അങ്കഗണിത ബീജഗണിതം

2

കേരള ഭാഷാ ഇൻസ്റ്റിറ്റ്യൂട്ട്

α

x

അങ്കഗണിത ബീജഗണിതം

(ഭാഗം II)

തർജ്ജമ

കെ എസ് ദാമോദരൻ നമ്പൂതിരിപ്പാട്

KOTTAYAM PUBLIC LIBRARY ★ KOTTAYAM ★

കേരള ഭാഷാ ഇൻസ്റ്റിറ്റ്യൂട്ട്
തിരുവനന്തപുരം

ജനറൽ എഡിറ്റർ

ഡോ. എ. എൻ. പി. ഉമ്മർകുട്ടി

ചീഫ് എഡിറ്റർ

പ്രൊ. സി കെ. മൂസ്സത്

എഡിറ്റർ

കൊച്ചുനാരായണൻ

പ്രൂഫ്

എസ്. വിജയകുമാർ

M 510
Dam-A
94763
KOTTAYAM PUBLIC LIBRARY
KOTTAYAM

ഒന്നാം പതിപ്പ് ജൂൺ 1975

അച്ചടി വിജ്ഞാനമുദ്രണം പ്രസ്സ്
തിരുവനന്തപുരം മൂന്ന്

വില ക. 5.00

ആമുഖം

കേന്ദ്രഗവണ്മെൻറിൻെറ ധനസഹായം ഉപയോഗപ്പെടുത്തിയുള്ള പുസ്തക പ്രസിദ്ധീകരണ പദ്ധതിയനുസരിച്ച് പുറത്തിറക്കുന്ന ഗ്രന്ഥമാണ് ''അങ്കഗണിത ബീജഗണിതം ഭാഗം II''.

ഗണിതത്തിലെ പ്രാഥമിക ആശയങ്ങൾ സരളമായി പ്രതിപാദിക്കുന്ന ഈ പുസ്തകത്തിൽ പരിമേയ സംഖ്യകൾ, ബീജീയ വ്യംജകങ്ങൾ, രേഖീയസമീകരണം, ഘടകക്രിയ, ബഹുപദങ്ങൾ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ തുടങ്ങിയവ ഉൾപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്. ശ്രീ കെ. എസ്. ദാമോദരൻ നമ്പൂതിരിപ്പാടാണ് ഇതു തർജ്ജമ ചെയ്തിരിക്കുന്നത്. ഈ ഗ്രന്ഥത്തിൽ വന്നുചേർന്നിരിക്കുവാനിടയുള്ള അപാകതകൾ ചൂണ്ടിക്കാണിക്കുവാൻ വായനക്കാരോട് അഭ്യർത്ഥിക്കുന്നു. കൂടുതൽ മെച്ചപ്പെട്ട രണ്ടാം പതിപ്പ് ഉണ്ടാക്കുവാൻ ക്രിയാത്മകമായ ഇത്തരം നിർദേശങ്ങൾ സഹായകമാകുമല്ലൊ.

കേരള ഭാഷാ ഇൻസ്റ്റിററ്യൂട്ട്
തിരുവനന്തപുരം
2 ജൂൺ 1975

ഡോ. എ. എൻ. പി. ഉമ്മർകുട്ടി
കൊച്ചുനാരായണൻ

ഉള്ളടക്കം

അധ്യായം		പേജ്
1	പരിമേയസംഖ്യകൾ	1
2	ബീജീയവ്യംജകങ്ങൾ	23
3	ഒരു അജ്ഞാതസംഖ്യയുള്ള രേഖീയസമീകരണം	72
4	ബഹുപദങ്ങളുടെ ഘടകക്രിയ	106
5	ഭിന്നിതബീജീയവ്യംജകങ്ങൾ	117
6	നിർദേശാങ്കങ്ങൾ	151
	ശബ്ദാവലി—സൂചിക	177

അധ്യായം 1

പരിമേയസംഖ്യകൾ

1. ഒരു പരിമേയസംഖ്യ

താഴ്ന്നക്ലാസ്സുകളിൽ നിങ്ങരം ഭിന്നിതങ്ങളെപ്പററി പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. കൂടാതെ ഈ സംഖ്യകളുടെ ക്രിയകരം അതായതു് സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നിവയും പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇവയ്ക്കു് എല്ലാററിനുംകൂടി *'പരിമേയ സംഖ്യകൾ'* എന്ന തലക്കെട്ടുകൊടുക്കാവുന്നതാണ്. അഖണ്ഡസംഖ്യകരംക്കും പൂർണസംഖ്യകരംക്കും ഉള്ള ക്രമബന്ധമായ അതേ വിവേചനം തന്നെ ഈ ക്ലാസ്സിൽ പരിമേയസംഖ്യകരംക്കും കൊടുക്കാവുന്നതാണ്.

ഏകാദികളെപ്പററി പഠിച്ചപ്പോരം, വ്യവകലനവും ഹരണവും ഏകാദികളിൽ എല്ലായ്പോഴും സാധ്യമല്ല എന്നു കണ്ടു. എന്നാൽ പൂർണസംഖ്യകളിൽ വ്യവകനം എല്ലായ്പോഴും സാധ്യമാക്കാവുന്നതാണ് എന്ന് ഗ്രഹിച്ചുകഴിഞ്ഞിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഹരണം എല്ലായ്പോഴും സാധ്യമാക്കാം എന്നു സ്ഥാപിക്കാൻ വേണ്ടി പരിമേയ സംഖ്യകരം ആവിർഭവിച്ചു. ഒരു ഭിന്നിതം (ഭിന്നം), രണ്ടു ഏകാദികളുടെ ഹരണഫലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന ഒന്നാണ്. *ഒരു പരിമേയസംഖ്യ, രണ്ടു പൂർണ സംഖ്യകളുടെ ഹരണഫലത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. p ഉം q ഉം രണ്ടു പൂർണംഖ്യകളും $q \neq 0$ ഉം ആണെങ്കിൽ p/q എന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതുന്നസംഖ്യ ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയാണ്. ഒരു പരിമേയസംഖ്യയിൽ പൂർണസംഖ്യകളും ഭിന്നസംഖ്യകളും അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു.*

1. താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകളിൽ പരിമേയസംഖ്യകരം ഏവ?

$$\frac{3}{4},\ -\ 2.5,\ \frac{5}{2},\ \frac{4}{1},\ \frac{2}{0},\ \frac{3}{x}\ (x \neq 0),\ \frac{a}{b-b}$$

(b ഒരു പൂർണസംഖ്യ)

2. താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകൾ സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക:

(a) $\frac{1}{8}$, $\frac{-1}{5}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{-5}{16}$

(b) 1.3, 0.8, – 1.4, – 0.7, 0.9

3. a, b, c എന്നിവ മൂന്നുപരിമേയസംഖ്യകളും $a > b$ ഉം $b > c$ ഉം ആണ് എങ്കിൽ $a > c$ ആയിരിക്കും. സാധാരണ ഭിന്നിതങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒന്നും ദശാംശങ്ങളിൽ നിന്ന് ഒന്നുമെടുത്ത് ചുരുങ്ങിയതു് രണ്ട് ഉദാഹരണം എങ്കിലും പറയുക.

4. സംഖ്യാരേഖനോക്കി, ഒരു പരിമേയസംഖ്യ മറെറാരു പരിമേയസംഖ്യയേക്കാൾ വലുതോ ചെറുതോ എന്നു് അറിയുന്നതു് എങ്ങനെ?

5. താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഇടയ്ക്കു് എത്ര പരിമേയസംഖ്യകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും?

(i) 2 ന്റെയും 3 ന്റെയും (ii) – 1 ന്റെയും – 2 ന്റെയും

(iii) 0 ത്തിന്റെയും 1 ന്റെയും. ഈ സംഖ്യകൾ അവസാനിക്കുമോ?

ഒരു സംഖ്യാരേഖ ഉപയോഗിച്ച് ഉത്തരം വിശദീകരിക്കുക.

6. താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഇടയ്ക്കു് എത്ര ദശാംശങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും?

(i) 0 ത്തിന്റെയും – 1 ന്റെയും (ii) 5 ന്റെയും 6 ന്റെയും

(iii) – 3 ന്റെയും – 4 ന്റെയും ഒരു സംഖ്യാരേഖവരച്ച് ഉത്തരം വിശദീകരിക്കുക.

7. രണ്ടു പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഇടയ്ക്കു് അനന്തമായ അനേകം പരിമേയ സംഖ്യകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. ഉദാഹരണമായി $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഇടയ്ക്കായി അനവധി പരിമേയസംഖ്യകൾ ഉണ്ടാക്കാവുന്നതാണ്. താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകൾ നോക്കുക.

$$\frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{2} = \frac{7}{24}$$

മററു സംഖ്യകൾ

$$\frac{7}{22}, \frac{7}{23}, \frac{7}{25}, \frac{7}{26}, \frac{7}{27}, \frac{14}{43}, \frac{14}{45}, \ldots\ldots$$

എന്നിവ.

$\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$ എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഇടയ്ക്കുള്ള കുറച്ചു പരിമേയസംഖ്യകൾ എഴുതാമോ?

8. 0.5 ന്റേയും 0.6 ന്റേയും ഇടയ്ക്കുള്ള പരിമേയസംഖ്യകൾ എഴുതുക. (ഉദാഹരണമായി .51, .511, .501, .52, ...)

സംഖ്യാരേഖയിൽ നിന്നു് അതു് കൂടുതൽ വ്യക്തമാകും.

$$0 \quad \underset{\cdot 5}{A} \quad \underset{\cdot 6}{B}$$

A എന്ന ബിന്ദു 0.5 നെയും B എന്ന ബിന്ദു 0.6 നെയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. A ഉടേയും B ഉടേയും ഇടക്കു് എണ്ണാൻ സാധിക്കാത്ത അത്രയും പരിമേയസംഖ്യകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

9. ഓരോ പരിമേയസംഖ്യയേയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഓരോ ബിന്ദു സംഖ്യാരേഖയിൽ ഉണ്ടായിരിക്കുമോ?

10. സംഖ്യാരേഖയിലെ ഓരോ ബിന്ദുവും ഓരോ പരിമേയസംഖ്യയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുമോ?

11. (a) $3/x$ ഒരു ഏകാദി ആണു് എങ്കിൽ x ന്റെ പൂർണാങ്കമൂല്യം കാണുക.
(b) $5/x$ ഒരു പൂർണസംഖ്യയാണെങ്കിൽ x ന്റെ പൂർണാങ്കമൂല്യം കാണുക.
(c) $6/x$ എന്നതു് (i) ഒരു ഏകാദിയാണു് എങ്കിൽ x ഇന്റെ പൂർണാങ്കമൂല്യവും (ii) ഒരു പൂർണസംഖ്യ ആണു് എങ്കിൽ x ഇന്റെ പൂർണാങ്കമൂല്യവും കാണുക.

12. (a) $x/3$ ഒരു ഏകാദി ആണു് എങ്കിൽ x ന്റെ ഏററവും ചെറിയ പൂർണാങ്കമൂല്യം കാണുക. x ഒരു ഏകാദിയാണു് എങ്കിൽ, x ഇനു് എത്ര മൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും?
(b) $x/3$ ഒരു പൂർണസംഖ്യയാണു് എങ്കിൽ x ന്റെ ഏററവും ചെറിയ പൂർണാങ്കമൂല്യം കാണുക.
(c) $x/5$ ഒരു പൂർണസംഖ്യയാണു് എങ്കിൽ x ന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു മൂല്യങ്ങൾ (ഒരു ധനമൂല്യവും ഒരു ഋണമൂല്യവും) കാണുക. $x/5$ എന്നതു് ഒരു പൂർണസംഖ്യയാണു് എങ്കിൽ x ന്റെ അത്തരം മൂല്യങ്ങൾക്കു് അവസാനം ഉണ്ടായിരിക്കുമോ?

13. a/b അഖണ്ഡസംഖ്യയാണു് എങ്കിൽ, a ഉടേയും b ഉടേയും മൂല്യം കാണുക; a യും b യും ഏകാദികൾ ആണു് എങ്കിലും അവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

14. a/b ഒരു അഖണ്ഡസംഖ്യയാണു് എങ്കിൽ, a യും b യും ഏകാദികൾ ആയിരിക്കും എന്നതിനുള്ള ഒരു നിയമം നിർദേശിക്കുക.

2. പരിമേയസംഖ്യകളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തൽ

(a) *സംഖ്യാരേഖ ഉപയോഗിച്ചു്*

ഒരു സംഖ്യാരേഖയിൽ സംഖ്യകൾ അടയാളപ്പെടുത്തിയാൽ അവ താരതമ്യം ചെയ്യാൻ വളരെ എളുപ്പമാണു്. സംഖ്യാരേഖ പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ക്രമം

നിലനിർത്തുന്നു. പരിമേയസംഖ്യകൾ സംഖ്യാരേഖയിൽ താഴെ പറയും പ്രകാരമാണ് ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നത്.

സംഖ്യാരേഖയിൽ രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ തന്നിരിക്കുന്നു എങ്കിൽ, അവയിൽ ഏററവും ചെറിയ സംഖ്യക്ക് സംഗതമായ ബിന്ദു ബിന്ദുവിൻെറ ഇടതുവശത്തായി കിടക്കുന്നു.

(b) *അങ്കഗണിതപ്രക്രിയകൾ ഉപയോഗിച്ച്*

ഇവിടെ രണ്ടവസ്ഥകൾ ഉണ്ട്

(i) ഛേദം ഒരേപോലെ ആയിട്ടുള്ള പരിമേയസംഖ്യകൾ

(ii) വ്യത്യസ്തഛേദങ്ങളോടുകൂടിയ പരിമേയസംഖ്യകൾ

രണ്ടു ധനപരിമേയസംഖ്യകളുടെ (ഭിന്നിതങ്ങളുടെ) ഛേദങ്ങൾ ഒരുപോലെ ആണ് എങ്കിൽ, അവയിൽ ഏതിലെ അംശമാണ് കൂടുതൽ വലുതു്, ആ സംഖ്യയാണ് മററ സംഖ്യയേക്കാൾ കൂടുതൽ വലുതു്; എന്നാൽ ഋണപരിമേയസംഖ്യകളിൽ നേരെവിപരീതമാണ്. അതായതു്, രണ്ടു ഋണപരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഛേദങ്ങൾ ഒരേപോലെ ഉള്ളവയാണ് എങ്കിൽ, അവയിൽ വലിയഅംശമുള്ള പദം മറേറ പദത്തേക്കാൾ ചെറുതായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 1

$$\frac{5}{8} > \frac{3}{8} \text{ എന്നാൽ } \frac{-5}{8} < \frac{-3}{8}$$

രണ്ടു ഭിന്നങ്ങളിലെ ഛേദങ്ങൾ ഒരുപോലെ ഉള്ളവ അല്ലെങ്കിൽ, അവയെ ഒരേ ഛേദമാക്കി മാററണം. ഇതിന് സമാനഭിന്നിതങ്ങളെക്കുറിച്ചറിയണം. a/b ഉം ac/bc ഉം സമാനഭിന്നിതങ്ങളാണ്. $3/4$, $5/6$ എന്നീ രണ്ടു ഭിന്നിതങ്ങളെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുവാൻ അവയിലെ ഛേദങ്ങളെ ഒരേ ഛേദം (അതായതു് 12) ആക്കി മാററിയാൽ മതി (ഇതിൽ 4 ന്റെയും 6 ന്റെയും ല. സാ. ഗു. ആണ് 12).

