=0$$
$$ഭംവ(യ+1)=ഭംയ(2യ—വ)$$
$$\therefore\quad \frac{ഭംവ}{ഭംയ}=\frac{2യ—വ}{യ+1}$$
$$=\frac{2യ—\frac{യ^2}{യ+1}}{യ+1}=\frac{യ^2+2യ}{(യ+1)^2}$$

മററുദാഹരണങ്ങൾ

(1) $വ^2+യ^2=4.$ $\frac{ഭംവ}{ഭംയ}$ കാണുക.

$$2വ\ ഭംവ+2യ\ ഭംയ=0$$
$$\therefore\quad \frac{ഭംവ}{ഭംയ}=\frac{—യ}{വ}=\frac{—യ}{\pm\sqrt{4—യ^2}}$$

(2) $വ=ജ്യ^{-1}യ.$ $\frac{ഭംവ}{ഭംയ}$ കാണുക.

$$ജ്യവ=യ$$
$$\therefore\quad കോവ.\ ഭംവ=ഭംയ$$
$$\therefore\quad \frac{ഭംവ}{ഭംയ}=\frac{1}{കോവ}=\frac{1}{\sqrt{1—ജ്യ^2വ}}=\frac{1}{\sqrt{1—യ^2}}$$

(3) $യ^2വ - യവ^2 = ക.$ $\frac{ഭ०വ}{ഭ०യ}$ കാണുക.

$$യ^2.ഭ०വ + വ.2യ\,ഭ०യ - യ.2വ.ഭ०വ - വ^2.ഭ०യ = 0$$

$$\therefore\quad ഭ०വ(യ^2 - 2യവ) = ഭ०യ(വ^2 - 2യവ)$$

$$\therefore\quad \frac{ഭ०വ}{ഭ०യ} = \frac{വ(വ-2യ)}{യ(യ-2വ)}$$

3. വ്യഞ്ജകങ്ങൾ ഒരു ചലരാശിയുടെ മാത്രം വൃത്തികളായിരിക്കണമെന്നില്ല. അവ രണ്ടോ അധികമോ ചലരാശികളുടെ വൃത്തികളാവാം. ആ ചലരാശികൾ സ്വതന്ത്രങ്ങളോ അന്യോന്യം ബന്ധപ്പെട്ടവയോ ആവാം. യ, വ, മ എന്നവ ആവിധം ചലരാശികളെങ്കിൽ അവയുടെ വൃത്തിയെ വൃ(യ,വ,മ) എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(i) യ, വ സ്വതന്ത്രങ്ങളാണെങ്കിലും അവ വൃത്തിയിൽ വെവ്വേറെ കലരാതെ (യ+വ) എന്നു സദാ ഒന്നിച്ചുനില്ക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ വൃത്തിയെ വൃ (യ+വ) എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം. അങ്ങിനെയാണെങ്കിൽ, യ എന്നതിനെ അപേക്ഷിച്ചു ഭേദകഗുണാനയനം ചെയ്താലും വ എന്നതിനെ അപേക്ഷിച്ചു ചെയ്താലും ഒരേ ഫലം തന്നെയുണ്ടാകും. ഭേദകങ്ങൾ എങ്ങിനെ വന്നാലും ഓരോന്നിലെ മാററമായിക്കരുതാമെന്നു വന്നുചേരും.

$$\frac{ഭ०.വൃ(യ+വ)}{ഭ०യ} = \frac{ഭ०.വൃ(യ+വ)}{ഭ०(യ+വ)} \cdot \frac{ഭ०(യ+വ)}{ഭ०യ}$$

$$\frac{ഭ०വൃ(യ+വ)}{ഭ०വ} = \frac{ഭ०വൃ(യ+വ)}{ഭ०(യ+വ)} \cdot \frac{ഭ०(യ+വ)}{ഭ०വ}$$

യ എന്നതിൽ വരുന്ന ഭേദകത്തെ മാത്രം കരുതുമ്പോൾ അതു വ എന്നതിനെ ഒരു വിധത്തിലും ബാധിക്കുന്നില്ല. അപ്പോൾ $\frac{ഭ०വ}{ഭ०യ} = 0$. അതുപോലെ വ എന്നതിൽ വരുന്ന ഭേദകത്തെ മാത്രം

കരുതുമ്പോൾ $\frac{\text{ഭംയ}}{\text{ഭംവ}}=0$. അതിനാൽ

$$\frac{\text{ഭം}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{ഭംയ}}=\frac{\text{ഭംയ}}{\text{ഭംയ}}+\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംയ}}=1.$$

$$\frac{\text{ഭം}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{ഭംവ}}=\frac{\text{ഭംയ}}{\text{ഭംവ}}+\frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംവ}}=1.$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ഭംവ്യ}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{ഭംയ}}=\frac{\text{ഭംവ്യ}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{ഭം.}(\text{യ}+\text{വ})}=\frac{\text{ഭംവ്യ}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{ഭംവ}}.$$

ഇതു മററുപ്രകാരത്തിലും വിശദമാക്കാം.

$$\frac{\text{ഭംവ്യ}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{ഭംയ.}}=\underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}}.\ \frac{\text{വ്യ}(\text{യ}+\text{വ}+\text{ല})-\text{വ്യ}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{ല}}$$

$$\frac{\text{ഭംവ്യ}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{ഭം.വ}}=\underset{\text{ല}=0}{\text{ധി}}.\ \frac{\text{വ്യ}(\text{യ}+\text{വ}+\text{ല})-\text{വ്യ}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{ല}}$$

ഫലങ്ങൾ രണ്ടും ഒന്നാകയാൽ,

$$\frac{\text{ഭം}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{ഭംയ}}=\frac{\text{ഭം}(\text{യ}+\text{വ})}{\text{ഭംവ}}.$$

(ii) യ, വ എന്നവ തീരെ സ്വതന്ത്രരാശികളെന്നും ര=വ്യ (യ, വ) എന്നും വെയ്ക്കുക. എന്നാൽ വ്യ (യ, വ) എന്നതിൻെറ ഭേദകഗുണകം ആദ്യം യ എന്നതിനെ അപേക്ഷിച്ചും, പിന്നെ വ എന്നതിനെ അപേക്ഷിച്ചും കണ്ടാൽ, അതു് ആദ്യം വ എന്നതിനെ അപേക്ഷിച്ച ഭേദകഗുണകം കണ്ടു പിന്നെ യ എന്നതിനെ അപേക്ഷിച്ചു കണ്ടതിന്നു തുല്യമാകും.

എന്നുവെച്ചാൽ,

ര = വ്യ (യ, വ) എങ്കിൽ $\frac{\text{ഭം}^2\text{ര}}{\text{ഭംയ.ഭംവ}}=\frac{\text{ഭം}^2\text{ര}}{\text{ഭംവ. ഭംയ}}$

ആദ്യമായിത്തന്നെ ഒരുദാഹരണം നോക്കാം.

ര $\equiv$ 2യ^{3}വ^2 — യ^2 — വ^3 എന്നു വെയ്ക്കുക.

$$\frac{ഭ൦ര}{ഭ൦യ} = 6യ^2വ^2 — 2യ$$

$$\therefore \quad \frac{ഭ൦^2ര}{ഭ൦വ.ഭ൦യ} = \underline{12യ^2വ}$$

$$\frac{ഭ൦ര}{ഭ൦വ} = 4യ^3വ — 3വ^2$$

$$\therefore \quad \frac{ഭ൦^2ര}{ഭ൦യ.ഭ൦വ} = \underline{12യ^2വ}$$

ഫലങ്ങൾ തുല്യംതന്നെ.

ഇതിനെ ഒന്നുകൂടി പരിശോധിക്കാം.

ര $\equiv$ വൃ (യ, വ).

ഒന്നാമത്തു്,

$$\frac{ഭ൦ര}{ഭ൦യ} = \underset{ല=0}{ധി} \quad \frac{വൃ(യ+ല, വ) — വൃ(യ, വ)}{ല}$$

$$\therefore \quad \frac{ഭ൦^2ര}{ഭ൦വ.ഭ൦യ} = \underset{ല_1=0,\ ല=0}{ധി}$$

$$\frac{വൃ(യ+ല, വ+ല_1) - വൃ(യ+ല, വ) - വൃ(യ, വ+ല_1) + വൃ(യ, വ)}{ല.ല_1}$$

രണ്ടാമത്തു്,

$$\frac{ഭ൦ര}{ഭ൦വ} = \underset{ല_1=0}{ധി.} \quad \frac{വൃ(യ, വ+ല_1) — വൃ(യ, വ)}{ല_1.}$$

$$\therefore \quad \frac{ഭ൦^2ര}{ഭ൦വ.ഭ൦യ} = \underset{ല=0,\ ല_1=0}{ധി}$$

$$\frac{വൃ(യ+ല, വ+ല_1) - വൃ(യ, വ+ല_1) - വൃ(യ+ല, വ) + വൃ(യ, വ)}{ല_1 \times ല.}$$

രണ്ടു പ്രകാരത്തിലും ഒരേ ഫലംതന്നെ വരികയാൽ,

$$\frac{ഭ൦^2ര}{ഭ൦വ,ഭ൦യ} = \frac{ഭ൦^2ര}{ഭ൦യ.ഭ൦വ}$$

ഒരു വ്യഞ്ജകത്തെ അതിലുള്ള ചലരാശികളെ അപേക്ഷിച്ച് എത്ര പ്രാവശ്യം ഭേദകഗുണാനയനം ചെയ്യണമെങ്കിലും, ഗുണാനയനക്രമം ഇഷ്ടാനുസാരം സ്വീകരിക്കാം. ഫലസാമ്യമുണ്ടാകും. ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{\text{ഭം}^2}{\text{ഭംയ}^2}\left[\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംവ}}\left\{\frac{\text{ഭം}^3}{\text{ഭംര}^3}\left(\text{വൃ}(\text{യ},\text{വ},\text{ര})\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{\text{ഭം}^3}{\text{ഭംര}^3}\left[\frac{\text{ഭം}^2}{\text{ഭംയ}^2}\left\{\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംവ}}\left(\text{വൃ}(\text{യ},\text{വ},\text{ര})\right)\right\}\right]$$

ഉദാഹരണങ്ങൾ എടുത്തു് ഇതു പരിശോധിക്കുക. ഇനി ര $=$ വൃ (യ) എന്നും വൃ_1 എന്നതു ര എന്നതിന്റെ ഒരു വൃത്തിയെന്നും വെച്ചാൽ,

$$\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംവ}}\left(\text{വൃ}_1(\text{ര})\cdot\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}\right)=\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}\left(\text{വൃ}_1(\text{ര})\cdot\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}}\right)$$

എന്നു കാണിക്കാം. സൂത്രത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ച ക്രിയകൾ ചെയ്താൽ,

$$\frac{\text{ഭംവൃ}_1(\text{ര})}{\text{ഭംര}}\cdot\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}}\cdot\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}+\text{വൃ}_1(\text{ര})\frac{\text{ഭം}^2(\text{ര})}{\text{ഭം}(\text{വ})\cdot\text{ഭം}(\text{യ})}$$

എന്നു് ഇടത്തുപക്ഷത്തുനിന്നും,

$$\frac{\text{ഭംവൃ}_1(\text{ര})}{\text{ഭംര}}\cdot\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}\cdot\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}}+\text{വൃ}_1(\text{ര})\cdot\frac{\text{ഭം}^2(\text{ര})}{\text{ഭം}(\text{യ})\cdot\text{ഭം}(\text{വ})}$$

എന്നു വലത്തുപക്ഷത്തുനിന്നും ഉണ്ടാകുന്നു.