ഉദാഹരണം 2

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{9}{12} \text{ ഉം } \frac{5}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{2} = \frac{10}{12} \text{ ഉം}$$

അതിനാൽ $10/12 > 9/12$ അതായതു് $5/6 > 3/4$

a/b, c/d എന്നീ പരിമേയസംഖ്യകൾ തുല്യമാണ്.

അതായതു് $a \cdot d = b \cdot c$ $(b \neq 0,\ d \neq 0)$ ആണെങ്കിൽ $a/b = c/d$

ഉദാഹരണമായി $2 \times 15 = 3 \times 10$ ആയതിനാൽ $2/3 = 10/15$

ഈ ഗുണധർമം ഉപയോഗിച്ച് പരിമേയസംഖ്യകളെ ലഘൂകരിക്കാം

നിയമം 1. a, b, c, d ഇവ ഏതെങ്കിലും അഖണ്ഡസംഖ്യകളും $b \neq 0, d \neq 0$ ഉം എങ്കിൽ, $a \cdot d > b \cdot c$ ആണ്എങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം $a/b > c/d$

നിയമം 2. a, b, c, d എന്നിവ ഏതെങ്കിലും അഖണ്ഡസംഖ്യകളും $b \neq 0$, $d \neq 0$ ഉം എങ്കിൽ, $a \cdot d = b \cdot c$ ആണെങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രം $5a/b = c/d$ ആയിരിക്കും.

3. പരിമേയസംഖ്യകളുടെ നിരപേക്ഷമൂല്യം

5, − 5 എന്നീ രണ്ട് സംഖ്യകൾ തന്നിട്ടുണ്ട് എന്ന് വിചാരിക്കുക. ഈ സംഖ്യകളിൽ ഓരോന്നിന്റേയും നിരപേക്ഷമൂല്യം 5 ആണ്. ഈ നിരപേക്ഷ മൂല്യത്തെ സംഖ്യാത്മകമൂല്യം എന്നുകൂടി പറയുന്നു. ഈ സന്ദർഭത്തിൽ സംഖ്യ കുത്തനെയുള്ള രണ്ടുബാറുകളുടെ (വരകളുടെ) ഇടയ്ക്കായി എഴുതുന്നു.

അതായത്; $|5| = |-5| = 5$

ഇതുപോലെതന്നെ

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \text{ ആണെങ്കിൽ} \\ -x, & x < 0 \text{ ആണെങ്കിൽ} \end{cases}$$

ഇവിടെ x ഏതെങ്കിലും ഒരു പരിമേയ സംഖ്യയാണ്.

ഉദാഹരണമായി

$$|3| = 3, |-3| = -(-3) = 3$$

15. താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക:

$\frac{3}{5}$ ഉം $\frac{2}{3}$ ഉം; $\frac{7}{8}$ ഉം $\frac{11}{16}$ ഉം; $\frac{5}{6}$ ഉം $\frac{7}{8}$ ഉം

16. താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകളിൽ ഉള്ള '?' ചിഹ്നം മാററി >, =, < എന്നിവയിൽ ഏററവും യോജിച്ച ചിഹ്നം എഴുതുക.

(i) $\frac{9}{10}\ ?\ \frac{7}{8}$ (ii) $\frac{7}{16}\ ?\ \frac{5}{11}$

(iii) $\frac{5}{13}\ ?\ \frac{3}{7}$ (iv) $\frac{7}{13}\ ?\ \frac{21}{39}$

17. താഴെ പറയുന്ന പ്രസ്താവനകൾ തെററോ ശരിയോ എന്നു പറയുക:

(i) $\frac{-5}{8} < \frac{-7}{8}$ (ii) $\frac{4}{5} > \frac{8}{10}$

(iii) $\frac{7}{12} > \frac{13}{24}$ (iv) $\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$

18. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(i) $|x| = 2$ (ii) $|x| = 3$

(iii) $\left|\frac{5}{6}\right| = x$ (iv) $|x + 1| = 4$

(v) $\left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{2}{3}$ (vi) $| x - 0.3 | = 1.2$

19. (i) $| 2 - x | = 1$ (ii) $x = | 1\frac{1}{2} |$

(iii) $x = | 3.4 |$ (iv) $| 3x | = 6$

(v) $4x = | 5 |$ (vi) $\frac{x}{2} = | 0.8 |$

20. x ഒരു അഖണ്ഡസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ താഴെ പറയുന്ന അസമികകൾ ശരിയാകത്തക്കവിധം x ൻെറ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക:

(i) $x < 2$ (ii) $2x < 3$ (iii) $(3x - 1) < 2$

4. പരിമേയസംഖ്യകളിലുള്ള സംക്രിയകൾ

(a) സങ്കലനം

പരിമേയസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനങ്ങളിലെ പ്രശ്നങ്ങൾ 6-ാം ക്ലാസ്സിൽ ചെയ്തിട്ടുണ്ട്.

ഉദാഹരണം 3

$\frac{a}{b}$ ഉം $\frac{c}{d}$ ഉം തമ്മിൽ കൂട്ടണം എന്നു വിചാരിക്കുക. (ഇതിൽ $b \neq 0$, $d \neq 0$)

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{b \cdot c}{b \cdot d} = \frac{ad + bc}{b\,d}$$

ഇവിടെ $b \neq 0$, $d \neq 0$.

21. $\frac{5}{3} + \frac{7}{8} = \frac{7}{8} + \frac{5}{3}$ ആണോ?

22. $2.3 + 7.9 = 7.9 + 2.3$ ആണെന്നു് തെളിയിക്കുക.

23. $a/b + c/d = c/d + a/b$ $(b,d \neq 0)$ ആണോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

24. താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകൾ രണ്ടുവിധത്തിൽ കൂട്ടുക:

(i) $\frac{3}{4} + \frac{5}{4} + \frac{2}{3}$ (ii) $\frac{7}{3} + \frac{5}{13} + \frac{2}{3}$

(iii) $7.387 + 4.987 + 2.613$

(iv) $0.456 + 0.872 + 0.128$

25. കൂട്ടുക:

(i) $\frac{2}{3} + \frac{7}{5}$ (ii) $\left(\frac{-5}{6}\right) + \left(\frac{0.7}{12}\right)$

(iii) $0.356 + 0.780$ (iv) $\frac{8}{15} + \left(\frac{-3}{4}\right)$

(v) $\left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{1}{2}$

മേല്പറഞ്ഞ ഓരോ അവസ്ഥയിലും തുക എല്ലായ്പോഴും ഒരു പരിമേയ സംഖ്യതന്നെ ആയിരിക്കുമെന്നു കാണാവുന്നതാണ്.

26. കൂട്ടുക:

(i) $\frac{2}{5} + 0$ (ii) $-3.5 + 0$

(iii) $0 + \frac{a}{b}$ $(b \neq 0)$ (iv) $0 + 0$

താഴെ പറയുന്ന സങ്കലനനിയമങ്ങൾ തന്നെ പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഓരോ സന്ദർഭത്തിലും ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

1. പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഗണം സങ്കലനത്തിന്മേൽ സംവൃതമാണ് (സംവൃതിനിയമം). അതായത് a, b, c, d എന്നിവ ഏതെങ്കിലും പൂർണ സംഖ്യകളും b, $d \neq 0$ ഉം ആണെങ്കിൽ $a/b + c/d$ എന്നതു് എല്ലായ്പോഴും ഒരു പരിമേയസംഖ്യ ആയിരിക്കും.

II. സങ്കലനം ആണ്.

a, b, c, d എന്നിവ ഏതെങ്കിലും പൂർണസംഖ്യകളും $b \neq 0$ ഉം $d \neq 0$ ഉം ആണെങ്കിൽ

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

III. സങ്കലനം സാഹചര്യം ആണ്.

അതായതു് a, b, c, d, e, f എന്നിവ ഏതെങ്കിലും പൂർണസംഖ്യകളും b, d, f എന്നിവ $\neq 0$ ഉം ആണെങ്കിൽ

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

IV. പൂജ്യം പരിമേയസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനത്തിലെ തദ്ദഅംഗമാണ്, അതായതു് ഏതൊരു പരിമേയസംഖ്യയോടുകൂടിയും പൂജ്യം കൂട്ടുകയാണ് എങ്കിൽ തുക അതേ സംഖ്യ തന്നെ ആയിരിക്കും.

V. 2/5 ഉം − 2/5 ഉം; 8.3 ഉം − 8.3 ഉം; a/b ഉം (− a/b) ഉം. ഇവ വിപരീതസംഖ്യകളും അവയുടെ തുക പൂർണസംഖ്യകളിലേതു പോലെ പൂജ്യവും ആയിരിക്കും.

അതിൽനിന്നും $(a/b) + (-a/b) = (a/b) - (a/b) = 0$

(b) വ്യവകലനം

സങ്കലനനിയമങ്ങൾ തന്നെ വ്യവകലനത്തിലും അവലംബിക്കാമോ എന്നു നോക്കാം.

27. $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}$ എന്നതും $\frac{1}{4} - \frac{2}{3}$ എന്നതും ഒന്നുതന്നെയാണോ?

28. 4.5 − 2.3 എന്നതും 2.3− 4.5 എന്നതും ഒന്നുതന്നെയാണോ?

മുകളിൽ പറഞ്ഞതിൽ നിന്നു് വ്യവകലനം ക്രമവിനിമേയം അല്ലെന്നു് മനസ്സിലാക്കാം. അതുപോലെ തന്നെ വ്യവകലനം സാഹചര്യവും അല്ലെന്നു് കാണാം.

രണ്ടു പരിമേയസംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം എല്ലായ്പോഴും ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ ആയിരിക്കും എന്നതുകൊണ്ടു് സംവൃതിനിയമം ഇവിടെയും ശരിയാണു്.

29. കുറയ്ക്കുക:

(i) $\frac{7}{23} - 0$ (ii) $11.2 - 0$

(iii) $\frac{a}{b} - 0 \; (b \neq 0)$ (iv) $0 - 0$

30. കുറയ്ക്കുക:

(i) 2.3 − 1.8 (ii) 7.812 − 4.907

(iii) 7001.201 − 588.875 (iv) 1.61 − 5.43

(v) 0.01 − 0.10 (vi) 2.9 − 2.9

31. (i) $5\frac{1}{2} - 3\frac{3}{4}$ (ii) $2\frac{1}{2} - 5\frac{1}{4}$

(iii) $4 - 3\frac{8}{9}$

32. (i) $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} \; (b, d \neq 0)$

(ii) $\frac{p}{q} - \frac{r}{s} \; (q, s \neq 0)$

33. വ്യവകലനം സാഹചര്യമല്ലെന്ന് ഉദാഹരണങ്ങൾ വഴി തെളിയിക്കുക.

34. താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകളുടെ വിപരീതസംഖ്യകൾ എഴുതുക.

(i) $\frac{-17}{6}$ (ii) $5\frac{3}{7}$ (iii) 12.7

(iv) -6.9 (v) $\frac{e}{f}$ $(f \neq 0)$ (vi) $-\frac{x}{y}$ $(y \neq 0)$

(c) *ഗുണനം*

രണ്ടു പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഗുണനം താഴെ പറയുന്ന വിധത്തിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു.

a, b, c, d എന്നിവ ഏതെങ്കിലും പൂർണസംഖ്യകളും $b \neq 0$ ഉം $d \neq 0$ ഉം ആണെങ്കിൽ

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

രണ്ടു പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഗുണനത്തിന്, അംശങ്ങൾ തമ്മിലും ഛേദങ്ങൾ തമ്മിലും വെവ്വേറെ ഗുണിക്കണം എന്നാണ് മുകളിൽ പറഞ്ഞതിൽ നിന്നും മനസ്സിലാകുന്നത്. p അംശങ്ങളുടെ ഗുണിതവും q ഛേദങ്ങളുടെ ഗുണിതവും ആണ് എങ്കിൽ $p \mid q$ $(q \neq 0)$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഒരു പരിമേയസംഖ്യ ആയിരിക്കും ഉത്തരമായി കിട്ടുന്നത്. ആറാം ക്ലാസ്സിൽ പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഗുണനത്തിലുള്ള ചോദ്യങ്ങൾ നിങ്ങൾ ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. ഇവിടെ ഗുണന നിയമങ്ങൾ പരിശോധിക്കാം:

1. സംവൃതി ഗുണധർമം

ഗുണിക്കുക: $\frac{7}{5} \times \left(\frac{-2}{3}\right)$

അതായത് $-\frac{(7 \times 2)}{(5 \times 3)} = \frac{-14}{15}$

ഇതും ഒരു പരിമേയസംഖ്യയാണ്. കുറച്ചു ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി എടുത്തു നോക്കിയാൽ, രണ്ടു പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഗുണിതം ഒരു പരിമേയസംഖ്യ തന്നെ ആയിരിക്കുമെന്നു സിദ്ധിക്കുന്നു.

പരിമേയസംഖ്യാഗണം ഗുണനത്തിന്മേൽ സംവൃതമാണ്. അതായത് a, b, c, d എന്നിവ ഏതെങ്കിലും പൂർണസംഖ്യകളും $b \neq 0$ ഉം $d \neq 0$ ഉം ആണ് എങ്കിൽ,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$ ആയിരിക്കും.

ഇവിടെ $\frac{ac}{bd}$ എന്നതു് എല്ലായ്പോഴും ഒരു പരിമേയസംഖ്യ തന്നെ ആയിരിക്കും.

2. ക്രമവിനിമേയ ഗുണധർമം

ഏതെങ്കിലും രണ്ടു പരിമേയസാംഖ്യകൾ എടുക്കുക; ഉദാഹരണമായി, 2/3 ഉം 4/5 ഉം.

അപ്പോൾ $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$

കൂടാതെ $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

അതിൽ നിന്നും $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3}$

ആണെന്നു് മനസ്സിലാക്കാം.

ഇതിൽനിന്നു് ഗുണനം ക്രമവിനിമേയമാണു് എന്നു മനസ്സിലാക്കാം. അതായതു് a, b, c, d എന്നിവ ഏതെങ്കിലും നാലു പൂർണസംഖ്യകളും $b \neq 0$ ഉം $d \neq 0$ ഉം ആണു് എങ്കിൽ,

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$ ആയിരിക്കും.

3. സാഹചര്യ ഗുണധർമം

ഗുണിക്കുക: $\left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{7}{11}$

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{7}{11} = \frac{8}{15} \times \frac{7}{11}$$

$$= \frac{8 \times 7}{15 \times 11} = \frac{56}{165}$$

അതിനുശേഷം $2/3 \times 4/5 \times 7/11$ എന്നിവയിലെ അവസാനത്തെ രണ്ടു പദങ്ങൾ തമ്മിൽ ആദ്യം ഗുണിച്ചതിനുശേഷം, ആ സംഖ്യയും ആദ്യത്തെ പദവും തമ്മിൽ ഗുണിക്കുക. അപ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഫലം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{7}{11}\right) = \frac{2}{3} \times \frac{28}{55}$$

$$= \frac{2 \times 28}{3 \times 55} = \frac{56}{165}$$

രണ്ടുഗുണിതങ്ങളും ഒരുപോലെയാണു്.

$$\therefore \left(\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\right) \times \frac{7}{11} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{5} \times \frac{7}{11}\right)$$

ഇതിൽനിന്നും ഗുണനം സാഹചര്യമാണ് എന്നു മനസ്സിലാക്കാം. അതായതു്, a, b, c, d, e, f എന്നിവ ഏതെങ്കിലും പൂർണസംഖ്യകളും $(b, d, f \neq 0)$ ഉം ആണ് എങ്കിൽ,

$$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$$ ആയിരിക്കും.

4. വിതരണ ഗുണധർമം

ലഘൂകരിക്കുക: $\frac{4}{5} \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right)$ അല്ലെങ്കിൽ $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) \times \frac{4}{5}$

ഈ ക്രിയ രണ്ടു വിധത്തിൽ ചെയ്യാവുന്നതാണ്. 2/3 ഉം 3/4 ഉം തമ്മിൽ കൂട്ടിക്കിട്ടിയ തുകയെ 4/5 കൊണ്ടു് ഗുണിക്കുന്നതാണ് ഒരു മാർഗം. അപ്പോൾ താഴെ പറയുന്ന ഉത്തരം കിട്ടുന്നു.

$$\frac{4}{5} \times \frac{17}{12} = \frac{4 \times 17}{5 \times 12} = \frac{68}{60} = \frac{17 \times 4}{15 \times 4} = \frac{17}{15}$$

4/5 ഉം 2/3 ഉം തമ്മിലും 4/5 ഉം 3/4 ഉം തമ്മിലും ഗുണിച്ചശേഷം, ആ ഗുണിതഫലങ്ങൾ കൂട്ടുക. അതായതു് മറെറാരു മാർഗം. ഇതിൽ താഴെ പറയുന്ന ഉത്തരം കിട്ടുന്നു.

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{8}{15} + \frac{4 \times 3}{5 \times 4}$$

$$= \frac{8}{15} \times \frac{3 \times 4}{5 \times 4}$$

$$= \frac{8}{15} + \frac{3}{5} = \frac{17}{15}$$

രണ്ടു ഗുണിതങ്ങളും തുല്യമാണ്.

$$\therefore \frac{4}{5} \times \left(\frac{2}{3} + \frac{3}{4}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \times \frac{3}{4}$$

ഗുണനം സങ്കലനത്തിന്മേൽ വിതരണീയം ആണ്. അതായതു് a, b, c, d, e, f എന്നിവ ഏതെങ്കിലും പൂർണസംഖ്യകളും $(b, d, f \neq 0)$ ഉം ആണെങ്കിൽ,

$$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$$ ആയിരിക്കും.

5. ഗുണനത്തിനുള്ള തത്ത്വഅംഗം

ഗുണിക്കുക: (i) $\left(\frac{7}{9}\right) \times 1$ (ii) $\left(\frac{-7}{9}\right) \times 1$

$$\text{(i)} \left(\frac{7}{9}\right) \times 1 = \left(\frac{7}{9}\right) \times \left(\frac{1}{1}\right) = \frac{7 \times 1}{9 \times 1} = \frac{7}{9}$$

$$\text{(ii)} \left(\frac{-7}{9}\right) \times 1 = \left(\frac{-7}{9}\right) \times \left(\frac{1}{1}\right)$$

$$= \frac{-7 \times 1}{9 \times 1} = \frac{-7}{9}$$

മേൽപ്പറഞ്ഞ ഓരോ അവസ്ഥയിലും എല്ലാപ്പോഴും ഗുണിതഫലവും ഗുണ്യവും തുല്യമായിരിക്കുമെന്നു കാണാം. കുറച്ചു ഉദാഹരണങ്ങൾകൂടി എടുത്തു് ഈ വസ്തുത പരിശോധിക്കുക. തന്നിരിക്കുന്ന രണ്ടു പരിമേയസംഖ്യകളിൽ ഒന്നു്, 1 എന്ന സംഖ്യയാണു് എങ്കിൽ, ഈ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണിതഫലം മററ സംഖ്യയോടു് തുല്യമായിരിക്കും എന്നു കാണാവുന്നതാണു്. a, b എന്നിവ പൂർണസംഖ്യകളും ($b \neq 0$) ഉം ആണെങ്കിൽ,

$$\frac{a}{b} \times 1 = 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \text{ ആയിരിക്കും.}$$

∴ ഗുണനത്തിൻെറ തത്ത്വഅംഗമാണു് 1.

6. പൂജ്യം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം

$7/9 \times 0 = 0$ ആണു് എന്നും $(-5/6) \times 0 = 0$ ആണു് എന്നും അറിയാമല്ലോ. പൂർണസംഖ്യകളെ പൂജ്യം കൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ പൂജ്യം കിട്ടുന്നതുപോലെതന്നെ പരിമേയസംഖ്യകളെ പൂജ്യം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ പൂജ്യം തന്നെ കിട്ടുമെന്നു് മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്നവയിൽ നിന്നും മനസ്സിലാക്കാമല്ലോ. a, b എന്നിവ ഏതെങ്കിലും പൂർണ സംഖ്യകളും ($b \neq 0$) ഉം ആണു് എങ്കിൽ,

$$\frac{a}{b} \times 0 = 0 \times \frac{a}{b} = 0 \text{ എന്നു കിട്ടുന്നു.}$$

35. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങളിൽനിന്നു് x ൻെറ മൂല്യം കാണുക: (ഇവിടെ x പൂജ്യത്തിനു തുല്യമല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും പരിമേയസംഖ്യയാണു്.)

(i) $\left(1\frac{3}{8}\right) \times \left(5\frac{3}{17}\right) = 5\frac{3}{17} \times x$

(ii) $(x) \times (-6.9) = (-6.9) \times (2.4)$

(iii) $\left(\frac{23}{29}\right) \times (x) = \left(\frac{-37}{19}\right) \times \left(\frac{23}{29}\right)$

(iv) $\left(\frac{15}{18}\right) \times \left(\frac{32}{27}\right) = (x) \times \left(\frac{15}{18}\right)$

36. താഴെ പറയുന്ന ക്രിയകൾ രണ്ടു വിധത്തിൽ ചെയ്യുക:

(i) $2\frac{1}{2} \times 1\frac{7}{8} \times 1\frac{3}{5}$ (ii) $1.5 \times 0.4 \times (-3.7)$

(iii) $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6}$ (iv) $2.8 \times 1.2 \times 5$

37. വിതരണനിയമം ഉപയോഗിച്ച് ലഘൂകരിക്കുക:

(i) $7\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + 7\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

(ii) $\frac{8}{9} \times \frac{14}{5} - \frac{8}{9} \times \frac{4}{5}$

(iii) $6.5 \times 3.7 + 6.5 \times 6.3$

(iv) $8.9 \times 4.7 - 8.9 \times 3.7$

38. c, d, p, x എന്നിവ പൂർണസംഖ്യകളും ഇവ ഓരോന്നും പൂജ്യത്തിനു തുല്യവും അല്ലെങ്കിൽ, താഴെ പറയുന്നവയുടെ വ്യുൽക്രമങ്ങൾ എഴുതുക:

$\left(\frac{-2}{3}\right)$, $\left(\frac{7}{5}\right)$, (4), $\left(\frac{c}{d}\right)$, x, $\left(\frac{3}{x}\right)$, (px), (7.9), $\frac{0}{x}$

39. താഴെ പറയുന്നവയുടെ ഗുണനഫലം എഴുതുക:
(ഇതിൽ p, q എന്നിവ പൂർണ സംഖ്യകളും $\neq 0$ ഉം ആണ്).

$\left(\frac{53}{49}\right) \times \left(\frac{-49}{53}\right)$; $\left(\frac{p}{q}\right) \times 1$,

$\left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-3}{2}\right)$; $\left(\frac{p}{q}\right) \times 0$

40. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക: (ഇതിൽ x എപ്പോഴും ഒരു പരിമേയസംഖ്യയാണ്.)

(i) $\frac{x}{3} = \frac{2}{9}$ (ii) $\frac{x}{2.5} = 4$

(iii) $\frac{x}{-5} = 0.2$ (iv) $\frac{x}{a} = \frac{1}{a}$ (a പൂർണസംഖ്യ)

(d) ഹരണം

ഏകാദികളുടെ ഹരണത്തിനുള്ള അതേ അർത്ഥം തന്നെയാണ് പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ഹരണത്തിനുമുള്ളതു്. ഹരണവും ഗുണനവും വിപരീതക്രിയകൾ ആയതിനാൽ, പരിമേയസംഖ്യകളിലും ഏകാദികളുടെ ഹരണത്തിനുള്ള അതേ മാർഗങ്ങൾതന്നെ സ്വീകരിക്കാവുന്നതാണ്.

ഭിന്നിതങ്ങളുടെ ഹരണത്തിൽ ഹാര്യത്തിനെ ഹാരകത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമം കൊണ്ടു് ഗുണിക്കുകയാണല്ലോ ചെയ്യുന്നതു്. ഈ മാർഗംതന്നെ പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ഹരണത്തിലും പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

a, b, c, d എന്നിവ പൂജ്യം അല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും പൂർണസംഖ്യകൾ ആണ് എങ്കിൽ,

$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ എന്നതു് $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$ ആണ്.

പൂർണ സംഖ്യകളുടെ ഹരണത്തിൽ ആറാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ച നിയമങ്ങൾ തന്നെ പൂജ്യത്തിനു തുല്യമല്ലാത്ത പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഹരണത്തിനും പ്രയോഗിച്ചു നോക്കാം:

(i) രണ്ടു് ധനപരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഹരണഫലം, ധനപരിമേയ സംഖ്യതന്നെ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി;

$$\left(\frac{+7}{8}\right) \div \left(\frac{+5}{4}\right) = +\left(\frac{7}{8} \times \frac{4}{5}\right)$$

(ii) ഒരു ധനപരിമേയസംഖ്യയുടേയും ഒരു ഋണപരിമേയസംഖ്യയു ടെയും ഹരണഫലം ഒരു ഋണപരിമേയസംഖ്യ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി;

$$\left(\frac{+7}{8}\right) \div \left(\frac{-5}{4}\right) = -\left(\frac{7}{8} \times \frac{4}{5}\right)$$

(iii) ഒരു ഋണപരിമേയസംഖ്യയുടെയും ഒരു ധനപരിമേയസംഖ്യയു ടെയും ഹരണഫലം ഒരു ഋണപരിമേയസംഖ്യയായിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി;

$$\left(\frac{-7}{8}\right) \div \left(\frac{+5}{4}\right) = -\left(\frac{7}{8} \times \frac{4}{5}\right)$$

(iv) രണ്ടു ഋണപരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഹരണഫലം ഒരു ധനപരിമേയ സംഖ്യയായിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി;

$$\left(\frac{-7}{8}\right) \div \left(\frac{-5}{4}\right) = +\left(\frac{7}{8} \times \frac{4}{5}\right)$$

41. ഒരു പരിമേയസംഖ്യയെ പൂജ്യമല്ലാത്ത മററാരു പരിമേയസംഖ്യകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ എല്ലാപ്പോഴും ഒരു പരിമേയസംഖ്യ തന്നെ കിട്ടുമോ? കുറെ ഉദാഹരണങ്ങൾ എടുത്തു് ഉത്തരങ്ങൾ പരിശോധിക്കുക. പൂജ്യം ഒഴിച്ചുള്ള മററെല്ലാ പരിമേയസംഖ്യകളുമായി ഹരണം ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നു പറയാമോ?

42. പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഹരണം ക്രമവിനിമേയം ആണോ? ക്രമവിനിമേയം അല്ലെന്നു് ഉദാഹരണസഹിതം തെളിയിക്കുക.

43. പരിമേയസംഖ്യാഗണത്തിന്നു് ഹരണം സാഹചര്യമാണോ? അതു് അല്ലെന്നു് ഉദാഹരണസഹിതം തെളിയിക്കുക.

44. ഹരണം സങ്കലനത്തിന്മേൽ വിതരണീയം ആണോ? അതു അല്ലെന്നു് ഉദാഹരണസഹിതം തെളിയിക്കുക.

45. ഏതെങ്കിലും ഒരു പരിമേയസംഖ്യയെ 1 കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ; ഹരണഫലം എല്ലാപ്പോഴും ഹാര്യത്തിനു തുല്യമായിരിക്കും. ഈ തത്വം ഉദാഹരണസഹിതം തെളിയിക്കുക.

46. ഹരിക്കുക:

(i) 0 ത്തിനെ 3/5 കൊണ്ടു് (ii) 0 ത്തിനെ (– 0.5) കൊണ്ടു്

(iii) 0 ത്തിനെ 17/13 കൊണ്ടു് (iv) 0 ത്തിനെ a/b കൊണ്ടു്

(ഇതിൽ a യും b യും പൂർണസംഖ്യകളും $b \neq 0$ ഉം ആണു് എങ്കിൽ)

പൂജ്യം കൊണ്ടുള്ള ഹരണം നിർവചിക്കാവുന്നതല്ല എന്നു ഓർമിക്കുക.

വ്യൂൽക്രമം

താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യാജോഡികൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുക.

$$\frac{5}{6} \text{ ഉം } \frac{6}{5} \text{ ഉം}, \quad \frac{17}{13} \text{ ഉം } \frac{13}{17} \text{ ഉം}, \quad \left(\frac{-53}{64}\right) \text{ഉം} \left(\frac{-64}{53}\right) \text{ ഉം}$$

മുകളിലുള്ള ഓരോ അവസ്ഥയിലും ഉത്തരം 1 എന്ന സംഖ്യയായിരിക്കും.