എന്നാൽ, $\dfrac{\text{ഭ}^2\text{ര}}{\text{ഭം}(\text{വ})\cdot\text{ഭം}(\text{യ})}=\dfrac{\text{ഭം}^2\text{ര}}{\text{ഭം}(\text{യ})\cdot\text{ഭം}(\text{വ})}$ I-ൽനിന്നു്.

∴ രണ്ടു പക്ഷങ്ങളിൽനിന്നും സമാനഫലങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നു. അതിനാൽ,

$$\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംവ}}\left(\text{വൃ}_1\,\text{ര}.\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}\right)=\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}\left(\text{വൃ}_1\,\text{ര}.\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}}\right) \qquad \text{II}$$

ഇനി മ, ന എന്നവ യ, വ എന്നവയുടെ വൃത്തിയായ ര എന്നതിൻെറ വൃത്തികളെങ്കിൽ,

$$\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംവ}}\left(\text{മ}.\frac{\text{ഭംന}}{\text{ഭംയ}}\right)=\frac{\text{ഭംമ}}{\text{ഭംവ}}.\frac{\text{ഭംന}}{\text{ഭംയ}}+\text{മ}.\frac{\text{ഭം}^2\text{ന}}{\text{ഭംവ.ഭംയ}}$$

എന്നാൽ, $\frac{\text{ഭംമ}}{\text{ഭംവ}}=\frac{\text{ഭംമ}}{\text{ഭംര}}.\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}}$, $\frac{\text{ഭംന}}{\text{ഭംയ}}=\frac{\text{ഭംന}}{\text{ഭംര}}.\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}$

$$\therefore \frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംവ}}\left(\text{മ}\ \frac{\text{ഭംന}}{\text{ഭംയ}}\right)=\frac{\text{ഭംമ}}{\text{ഭംര}}.\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}}.\frac{\text{ഭംന}}{\text{ഭംര}}.\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}+\text{മ}.\frac{\text{ഭം}^2\text{ന}}{\text{ഭംവ.ഭംയ}}$$

$$=\frac{\text{ഭംമ}}{\text{ഭംര}}.\frac{\text{ഭംന}}{\text{ഭംര}}.\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}}.\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}+\text{മ}.\frac{\text{ഭം}^2\text{ന}}{\text{ഭംവ.ഭംയ}}$$

ഇതേവിധത്തിൽ.

$$\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}\left(\text{മ}.\frac{\text{ഭംന}}{\text{ഭംവ}}\right)=\frac{\text{ഭംമ}}{\text{ഭംര}}.\frac{\text{ഭംന}}{\text{ഭംര}}.\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}.\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}}+\text{മ}.\frac{\text{ഭം}^2\text{ന}}{\text{ഭംയ.ഭംവ}}$$

എന്നു കിട്ടും. $\frac{\text{ഭം}^2\text{ന}}{\text{ഭംവഭംയ}}$ എന്നതു $\frac{\text{ഭം}^2\text{ന}}{\text{ഭംയഭംവ}}$ എന്നതിന്നു തുല്യമാകയാൽ രണ്ടു ഫലങ്ങളും തുല്യമാകുന്നു.

അതിനാൽ $\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംവ}}\left(\text{മ}.\frac{\text{ഭംന}}{\text{ഭംയ}}\right)=\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}\left(\text{മ}.\frac{\text{ഭംന}}{\text{ഭംവ}}\right)$ III

4. ഇവിടെ കണ്ട സൂത്രങ്ങളെല്ലാം പ്രധാനവും അടുത്തു വിവരിക്കുന്ന സിദ്ധാന്തങ്ങൾ സ്ഥാപിക്കുന്നതിന്നുവേണ്ടി പ്രസ്താവിച്ചവയുമാകുന്നു. ഇത്രയും പറഞ്ഞതുകൊണ്ടു മറെറാരു സംഗതികൂടി ഇവിടെ പറയേണ്ടിവരുന്നു.

യ, വ രണ്ടു സ്വതന്ത്രചലരാശികളും ര എന്നതു വൃ (യ, വ) എന്ന അവയുടെ ഒരു വൃത്തിയുമാകുന്നു. യ, വ എന്നവയിൽ വരുന്ന ഭേദകങ്ങൾ ല_1, ല_2 എന്നു വരുമ്പോൾ ര എന്നതിൻെറ ഭേദകം എന്തായിരിക്കും? അതു ല എന്നു വെയ്ക്കുക.

$$\text{ല} = \text{വ്യ}(\text{യ} + \text{ല}_1,\ \text{വ} + \text{ല}_2) - \text{വ്യ}(\text{യ},\ \text{വ})$$

$$= \text{വ്യ}(\text{യ} + \text{ല}_1,\ \text{വ} + \text{ല}_2) - \text{വ്യ}(\text{യ},\text{വ} + \text{ല}_2)$$

$$+ \text{വ്യ}(\text{യ},\ \text{വ} + \text{ല}_2) - \text{വ്യ}(\text{യ},\ \text{വ})$$

$$= \frac{\text{വ്യ}(\text{യ} + \text{ല}_1,\ \text{വ} + \text{ല}_2) - \text{വ്യ}(\text{യ},\ \text{വ} + \text{ല}_2)}{\text{ല}_1} . \text{ല}_1$$

$$+ \frac{\text{വ്യ}(\text{യ},\ \text{വ} + \text{ല}_2) - \text{വ്യ}(\text{യ},\ \text{വ})}{\text{ല}_2} . \text{ല}_2$$

ല_1 എന്നതു ശൂന്യപ്രായമാകുമ്പോൾ,

$$\frac{\text{വ്യ}(\text{യ} + \text{ല}_1,\ \text{വ} + \text{ല}_2) - \text{വ്യ}(\text{യ},\ \text{വ} + \text{ല}_2)}{\text{ല}_1} . \text{ല}_1$$

$$= \frac{\text{ഭംവ്യ}(\text{യ},\ \text{വ} + \text{ല}_2)}{\text{ഭംയ}} . \text{ല}_1$$

ല_2 കൂടി ശൂന്യപ്രായമാകുമ്പോൾ, ഇതു $= \frac{\text{ഭംവ്യ}(\text{യ},\ \text{വ})}{\text{ഭംയ}} . \text{ല}_1$

ല_2 ശൂന്യപ്രായമാകുമ്പോൾ,

$$\frac{\text{വ്യ}(\text{യ},\ \text{വ} + \text{ല}_2) - \text{വ്യ}(\text{യ},\ \text{വ})}{\text{ല}_2} . \text{ല}_2 = \frac{\text{ഭംവ്യ}(\text{യ},\ \text{വ})}{\text{ഭംവ}} . \text{ല}_2$$

$$\therefore \quad \text{ല} = \frac{\text{ഭംവ്യ}(\text{യ},\ \text{വ})}{\text{ഭംയ}} . \text{ല}_1 + \frac{\text{ഭംവ്യ}(\text{യ},\ \text{വ})}{\text{ഭംവ}} . \text{ല}^2$$

ല, ല_1, ല_2 എന്നവയ്ക്കു $\overline{\text{ഭംര}}$, $\overline{\text{ഭംയ}}$, $\overline{\text{ഭംവ}}$ എന്നുവെച്ചാൽ

$$\overline{\text{ഭംര}} = \frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}} . \overline{\text{ഭംയ}} + \frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}} . \overline{\text{ഭംവ}}$$

ഇവിടെ $\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}}$, $\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}}$ എന്നവ ഭേദകഗുണകാരങ്ങളും, $\overline{\text{ഭംര}}$, $\overline{\text{ഭംയ}}$, $\overline{\text{ഭംവ}}$ എന്നവ അണുപ്രായമായ ഭേദകങ്ങളുമാകുന്നു. $\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}} . \overline{\text{ഭംയ}}$, $\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}} . \overline{\text{ഭംവ}}$ എന്നവ ഭാഗികഭേദകങ്ങളും $\overline{\text{ഭംര}}$ എന്നതു സമസ്തഭേദകവുമാകുന്നു. യ, വ എന്നവ തീരെ സ്വതന്ത്ര

മാകയാൽ, $\overline{\text{ഭംര}}$ എന്ന ഭേകേത്തിൽനിന്നു് അർത്ഥവത്തായ ഒരു ഭേദകഗുണവും കാണാവുന്നതല്ല. $\overline{\text{ഭംര}}$ എന്നതിന്നു ലഘുവായ മാററം എന്നേ അർത്ഥമുള്ളു. അതുപോലെ $\overline{\text{ഭംയ}}$, $\overline{\text{ഭംവ}}$ എന്നവയും സ്വതന്ത്രമായ ലഘുമാററങ്ങളെമാത്രം സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

എന്നാൽ, യ, വ എന്നവതന്നെ മ എന്ന ഒരേ സ്വതന്ത്ര ചലരാശിയുടെ വിഭിന്നവൃത്തികളായിരുന്നാൽ $\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംമ}}$ എന്ന ഭേദകഗുണം കാണാം. അപ്പോൾ,

$$\frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംമ}} = \frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംയ}} . \frac{\text{ഭംയ}}{\text{ഭംമ}} + \frac{\text{ഭംര}}{\text{ഭംവ}} . \frac{\text{ഭംവ}}{\text{ഭംമ}} .$$

ഇതിന്റെ ദ്വിതീയാദിഭേദകഗുണകാരങ്ങളേയും ആവശ്യമനുസരിച്ചു കാണാം.

5. ടെയിലർസിദ്ധാന്തം.

വ്യ(യ + വ) എന്ന വ്യഞ്ജകം യ, വ എന്ന ബീജരാശികളുടെ ഏതെങ്കിലും ഇടയിൽ പെട്ട വിലകൾക്കു് അഭഗ്നമായിരുന്നാൽ വ്യ (യ + വ) എന്നതിനെ,

$$\text{ഗ}_0 + \text{ഗ}_1 \text{ വ} + \text{ഗ}_2 \text{ വ}^2 + \text{ഗ}_3 \text{ വ}^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

എന്ന രൂപത്തിൽ ഒരു അനിയതശ്രേണിയായി വിസ്തരിക്കാമെന്നു കാണിക്കുന്നു. ഇവിടെ ഗ_0, ഗ_1, ഗ_2 മുതലായവ യ എന്നതിന്റെ പരിമിതമായ അഭഗ്നവൃത്തികളുമായിരിക്കും.