രണ്ടു പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഗുണിതം 1 എന്ന സംഖ്യയാണെങ്കിൽ, അവയിൽ ഒരു സംഖ്യയെ മററെ സംഖ്യയുടെ *വ്യൂൽക്രമം* എന്നു പറയുന്നു. a, b, c, d എന്നിവ ഏതെങ്കിലും പൂർണസംഖ്യകളും $a/b \times c/d = 1$ എന്നും ആണെങ്കിൽ c/d, a/b ഉടെ വ്യൂൽക്രമവും a/b, c/d ഉടെ വ്യൂൽക്രമവും ആണു്. അതായതു് $c/d = 1 \div a/b$ എന്നും $a/b = 1 \div c/d$ എന്നും $(a, b, c, d \neq 0)$ ലഭിക്കുന്നു.

കൂടാതെ a/b ഏതെങ്കിലും ഒരു പരിമേയസംഖ്യയും $a \neq 0$ ഉം $b \neq 0$ ഉം ആണ് എങ്കിൽ $1 \div a/b$ അഥവാ b/a, a/b ഉടെ വ്യുൽക്രമം ആണ്.

5. സങ്കലനത്തിൻെറ ക്രമവിനിമേയ നിയമത്തിൻെറ തെളിവ്

a, b, c, d എന്നീ ഏതെങ്കിലും പൂർണസംഖ്യകളിൽ b, d എന്നിവ പൂജ്യത്തിനു തുല്യമല്ലാത്തവ ആണ് എന്നും a/b ഉം c/d ഉം ഏതെങ്കിലും രണ്ടു പരിമേയസംഖ്യകൾ ആണ് എന്നും എടുക്കുക. എന്നാൽ താഴെ പറയുന്നതു് തെളിയിക്കണം.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

പരിമേയസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനത്തിൻെറ നിർവചനത്തിൽ നിന്നും:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cd}{bd}$$

എന്നും

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{cb + ad}{db}$$

എന്നും കിട്ടുന്നു.

പൂർണസംഖ്യകളുടെ ഗുണനത്തിൻെറ സംവൃതിനിയമത്തിൽ നിന്നും ad ഉം cb ഉം പൂർണസംഖ്യകൾ ആകയാൽ

$ad + cb = cb + ad$ (പൂർണസംഖ്യകളുടെ സങ്കലനത്തിൻെറ ക്രമവിനിമേയനിയമത്തിൽ നിന്നു്)

$bd = db$ (പൂർണസംഖ്യകളുടെ ഗുണനക്രമവിനിമേയ നിയമത്തിൽ നിന്നു്)

$$\therefore \frac{ad + cb}{bd} = \frac{cb + ad}{db}$$ (പരിമേയസംഖ്യകളുടെ സമതയുടെ നിർവചനത്തിൽ നിന്നു്)

അതിൽ നിന്നും $a/b + c/d = c/d + a/b$ എന്നും കിട്ടുന്നു.

മററു നിയമങ്ങളുടെ തെളിവുകൾ ഇതുപോലെ തന്നെ ആകയാൽ അവ കുട്ടികൾക്കു തന്നെ വിട്ടുകൊടുക്കുന്നു.

47. താഴെ പറയുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(a) ഒരു നോട്ടു ബുക്കിൽ 12 ഷീററ് കടലാസ് ഉണ്ട്. എന്നാൽ m നോട്ടു പുസ്തകങ്ങളിൽ ആകെ എത്ര ഷീററ് കടലാസ് ഉണ്ടായിരിക്കും?

(b) ഒരു അച്ഛന് അയാളുടെ മകനേക്കാൾ 30 വയസ്സ് കൂടുതലുണ്ട്. മകന്റെ വയസ്സ് p ആണെങ്കിൽ അച്ഛന്റെ വയസ്സ് എന്തായിരിക്കും?

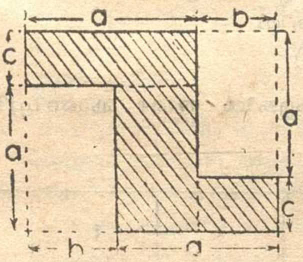
(c) ഒരു കപ്പൽ 4 മണിക്കൂർ കൊണ്ട് m കി മീ സഞ്ചരിക്കുന്നു. എന്നാൽ ആ കപ്പലിന്റെ ശരാശരിവേഗത കാണുക.

(d) ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വീതി x സെമീയും നീളം വീതിയുടെ ഒന്നരമടങ്ങും ആണ്. എന്നാൽ ആ ദീർഘചതുരത്തിന്റെ ചുററളവും വിസ്തീർണവും കാണുക.

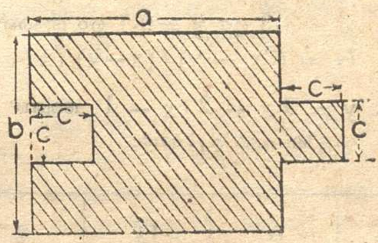
ഉത്തരം: ക്രിയകളുടെ ചിഹ്നങ്ങളോ സമതയുടെയോ അസമതയുടേയൊ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉള്ള അക്കങ്ങളും അക്ഷരങ്ങളും അടങ്ങിയ വ്യജകങ്ങളാണ് മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ പ്രശ്നത്തിന്റെയും ഉത്തരമായി കിട്ടിയതു്. ഇത്തരം വ്യംജകങ്ങളെ എന്തു പറയുന്നു?

48. (a) a, b, c, d എന്നിവ നാലുസംഖ്യകളും m അവയുടെ മാധ്യവും ആണ്. എന്നാൽ m കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം എഴുതുക.

(b) താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളിൽ (1.1 ഉം 1.2 ഉം) ഷെയ്ഡ് ചെയ്തിരിക്കുന്ന ഓരോ ഭാഗത്തിന്റെയും വിസ്തീർണം കാണുവാനുള്ള സൂത്രം നിർമിക്കുക. ആവശ്യമായ അങ്കനങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുക.



ചിത്രം 1.1



ചിത്രം 1.2

(c) ഒരു സൈക്കിൾ യാത്രക്കാരൻ ഒരു ഗ്രാമത്തിൽ നിന്നു് s കിമീ അകലെയുള്ള ഒരു പട്ടണത്തിലേക്ക് മണിക്കൂറിൽ a കിമീ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അതേസമയം തന്നെ മറെറാരു സൈക്കിൾ യാത്രക്കാരൻ ആ പട്ടണത്തിൽ നിന്നു് b കിമീ വേഗത്തിൽ ആ ഗ്രാമത്തിലേക്കും സഞ്ചരിക്കുന്നു. 5 മണിക്കൂർ വീതം അവർ സഞ്ചരിച്ചു കഴിഞ്ഞപ്പോൾ അവർ തമ്മിലുള്ള ദൂരം d കിമീ ആയിത്തീർന്നു എങ്കിൽ s, a, b എന്നിവയുടെ പദത്തിൽ ആണ് d എഴുതുക.

(d) ഒരു ബോട്ടിൻെറ നിശ്ചലജലത്തിലെ വേഗത മണിക്കൂറിൽ a കിമീ ഉം ജലപ്രവാഹത്തിൻെറ വേഗത മണിക്കൂറിൽ b കിമീ ഉം ആണ് $(a > b)$. എന്നാൽ ജലപ്രവാഹത്തിനു് അനുകൂലമായും പ്രതികൂലമായും ഉള്ള ബോട്ടിൻെറ വേഗത കാണുക. $a = b$ ആണ് എങ്കിലും $a < b$ ആണ് എങ്കിലും എന്താണ് സംഭവിക്കുന്നതു്?

49. $a : b = c$ എന്നു തന്നിട്ടുണ്ട്. ഈ സൂത്രത്തിൽ നിന്നു് b യുടെയും c യുടെയും വാക്യങ്ങളിൽ a കാണുക. b ക്കു് എന്തുമൂല്യമെങ്കിലും ഉണ്ടായിരിക്കുമോ?

50. $C = 5\,(F-32)/9$, എന്ന സൂത്രത്തിൽ, c സിലിസിയസ് (സെൻറിഗ്രേഡ്) സ്കെയിലിലുള്ള ഡിഗ്രികളുടെ എണ്ണത്തേയും F ഫാരൻഹീററ് സ്കെയിലിൽ ഉള്ള ഡിഗ്രിയുടെ എണ്ണത്തേയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. എങ്കിൽ FC യുടെ ശീലിൽ പറയുക. $C = 0°, 20°, 15°, -40°$ ആണ് എങ്കിൽ F എത്രയെന്നും കാണുക.

51. ഒരു സൂത്രമായി പറയുക:
a എന്ന സംഖ്യയെ b കൊണ്ടു് ഹരിക്കുമ്പോൾ 4 ഹരണഫലവും 2 ശിഷ്ടവും ലഭിക്കുന്നു.

52. താഴെ പറയുന്ന ബീജീയവ്യംജകങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുക.
$x = 3.3$ ഉം $y = 0.7$ ഉം ആണെങ്കിൽ
$N = (2x - y) / (x-y)\,(x + y)$

53. $y = 3x - 2 / x - 1$ ആണ് എങ്കിൽ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക:

x =	0	$1\frac{1}{2}$	2	3	1	−2
=						

54. താഴെ പറയുന്ന പ്രശ്നങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണാനുള്ള സൂത്രം നിർമിക്കുക:

(a) a എന്ന സംഖ്യയുടെ p ശതമാനം കാണുക.

(b) ഒരു സംഖ്യയുടെ p ശതമാനം b എന്ന മറെറാരു സംഖ്യയ്ക്കു് തുല്യമാണ് എങ്കിൽ അജ്ഞാതസംഖ്യ കാണുക.

55. ഒരു പുസ്തകത്തിൻെറ വിലയിൽ 20 % കിഴിവു (കുറവു) വന്നശേഷം അതിൻെറ വില n രൂപ ആയി തീർന്നു. എന്നാൽ ആ പുസ്തകത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ വില എന്തായിരുന്നു?

56. a എന്ന ഒരു സംഖ്യ b എന്ന മററൊരു സംഖ്യയേക്കാൾ 5 വലുതാണ്. എന്നാൽ a, b യേക്കാൾ എത്ര ശതമാനം വലുതാണ്?

57. രണ്ടു ജോലിക്കാർ ഒരു ജോലി m മണിക്കൂർ കൊണ്ട് ചെയ്തു തീർക്കുന്നു. അവരിൽ ഒരാൾ ഈ ജോലി ചെയ്യാൻ t മണിക്കൂർ ചെലവാക്കി. എന്നാൽ ശേഷിച്ച ജോലി ചെയ്തുതീർക്കാൻ രണ്ടാമത്തെ ആൾക്കു എന്തു സമയം വേണം?

58. വിലയിൽ 10% കിഴിവു വരികയാണെങ്കിൽ, 20 രൂപ കൊടുത്താൽ 5 മാങ്ങകൂടി കൂടുതൽ വാങ്ങാൻ സാധിക്കുമായിരുന്നു. എന്നാൽ കിഴിവിനുമുമ്പും കിഴിവിനുശേഷവും ഉള്ള ഒരു മാമ്പഴത്തിൻെറ വില എന്തായിരിക്കും?

59. 3 കൊല്ലം മുമ്പ് 5 അംഗങ്ങളുള്ള ഒരു വീട്ടിലെ ശരാശരി വയസ്സ് 17 ആയിരുന്നു. ഇപ്പോഴത്തെ ശരാശരി വയസ്സും 17 തന്നെ ആകാൻ തക്ക വണ്ണം ഒരു കുട്ടി കൂടി ജനിച്ചു. എന്നാൽ കുട്ടിയുടെ വയസ്സ് എത്ര?

60. 12 കുട്ടികളുടെ ശരാശരി തൂക്കം 40 കി ഗ്രാം ആണ്. പുതിയതായി ഒരു കുട്ടി കൂടി വന്നുചേർന്നപ്പോൾ അവരുടെ ശരാശരി തൂക്കം 0.5 കിഗ്രാം കൂടി വർധിച്ചു. എന്നാൽ പുതിയതായി വന്ന കുട്ടിയുടെ തൂക്കം എന്ത്?

61. ചൊവ്വ, ബുധൻ, വ്യാഴം, വെള്ളി എന്നീ നാലു ദിവസങ്ങളിൽ പെയ്ത മഴയുടെ ശരാശരി അളവ് 18.9 മി മീററും ബുധൻ, വ്യാഴം, വെള്ളി, ശനി എന്നീ ദിവസങ്ങളിൽ പെയ്ത മഴയുടെ ശരാശരി അളവ് 17 മി മീററും ആണ്. ശനിയാഴ്ച പെയ്ത മഴയുടെ അളവ് 20 മി മീററർ ആണെങ്കിൽ ചൊവ്വാഴ്ച പെയ്ത മഴയുടെ അളവെന്ത്?

62. ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ 16 ജോലിക്കാർ ഉണ്ട്. പുതിയതായി 100 രൂപ ശമ്പളമുള്ള ഒരാൾ കൂടി ആ ഫാക്ടറിയിൽ വന്നു ചേർന്നു. പുതിയതായി ഒരാളെ കൂടി ചേർത്തപ്പോൾ, ആദ്യമുണ്ടായിരുന്ന 16 പേരുടെ ശരാശരി ശമ്പളത്തിനേക്കാൾ, ഇപ്പോൾ ഉള്ളവരുടെ ശരാശരി ശമ്പളം 16 കുറഞ്ഞു. എന്നാൽ, ആദ്യത്തെ 16 ജോലിക്കാരുടെ ശരാശരി ശമ്പളം കാണുക.

63. ഈ കൊല്ലത്തിൽ ഒരു സ്കൂളിൽ 200 പ്രവർത്തനദിവസങ്ങൾ ഉണ്ടായിരുന്നു. അതിൽ 15 ദിവസം മാധവൻ സ്കൂളിൽ ഹാജരായില്ല. എന്നാൽ അവൻെറ ഹാജർ ശതമാനം കാണുക.

64. അരിയുടെ വില ഒരു കിഗ്രാമിനു് 80 പൈസയിൽ നിന്നു് 75 പൈസ യായി കുറഞ്ഞു. എന്നാൽ, വിലയിൽവന്ന കുറവിൻെറ ശതമാനം എന്തു്?

65. 1961 ൽ ഇന്ത്യയിലെ ജനസംഖ്യ 439,233,000 ഉം അഭ്യസ്തവിദ്യ രുടെ എണ്ണം 105,333,000 ഉം ആയിരുന്നു. എന്നാൽ അഭ്യസ്തവിദ്യരുടെ നിരക്കു് ആയിരത്തിനു് എത്രയെന്നു കാണുക.

66. ഒരു കുതിരയെ 525 രൂപയ്ക്കു് വിററു. അപ്പോൾ 5% ലാഭം കിട്ടിയെങ്കിൽ, ആ കുതിരയുടെ വാങ്ങിയവില എന്തു്?

67. നിത്യോപയോഗസാധനങ്ങളുടെ വില 10% കൂടി. ഒരാളുടെ ബജററു് വർധിക്കാതിരിക്കണമെങ്കിൽ അയാൾ എത്ര ശതമാനം കണ്ടു് സാധന ങ്ങളുടെ ഉപയോഗം കുറയ്ക്കണം?

68. കുത്തനെയുള്ള രണ്ടു് കമ്പിക്കാലുകളുടെ ഉയരം 5 മീ ഉം 6 മീ ഉം ആണു്. അവയുടെ നിഴലിൻെറ വലുപ്പം യഥാക്രമം 7.5 മീ ഉം 9 മീ ഉം ആണു്. ഈ അളവുകൾ എടുത്തു് ഒരു സമാനുപാതം ഉണ്ടാ ക്കാമോ?

69. 25 മീ ഉയരത്തിൽ വാർത്തെടുത്ത ഒരു ഗോപുരത്തിൻെറ നിഴലനു് 20 മീ നീളമുണ്ടു്. അതേസമയം തന്നെ ഒരു കുട്ടിയുടെ നിഴലിൻെറ നീളം 1.2 മീ എന്നും കിട്ടുന്നു. എന്നാൽ ആ കുട്ടിയുടെ ഉയരം എന്തായി രിക്കും?

70. 40 വാട്ടു് വീതമുള്ള 25 വൈദ്യുതവിളക്കുകൾ കത്തിക്കാൻ വേണ്ട വിദ്യുച്ഛക്തിയുടെ ചെലവ് 1 മാസത്തിൽ 8 രൂപയാണു്. എന്നാൽ ഒരു മാസം 60 വാട്ടു്വീതമുള്ള 20 വിളക്കുകൾ കത്തിക്കാൻ വേണ്ട വിദ്യു ച്ഛക്തിയുടെ ചെലവെന്തു്?

71. കുളത്തിനു് ചുററുമായി ഒരു പൂന്തോട്ടം നിർമിക്കണം. ആ നാട്ടുകാർ ദിവസത്തിൽ 6 മണിക്കൂർ വീതം പണിയെടുക്കുകയാണെങ്കിൽ, $7\frac{1}{2}$ ദിവസം കൊണ്ടു് ആ നിലം നിരപ്പാക്കാം. ആ ജോലി 5 ദിവസം ചെയ്തു തീർക്കാനാണു് അവർ തീരുമാനിച്ചതു്. എന്നാൽ, ദിവസ ത്തിൽ എത്ര മണിക്കൂർ വീതം ജോലി ചെയ്യിരിക്കും?

72. കഴിഞ്ഞ ആഴ്ച ഒരു കി ഗ്രാം അരി 1 രൂപ എന്ന നിരക്കിലാണു് വിററതു്. അതു് പിന്നീടു് 10% വർധിച്ചു. എന്നാൽ ഇപ്പോഴത്തെ വില കാണുക.

73. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ ലിററർ ഒന്നിനു് 1.25 രൂപ വീതം വിലയുള്ള 6000 ലിററർ പെയിൻറു് വാങ്ങി. 250 രൂപ പരസ്യത്തിനായും 650 രൂപ മററു ചെലവുകൾക്കായും ചെലവാക്കുന്നു. ഒരു ലിറററിനു് 1.61 രൂപ വച്ചു വിററാൽ ഉണ്ടാകുന്ന ലാഭശതമാനം കാണുക.

74. 20 രൂപയ്ക്കു് 100 വീതം 600 ആപ്പിൾ ഗോവിന്ദൻ വാങ്ങി. 5 രൂപ വണ്ടിക്കൂലിക്കും 3 രൂപ കേടുകൂടാതെ സൂക്ഷിക്കുന്നതിനും ചെലവായി. അയാൾ അവയെ ചില്ലറയായി വില്ക്കുകയും മൊത്തം തുകയിൽ 25% ലാഭം കിട്ടുകയും ചെയ്തു. ഒന്നിനു് 25 പൈസ നിരക്കിൽ 400 എണ്ണം വിററു. എന്നാൽ ശേഷിച്ചതു് എന്തു വിലയ്ക്കായിരിക്കും അയാൾ വിററതു്?

75. തെരുവുകളിൽ വിളക്കു കത്തിക്കുന്നതിനുവേണ്ടി ഗ്രാമീണരുടെ കയ്യിൽ നിന്നും വരുമാനത്തിൻെറ അടിസ്ഥാനത്തിൽ കരം (നികുതി) പിരിക്കുന്നു. ഒരാളുടെ വാർഷികവരുമാനം 2825 രൂപ ആണെങ്കിൽ, അയാൾ 226 രൂപ കരം കൊടുക്കണം. അയാളുടെ വാർഷികവരുമാനവും, കൊടുക്കുന്ന കരവും അനുപാതത്തിൽ ആണെങ്കിൽ അയാൾ ഒരു രൂപയ്ക്കു കൊടുക്കുന്ന കരത്തിൻെറ നിരക്കു് കാണുക.

76. സുരേഷ് 2500 രൂപ 8% നിരക്കിൽ കടം വാങ്ങി. 3 കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ ആ കടം തീർക്കുവാൻ അയാൾ ആകെ എന്തുകൊടുക്കണം?

77. ഒരു മുതലിൻെറ പലിശ അടക്കം മുതൽ 10 കൊല്ലം കൊണ്ടു് ആ മുതലിൻെറ 2 മടങ്ങായി തീരുന്നു. എന്നാൽ അതേ സാധാരണപലിശ നിരക്കിൽ പലിശ അടക്കം മുതൽ മുതലിൻെറ നാലു മടങ്ങാവണമെങ്കിൽ എത്ര കൊല്ലം കഴിയണം?

78. ഒരാൾക്കു് 5 കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ 1100 രൂപ കൊടുത്തുതീർക്കണം. കൊല്ലംതോറും തുല്യസംഖ്യകൾ വീതം അടച്ചുതീർക്കാമെന്നു് അയാൾ സമ്മതിക്കുന്നു. സാധാരണപലിശനിരക്കു് 5% ആണെങ്കിൽ അയാൾ ഓരോതവണയും അടക്കേണ്ട തുക കാണുക.

79. 625 രൂപയ്ക്കു് 5% സാധാരണപലിശനിരക്കിൽ എത്ര കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ പലിശ 93·75 രൂപയാകും?

80. 4% സാധാരണനിരക്കിലുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ 3 കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ ഉള്ള പലിശയടക്കം മുതൽ 336 രൂപയാണെണു് എങ്കിൽ മുതൽ എന്തായിരിക്കും?

81. 1200 രൂപ 3 കൊല്ലം കൊണ്ടു് 1308 രൂപ ആയിത്തീരുമെങ്കിൽ പലിശ നിരക്കു കാണുക.

82. രണ്ടു കുതിരകളെ ഒരേ വിലയ്ക്കു വിററു. ഒന്നിൽ 10% ലാഭവും മറേറതിൽ 10% നഷ്ടവും ഉണ്ടായി. എന്നാൽ രണ്ടിലുംകൂടി അയാൾക്കു് ഉണ്ടായ ലാഭശതമാനമോ നഷ്ടശതമാനമോ കാണുക.

83. ഒരാൾ 12000 രൂപയ്ക്കു് ഒരു കാർ വാങ്ങുകയും പണം മുൻകൂറായി കൊടുക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. മററൊരാൾ ഒരു കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ 12495 രൂപ

കൊടുക്കാമെന്ന കരാറിന്മേൽ അതേപോലുള്ള മറെറാരു കാറും വാങ്ങി ക്കുന്നു. പലിശനിരക്ക് 5% ആണെങ്കിൽ, ഇവരിൽ ആർക്കാണ് ലാഭം ഉണ്ടായതു്?

84. I = (p×n×r)/100; (p = മുതൽ, n = കാലം, r = നിരക്ക്, I = സാധാരണ പലിശ) എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് 800 രൂപയ്ക്ക് $2\frac{1}{2}$% നിരക്കിൽ എത്ര കൊല്ലം കഴിയുമ്പോഠം 70 രൂപ സാധാരണപലിശ കിട്ടും എന്നു കാണുക.

85. ഒരാഠം മൂന്നു ആളുകളിൽ ഓരോരുത്തരിൽ നിന്നുമായി 660 രൂപ വീതം കടം വാങ്ങിക്കുന്നു. 2 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞപ്പോഠം പലിശയായി ഒരാഠംക്ക് 148 രൂപയും രണ്ടാമന് 139 രൂപയും മൂന്നാമന് 109 രൂപയും കൊടുത്തു. മുഴുവൻ തുകയും അയാഠം ഒരാളിൽ നിന്നുതന്നെയാണ് വാങ്ങിച്ചതെങ്കിൽ, അയാഠം ആ മൂന്നുപേർക്കുമായി കൊടുത്ത പലിശ യുടെ നിരക്ക് എന്തു്?

86. ഒരു കച്ചവടക്കാരൻ വാങ്ങിയവിലയുടെ 40% കൂടുതൽ വിലയായി സാധനങ്ങളെ പരസ്യം ചെയ്യുകയും 20% ഡിസ്കൗണ്ട് അനുവദിച്ച് വില്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. എന്നാൽ അയാഠംക്കുണ്ടാകുന്ന ലാഭശതമാനം കാണുക.

അധ്യായം 2

ബീജീയവ്യംജകങ്ങൾ

1. അചരങ്ങൾ

ഏകാദികളെപ്പററിയും അഖണ്ഡസംഖ്യകളെപ്പററിയും പൂർണസംഖ്യകളെപ്പററിയും പരിമേയസംഖ്യകളെപ്പററിയും നിങ്ങൾ പഠിച്ചുകഴിഞ്ഞു. അവ ഓരോന്നും വ്യത്യസ്തസംഖ്യകളുടെ ഗണങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. പരിമേയസംഖ്യാഗണത്തിൽ, ഏകാദികളും അഖണ്ഡസംഖ്യകളും പൂർണസംഖ്യകളും ധനഭിന്നിതങ്ങളും ഋണഭിന്നിതങ്ങളും ഉൾപ്പെടുന്നു. ഈ ഗണത്തിലെ ഓരോ അംഗവും അഥവാ ഓരോ സംഖ്യയും മാററമില്ലാത്തതും സ്ഥിരമായതും ആയ ഒരു ആശയത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി 4 എന്ന സംഖ്യ നാലിനേയും 3/5 എന്നതു് 5 ൽ 3 എന്ന ആശയത്തെയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഈ ആശയങ്ങൾ ഗണിതീയഭാഷയിൽ കൂടി പറയുവാൻ ചില സംഖ്യാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ആ സംഖ്യാങ്കങ്ങൾ ഈ ആശയങ്ങളുടെ സൂചകങ്ങളാണ്. ചില പ്രത്യേകസംഖ്യകളുടെ സ്ഥിരമായ ആശയങ്ങളെയോ, ഏതൊരു പരിമേയസംഖ്യ കൊണ്ടു് ഒരു ഗണിതീയവസ്തുവിനെയോ സൂചിപ്പിക്കുവാനായി മേൽപ്പറഞ്ഞ സംഖ്യാങ്കങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നവെന്നു് പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം: 1, 4, 7/13, 32, 2/7

ഈ സംഖ്യകളുടെ ആശയങ്ങൾക്കു് മററു ചില സൂചനങ്ങളും ഉണ്ടു്. സൂചന π എന്നതു് എടുത്തുനോക്കുക. അതു് ഒരു സ്ഥിര(അചര)സംഖ്യയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

നിർവചനം: തന്നിട്ടുള്ള സന്ദർഭത്തിൽ ഒരു നിശ്ചിതമൂല്യത്തെ സൂചിപ്പിക്കുവാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന പ്രതീകത്തെ അചരം (സ്ഥിരം) എന്നു പറയുന്നു.

2. ചരങ്ങൾ

സാധാരണപലിശ കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം എടുത്തുനോക്കുക.

$$I = \frac{P \times r \times t}{100}$$

ഇതിൽ $P = 500,\ r = 4,\ t = 2$ ആണെങ്കിൽ

$$I = \frac{500 \times 4 \times 2}{100} = 40$$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

ഈ സൂത്രത്തിൽ P യ്ക്കും r നും I യ്ക്കും സ്വന്തമായ മൂല്യങ്ങൾ കൊടുക്കുകയാണ് എങ്കിൽ അതിനനുസരിച്ച് t യ്ക്കും പല മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. അതുപോലെ തന്നെ P, r, t എന്നിവയ്ക്ക് നിങ്ങൾക്ക് ഇഷ്ടമുള്ള മൂല്യങ്ങൾ കൊടുക്കുകയാണ് എങ്കിൽ അതനുസരിച്ചുള്ള മൂല്യങ്ങൾ I യ്ക്കും ലഭിക്കുന്നു എന്നു കാണാം. അങ്ങനെ ക്ലിപ്തമായ മൂല്യങ്ങൾ ഇല്ലാത്ത അംഗങ്ങളെ *ചരങ്ങൾ* എന്നു പറയുന്നു. *തന്നിരിക്കുന്ന സന്ദർഭത്തിൽ ഒരു ഗണത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു അംഗത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന പ്രതീകത്തെ ചരം എന്നു പറയുന്നു.*

സാധാരണയായി x, y, z, u, v. . . . . . .എന്നീ അക്ഷരങ്ങളെ കൊണ്ടാണ് ചരങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കാറ്.

1. താഴെ പറയുന്നവയിൽ നിന്ന് ചരങ്ങളെയും സ്ഥിരങ്ങളെയും വേർതിരിച്ച് എഴുതുക.

   $3/4,\ 4.5x,\ -5,\ z,\ 7/3$

2. ax ൽ, a യുടെ മൂല്യത്തിന് മാററം സംഭവിക്കുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് അതിനെ ഒരു സ്ഥിരമെന്നോ ചരമെന്നോ ആണ് വിളിക്കേണ്ടതു്?

3. $x < 5$ ഉം x ഒരു അഖണ്ഡസംഖ്യയും ആണ് എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ എന്തായിരിക്കും?

4. y എന്ന ചരം ഇരട്ടയും 0 ത്തിന്റെയും 10 ന്റെയും ഇടക്കും ആണെങ്കിൽ y യുടെ മൂല്യങ്ങൾ എഴുതുക.