വ്യ (യ + വ) എന്നതിനെ ഒരു ശ്രേണിയായി മാററിയാൽ അതിൽ $\text{ഗ. വ}^{-\text{സ}}$ എന്ന രൂപത്തിൽ ഒരു പദം വരാൻ പാടില്ല. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ, അങ്ങിനെ വന്നാൽ വ ശൂന്യമായിരിക്കുമ്പോൾ ആ പദം അനന്തമായിരിക്കും. എന്നുവരുമ്പോൾ വ്യ (യ) എന്നതു യ എന്നതിന്റെ ഏതു വിലയ്ക്കും അനന്തമായിരിക്കും. ഇതു സംഭവിക്കാവുന്നതല്ല. അതിനാൽ വ്യ (യ + വ) എന്നതി

ൻെറ വിസ്തരണത്തിൽ വ എന്നതിന്നു ഌണഗമകങ്ങൾ ഉണ്ടാകു വാൻ വയ്യാ.

വ്യ (യ) എന്നതും അതിൻെറ തുടരെത്തുടരെയുള്ള ഭേദകഗു ണകങ്ങളും അഭഗ്നമായിരുന്നാൽ വ്യ (യ + വ) എന്നതിൻെറ വി സ്തരണത്തിൽ ഗ. $വ^{ന + \frac{ക}{ച}}$ (ന ഒരു പൂൎണ്ണസംഖ്യയും $\frac{ക}{ച}$ എന്ന തു് ഒരു ക്രമഭിന്നവുമെന്നു സങ്കല്പം) എന്ന രൂപത്തിൽ ഒരു പദ മുണ്ടാകയില്ല. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ അതിൽനിന്നു (ന + 1)-ാം സ്ഥാനത്തു വരുന്ന ഭേദകഗുണങ്ങളിൽ വ എന്നതിന്നു ഌണഗമ കം വരികയും അതിനാൽ വ ശൂന്യമാകുമ്പോൾ ആ സ്ഥാനത്തെ പദം അനന്തമാകയും ചെയ്യും. ഇതു് ഇവിടെ പ്രസ്താവിച്ച ഉ പാധികളനുസരിച്ചു്, അസംഭവ്യവുമാണു്. വ്യ (യ) എന്നുവെ ച്ചാൽ വ ശൂന്യമാകുമ്പോൾ വ്യ (യ + വ) എന്നതിൻെറ ഒരു ഭേ ദകഗുണവും അനന്തമാകുവാൻ വയ്യ.

ഈ ന്യായങ്ങളെക്കൊണ്ടു വ്യ (യ + വ) അനിയതശ്രേണി യായി വിസ്തരിക്കാവുന്നതെങ്കിൽ,

$$വ്യ(യ + വ) = ഗ_0 + ഗ_1 വ + ഗ_2 വ^2 + ഗ_3 വ^3 + \ldots ഗ_സ വ^സ + \ldots$$

എന്നു സങ്കല്പിക്കാം.

വ ശൂന്യമെന്നുവെച്ചാൽ $ഗ_0 = വ്യ(യ)$ എന്നുവരുന്നു. അതിനാൽ,

$$\frac{ഭം വ്യ (യ + വ)}{ഭം യ} = \frac{ഭം ഗ_0}{ഭം യ} + വ. \frac{ഭം ഗ_1}{ഭം യ} + വ^2. \frac{ഭം ഗ_2}{ഭം യ} + വ^3. \frac{ഭം ഗ_3}{ഭം യ} + \ldots\ldots$$

$$ഭം. \frac{വ്യ(യ+വ)}{ഭം വ} = ഗ_1 + ഗ_2. 2വ + ഗ_3. 3വ^2 + ഗ_4. 4വ^3 + \ldots\ldots$$

ഇവ രണ്ടും തുല്യമായിരിക്കണമെന്നു 3 (i) (ഭാ. 130)-ൽ കാണി ച്ചിട്ടുണ്ടു്. അതിനാൽ വലത്തുഭാഗത്തുള്ള രണ്ടു ശ്രേണികളും വ

18 *

എന്നതിൻെറ എല്ലാ വിലകൾക്കും തുല്യമാകും. അതിനാൽ വ എന്നതിൻെറ തുല്യസമഘാതങ്ങളുടെ ഗുണകാരങ്ങളും തുല്യമാകും. അതിനാൽ,

$$ഗ_1 = \frac{ഭംഗ_0}{ഭംയ} = \frac{ഭംവ്യ(യ)}{ഭംയ}$$

$$ഗ_2 = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{ഭംഗ_1}{ഭംയ} = \frac{1}{1.2}\cdot\frac{ഭം^2 വ്യ(യ)}{ഭംയ^2}$$

$$ഗ_3 = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{ഭംഗ_2}{ഭംയ} = \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{ഭം^3 വ്യ(യ)}{ഭംയ^3}$$

$$ഗ_4 = \tfrac{1}{4}\cdot\frac{ഭംഗ_3}{ഭംയ} = \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{ഭം^4 (വ്യയ)}{ഭംയ^4}$$

ഇങ്ങിനെ തുടന്നുപോയാൽ,

$$ഗ_{സ} = \frac{1}{സ}\cdot\frac{ഭംഗ_{സ-1}}{ഭംയ} = \frac{1}{1.2.3\ldots.സ}\cdot\frac{ഭം^{സ}(വ്യയ)}{ഭംയ^{സ}}$$

* * * *

അതിനാൽ,

$$വ്യ(യ+വ) = വ്യ(യ) + \frac{ഭംവ്യ(യ)}{ഭംയ}\,വ + \frac{1}{\underline{|2}}\cdot\frac{ഭം^2 വ്യ(യ)}{ഭംയ^2}\cdot വ^2$$

$$+ \frac{1}{\underline{|3}}\cdot\frac{ഭം^3 വ്യ(യ)}{ഭംയ^3}\,വ^3 + \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{1}{\underline{|സ}}\cdot\frac{ഭം^{സ}.\,വ്യ(യ)}{ഭംയ^{സ}}\,വ^{സ} + \ldots\ldots\ldots$$

ഇതാകുന്നു ടെയിലർസിദ്ധാന്തം. വ്യ (യ) എന്നതിൻെറ എല്ലാ ഭേദകഗുണങ്ങളും അഭഗ്നമെന്നു വെച്ചിരിക്കയാൽ അവയെല്ലാം പരിമിതങ്ങളുമായിരിക്കും. എന്നാൽ ഇങ്ങിനെ കിട്ടുന്ന അനി

യതശ്രേണി ഉപഗമമോ, അപഗമമോ എന്നു പരിശോധിക്കേണ്ടതാണ്. ഉപഗമമാണെങ്കിലേ ഉപയോഗപ്രദമാകയുള്ളൂ.

ഇതിൻെറ ഉദാഹരണങ്ങളായി ദ്വിപദഘാതവിസ്തരണവും, ഘാതാങ്കശ്രേണ്യാനയനവും താഴെ കാണിക്കാം.

ദ്വിപദഘാതവിസ്തരണം.

$$\text{വ്യ}(\text{യ}+\text{വ}) \equiv (\text{യ}+\text{വ})^{\text{സ}}$$ എന്നു വെയ്ക്കുക.

എന്നാൽ $\text{വ്യ}(\text{യ}) = \text{യ}^{\text{സ}}$.

$$\frac{\text{ഭം}\,\text{വ്യ}(\text{യ})}{\text{ഭംയ}} = \text{സ}.\text{യ}^{\text{സ}-1}.$$

$$\frac{\text{ഭം}^2\text{വ്യ}(\text{യ})}{\text{ഭംയ}^2} = \text{സ}(\text{സ}-1).\text{യ}^{\text{സ}-2}$$

*   *   *   *

$$\frac{\text{ഭം}^{\text{ന}}\,\text{വ്യ}(\text{യ})}{\text{ഭംയ}^{\text{ന}}} = \text{സ}(\text{സ}-1)\ldots(\text{സ}-\text{ന}+1)\text{യ}^{\text{സ}-\text{ന}}$$

*   *   *   *

അതിനാൽ,

$$(\text{യ}+\text{വ})^{\text{സ}} = \text{യ}^{\text{സ}} + \text{സ}.\text{യ}^{\text{സ}-1}.\text{വ} + \frac{\text{സ}(\text{സ}-1)}{\underline{|2}}.\text{യ}^{\text{സ}-2}\text{വ}^2$$

$$+ \frac{\text{സ}(\text{സ}-1)(\text{സ}-2)}{\underline{|3}}.\text{യ}^{\text{സ}-3}.\text{വ}^3 + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + \frac{\text{സ}(\text{സ}-1)(\text{സ}-2)\ldots(\text{സ}-\text{ന}+1)}{\underline{|\text{ന}}}\,\text{യ}^{\text{സ}-\text{ന}}.\text{സ}^{\text{ന}}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ഘാതാങ്കശ്രേണ്യാനയനം.

$$\text{വ്യ}(\text{യ}+\text{വ}) \equiv \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}(\text{യ}+\text{വ})$$ എന്നു വെയ്ക്കുക.

എന്നാൽ,

$$\text{വ്യ}(\text{യ}) = \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}(\text{യ})$$

$$\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}(\text{യ})}{\text{ഭം}\text{യ}} = \frac{1}{\text{യ}}$$

$$\frac{\text{ഭം}^2\text{വ്യ}(\text{യ})}{\text{ഭം}\text{യ}^2} = \frac{-1}{\text{യ}^2}$$

$$\frac{\text{ഭം}^3.\text{വ്യ}(\text{യ})}{\text{ഭം}\text{യ}^3.} = \frac{+1\cdot 2}{\text{യ}^3}$$

* * * *

$$\frac{\text{ഭം}^{\text{സ}}.\text{വ്യ}(\text{യ})}{\text{ഭം}\text{യ}^{\text{സ}}} = (-1)^{\text{സ}-1}.\frac{1.2.3....(\text{സ}-1)}{\text{യ}^{\text{സ}}}.$$

എന്നിരിക്കെ,

$$\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}\left(\text{യ}+\text{വ}\right) = \frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}(\text{യ}) + \frac{\text{വ}}{\text{യ}} - \tfrac{1}{2}.\frac{\text{വ}^2}{\text{യ}^2} + \tfrac{1}{3}.\frac{\text{വ}^3}{\text{യ}^3}$$

$$-\tfrac{1}{4}.\frac{\text{വ}^4}{\text{യ}^4} + \tfrac{1}{5}.\frac{\text{വ}^5}{\text{യ}^5} - .... + (-1)^{\text{ന}-1}.\frac{1}{\text{ന}}.\frac{\text{വ}^{\text{ന}}}{\text{യ}^{\text{ന}}}.....$$

യ $=1$ എന്നും വ $=$ യ എന്നും കല്പിച്ചാൽ,

$$\frac{\text{ഘാ}}{\text{ധ}}\left(1+\text{യ}\right) = \frac{\text{യ}}{1} - \frac{\text{യ}^2}{2} + \frac{\text{യ}^3}{3} - \frac{\text{യ}^4}{4} + ...$$

ഋ(യ $+$ വ) എന്നതിന്റെ വിസ്തരണവും നോക്കാം.

വ്യ(യ, വ) $\equiv$ ഋ(യ $+$ വ) എന്നു വെയ്ക്കുക.

എന്നാൽ,

$$\text{വ്യയ} = \text{ഋയ}. \qquad \frac{\text{ഭം}^3\text{വ്യയ}}{\text{ഭം}\text{യ}^3} = -\text{കോയ}.$$

$$\frac{\text{ഭം}\text{വ്യയ}}{\text{ഭം}\text{യ}} = +\text{കോയ}. \qquad \frac{\text{ഭം}^4.\text{വ്യയ}}{\text{ഭം}\text{യ}^4} = +\text{ഋയ}.$$

$$\frac{\text{ഭം}^2\text{വ്യയ}}{\text{ഭം}\text{യ}} = -\text{ഋയ}.$$

* * * * * *

അതിനാൽ,

$$ജ്ഞ(യ+വ)=ജ്ഞയ\left(1-\frac{വ^2}{\underline{|2}}+\frac{വ^4}{\underline{|4}}-\frac{വ^6}{\underline{|6}}+\ldots\ldots\right)$$

$$+കോയ\left(\frac{വ}{1}-\frac{വ^3}{\underline{|3}}+\frac{വ^5}{\underline{|5}}-\frac{വ^7}{\underline{|7}}+\ldots\ldots\right)$$

ഇതു യ എന്നതിൻെറ ഏതു വിലകൾക്കും സാധുവാകുന്നു. യ $=0$ എന്നുവെച്ചാൽ

$$ജ്ഞവ=\frac{വ}{1}-\frac{വ^3}{\underline{|3}}+\frac{വ^5}{\underline{|5}}-\frac{വ^7}{\underline{|7}}+\ldots\ldots$$

യ $=\frac{\pi}{2}$ എന്നുവെച്ചാൽ

$$കോവ=1-\frac{വ^2}{\underline{|2}}+\frac{വ^4}{\underline{|4}}-\frac{വ^6}{\underline{|6}}+\ldots\ldots$$

6. $$വ്യ(യ+വ)=വ്യ(യ)+\frac{ഭംവ്യ(യ)}{ഭംയ}വ+\frac{1}{\underline{|2}}\frac{ഭം^2വ്യ(യ)}{ഭംയ^2}വ^2$$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}\cdot\frac{ഭം^3വ്യ(യ)}{ഭംയ^3}\cdot വ^3+\ldots\ldots+\frac{1}{\underline{|സ}}\cdot\frac{ഭം^{സ}വ്യ(യ)}{ഭംയ^{സ}}വ^{സ}+\ldots\ldots$$

എന്നാണല്ലോ ടെയിലർസിദ്ധാന്തം. ഇതിൽ യ $=0$ എന്നും വ $=$ യ എന്നും വെച്ചാൽ,

$$വ്യ(യ)=വ്യ(0)+\frac{ഭംവ്യ(0)}{ഭം\,0}യ+\frac{1}{\underline{|2}}\cdot\frac{ഭം^2വ്യ(0)}{ഭം\,0^2}യ^2$$

$$+\frac{1}{\underline{|3}}\cdot\frac{ഭം^3വ്യ(0)}{ഭം\,0^3}യ^3+\ldots\ldots+\frac{1}{\underline{|സ}}\cdot\frac{ഭം^{സ}വ്യ(0)}{ഭം.\,0^{സ}}\cdot യ^{സ}+\ldots\ldots$$

എന്നു വരുന്നു. ഇവിടെ $\frac{ഭം^{സ}വ്യ(0)}{ഭം\,0^{സ}}$ എന്നതിന്നു $\frac{ഭം^{സ}വ്യ(യ)}{ഭംയ^{സ}}$

എന്നു വൃ (യ) എന്നതിൻെറ സ_ാമത്തെ ഭേദകഗുണകം കണ്ടു യ ശൂന്യമെന്നു കല്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെന്നൎത്ഥം. ഇതിന്നു മാക്‌ലോറിൻസിദ്ധാന്തമെന്നു പേര്.

ഇതു ടെയിലർസിദ്ധാന്തത്തിൻെറ അപേക്ഷകൂടാതേയും സ്ഥാപിക്കാം. വൃ(യ) എന്നതും അതിൻെറ തുടരെയുള്ള ഭേദകഗുണങ്ങളും ഏതെങ്കിലും ഇടയിൽ (അന്തരാളത്തിൽ) പരിമിതവും അഭഗ്നവുമാണെങ്കിൽ, ആ അന്തരാളത്തിൽ,

$$വൃ(യ) = ക + ഗ.യ + ങ.യ^2 + ത.യ^3 + ന.യ^4 + \ldots\ldots\ldots$$

എന്നു വെയ്ക്കുക. രണ്ടു പക്ഷങ്ങളിലും തുടരെ ഭേദകഗുണങ്ങൾ വരുത്തിയാൽ,

$$\frac{ഭംവൃ(യ)}{ഭംയ} = ഗ + 2ങയ + 3ത.യ^2 + 4ന.യ^3 + \ldots\ldots$$

$$\frac{ഭം^2വൃ(യ)}{ഭംയ^2} = 1{\cdot}2.ങ + 2{\cdot}3തയ + 3{\cdot}4നയ^2 + \ldots\ldots$$

$$\frac{ഭം^3വൃ(യ)}{ഭംയ^3} = 1.2.3.\ ത + 2.3.4നയ$$

വൃ (യ) എന്നതിലും ഈ ഭേദകഗുണങ്ങളിലും യ$=0$ എന്നു കല്പിച്ചാൽ,

$$ക = വൃ(0), \quad ഗ = \frac{ഭംവൃ(0)}{ഭം\,0}, \quad ങ = \frac{1}{\underline{|2}}.\frac{ഭം^2വൃ(0)}{ഭം0^2}$$

$$ത = \frac{1}{\underline{|3}}\ \frac{ഭം^3വൃ(0)}{ഭം\,0^3},$$ മുതലായവ വരുന്നു. അതിനാൽ,

$$വൃ(യ) = വൃ(0) + \frac{1}{\underline{|1}}.\frac{ഭംവൃ(0)}{ഭം\,0}.\ യ + \frac{1}{\underline{|2}}.\frac{ഭം^2വൃ(0)}{ഭം\,0^2}യ^2$$

$$+ \frac{1}{\underline{|3}}.\frac{ഭം^3വൃ(0)}{ഭം\,0^3}യ^3 + \frac{1}{\underline{|4}}.\frac{ഭം^4വൃ(0)}{ഭം\,0^4}യ^4 + \ldots\ldots$$

ഉദാഹരണങ്ങൾ.

(1) ഗമകശ്രേണി $\left(=ധ^{യ}\right)$

$$ധ^{0}=1,\ \frac{ഭം ധ^{യ}}{ഭം യ}=ധ^{യ}\quad \therefore \frac{ഭം ധ^{0}}{ഭം\ 0}=1,\ \frac{ഭം^{2} ധ^{യ}}{ഭം യ^{2}}=ധ^{യ}$$

$\therefore\ \frac{ഭം^{2} ധ^{0}}{ഭം\ 0^{2}}=1$ മുതലായവ സിദ്ധിക്കും.

അതിനാൽ,

$$ധ^{യ}=1+\frac{യ}{1}+\frac{യ^{2}}{\underline{|2}}+\frac{യ^{3}}{\underline{|3}}+\frac{യ^{4}}{\underline{|4}}+\ldots\ldots$$

(2) ഘാതാങ്കശ്രേണി $\left(=\frac{ഘാ}{ധ}(1+യ)\right)$

$$വ്യ(യ)=\frac{ഘാ}{ധ}(1+യ)\qquad \therefore \qquad വ്യ(0)=0$$

$$\frac{ഭംവ്യ(യ)}{ഭംയ}=\frac{1}{1+യ}\qquad \therefore \qquad \frac{ഭംവ്യ(0)}{ഭം\ 0}=1$$

$$\frac{ഭ^{2}വ്യ(യ)}{ഭംയ^{2}}=\frac{-1}{(1+യ)^{2}}\qquad \therefore \qquad \frac{ഭം^{2}വ്യ(0)}{ഭം\ 0^{2}}=-1$$

$$\frac{ഭം^{3}വ്യ(യ)}{ഭംയ^{3}}=\frac{+1\cdot 2}{(1+യ)^{3}}\qquad \therefore \qquad \frac{ഭം^{3}വ്യ(0)}{ഭം\ 0^{3}}=+1\cdot 2$$

$$\frac{ഭം^{4}വ്യയ}{ഭംയ^{4}}=\frac{-1.2.3}{(1+യ)^{4}}\qquad \therefore \qquad \frac{ഭം^{4}വ്യ(0)}{ഭം\ 0^{4}}=-1.2.3$$

$$\therefore \frac{ഘാ}{ധ}(1+യ)=യ-\frac{1}{\underline{|2}}യ^{2}+\frac{\underline{|2}}{\underline{|3}}യ^{3}-\frac{\underline{|3}}{\underline{|4}}യ^{4}+\ldots\ldots$$

$$=യ-\frac{യ^{2}}{2}+\frac{യ^{3}}{3}-\frac{യ^{4}}{4}+\ldots\ldots$$

(3) ഭുജജ്യാശ്രേണി

$$\text{വൃ}(\text{യ}) \equiv \text{ഭുയ} \qquad \therefore \qquad \text{വൃ}(0)=0$$

$$\frac{\text{ഭം}\,\text{വൃ}(\text{യ})}{\text{ഭംയ}}=\text{കോയ} \qquad \therefore \qquad \frac{\text{ഭം}\text{വൃ}(0)}{\text{ഭം}\,0}=1$$

$$\frac{\text{ഭം}^2\text{വൃ}(\text{യ})}{\text{ഭംയ}^2}=-\text{ഭുയ} \qquad \therefore \qquad \frac{\text{ഭം}^2\text{വൃ}(0)}{\text{ഭം}\,0^2}=0$$

$$\frac{\text{ഭം}^3\text{വൃ}(\text{യ})}{\text{ഭംയ}^3}=-\text{കോയ} \qquad \therefore \qquad \frac{\text{ഭം}^3\text{വൃ}(0)}{\text{ഭം}\,0^3}=-1$$

*   *   *   *

$$\therefore \quad \text{ഭുയ}=\text{യ}-\frac{\text{യ}^3}{\underline{|3}}+\frac{\text{യ}^5}{\underline{|5}}-\frac{\text{യ}^7}{\underline{|7}}+\ldots\ldots$$

(4) കോടിജ്യാശ്രേണി.