5. ഒരു ചരം അഭാജ്യവും 50 നെക്കാൾ ചെറുതും 30 നെക്കാൾ വലുതും ആണ്. എന്നാൽ അതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ എഴുതുക.

3. ഘാതാങ്കങ്ങൾ

ഘാതാങ്കങ്ങൾ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന സൂത്രങ്ങൾ

ഘാതത്തിന്റെ ആശയം: ചിലപ്രശ്നങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ ചിലപ്പോൾ പല തുല്യഘടകങ്ങളുടെയും ഗുണിതഫലം കിട്ടാറുണ്ട്. താഴെ പറയുന്ന രണ്ടു പ്രശ്നങ്ങൾ പരിശോധിച്ചു നോക്കുക.

6. സമചതുരത്തിന്റെ ഒരു വശം a സെമീ ആണ് എന്നും അതിന്റെ വിസ്തീർണം s ച സെമീ ആണെന്നും വിചാരിക്കുക. അപ്പോൾ a യുടെ വാക്കുകളിൽ ആണ് s എന്നു പറയുക. $a = 1.2$ ആണെങ്കിൽ s കാണുക.

KOTTAYAM PUBLIC LIBRARY KOTTAYAM

7. ഒരു ചതുരക്കട്ടയുടെ വക്ക് a സെമീ യും അതിന്റെ വ്യാപ്തം V ഘന സെമീ യും ആണ്. എന്നാൽ V, a യുടെ വാക്കുകളിൽ ആണ് എന്നു പറയുക. $a = 4$ ആണെങ്കിൽ V കാണുക.

94763

തുല്യഘടകങ്ങളുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെ ഗുണിതത്തെ താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ ചുരുക്കിയാണ് സാധാരണയായി എഴുതാറുള്ളത്.

$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$ (3 ഘാതം 4)

$8 \times 8 \times 8 = 8^3$ (8 ഘാതം 3)

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ (ഘടകങ്ങളിൽ ഓരോന്നും 2 വീതമായ 5 ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണിതഫലം)

$(-3)^4 = (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$ (നാലു തുല്യഘടകങ്ങളുടെ ഗുണിതഫലം ഘടകങ്ങൾ ഓരോന്നും -3)

$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ (6 തുല്യഘടകങ്ങളുടെ ഗുണിതഫലം ഘടകങ്ങൾ ഓരോന്നും 3)

അവസാനത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ 3 എന്ന സംഖ്യയെ *ആധാരസംഖ്യ* എന്നും 6 നെ *ഘാതാങ്കം* എന്നും പറയുന്നു. ആധാരസംഖ്യയെ എത്ര പ്രാവശ്യം അതേ ഘടകം കൊണ്ടു തന്നെ ഗുണിക്കണം എന്നാണ് ഘാതാങ്കം സൂചിപ്പിക്കുന്നത്. 3^6 എന്നതു് 3 ന്റെ ഒരു ഘാതം ആണ്. ഈ അവസ്ഥയിൽ മൂന്നിന്റെ ആറാം ഘാതമാണ് 3^6.

ഉദാഹരണം 1

(a) $2^5 = 32$, ഇതിൽ 2 ആധാരസംഖ്യയും 5 ഘാതാങ്കവും ആണ്; 2^5 അതായതു് 32 എന്നതു് 2 ന്റെ അഞ്ചാം ഘാതമാണ്.

(b) പ്രശ്നങ്ങൾ 6 ലും 7 ലും പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഒരു സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണം കാണുവാനും ഒരു ചതുരക്കട്ടയുടെ വ്യാപ്തം കാണുവാനുമുള്ള സൂത്രങ്ങൾ താഴെപ്പറയും പ്രകാരം എഴുതാവുന്നതാണ്.

$S = a^2$ (a ഘാതം 2)

$V = a^3$ (a ഘാതം 3)

ഈ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്ന്, ഒരു സംഖ്യയുടെ രണ്ടാം ഘാതത്തിനെ ഒരു വർഗം എന്നും മൂന്നാം ഘാതത്തിനെ ഒരു ഘനം എന്നും പറയുന്നു. ഈ പ്രക്രിയകൾ വഴി സമചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണവും ചതുരക്കട്ടകളുടെ വ്യാപ്തവും ലഭിക്കുവാൻ യഥാക്രമം 'വർഗം' 'ഘനം' എന്നീ വാക്കുകൾ ഉത്ഭവിച്ചിരിക്കുന്നു. 'a യുടെ രണ്ടാം കൃതി' എന്നതിനുപകരമായി 'a യുടെ വർഗ'മെന്നും 'a യുടെ മൂന്നാംകൃതി' എന്നതിനു പകരമായി 'a യുടെ ഘനം' എന്നോ 'a ഘനം' എന്നോ പറയുന്നു.

ഒന്നാമത്തെ ഘാതത്തിനുള്ള ഘാതാങ്കം വിട്ടുകളഞ്ഞിരിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി,

$2^1 = 2, \ (-13)^1 = -13$

8. ക്രിയചെയ്യുക:

$61^3, (-3)^5, (1.44)^4, 2^7, (1.95)^3, (3.2)^5$

9. $a = 3.2, -3$ ആണെങ്കിൽ $5a$ യുടെയും a^5 ന്റെയും മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

10. 1 മുതൽ 20 വരെയുള്ള ഏകാദികളും അവയുടെ വർഗങ്ങളും ഒരു പട്ടിക വരച്ച് എഴുതുക.

11. ഒന്നു മുതൽ പത്തുവരെയുള്ള ഏകാദികളും അവയുടെ ഘനങ്ങളും ഒരു പട്ടിക വരച്ച് എഴുതുക.

12. $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ആണെങ്കിൽ 10^n എത്രയെന്നു കാണുക. 10 ന്റെ ഘാതം 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ ഘാതാങ്കങ്ങൾ ആകുമ്പോൾ ആ സംഖ്യക്കുണ്ടാകുന്ന മാററം എന്തായിരിക്കും?

13. $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ആണെങ്കിൽ $(0.1)^n$ എത്രയെന്നു കാണുക, 0. 1 ന്റെ ഘാതം 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്നീ ഘാതാങ്കങ്ങൾ ആകുമ്പോൾ ആ സംഖ്യക്കുണ്ടാകുന്ന മാററം എന്തായിരിക്കും?

14. താഴെ പറയുന്ന വ്യംജകങ്ങൾ തമ്മിൽ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

(a) 10^2 ഉം 2^{10} ഉം (b) 2^4 ഉം 4^2 ഉം

(c) 3^4 ഉം 4^3 ഉം

15. a യും b യും ഏകാദികൾ ആണ്. അപ്പോൾ $a^b = b^a$ എന്നതു് ശരിയായിരിക്കുമോ? a ക്കും b ക്കും പല മൂല്യങ്ങൾ കൊടുത്തു് ഫലം പരിശോധിക്കുക.

16. താഴെ പറയുന്നവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കുക.

(a) $1^4, 1^7, 1^{12}, 1^n$ (n ഒരു ഏകാദി)

(b) $0^5, 0^9, 0^{11}, 0^n$ (n ഒരു ഏകാദി)

ഇതിൽ നിന്നു് നിങ്ങൾ എന്തു മനസ്സിലാക്കുന്നു.

ഋണസംഖ്യയുടെ ഘാതം

$(-3)^5$ എത്രയാണ് എന്നു കാണണമെന്നു് കരുതുക. ഗുണിതഫലത്തിന്റെ ചിഹ്നം എന്തായിരിക്കുമെന്നു് ഒററനോട്ടത്തിൽ നിന്നു തന്നെ നിർണയിക്കുക. ക്രിയചെയ്യുക:

$$(-2)^2, \ (-5)^5, \ (-7)^2, \ (-1)^5$$

ഒരു ഋണസംഖ്യയുടെ ഘാതാങ്കം ഇരട്ടസംഖ്യയാണെങ്കിൽ അതിൻെറ ഗുണിതഫലം ധനസംഖ്യയും ഘാതാങ്കം ഒററസംഖ്യയാണ് എങ്കിൽ ഗുണിതഫലം ഋണസംഖ്യയും ആയിരിക്കും.

17. താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകളിൽ ധനസംഖ്യകളും ഋണസംഖ്യകളും ഏവയാണ് എന്നു പറയുക.

$(-0.2)^9$, $(3.1)^5$, $(-7)^2$, 3^7, $(3.16)^2$, $(-1)^4$, $(2.07)^3$ $(-1)^{11}$, $(0)^8$

18. താഴെ പറയുന്ന ജോഡികളിൽ ഏതാണ് വലുതു്?

(a) $(-3.1)^5, 0$ (b) $0, (-2.4)^4$
(c) $7^4, (-5)^7$ (d) $1^4, (-2)^4$
(e) $1^5, (-2)^5$

19. $a^7 = 0$ ആണ് എങ്കിൽ a ഒരു ഋണസംഖ്യ ആയിരിക്കുമോ?

20. $a^6 = 0$ ആണ് എങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് ശരിയായിരിക്കുന്നതു്?

$a<0$, $a>0$, $a = 0$

21. $x^2 > x$ എന്ന അസമിക താഴെപ്പറയുന്ന സന്ദർഭങ്ങളിൽ ശരിയായിരിക്കുമോ?

(a) $x > 0$, (b) $x < 0$, (c) $x = 0$

22. $x^2 = (-x)^2$ എന്നതു് എല്ലാപ്പോഴും ശരിയായിരിക്കുമോ?

23. $1 < x^2 < 10$ എന്ന അസമിക ശരിയാകത്തക്കവിധമുള്ള x ൻെറ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും സംഗതമായ അഖണ്ഡസംഖ്യകൾ സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

4. ഘാതമുള്ള വ്യംജകങ്ങളിലെ ക്രിയകൾ

സാധാരണയായി ക്രിയകളിൽ താഴെപ്പറയുന്ന ക്രമമാണ് ഉപയോഗിക്കാറുള്ളതു്. ആദ്യമായി ഘാതാങ്കമുള്ള രാശികളെ ലഘൂകരിക്കുന്നു. അതിനുശേഷം ഗുണിക്കേണ്ട രാശികൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുകയും ഹരിക്കേണ്ട രാശികൾ തമ്മിൽ ഹരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. അതിനുശേഷം കൂട്ടേണ്ടവ തമ്മിൽ കൂട്ടിയും കുറക്കേണ്ടവ തമ്മിൽ കുറച്ചും ലഘൂകരിക്കുന്നു. ബ്രാക്കററുകളുണ്ടെങ്കിൽ ബ്രാക്കററിനകത്തെ ക്രിയകൾക്കു ശേഷം ബ്രാക്കററുകൾ മാററാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 2.

$(-8)^3 - 2^2 \times 3$ എന്ന വ്യംജകത്തിൻെറ മൂല്യം കാണുക.

(1) $(-7)^3 = -512$ (3) $4 \times 3 = 12$
(2) $2^2 = 4$ (4) $-512 - 12 = -524$.

ഇതു് ചുരുക്കി ഇപ്രകാരം എഴുതാം.

$$(-8)^3 - 2^2 \times 3 = (-512) - 4 \times 3$$
$$= -512 - 12 = -524.$$

24. ക്രിയചെയ്യുക:

(a) $-8^3 \div (-2)^2 \times 3$ (c) $(-2-3)^3$

(b) $(-2)^3 + (-3)^3$ (d) $-(2+3)^3$

25. താഴെ പറയുന്ന വ്യംജകങ്ങളിൽ ഓരോന്നിന്റെയും മൂല്യം കാണുന്നതിന്റെ ക്രമം എന്തായിരിക്കും? (അക്ഷരങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ തന്നിട്ടുണ്ടു് എന്നു കരുതുക).

(a) $(2x)^3 - 1$ (b) $2x^3 - 1$ (c) $(2x-1)^3$

(d) $a^2 - b^2$ (e) $(a-b)^2$ (f) $a^2 - 2b^2$

26. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന മാതൃക നോക്കി, താഴെപ്പറയുന്ന വാക്യങ്ങളെ ഒരു സംഖ്യയുടെ ഗുണിതമായും പത്തിൻെറ ഘാതമായും വരത്തക്കവിധം എഴുതുക.

$$5000 = 5 \times 1000 = 5 \times 10^3$$
$$12000000 = 12 \times 1000000 = 12 \times 10^6$$

(a) ഭൂമിയിൽ നിന്നു് സൂര്യനിലേക്കുള്ള ദൂരം 150000000 കിമീ ആണു്.

(b) ഇന്ത്യയിലെ ജനസംഖ്യ ഏകദേശം 430000000 ആണു്.

(c) ഭൂമിയുടെ ആകെയുള്ള ഉപരിതലത്തിന്റെ വിസ്തീർണം 510000000 കിമീ^{2} ഉം കരയുടെ വിസ്തീർണം 149000000 കിമീ^{2} ഉം കടലിൻെറ വിസ്തീർണം 361000000 കിമീ ഉം ആകുന്നു.

(d) ഒരു കംപ്യൂട്ടർ ഓരോ മണിക്കൂറിലും 7200000 സംക്രിയകൾ വീതം ചെയ്യുന്നു.

(e) 1 കിമീ^{3} വായുവിൽ 27000000000000000000 തന്മാത്രകൾ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു.

27. താഴെ പറയുന്നവയുടെ മൂല്യം കാണുക:

$$36 \times 10^5;\quad 4\cdot5 \times 10^8;\quad 14 < 10^9$$

28. $y = 2ab^2$. ഇതിൽ $a = -1.2,\ b = -1.3$ ആണു്, എങ്കിൽ y കാണുക.

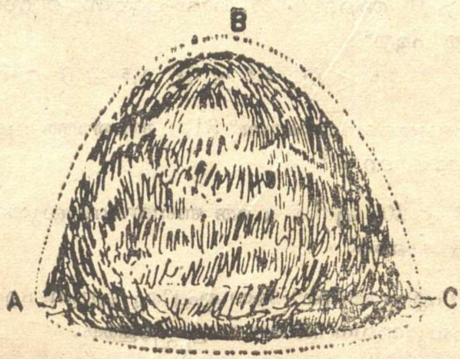
29. ചിത്രം 2.1 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന വജ്ജ്രോൽ തുറുവിന്റെ വ്യാപ്തം ഏകദേശമായി നിർണയിക്കുന്നതിനു് താഴെ പറയുന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$$V = nl^2/72$$

ഇതിൽ V വയ്ക്കോൽ തുറുവിൻെറ വ്യാപ്തം ഘനമീററിലും l അതിന്റെ പാദത്തിൻെറ ചുററളവും (മീററിൽ) n എന്നതു A B C യുടെ നീളവും (മീററിൽ) ആണ്. വയ്ക്കോൽ തുറുവിൻെറ വ്യാപ്തം കാണുക. l ഉം n ഉം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

(a) $l = 12$ മീ, $n = 18$ മീ.