$$\text{വൃ}(\text{യ})=\text{കോയ} \qquad \therefore \qquad \text{വൃ}(0)=1$$

$$\frac{\text{ഭം}\text{വൃ}(\text{യ})}{\text{ഭംയ}}=-\text{ഭുയ} \qquad \therefore \qquad \frac{\text{ഭം}\text{വൃ}(0)}{\text{ഭം}\,0}=0$$

$$\frac{\text{ഭം}^2\text{വൃ}(\text{യ})}{\text{ഭംയ}^2}=-\text{കോയ} \qquad \therefore \qquad \frac{\text{ഭം}^2\text{വൃ}(0)}{\text{ഭം}\,0^2}=-1$$

$$\frac{\text{ഭം}^3\text{വൃ}(\text{യ})}{\text{ഭംയ}^3}=+\text{ഭുയ}. \qquad \therefore \qquad \frac{\text{ഭം}^3\text{വൃ}(0)}{\text{ഭം}\,0^3}=0$$

$$\frac{\text{ഭം}^4\text{വൃ}(\text{യ})}{\text{ഭംയ}^4}=+\text{കോയ} \qquad \therefore \qquad \frac{\text{ഭം}^4\text{വൃ}(0)}{\text{ഭം}\,0^4}=+1$$

$$\therefore \quad \text{കോയ}=1-\frac{\text{യ}^2}{\underline{|2}}+\frac{\text{യ}^4}{\underline{|4}}-\frac{\text{യ}^6}{\underline{|6}}+\ldots\ldots$$

ഭുജകോടിജ്യാവുകൾ വരുത്തേണ്ട ഈ രണ്ടു സൂത്രങ്ങളും കരണപദ്ധതിയിലും തന്ത്രസംഗ്രഹത്തിലും താഴെപറയുംപ്രകാരം കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ചാപാച്ച തത്തൽഫലതോപി തദ്വ-
ച്ചാപാഹതാദ്ദ്വ്യാദിഹതത്രിമൌർവ്യാ
ലബ്ധാനി യുഗ്മാനി ഫലാന്യധോധ-
ശ്ചാപാദയുഗ്മാനി ച വിസ്തരാർദ്ധാൽ

ക. പ. അ. 6. ശ്ലോ. 12.

വിന്യസ്യ ചോപര്യ്യുപരി ത്യജേൽ ത-
ച്ഛേഷൌ ഭുജാകോടിഗുണൌ ഭവേതാം.

ശ്ലോകഃ 13 പൂർവ്വാർദ്ധം.

സാരം — ചാപത്തേയും പിന്നീടുണ്ടാകുന്ന ഫലങ്ങളേയും ചാപംകൊണ്ടു പെരുക്കി 2, 3 ഇത്യാദികളെക്കൊണ്ടു പെരുക്കിയ ത്രിജ്യാവുകൊണ്ടു ഹരിച്ചു കിട്ടിയ ഫലങ്ങളിൽ യുഗ്മഫലങ്ങളെ ചാപത്തിൻെറ ചോടെ ചോടേയും അയുഗ്മഫലങ്ങളെ വ്യാസാർദ്ധത്തിൻെറ ചോടെ ചോടെയായും (12)

വെച്ചു്, ചോടെയുള്ളതിനെ മീതെ മീതെയുള്ളതിൽനിന്നു കളഞ്ഞു രണ്ടു ദിക്കിലും അവസാനം ശേഷിക്കുന്നവ ഭുജകോടിജ്യാവുകളാകുന്നു. (13)

ചാപത്തെ യ കൊണ്ടും ത്രിജ്യാവിനെ ര കൊണ്ടും സൂചിപ്പിച്ചാൽ ആദ്യംതൊട്ടുള്ള ഫലങ്ങൾ $\frac{\text{യ}^2}{2\text{ര}}$, $\frac{\text{യ}^3}{\underline{|3}\,\text{ര}^2}$, $\frac{\text{യ}^4}{\underline{|4}\,\text{ര}^3}$, $\frac{\text{യ}^5}{\underline{|5}\,\text{ര}^4}$, $\frac{\text{യ}^6}{\underline{|6}\,\text{ര}^5}$, $\frac{\text{യ}^7}{\underline{|7}\,\text{ര}^6}$......ഈ പുസ്തകത്തിൽ സ്വീകരിച്ചതുപോലെ വ്യാസാർദ്ധത്തെ മാനപ്രമാണമാക്കിയാൽ ര, ര^2, ര^3 മുതലായവ 1നു തുല്യമാകുന്നു. യ, യ^2 മുതലായവയുടെ മാനങ്ങളും മാറും. ആ മാറിയ മാനങ്ങളെ യ, യ^2 മുതലായവയെക്കൊണ്ടു തന്നെ സൂചിപ്പിച്ചാൽ ഫലങ്ങൾ $\frac{\text{യ}^2}{\underline{|2}}$, $\frac{\text{യ}^3}{\underline{|3}}$, $\frac{\text{യ}^4}{\underline{|4}}$, $\frac{\text{യ}^5}{\underline{|5}}$, $\frac{\text{യ}^6}{\underline{|6}}$, $\frac{\text{യ}^7}{\underline{|7}}$ എന്നിങ്ങിനെ വരും. അതിനാൽ യുഗ്മഫലങ്ങളിൽനിന്നു്,

$$\text{ഭുയ} = \text{യ} - \frac{\text{യ}^3}{\lfloor 3} + \frac{\text{യ}^5}{\lfloor 5} - \frac{\text{യ}^7}{\lfloor 7} + \ldots\ldots$$ എന്നും അയുഗ്മഫ

ലങ്ങളിൽനിന്നു

$$\text{കോയ} = 1 - \frac{\text{യ}^2}{\lfloor 2} + \frac{\text{യ}^4}{\lfloor 4} - \frac{\text{യ}^6}{\lfloor 6} + \ldots\ldots$$ എന്നും ഉണ്ടാവും. പി

ന്നീട്ട പിന്നീട്ട ഫലങ്ങൾ സൂക്ഷ്മതരങ്ങളാവും. ശൂന്യപ്രായമാകു മ്പോൾ നിൎത്താം. എന്നിട്ട വലത്തുനിന്നു ക്രിയ ചെയ്താൽ സൂത്ര ത്തിൽ പറഞ്ഞതുപോലെ വരും.

ഉം. 7—5+3—1.

വലത്തുനിന്നു ചെയ്താൽ 7—5+2, 7—3, 4

ഇടത്തുനിന്നു ചെയ്താൽ 2+3—1, 5—1, 4 എന്നും വരു ന്നു. രണ്ടായാലും ഫലം ഒന്നുതന്നെ.

തന്ത്രസംഗ്രഹത്തിൽ ഭുജജ്യാവുണ്ടാക്കുവാൻ പറയുന്നതു നോ ക്കുക.

നിഹത്യ ചാപവൎഗ്ഗേണ ചാപന്തത്തൽഫലാനി ച
ഹരേൽ സമൂലയുഗ്വൎഗ്ഗൈസ്ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗഹതൈഃ ക്രമാൽ
ചാപം ഫലാനി ചാധോƒധോന്യസ്യോപൎയ്യുപരി ത്യജേൽ
ജീവാപ്ത്യൈ സംഗ്രഹോƒസ്യൈവ വിദ്വാനിത്യാദിനാ കൃതഃ

സാരം—ചാപത്തേയും അതാതു ഫലങ്ങളേയും ചാപവൎഗ്ഗം കൊണ്ടു പെരുക്കി (=നിഹത്യ) ത്രിജ്യാവൎഗ്ഗംകൊണ്ടു പെരുക്ക പ്പെട്ട സമൂലത്തോടുകൂടിയ യുഗ്മവൎഗ്ഗത്തെക്കൊണ്ടു ക്രമേണ ഹ രിക്കുക. ചാപത്തേയും ഉണ്ടായ ഫലങ്ങളേയും താഴെ താഴെവെ ച്ചു താഴത്തുള്ളതിനെ മീതെ മീതെയുള്ളതിൽനിന്നു ഭുജജ്യാപ്തിക്കു വേണ്ടി കിഴിക്കുക. വിദ്വാംസ്തൂന്ന ബലഃ എന്നു തുടങ്ങിയ സൂ ത്രത്തിൽ ചെയ്തതു് ഇതിന്റെ സംഗ്രഹം മാത്രമാകുന്നു.

കുറിപ്പ്—മൂലത്തോടുകൂടിയ യുഗ്മസംഖ്യാവൎഗ്ഗം. 2 ഒരു യു ഗ്മസംഖ്യ. ഇതു മൂലം. ഇതോടുകൂടിയ അതിന്റെ വൎഗ്ഗം=2 $+2^2=2\times3$. അതുപോലെ $4\times4^2=4\times5$, $6+6^2=6\cdot7$.

ഇങ്ങിനെ വരുമ്പോൾ ചാപത്തെ ച കൊണ്ടും ത്രിജ്യാവെ ര കൊണ്ടും സൂചിപ്പിച്ചാൽ ശ്ലോകത്തിൽനിന്നു താഴെ കാണുന്ന സൂത്രം ലഭ്യമാകും.

$$\text{ഭുച} = \text{ച} - \frac{\text{ച}^3}{2.3.\text{ര}^2} + \frac{\text{ച}^5}{2.3.4.5\text{ര}^4} - \frac{\text{ച}^7}{2.3.4.5.7\text{ര}^6} + \ldots.$$

പിന്നീട്ട കോടിജ്യാവുണ്ടാക്കുവാൻ പറയുന്നു.

നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ രൂപന്തത്തൽഫലാനി ച
ഹരേദ്വിമൂലയുഗ്വർഗ്ഗൈഃ ത്രിജ്യാവർഗ്ഗഹതൈഃ ക്രമാൽ
കിന്തു വ്യാസദലേനൈവ ദ്വിഘ്നേനാദ്യം വിഭജ്യതാം
ഫലാന്യധോധഃ ക്രമശോ ന്യസ്യോപര്യുപരി ത്യജേൽ.

സാരം— രൂപത്തേയും (=ഒന്നിനേയും) അതാതു ഫലങ്ങളേയും ത്രിജ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു പെരുക്കി, മൂലം കളഞ്ഞ യുഗ്മസംഖ്യാവർഗ്ഗംകൊണ്ടു ക്രമേണ ഹരിക്കുക. എന്നിരുന്നാലും രണ്ടുകൊണ്ടു പെരുക്കിയ വ്യാസാർദ്ധംകൊണ്ടു് ആദ്യം ഹരിക്കുക. ഇങ്ങിനെയുണ്ടാകുന്ന ഫലങ്ങളെ താഴെതാഴെയായി വെച്ചു താഴത്തുള്ളതിനെ മീതെമീതെയുള്ളതിൽനിന്നു ശര(=ര—കോയ) സിദ്ധിക്കായി കളയുക. അപ്പോൾ,

$$\text{ര} - \text{കോയ} = \frac{\text{യ}^2}{2\text{ര}} - \frac{\text{യ}^4}{2.3.4\text{ര}^3} + \frac{\text{യ}^6}{2.3.4.5.6\text{ര}^5} - \ldots\ldots$$

അഥവാ,

$$\text{കോയ} = \text{ര} - \frac{\text{യ}^2}{2\text{ര}} + \frac{\text{യ}^4}{2.3.4.\text{ര}^3} - \frac{\text{യ}^6}{2.3.4.5.6\text{ര}^5} + \ldots\ldots$$

7. ഗ്രഹങ്ങളെല്ലാം വൃത്തങ്ങളിൽ ഒരേ ഗതിയോടുകൂടി സഞ്ചരിക്കുന്നുവെന്നു പൂർവ്വന്മാർ വിശ്വസിച്ചുപോന്നു. അങ്ങിനെയാണെങ്കിൽ അവയുടെ സഞ്ചാരപഥങ്ങളിൽ എത്ര സഞ്ചരിച്ചുവെന്നു ത്രൈരാശികംകൊണ്ടു ഗണിക്കാം. സൂര്യനും ചന്ദ്രനും സഞ്ചാരപഥങ്ങളുടെ കേന്ദ്രം ഭൂമിയാണെന്നും, എന്നാൽ കുജാദി പഞ്ചഗ്രഹങ്ങൾക്കു കേന്ദ്രങ്ങൾ സൂര്യനു നേക്കു ഭൂമിയിൽനിന്നു

കുറെ അകലെ നില്ക്കുന്നവയും സൂൎയ്യനൊരുമിച്ചു നീങ്ങുന്നവയുമായ ശീഘ്രോച്ചങ്ങളെന്നും വിശ്വസിച്ചു. അതാതു കേന്ദ്രത്തിൽനിന്നു നോക്കുമ്പോൾ ഗ്രഹം എത്ര സഞ്ചരിച്ചുവെന്നു ത്രൈരാശികം കൊണ്ടു ഗണിക്കുകയും ചെയ്തു. ഇങ്ങിനെ ഗണിച്ചു കിട്ടുന്ന നീക്കത്തിന്നു ഗ്രഹമദ്ധ്യമമെന്നു പറയുന്നു. കുറെ കഴിഞ്ഞപ്പോൾ ഈ കേന്ദ്രങ്ങളെല്ലാം വിചാരിച്ച സ്ഥാനങ്ങളിലല്ല, അവിടെ നിന്നു് അല്പം നീങ്ങിയവയും മന്ദോച്ചങ്ങളെന്ന പേരിന്നനുസരിച്ചു് അതിമന്ദമായി ഭൂമിക്കോ ശീഘ്രോച്ചങ്ങൾക്കോ ചുററും സഞ്ചരിക്കുന്നവയും ആയ ബിന്ദുക്കളാണെന്നു സങ്കല്പിക്കേണ്ടിവന്നു. അപ്പോൾ ഗ്രഹമദ്ധ്യമം എന്ന പേര് ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്നു കാണുമ്പോൾ ഗ്രഹം നീങ്ങിയതായിക്കാണാവുന്നതിന്നു് ഉപയോഗിക്കുകയും ചെയ്തു. അതോടുകൂടി ഭൂമിയിൽനിന്നോ ശീഘ്രോച്ചങ്ങളിൽനിന്നോ നോക്കുമ്പോൾ കാണാവുന്ന നീങ്ങിയ ദൂരത്തെ മദ്ധ്യമങ്ങളിൽനിന്നു കണക്കാക്കുവാൻ ഉപായങ്ങൾ കണ്ടെത്തി. ഈ ഉപായങ്ങളെല്ലാം ത്രികോണമിതിസിദ്ധാന്തങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചവയായിരുന്നു. കണക്കാക്കിയ ദൂരത്തിന്നു ഭാരതീയർ മന്ദസ്ഫുടമെന്നും അതിന്നുള്ള ക്രിയയ്ക്കു മന്ദസംസ്കാരക്രിയയെന്നും പേർ പറകയും ചെയ്തു.

കെപ്ലരുടേയും സേർ ഐസാക്ക് ന്യൂട്ടൻേറയും കാലമായപ്പോഴേയ്ക്കും ഈ വിശ്വാസങ്ങളിൽ പല മാററങ്ങളും വന്നു. അവയിൽ കാൎയ്യമായ ഒന്നു ഭൂമിയടക്കം എല്ലാ ഗ്രഹങ്ങളും സൂൎയ്യനു ചുററും ആയതവൃത്തങ്ങളിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നുവെന്നും ആയതവൃത്തകേന്ദ്രത്തിൻെറ ഇരുപാടുമുള്ള ഉപകേന്ദ്രങ്ങളിൽ ഒന്നിലാണു് സൂൎയ്യൻ ഉണ്ടായിരിക്കുക എന്നുമായിരുന്നു. അപ്പോൾ ഗ്രഹമദ്ധ്യമത്തിൽനിന്നു് ആയതവൃത്തസഞ്ചാരനിയമങ്ങൾക്കനുസരിച്ചുണ്ടാകുന്ന നീക്കത്തെ കണക്കാക്കേണ്ടിവന്നു. ഈ ഗണിതത്തിന്നു കേരളത്തിൽ പരിഷ്കരിച്ച പഞ്ചാംഗഗണിതഗ്രന്ഥങ്ങളിൽ ഇന്നും മന്ദസംസ്കാരമെന്നുതന്നെ പറഞ്ഞുവരുന്നു. ഇതിന്നുള്ള ഉപായങ്ങൾ വെറും ത്രികോണമിതികൊണ്ടുമാത്രം സാധിക്കുന്നത

ല്ല. കേരളത്തിലും ഭാരതത്തിൽ മററു പ്രദേശങ്ങളിലും പഞ്ചാംഗപരിഷ്കൃത്തുക്കൾ ചെയ്തിട്ടുള്ളതു പാശ്ചാത്യഗ്രന്ഥങ്ങളിൽനിന്നു് അതിന്നുള്ള സൂത്രം വ്യാഖ്യയായി സ്വീകരിച്ചിരിക്കയാണു്. ഈ സൂത്രം സുഗമമായി വരുത്തുവാൻ വരഗണിതം അത്യാവശ്യമാകുന്നു. ഈ വരഗണിതസിദ്ധാന്തത്തിന്നു ലാഗ്രാഞ്ചു് സിദ്ധാന്തമെന്നു പേരു്. അതു താഴെ വിശദീകരിക്കുന്നു.

ലാഗ്രാഞ്ചു് സിദ്ധാന്തം.

യ, വ എന്നവ സ്വതന്ത്രചലരാശികളും ര അവയുടെ വൃത്തിയായ ഒരു ചലരാശിയുമാകുന്നു. ഇവ

$$\text{ര} = \text{യ} + \text{വ}.\ \text{വൃ}(\text{ര})$$

എന്ന സമീകാരത്താൽ ബന്ധിക്കപ്പെട്ടവയും, $\text{വൃ}_1(\text{ര})$ എന്നതു ര എന്നതിൻെറ ഒരു ഇഷ്ടവൃത്തിയുമാണെങ്കിൽ,

$$\text{വൃ}_1(\text{ര}) = \text{വൃ}_1(\text{യ}) + \frac{\text{വ}}{1}\left[\text{വൃ}(\text{യ}).\ \frac{\text{ഭം}\text{വൃ}_1\text{യ}}{\text{ഭംയ}}\right]$$

$$+ \frac{\text{വ}^2}{\underline{|2}}.\ \frac{\text{ഭം}}{\text{ഭംയ}}\left[\{\text{വൃയ}\}^2.\ \frac{\text{ഭം}\text{വൃ}_1\text{യ}}{\text{ഭംയ}}\right]$$

$$+ \frac{\text{വ}^3}{\underline{|3}}\ \frac{\text{ഭം}^2}{\text{ഭംയ}^2}\left[\{\text{വൃ}(\text{യ})\}^3\ \frac{\text{ഭം}\text{വൃ}_1\text{യ}}{\text{ഭംയ}}\right]$$

$$+ \frac{\text{വ}^4}{\underline{|4}}.\ \frac{\text{ഭം}^3}{\text{ഭംയ}^3}\left[\{\text{വൃ}(\text{യ})\}^4.\ \frac{\text{ഭം}\text{വൃ}_1(\text{യ})}{\text{ഭം}(\text{യ})}\right]$$

$$+ \frac{\text{വ}^5}{\underline{|5}}.\ \frac{\text{ഭം}^4}{\text{ഭംയ}^4}\left[\{\text{വൃ}(\text{യ})\}^5.\ \frac{\text{ഭം}\text{വൃ}_1(\text{യ})}{\text{ഭം}(\text{യ})}\right]$$

$$+ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ\ \circ$$

എന്നാകുന്നു സിദ്ധാന്തം അതു സ്ഥാപിക്കാം.

$\text{വൃ}_1(\text{ര})$ എന്നതു വ എന്നതിൻേറയും ഒരു വൃത്തിയാകയാൽ, മാക്ലോറിൻ സിദ്ധാന്തപ്രകാരം,

$$വ്യ_1(ര) = \left[വ്യ_1(ര)\right]_{വ=0} + \frac{വ}{1}\left[\frac{ഭ.വ്യ_1(ര)}{ഭ\text{ം}വ}\right]_{വ=0}$$

$$+ \frac{വ^2}{\underline{|2}}\left[\frac{ഭ\text{ം}^2 വ്യ_1(ര)}{ഭ\text{ം}വ^2}\right]_{വ=0} + \frac{വ^3}{\underline{|3}}\left[\frac{ഭ\text{ം}^3 വ്യ_1(ര)}{ഭ\text{ം}വ^3}\right]_{വ=0}$$

$$+ \frac{വ^4}{\underline{|4}}\left[\frac{ഭ\text{ം}^4 . വ്യ_1(ര)}{ഭ\text{ം}വ^4}\right]_{വ=0} + \ldots\ldots$$

$ര = യ + വ.വ്യ(ര)$ അതിനാൽ

$$\left[വ്യ_1(ര)\right]_{വ=0} = വ്യ_1(യ)$$

കൂടാതെ, $ര = യ + വ.\ വ്യ(ര)$ ആയതിനാൽ,

$$\frac{ഭ\text{ം}ര}{ഭ\text{ം}യ} = 1 + വ.\frac{ഭ\text{ം}വ്യ(ര)}{ഭ\text{ം}ര}.\ \frac{ഭ\text{ം}ര}{ഭ\text{ം}യ}$$

$$\therefore\quad \frac{ഭ\text{ം}(ര)}{ഭ\text{ം}യ}\left(1 - വ\frac{ഭ\text{ം}വ്യ(ര)}{ഭ\text{ം}ര}\right) = 1$$

$$\frac{ഭ\text{ം}ര}{ഭ\text{ം}വ} = വ്യ(ര) + വ.\frac{ഭ\text{ം}വ്യ(ര)}{ഭ\text{ം}ര}.\ \frac{ഭ\text{ം}ര}{ഭ\text{ം}വ}$$

$$\therefore\quad \frac{ഭ\text{ം}ര}{ഭ\text{ം}വ}\left(1 - വ.\frac{ഭ\text{ം}വ്യ(ര)}{ഭ\text{ം}ര}\right) = വ്യ(ര)$$