(b) $l = 132$ ഡെമീ, $n = 154$ ഡെമീ.



ചിത്രം 2.1

30. ഭൂമിയിലേക്കു വീഴുന്ന ഒരു കല്ല് t സെക്കണ്ട് കൊണ്ട് s മീററർ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നു. $s = 4.9t^2$ ആണ് എന്നുതന്നിട്ടുണ്ട്. $t = 3, 8, 5, 20$ ആണെങ്കിൽ s കാണുക.

31. ഒരു സമകോണീയ ഷട്ഫലകത്തിൻെറ നീളം a സെമീ ഉം, വീതി നീളത്തിനു തുല്യവും, ഉയരം b സെമീ ഉം ആണ്. അതിൻെറ ഉപരിതലവിസ്തീർണം s ച സെ മീ ആണ്. എന്നാൽ s, a യുടേയും b യുടേയും വാക്കുകളിൽ ആണ് എന്ന് സ്ഥാപിക്കുക.

$a = 12$, $b = 15$ ആണ് എങ്കിൽ s കാണുക.

32. a^n എന്ന വ്യംജകത്തിൻെറ മൂല്യം കാണുക. a, n ഇവ തന്നിരിക്കുന്നു.
(a) $a = -0.036$, $n = 2$.
(b) $a = 84.5$, $n = 1$.
(c) $a = -1$, $n = 8$.
(d) $a = 0$, $n = 9$.

33. വെളിച്ചത്തിൻെറ വേഗത ഒരു സെക്കണ്ടിൽ 3×10^5 കിമീ ആണ്, ഉത്തരം കണക്കാക്കുക,

34. താഴെ പറയുന്ന വ്യംജകങ്ങൾ തമ്മിൽ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

(a) 3^3 ഉം 3^5 ഉം (b) $(-3)^3$ ഉം $(-3)^5$ ഉം

(c) 0.2^2 ഉം 0.2^5 ഉം (d) $(-0.2)^3$ ഉം $(-0.2)^5$ ഉം

(e) $(-3)^3$ ഉം $(-3)^2$ ഉം (f) 3^5 ഉം 5^3 ഉം

35. (a) $a > 0$ ആണെങ്കിൽ $2a$, a^2 ഇവയിൽ ഏതാണ് കൂടുതൽ വലുത് ?

(b) $b > 0$ ആണെങ്കിൽ താഴെപ്പറയുന്ന അസമികകളിൽ ശരിയായതു് ഏതു് ?

$$b^5 < 0; \quad b^5 > 0; \quad b^5 = 0$$

36. ഏതു സംഖ്യയുടെ വർഗമാണ് 81. അത്തരത്തിലുള്ള എത്ര സംഖ്യകൾ നിങ്ങൾക്കു കാണാം ?

37. $10 < x^2 < 20$ എന്നും x ഒരു അഖണ്ഡസംഖ്യയാണ് എന്നും തന്നിട്ടുണ്ടു്. x കാണുക.

38. $x^2 < 30$ എന്ന അസമികയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന എല്ലാ അഖണ്ഡസംഖ്യകളും സംഖ്യാരേഖയിൽ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

39. $m = -0.6$, $n = -0.4$ ആണ്. എങ്കിൽ $[(m^2 + n^2) + 2mn] / 5$ എന്ന വ്യംജകത്തിൻെറ മൂല്യം കാണുക.

40. $y = [(x^2 + 6x + 9) - (x^2 - 6x + 9)]/12$ ആണ്. എങ്കിൽ താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക.

x	−2	−1.2	−1	0	1.2
y					

41. $s = [(a^2 + 2a) - (a^2 - 2a)] / a$ എന്ന സൂത്രത്തിൽ a ക്കു യോജിക്കാത്ത മൂല്യമെന്തു് ? താഴെ വരച്ചിരിക്കുന്ന പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക.

a	−0.5	−3	1	100	1000
s					

42. ഒരു ചതുരക്കട്ടയുടെ വക്ക് a സെമീ. അതിന്റെ ഉപരിതലവിസ്തീർണം s ച സെമീ യും ആണ്. എന്നാൽ s, a യുടെ വാക്കുകളിൽ എഴുതുക. $a = 1.3$ ആണ് എങ്കിൽ s കാണുക.

43. ഒരു സമകോണീയ ഷട്ഫലകത്തിൻെറ പാദം a മീററർ വീതം വശങ്ങളോടു കൂടിയ ഒരു സമചതുരവും അതിൻെറ ഉയരം h മീററും വ്യാപ്തം V ഘനമീററും ആണ്. എന്നാൽ V, a യുടെയും h ൻെറയും പാദത്തിൽ ആണ് എന്നു സ്ഥാപിക്കുക. സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് h കാണുക.

5. ബീജീയവ്യംജകം

ഒരു ബീജീയവ്യംജകത്തിൽ പദങ്ങൾ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു എന്ന് നാം ആറാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു (ഈ പദങ്ങൾ സങ്കലനത്തിൻെറയും വ്യവകലനത്തിൻെറയും പ്രതീകങ്ങൾ കൊണ്ടു് പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ടതാണ് ഇരിക്കുന്നത്). ഒരു പദത്തിൽ ഗുണനം, ഹരണം എന്നീ ക്രിയകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ചരങ്ങളും സ്ഥിരങ്ങളും അടങ്ങിയിട്ടുണ്ട് എന്നും പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഒററപദത്തെയും വ്യംജകം എന്നു പറയുന്നു.

വ്യംജകങ്ങൾക്കുള്ള ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ താഴെ പറയുന്നു.

$$3 + 4,\ 2.3 - 1.4 + \frac{3}{4},\ 3x + 1,\ \frac{x}{y},\ x.y$$ തുടങ്ങിയവ.

ഒരു വ്യംജകത്തിൻെറ സംഖ്യാങ്കമൂല്യം, ചരത്തിൻെറ മൂല്യത്തെയോ ചരങ്ങളിൽ ഉപയോഗിച്ച മൂല്യങ്ങളെയോ ആശ്രയിച്ചാണ് ഇരിക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി $x = 0$ ആണെങ്കിൽ $3x + 1$ എന്ന വ്യംജകത്തിൻെറ മൂല്യം 1 ആയിരിക്കും. ഗണം $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ എന്നിവയിൽ നിന്ന് ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂല്യം x ന കൊടുക്കുകയാണ് എങ്കിൽ അതനുസരിച്ച് വ്യംജകത്തിൻെറ മൂല്യങ്ങൾ യഥാക്രമം 7, 10, 13, 16, 19, 22 എന്നിവ ആയിത്തീരും. ഈ അവസ്ഥയിൽ ഈ വ്യംജകത്തിന് മേൽപ്പറഞ്ഞ മൂല്യങ്ങൾ അല്ലാതെ വേറെ മൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കുകയില്ല.

[കുറിപ്പ്: ഈ പുസ്തകത്തിൽ മററു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടില്ലെങ്കിൽ, ചരത്തിന് പരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിൽ നിന്നു മാത്രമെ മൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കുകയുള്ളു]

44. താഴെ പറയുന്ന വ്യംജകത്തിൽ എത്ര പദങ്ങൾ ഉണ്ടു് എന്നു പറയുക.

$$3.5x + 1\tfrac{1}{2} - \frac{3x^2y}{2} \times ab$$

45. 3 പദങ്ങൾ ഉള്ളവയും ചുരുങ്ങിയതു് രണ്ടു ചരങ്ങൾ ഉള്ളവയും ആയ ഒരു വ്യംജകം എഴുതുക.

46. ഗുണനത്തിൻെറയും ഹരണത്തിൻെറയും ക്രിയകൾ അടങ്ങിയതും ചുരുങ്ങിയതു് 4 ഏകാദിപദങ്ങളും ഉള്ള വ്യംജകങ്ങൾ എഴുതുക.

6. ബഹുപദങ്ങൾ

താഴെ പറയുന്ന ഒരു ചരമുള്ള ബീജീയവ്യംജകങ്ങൾ എടുത്തു നോക്കാം.

(i) $2a^2 + 3a$ (ii) $3x - 2$

(iii) $4x^3 + 2x^2 - x + \frac{1}{3}$ (iv) $\frac{2x + 3}{x^2 - 5}$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ വ്യംജകങ്ങൾ (i), (ii), (iii) എന്നിവയെ ബഹുപദങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. എന്നാൽ വ്യംജകം (iv) ഒരു ബഹുപദം അല്ല.

അതിൽ നിന്നും ഒരു ബഹുപദത്തെ ഇപ്രകാരം പറയാം.

ഒരേയൊരു ചരം മാത്രമുള്ള ഒരു ബഹുപദം എന്നതു്, അതിലുള്ള ഓരോ പദവും ഗുണാങ്കം എന്നു പറയുന്ന ഒരു സംഖ്യയുടെ ഗുണിതമായും ആ ഒരേയൊരു ചരത്തിൻെറ ഘാതാങ്കങ്ങൾ അഖണ്ഡസംഖ്യകളായും വരത്തക്കവിധമുള്ള പദങ്ങളുടെ തുകയാണ്. ഉദാഹരണമായി,

$$-2x^3 + \frac{2}{3}x + \frac{7}{8}, \quad 0.5x + 1 - 3.2x^2$$

ചരങ്ങൾ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ഉണ്ടെങ്കിൽ, ആ ബഹുപദം ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ചരങ്ങളുള്ള ഒരു ബഹുപദം ആയിരിക്കും. ഉദാഹരണം,

$a + x, \; 3x^2y + xy^2 + \frac{2}{3}xy + 4y^2.$

(i). *ബഹുപദത്തിലെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ പൂർണസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ, ആ ബഹുപദം പൂർണസംഖ്യകൾക്കു് മേലുള്ള ഒരു ബഹുപദം ആയിരിക്കും.* ഉദാഹരണം,

$4x^3 - 3x + 2.$

(ii) *ബഹുപദത്തിലെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ പരിമേയസംഖ്യകൾ ആണെങ്കിൽ, ആ ബഹുപദം പരിമേയസംഖ്യകൾക്കു മേലുള്ള ഒരു ബഹുപദം ആയിരിക്കും.* ഉദാഹരണം,

$$\frac{3}{4}x - \frac{2}{7}x^2 + 1.5\,x^3 - 1$$

[കുറിപ്പ്: ഈ പുസ്തകത്തിൽ പരിമേയസംഖ്യകൾക്കു മേലുള്ള ബഹുപദങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നില്ല. കൂടാതെ ചരങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ പരിമേയ സംഖ്യകൾ ആയിരിക്കും].

7. ബഹുപദത്തിൻെറ ഡിഗ്രി

(i) ഒരു ചരം മാത്രമുള്ള ബഹുപദങ്ങളിൽ, പദത്തിൻെറ ഏററവും വലിയ ഘാതാങ്കമാണ്, ആ ബഹുപദത്തിലെ ഡിഗ്രി. ഉദാഹരണമായി,

$2x - 3 + 4x^5 + 7x^2$ എന്ന ബഹുപദത്തിൻെറ ഡിഗ്രി 5 ആണ്.

(ii) ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ചരങ്ങളുള്ള ബഹുപദങ്ങളിൽ, ചരങ്ങളുടെ ഘാതങ്ങളുടെ തുക ആ പദത്തിൻെറ ഡിഗ്രിയെയും ഏററവും വലിയ ഡിഗ്രിയുള്ള പദം, ആബഹുപദത്തിലെ ഡിഗ്രിയെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി,

$2x^4y^3 - 3x^5y^6 + 4x^8 - 7x^3y^5 - 5y^{10}$

ഇതിൽ 5 പദങ്ങൾ ഉണ്ട്. ആദ്യത്തെ പദത്തിൽ $4 + 3 = 7$ ഉം രണ്ടാമത്തേ തിൽ $5 + 6 = 11$ ഉം മൂന്നാമത്തേതിൽ $8 + 0 = 8$ ഉം നാലാമത്തേതിൽ $3 + 5 = 8$ ഉം, അഞ്ചാമത്തേതിൽ $0 + 10 = 10$ ഉം ഡിഗ്രികൾ വീതമാണ് ഉള്ളതു്. അതിനാൽ രണ്ടാമത്തെ പദത്തിലെ ഡിഗ്രിയാണ് ഏററവും വലുതു്; അതായതു് 11. ആയതിനാൽ ഈ ബഹുപദത്തിൻെറ ഡിഗ്രി 11 ആണ്.

8. പരിമേയ വ്യംജകങ്ങൾ

ഒരു ബഹുപദത്തെ മറെറാരു ബഹുപദം കൊണ്ടു് ഹരിക്കണമെന്നിരിക്കട്ടെ. അതായതു് $x^2 + 3x + 1$ നെ $x^2 - 6x + 1$ കൊണ്ടു് ഹരിക്കണമെന്നു വിചാരിക്കുക ഹരണ ഫലം $(x^2 + 3x + 1)/(x^2 - 6x + 1)$ ആയിരിക്കുമല്ലോ. ഇതു് ഒരു ബഹുപദം അല്ല. പൊതുവിൽ പറഞ്ഞാൽ A, B എന്നിവ രണ്ടു ബഹുപദങ്ങൾ ആണ്. എങ്കിൽ $A \div B$; അതായതു് A/B എല്ലാപ്പോഴും ഒരു ബഹുപദം ആയിരിക്കുകയില്ല.

എന്നാൽ പൂർണസംഖ്യകളാണെങ്കിൽ ഹരണം എല്ലാപ്പോഴും സാധ്യമല്ല എന്നതുകൊണ്ടു് ആ സംഖ്യകളെ പരിമേയസംഖ്യാവ്യൂഹത്തിലേയ്ക്കു് വ്യാപിപ്പിക്കുന്നു. അതുപോലെ ബഹുപദങ്ങളെ *പരിമേയവ്യംജകങ്ങൾ* അഥവാ *ഭിന്നിത ബീജീയവ്യംജകങ്ങളിലേയ്ക്കു്* വ്യാപിപ്പിച്ച് ഹരണക്രിയ സാധ്യമാക്കുന്നു.

ക്രിയകൾ സങ്കലനം, വ്യവകലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നിവയാകുമ്പോൾ *പരിമേയസംഖ്യകളും ചരങ്ങളും ഉൾപ്പെടുന്ന* വ്യംജകത്തെ പരിമേയ സംഖ്യകളിന്മേൽ ഉള്ള പരിമേയവ്യംജകം എന്നു പറയുന്നു.