അതിനാൽ,

$$\frac{ഭ\text{ം}ര}{ഭ\text{ം}വ} \div \frac{ഭ\text{ം}ര}{ഭ\text{ം}യ} = വ്യ(ര)$$

$$\therefore\quad \frac{ഭ\text{ം}ര}{ഭ\text{ം}വ} = വ്യ(ര).\ \frac{ഭ\text{ം}ര}{ഭ\text{ം}യ}$$

എന്നിരിക്കെ,

$$\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{വ}}=\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{ര}}\cdot\frac{\text{ഭം}\text{ര}}{\text{ഭം}\text{വ}}=\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{ര}}\cdot\text{വ്യ}(\text{ര})\cdot\frac{\text{ഭം}\text{ര}}{\text{ഭം}\text{യ}}$$

$$=\text{വ്യ}(\text{ര})\cdot\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{ര}}\cdot\frac{\text{ഭം}\text{ര}}{\text{ഭം}\text{യ}}=\text{വ്യ}(\text{ര})\cdot\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{യ}}$$

$$\therefore\left[\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{വ}}\right]_{\text{വ}=0}=\text{വ്യ}(\text{യ})\cdot\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1\text{യ}}{\text{ഭം}\text{യ}} \qquad \text{II}$$

$$\frac{\text{ഭം}^2\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{വ}^2}=\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{വ}}\left\{\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{വ}}\cdot\text{വ്യ}_1(\text{ര})\right\}$$

$$=\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{വ}}\left\{\text{വ്യ}(\text{ര})\cdot\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{യ}}\right\}$$

$$=\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{യ}}\left\{\text{വ്യ}(\text{ര})\cdot\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{വ}}\right\}$$

$$=\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{യ}}\left\{\left(\text{വ്യ}(\text{ര})\right)^2\cdot\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{യ}}\right\}$$

$$\therefore\left[\frac{\text{ഭ}^2\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭാ}\text{വ}^2}\right]_{\text{വ}=0}=\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{യ}}\left\{\left(\text{വ്യ}(\text{യ})\right)^2\cdot\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{യ})}{\text{ഭം}\text{യ}}\right\} \qquad \text{III}$$

$$\frac{\text{ഭം}^3\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{വ}^3}=\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{വ}}\left[\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{യ}}\left\{\left(\text{വ്യ}(\text{ര})\right)^2\cdot\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{യ}}\right\}\right]$$

$$=\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{യ}}\left[\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{വ}}\left\{\left(\text{വ്യ}(\text{ര})\right)^2\cdot\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{യ}}\right\}\right]$$

$$=\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{യ}}\left[\frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{യ}}\left\{\left(\text{വ്യ}(\text{ര})\right)^2\cdot\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{വ}}\right\}\right]$$

$$=\frac{\text{ഭം}^2}{\text{ഭം}\text{യ}^2}\left\{\left(\text{വ്യ}(\text{ര})\right)^3\cdot\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{യ}}\right\}$$

$$\therefore\left[\frac{\text{ഭം}^3\text{വ്യ}^1(\text{ര})}{\text{ഭം}\text{വ}^3}\right]_{\text{വ}=0}=\frac{\text{ഭം}^2}{\text{ഭം}\text{യ}^2}\left\{\left(\text{വ്യ}(\text{യ})\right)^3\cdot\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{യ})}{\text{ഭം}\text{യ}}\right\} \qquad \text{IV}$$

$$\frac{ഭം^4 വ്യ_1(ര)}{ഭംവ^4} = \frac{ഭം}{ഭംവ}\left[\frac{ഭം^2}{ഭംയ^2}\left\{\left(വ്യ(ര)\right)^3 \cdot \frac{ഭംവ്യ_1(ര)}{ഭംയ}\right\}\right]$$

$$= \frac{ഭം^2}{ഭംയ^2}\left[\frac{ഭം}{ഭംവ}\left\{\left(വ്യ(ര)\right)^3 \cdot \frac{ഭംവ്യ_1(ര)}{ഭംയ}\right]\right.$$

$$= \frac{ഭം^2}{ഭംയ^2} \cdot \left[\frac{ഭം}{ഭംയ}\left\{\left(വ്യ(ര)\right)^3 \cdot \frac{ഭംവ്യ_1(ര)}{ഭംവ}\right]\right.$$

$$= \frac{ഭം^3}{ഭംയ^3}\left\{\left(വ്യ(ര)\right)^4 \cdot \frac{ഭംവ്യ_1(ര)}{ഭംയ}\right\}.$$

$$\therefore \left[\frac{ഭം^4 വ്യ_1(ര)}{ഭംവ^4}\right]_{വ=0} = \frac{ഭം^3}{ഭംയ^3}\left\{\left(വ്യ(യ)\right)^4 \cdot \frac{ഭംവ്യ_1(യ)}{ഭംയ}\right. \qquad \text{V}$$

ഇങ്ങിനെ മേല്ക്കുമേൽ ഉണ്ടാകുന്നു. അതിനാൽ,

$$വ്യ_1(ര) = വ്യ_1(യ) + \frac{വ}{1} \cdot വ്യ(യ) \cdot \frac{ഭംവ്യ_1(യ)}{ഭംയ}$$

$$+ \frac{വ^2}{\underline{|2}} \cdot \frac{ഭം}{ഭംയ}\left\{\left(വ്യ(യ)\right)^2 \cdot \frac{ഭംവ്യ_1(യ)}{ഭംയ}\right\}$$

$$+ \frac{വ^3}{\underline{|3}} \cdot \frac{ഭം^2}{ഭംയ^2}\left\{\left(വ്യ(യ)\right)^3 \cdot \frac{ഭംവ്യ_1(യ)}{ഭംയ}\right\}$$

$$+ \frac{വ^4}{\underline{|4}} \cdot \frac{ഭം^3}{ഭംയ^3}\left\{\left(വ്യ(യ)\right)^4 \cdot \frac{ഭംവ്യ_1(യ)}{ഭംയ}\right\}$$

$$+ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \, .$$

ര എന്നതിനെത്തന്നെ വ എന്നതിൻെറ ശ്രേണിയായി മാററുവാൻ $വ്യ_1(ര) \equiv ര$ എന്നുവെച്ചാൽ മതി. അപ്പോൾ,

$$\frac{\text{ഭം}\text{വ്യ}_1(\text{യ})}{\text{ഭം}\text{യ}} = \frac{\text{ഭം}\text{യ}}{\text{ഭം}\text{യ}} = 1.$$

$$\therefore \text{ര} = \text{യ} + \frac{\text{വ}}{1} \cdot \text{വ്യ}(\text{യ}) + \frac{\text{വ}^2}{\underline{\lvert 2}} \cdot \frac{\text{ഭം}}{\text{ഭം}\text{യ}} \left\{ \text{വ്യ}(\text{യ}) \right\}^2$$

$$+ \frac{\text{വ}^3}{\underline{\lvert 3}} \cdot \frac{\text{ഭം}^2}{\text{ഭം}\text{യ}^2} \left\{ \text{വ്യ}(\text{യ}) \right\}^3 + \frac{\text{വ}^4}{\underline{\lvert 4}} \cdot \frac{\text{ഭം}^3}{\text{ഭം}\text{യ}^3} \left\{ \text{വ്യ}(\text{യ}) \right\}^4$$

$$+ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ$$

മന്ദസംസ്കാരഗണിതത്തിൽ ഇതാകുന്നു ഉപയോഗമാകുന്നതു്. ലാഗ്രാഞ്ച്സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ സാമാന്യരൂപം വരുത്താതെതന്നെ മേൽക്കാണിച്ച് വിധത്തിൽ ഇതു വരുത്താവുന്നതാണു്. ഒരഭ്യാസമെന്ന നിലയിൽ വിദ്യാർത്ഥികൾക്കുതന്നെ അതു ചെയ്യാം.

അഭ്യാസങ്ങളിൽ കൊടുത്ത ചോദ്യങ്ങളുടെ ഉത്തരങ്ങൾ.

ഭാഗം 16.

1) $\underline{|5}=120.$

2) $\dfrac{\underline{|10}.\ \underline{|9}}{\underline{|4}}=5,486;74,56,000.$

3) $\underline{|9}=3,62,880$; $\underline{|2}.\ \underline{|6}=1440$; $1,67,98,320.$

4) $\underline{|6}.\ \underline{|7}=36,28,800.$

5) $\dfrac{\underline{|9}}{\underline{|5}}=3024.$

6) $9^4=6561.$

7) $9\times 10^3=9000.$

8) $\underline{|7}=1,20,960.$

ഭാഗം 21.

1) $\dfrac{\underline{|10}}{\underline{|4}\,\underline{|6}}=210.$

2) $\dfrac{\underline{|15}}{\underline{|10}\,\underline{|5}}=3003.$

3) $16\text{ഗ}_2\times 14\text{ഗ}_4=16\text{ഗ}_4\times 12\text{ഗ}_2=1,20,120.$

4) $4\cdot 3\cdot 2\cdot\dfrac{\underline{|21}}{\underline{|9}\,\underline{|7}\,\underline{|5}}=318,70,21,440.$

5) $\dfrac{\underline{|25}}{\underline{|21}\,\underline{|4}}\times\dfrac{\underline{|20}}{\underline{|16}\,\underline{|4}}=6,12,89,250.$

6) $2^7-1=127.$

7) $4\cdot 5\cdot 6\cdot 12\text{ഗ}_2=7920.$

ഭാഗം 28.

1) i. $1+4\text{യ}+6\text{യ}^2+4\text{യ}^3+\text{യ}^4$.

ii. $1-4\text{യ}+6\text{യ}^2-4\text{യ}^3+\text{യ}^4$.

iii. $1+5\text{യ}+10\text{യ}^2+10\text{യ}^3+5\text{യ}^4+\text{യ}^5$.

iv. $1-5\text{യ}+10\text{യ}^2-10\text{യ}^3+5\text{യ}^4-\text{യ}^5$.

v. $1+6\text{യ}+15\text{യ}^2+20\text{യ}^3+15\text{യ}^4+6\text{യ}^5+\text{യ}^6$.

vi. $1-6\text{യ}+15\text{യ}^2-20\text{യ}^3+15\text{യ}^4-6\text{യ}^5+\text{യ}^6$.

vii. $1+8\text{യ}+24\text{യ}^2+32\text{യ}^3+16\text{യ}^4$.

viii. $1-15\text{യ}+90\text{യ}^2-270\text{യ}^3+405\text{യ}^4-243\text{യ}^5$.

2) $2^{12-4}.\ 12\text{ഗ}_4=1{,}26{,}720$:

3) ·720; 1425. 4) -15.

5) i. $1-5\text{യ}^2+10\text{യ}^4-10\text{യ}^6+5\text{യ}^8-\text{യ}^{10}$.

ii. $1+4\text{യ}^3+6\text{യ}^6+4\text{യ}^9+\text{യ}^{12}$.

iii. $\text{യ}^8+4\text{യ}^6.\text{ര}^2+6\text{യ}^4\text{ര}^4+4\text{യ}^2\text{ര}^6+\text{ര}^8$.

6) $4^6=4{,}196$.

8) $1+4\text{യ}+10\text{യ}^2+10\text{യ}^3+19\text{യ}^4+16\text{യ}^5+10\text{യ}^6$
$+4\text{യ}^7+\text{യ}^8$.

ഭാഗം 36.

1) $1+\frac{1}{2}\text{യ}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\text{യ}^2+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\text{യ}^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}\text{യ}^4+\ldots\ldots\ldots$

2) $1+\frac{1}{3}\text{യ}-\frac{1\cdot2}{3\cdot6}\text{യ}^2+\frac{1\cdot2\cdot5}{3\cdot6\cdot9}\text{യ}^3-\frac{1\cdot2\cdot5\cdot8}{3\cdot6\cdot9\cdot12}\text{യ}^4+\ldots\ldots\ldots$

$1-\frac{1}{3}\text{യ}-\frac{1\cdot2}{3\cdot6}\text{യ}^2-\frac{1\cdot2\cdot5}{3\cdot6\cdot9}\text{യ}^3-\frac{1\cdot2\cdot5\cdot8}{3\cdot6\cdot9\cdot12}\text{യ}^4-\ldots\ldots\ldots$

$1-\frac{1}{3}\text{യ}+\frac{1\cdot4}{3\cdot6}\text{യ}^2-\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}\text{യ}^3+\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10}{3\cdot6\cdot9\cdot12}\text{യ}^4-\ldots\ldots\ldots$

$$1+\frac{1}{3}യ+\frac{1\cdot4}{3\cdot6}യ^2+\frac{1\cdot4\cdot7}{3\cdot6\cdot9}യ^3+\frac{1\cdot4\cdot7\cdot10}{3\cdot6\cdot9\cdot12}യ^4+\ldots\ldots\ldots$$

3) 1·111. 4) 2·621. 5) +73·1136.

6) $1-3\frac{2}{3}യ+7\frac{8}{9}യ^2-13\frac{58}{81}യ^3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

7) $1-4യ+10യ^2-16യ^3+19യ^4-16യ^5+10യ^6$
$-4യ^7+യ^8.$

8) $-9;\ (-1).^{സ}സ.$

9) $(1-\frac{2}{3})^{-സ}=(\frac{1}{3})^{-സ}=2^{സ}(1-\frac{1}{3})^{-സ}$ എന്നു വരുത്തി കാണിക്കുക.

10) $(1-\frac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}=2^{\frac{3}{2}}$ എന്നു വരുത്തുക.

11) ശ്രേണിയെ $(1+\frac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}$ എന്നാക്കി മാററുക.

12) $\frac{\lfloor 2സ}{(\lfloor സ)^2}.$

ഭാഗം 64.

2) താംയ$=\sqrt{3}$, ഛേരയ$=2$, കോംയ$=\frac{1}{2}$, ഭുയ$=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

കോം: ഛേരയ$=\frac{2}{\sqrt{3}}$, കോം: താംയ$=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

3) കോം: താംയ$=\sqrt{3}$, താംയ$=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

5) ഭു $150^\circ=\frac{1}{2}$, കോം $210^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{2}$, ഭു $240^\circ=\frac{-\sqrt{3}}{2}$,

കോം $240^\circ=-\frac{1}{2}$, ഭു $330^\circ=-\frac{1}{2}$, കോം $330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

കോം $420^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$, കോം $840^\circ=-\frac{1}{2}$.

ഭാഗം 72.

2) കോ. $30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ജ $15^\circ = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}-1)}{4}$,

കോ $15^\circ = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{4}$.

5) ജ (2യ) = കോ (3യ)

$\therefore$ 2 കോയ. ജയ = 4 കോ^{3} യ − 3 കോയ.

ഈ സമീകാരത്തിൽനിന്നു ജയ വരുത്തുക.

ഭാഗം. 98.

1) i. 20യ$^3 + 6$യ

ii. കോയ − ജയ

iii. 5യ$^4 + 3$യ$^2 + 4$യ

iv. 3യ^2 ജയ + യ^3 കോയ

v. 2യ കോയ. — യ^2 ജയ

vi. ധ^2 കോയ

vii. ധ$^{\text{യ}}$ (യ. കോയ − ധ. ജയ)

viii. $\frac{-4\text{യ}}{(1+\text{യ}^2)^2}$

ix. $\frac{4\text{യ}}{(1-\text{യ}^2)^2}$

x. 2യ(യ + 1)(2യ + 1)

xi. 3 ജയ. കോയ (ജയ — കോയ)

xii. $1 + \frac{1 - \text{ജ } 2\text{യ}}{1 + \text{ജ } 2\text{യ}} = \frac{2}{1 + \text{ജ } 2\text{യ}}$.

2) i. $-\frac{\text{ഫലം}}{\text{ധ}}$ കോയ

ii. $\frac{\text{ഫലം}}{\text{ധ}}$ ജയ

iii. $\frac{\text{ഫലം}}{\text{ധ}}(1+\text{കയ})^{\frac{1}{\text{ക}}}$

iv. $\frac{\text{ഫലം}}{\text{ധ}}(1-\text{കയ})^{-\frac{1}{\text{ക}}}$

v. $\frac{\text{ഫലം}}{\text{ധ}}\left(\frac{\text{യ}-1}{\text{യ}+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

vi. $-\frac{\text{ഫലം}}{\text{ധ}}(4-\text{യ})$

vii. $\frac{1}{2}$ താ$^{-1}\frac{യ}{2}$ | viii. $\frac{ഘാ}{ധ}\left(\frac{യ-3}{യ-2}\right)$

ix. $-\frac{1}{2}യ^{-2}$ | x, $\frac{-1}{2ക}(കയ+1)^{-2}$

xi, $\frac{1}{ക}$താ$^{-1}\frac{യ}{ക}$ | xii. ഉ$^{-1}\frac{യ}{ക}$

xiii, $\frac{ഘാ}{ധ}\left(\frac{യ+1}{യ+3}\right)^{\frac{1}{2}}$ | xiv. താ$^{-1}$(യ$+2$)

ഭാഗം 125.

1) യ$=-3$ ആകുമ്പോൾ ഉച്ചവും, യ$=+1$ ആകുമ്പോൾ നീചവും ഉണ്ടാകുന്നു.

2) യ$=2$ ആകുമ്പോൾ പ്രഥമദ്വിതീയഭേദകഗുണങ്ങൾ ശൂന്യമാകുന്നു. വ്യഞ്ജകം ആവർജ്ജിക്കുന്നു.

3) 3·757 ഘനഅടി.

4) ക്ഷേത്രഫലം$=322'5$ ച. അടി ഒടിവില്ലെന്നു കാണിപ്പാൻ മദ്ധ്യത്തിൽ ഉയരത്തിന്റെ ഭേദകഗുണകാരം ശൂന്യമെന്നും എല്ലായിടത്തും അഭഗ്നമെന്നും കാണിക്കുക.

5) 7'957 ചുററ്; 2500 അടി.

6) ക്ഷേത്രഫലം$=1+\sqrt{2}$, ഏററവും വലിയ ഉയരം$=\sqrt{2}$,

പുസ്തകത്തിൽ ഉപയോഗിച്ച
സാങ്കേതികശബ്ദങ്ങളുടെ അകാരാദി.

അനന്തം	infinite.
അനിയതശ്രേണി	infinite series.
അനുചലരാശി	dependent variable.
അങ്കഗണിതം	arithmetic.
അപഗമം	divergent,
അപരിമിതം	infinite.
അഭഗ്നം	Continuous.
അഭിന്നം	integral, not fractional.
അവ്യക്തഗണിതം	algebra.
ആവർജ്ജനം	Inflection or undulation.
ആയതവൃത്തം	ellipse.
ഉച്ചം	maximum.
ഉൽക്രമണം	raisaig to a power.
ഉപകേന്ദ്രം	focus of an ellipse etc.
ഉപഗമം	Convergent.
ഉപതാനം	base.
ഉപലക്ഷിതം	implicit.
ഏകാന്തരം	alternate.
ഋണം	negative.
കരകം	radian.
കരം	radius - radius vector.
കൂടിക	cone.
കോടിച്ഛേദകം	cosecant,
കോടിജ്യാ	cosine.
കോടിതാനകം	cotangent.
ഗമകം	index - exponent.
ഗമകശ്രേണി	exponential series.

ഗണം	group-combination,
ഗുണനം	multiplication.
ഗുണം, ഗുണകാരം	multiplier, coefficient.
ഘടകം	factor.
ഘനഫലം	volume.
ഘനം	thickness, cube.
ഘനമൂലം	cube-root.
ഘാതാങ്കം	logarithm.
ഘാതാങ്കപരിവർത്തകം	constant of convertion of a logarithm from the base e (=ധ) to the base 10.
ചലരാശി	variable.
ഛേദകം	secant.
താനകജ്യാ	tangent.
ത്രികോണമിതി	trigonometry.
ത്രൈരാശികം	application of rule of three.
ദശാത്മകവ്യവസ്ഥ	decimal system.
ദൃഢരാശി	constant number.
ദ്വിപദം	binomial.
ദ്വിപദഘാതവിസ്തരണം	Expansion of a binomial.
ധനം	positive.
ധാതുകം	e, theoretical base of logarithm.
നിയതശ്രേണി	finite series.
നീചം	minimum.
ന്യാസം	permutation.
പൃഷ്ഠതലം	outer surface.
പ്രഗണിതം, വരഗണിതം	calculus.
പ്രതിക്ഷേപം, പ്രതിന്യാസം	substitution.
ബീജഗണിതം	algebra.
ഭഗ്നം	discontinuous.
ഭിന്നം	fraction, fractional.

ഭുജജ്യാ	sine.
ഭേദകം	differential.
ഭേദകഗണിതം	differential calculus.
ഭേദകഗുണം	differential coefficient.
ലക്ഷിതം	explicit.
വക്രതലം	curved surface.
വർഗ്ഗം	square.
വർഗ്ഗാനയനം	derivation of square.
വർഗ്ഗമൂലം	square root.
വരഗണിതം, പ്രഗണിതം	calculus.
വൃത്തി	function.
വ്യക്തഗണിതം	arithmetic.
വ്യഞ്ജകം	expression.
വ്യവകലനം	subtraction.
വ്യസ്തജ്യാ	inverse trigonometric function.
വ്യുൽക്രമണം	extraction of root.
ശ്രേഢി	series.
സഭിന്നം	mixed number.
സംകലനം	addition.
സമസ്തജ്യാ	chord.
സമാകലം	integral, the sum.
സമാകലഗണിതം	integral calculus.
സമാകലനം	integration.
സമീകാരം	equation.
സമീകാരഭഞ്ജനം	solving an equation.
സൂചീസ്തംഭം	pyramid.
സ്പഷ്ടഗണിതം	arithmetic.
സ്വയംചലരാശി	independent variable.
ഹരണം	division.

500 7A76

KOR.V

കോരങ്ങ വി. ജി.

വരഞ്ഞിനെ പ്രവേശിക്ക.