ഛേദം പൂജ്യമല്ലെങ്കിൽ, $3/t$, $(3x+1)/5$, $(2a-3b)$, $(x^2+1)/t+1$ എന്നിവ പരിമേയവ്യംജകങ്ങളാണ്.

ഈ അധ്യായത്തിൽ ബഹുപദങ്ങളെപ്പററിയും അവയുടെ ക്രിയകളെപ്പററിയും അധ്യായം 5 ൽ ഹരണമടക്കമുള്ള പരിമേയവ്യംജകങ്ങളിലെ ക്രിയകളെ പററിയും പഠിക്കും.

47. താഴെ പറയുന്നവ ഉപയോഗിച്ച് പലവിധത്തിലുള്ള പരിമേയബീജീയ വ്യംജകങ്ങൾ എഴുതുക:

(a) സങ്കലനം, വ്യവകലനം എന്നീ ക്രിയകൾ

(b) ഗുണനത്തിൻെറ ക്രിയകൾ

(c) ഗുണനത്തിന്റെയും ഹരണത്തിന്റെയും ക്രിയകൾ

(d) ഘാതാങ്കങ്ങളും ഹരണക്രിയകളും

(e) സങ്കലനത്തിന്റെയും വ്യവകലനത്തിന്റെയും ഗുണനത്തിന്റേയും ക്രിയകൾ

(f) എല്ലാ ക്രിയകളും

48. പലതരം പരിമേയബീജീയവ്യംജകങ്ങൾ എഴുതുക:

49. താഴെ പറയുന്നവയിൽ ബഹുപദങ്ങളെയും പരിമേയ വ്യംജകങ്ങളെയും വേർതിരിക്കുക:

$$2a - 3, \frac{-2b}{3}, \frac{3x^2 - 4x + 5}{3}, \frac{a + c}{4b}, \frac{-a}{2x - 1},$$

$$-4 + \frac{3b}{5}, 3 - \frac{3}{5b}, 2x - 3x + 5, -\frac{(a^3 - b)^2 + 3}{7a},$$

$$x^9 + y^2, \frac{a^2 - ab}{15}$$

താഴെപ്പറയുന്നവ പരിശോധിക്കുക.

$$9a, \tfrac{2}{3}b, 0{\cdot}5a^2b, -0{\cdot}7x^2y^2, 3, d, ad^3, -a, -0{\cdot}5.$$

ഒരേ ഒരു പദം മാത്രമുള്ള ഇത്തരം വ്യംജകങ്ങളെ *ഏകപദങ്ങൾ* എന്നു പറയുന്നു.

ഒരേ അക്ഷരം മാത്രമുള്ളതോ ഒരേയൊരു സംഖ്യമാത്രം ഉള്ളതോ ആയ ഒരു ബീജീയവ്യംജകത്തെയും ഒരു ഏകപദമായി കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്. സംഖ്യകൾ മാത്രമുള്ള വ്യംജകങ്ങളും ഏകപദങ്ങൾ ആണ്.

അതായത് 3, d, − a, − 0·5 എന്നീ വ്യംജകങ്ങൾ ഏകപദങ്ങളാണ്.

50. നിങ്ങളുടെ കണക്കു ബുക്കിൽ ഏക പദങ്ങൾക്ക് ധാരാളം ഉദാഹരണങ്ങൾ എഴുതുക.

51. താഴെപ്പറയുന്ന ഓരോ ഏകപദങ്ങളുടെയും സംഖ്യാത്മകമായ ഗുണാങ്കങ്ങൾ ഏവ?

$$7y,\ 0.5x,\ \frac{2}{3}b,\ m,\ -b,\ \frac{a}{3},\ \frac{3y}{5},\ \frac{-x}{2}$$

ഏകപദങ്ങൾ എഴുതുമ്പോൾ, അദ്യം സംഖ്യാത്മകമായ ഗുണാംകങ്ങൾ എഴുതിയതിനു ശേഷം ആണ് അക്ഷരഗുണാങ്കങ്ങൾ എഴുതുന്നതു്. അക്ഷരങ്ങൾ സാധാരണയായി അക്ഷരമാലാക്രമം അനുസരിച്ചാണ് എഴുതുന്നതു്. 'x' ന്റെ സംഖ്യാത്മക ഗുണാങ്കം 1 ആണ്. സംഖ്യാത്മകമായ ഗുണാങ്കം ഒന്നു് ആണെങ്കിൽ, അതു് സാധാരണയായി എഴുതാറില്ല.

52. താഴെപ്പറയുന്ന ഏകപദങ്ങൾ ക്രമമായി എഴുതുക:

$3ma^2x$, $a^2(-5)x^2$, $-b^3ac$, $-5bc^3$, $2ma$, $3m^2ax^3$, $4(-x^2)$, $5ac(\frac{1}{2}a^2b)$.

ഇവ ഓരോന്നിലേയും സംഖ്യാത്മകഗുണാംകങ്ങൾ എഴുതുക.

53. $a = 2$, $x = -1$ ആണ് എങ്കിൽ താഴെ പറയുന്ന ഏകപദങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക:

(a) $-a^2x$ (c) $-a(-4)a^2x^3x^2$

(b) $-a \times 5a^3x^4$ (d) $(ax)^2 \times 3(-1)a$

54. താഴെപ്പറയുന്ന വ്യംജകങ്ങളിൽ ഏകപദങ്ങളായവ ഏവ?

(a) $10a^2bc^2$ (b) $a^2/10$

(c) $(a+b)^2$ (d) $(a+b)/5$

(e) $7ac^3/11$ (f) $0.6 + a^2$

55. താഴെ പറയുന്ന ഏക പദങ്ങളിൽവച്ചു് ഏററവും പ്രധാനപ്പെട്ട അക്ഷരമായി x നെ കണക്കാക്കി, x ൻെറ ഗുണാങ്കത്തേയോ ഓരോ പ്രകരണത്തിലും ഉള്ള x ൻെറ ഏതെങ്കിലും ഘാതത്തേയോ ചൂണ്ടിക്കാണിക്കുക.

(a) $1.2x^2$ (b) $-0.65x^3$ (c) $6ax$ (d) $11b^2x$

(e) x (f) $-x$ (g) $-0.3\,ax^2$

56. a യുടെ ഘാതങ്ങൾ അടിസ്ഥാനമാക്കി താഴെപ്പറയുന്ന ഏകപദങ്ങളെ അവരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതുക.

(a) $-8abx$, $0.2xy$, $15a^2x^2$, $-5x^3$

57. താഴെപ്പറയുന്ന ഏകപദങ്ങളുടെ തുക എഴുതുക:

(a) $2a$ യും $5x$ ഉം

(b) $0.5b$ യും $-y$ യും

(c) $-3ac$ യും $-5xy$ യും

58. താഴെപ്പറയുന്ന ഏകപദങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം എഴുതുക:

(a) $8y$ ഉം $9ab$ ഉം (b) $3b$ ഉം -0.2 ഉം

(c) $-7ax$ ഉം ay യും.

59. $3x^2y$ യോട് $3b$, c എന്നിവയുടെ വ്യത്യാസം കൂട്ടുക.

60. $2x$, $-7m$ എന്നിവയുടെ തുകയിൽ നിന്ന് $5xy$ കുറയ്ക്കുക.

ധന(+) ചിഹ്നങ്ങളും ഋണ(−) ചിഹ്നങ്ങളും ഉൾപ്പെട്ട പല ഏകപദങ്ങൾ ഒന്നിച്ചു ചേരുമ്പോൾ ഒരു *ബഹുപദം* ഉണ്ടാകുന്നു.

61. ബഹുപദങ്ങൾക്ക് ധാരാളം ഉദാഹരണങ്ങൾ എഴുതുക.

62. താഴെ വ്യംജകങ്ങളിൽ ഉള്ള ബഹുപദങ്ങൾ ഏവ ?

(1) $(a^2 - 2a + 3) / 16$ (2) $[0.2 + (b/3)] / 3a$

(3) $0.31y$ (4) $3a^2x$

(5) $[a(x + y)] [(2/3)x]$ (6) $b(x + a)^2/c$

63. താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങളെ ഏകപദങ്ങളുടെ ബീജീയ തുകയായി എഴുതുക:

(a) $-6x^5 + 3x^4 - 12x^2 + 5$

(b) $2.5x^4 - 18x^3y - 16x^2y^2 - 3xy^3$

64. താഴെപ്പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങളുടെ സംഖ്യാത്മകമൂല്യം കാണുക.

(a) $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{2}{3}$ ആണെങ്കിൽ $a^2 + 3ab + b^2$

(b) $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$ ആണ് എങ്കിൽ $2a^4 - ab + 2b^2$

65. താഴെപ്പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങളിൽ ഓരോ അവസ്ഥയിലും പറയുന്ന അക്ഷരങ്ങളുടെ ഘാതം കുറഞ്ഞു വരത്തക്കവിധം ക്രമീകരിച്ച് എഴുതുക.

(a) $3ax^2 - 5a^3x + 7ax^4 - 8a^2x^3 - x^5$ (ഇതിൽ x ൻെറ ഘാതത്തിന് അനുസരണമായി).

(b) $0.2\,a^2x^2y - 0.6a^3 - \frac{3}{4}ax^2 + \frac{5}{6}xy^2$. ($a$ ഉടെ ഘാതത്തിന് അനുസരണമായി).

66. b യുടെ ഘാതം വർധിച്ചു കൊണ്ടിരിക്കത്തക്കവണ്ണം താഴെപ്പറയുന്ന ബഹുപദം അവരോഹണക്രമത്തിൽ എഴുതുക

$(5/8)b^2xy^2 - (5/9)\,b^3x^2x^3 - 8y + 0.1\,bx^3$

67. ദ്വിപദങ്ങൾക്കും ത്രിപദങ്ങൾക്കും കുറെ ഉദാഹരണങ്ങൾ എഴുതുക.

68. ഒരു സമചതുരത്തിൻെറ ഒരു വശം a യാണ്. എന്നാൽ അതിൻെറ ചുററളവ് കാണുക.

69. ഒരു സമദ്വിഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചുററളവ് p ആണ്. എന്നാൽ അതിന്റെ ഓരോ വശവും കാണുക.

70. ഒരു കാറിന് ഒരു കിമീ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുവാൻ a ലിററർ പെട്രോൾ ആവശ്യമുണ്ട്. ആദ്യത്തെ ദിവസം ആ കാർ 400 കിമീ ദൂരവും രണ്ടാമത്തെ ദിവസം 500 കി മീ ദൂരവും മൂന്നാമത്തെ ദിവസം 600 കിമീ ദൂരവും സഞ്ചരിച്ചു എങ്കിൽ മൂന്നു ദിവസങ്ങളിലും കൂടി ആകെ ചെലവായ പെട്രോൾ എത്ര ലിററർ ? (ഈ ക്രിയ രണ്ടുവിധത്തിൽ ചെയ്യുക)

9. ബഹുപദങ്ങളിലെ സമരൂപപദങ്ങൾ ലഘൂകരിക്കൽ

ഒരേ ഏകപദങ്ങളേയോ, ഗുണാങ്കങ്ങൾ മാത്രം വ്യത്യാസപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഏകപദങ്ങളേയോ *സമരൂപങ്ങൾ* എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $3a^3mc$ യും $3mca^3$ ഉം സമരൂപ ഏകപദങ്ങൾ ആണ്. അതുപോലെ $4a^3b$ യും $6a^3b$ യും $2xy^2$ ഉം $\frac{2}{3}xy^2$ ഉം സമരൂപങ്ങൾ ആണ്.

71. അനേകം സമരൂപ ഏകപദങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണം പറയുക.

72. $0.7ax$ എന്ന ഏകപദത്തിന് സമരൂപമായ അനേകം ഏകപദങ്ങൾ എഴുതുക.

73. bx^2y, $-bx^2y$ എന്നീ ഏകപദങ്ങൾ സമരൂപങ്ങൾ ആണോ ?

74. ax^2, $7abx^2$, $-\frac{2}{3}ab$, $0.3abx^2$, $-az^2$, ab എന്നീ ഏകപദങ്ങളുടെ ഇടയിലുള്ള സമരൂപങ്ങളായ ഏകപദങ്ങൾ എഴുതുക.

10. സമരൂപഏകപദങ്ങളുടെ ബീജീയതുക

ഉദാഹരണമായി,

$$7m + 3m - 2m = (7 + 3 - 2)\,m$$
$$= 8m.$$

സമരൂപഏകപദങ്ങളുടെ ബീജീയതുക. സമരൂപമായ ഒരു പദമായി ലഘൂകരിച്ചാൽ കിട്ടുന്ന തുകയെ സമരൂപപദങ്ങളുടെ ലഘൂകരണം എന്നോ സമരൂപപദങ്ങളുടെ ന്യൂനകരണം എന്നോ പറയുന്നു.

75. താഴെപ്പറയുന്നവയെ ഒരേയൊരു പദമായി ലഘൂകരിക്കുക: (മനക്കണക്കായി)

(1) $-8m + -3m$ (2) $-2q + 2q$

76. ഒരേയൊരു പദം മാത്രമായി ലഘൂകരിക്കുക: (മനക്കണക്കായി)

(1) $-4m^3 + 10m^3 - 8m^3$ (2) $-25k^4 - 32k^4 + 48k^4$

77. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{2}x^2$

(2) $1.4n^6 - 0.9n^6 + 2n^6$

78. $2y^2 - 3y + 2y - y^2$

79. $5ab - 4a^2b^2 - 8ab^2 + 3ab - ab^3 - 4a^2b^2 + 2a^2b^2 + ab^2$.

80. (1) $0.4a^2x - \frac{ax^2}{5} - \frac{1}{3}a^2x + 0.3ax^2$

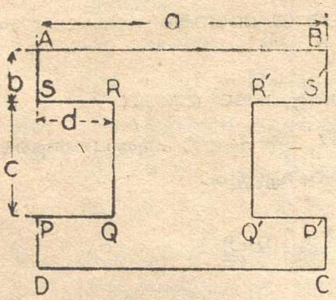
(2) $3(x - y) - 8(x - y) + 4(x - y)$

81. താഴെപ്പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

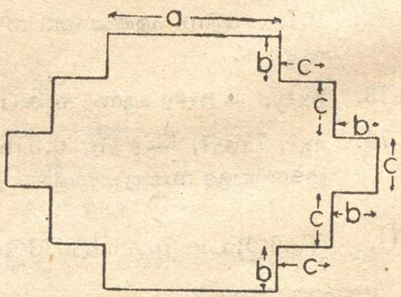
(1) $-3 - 5x + 20 + 2x = 5$

(2) $\frac{2}{9}b - 5 - \frac{7}{18}b + 18 = 10$

82. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ചിത്രങ്ങളുടെ ചുററളവു് കാണാനുള്ള സൂത്രം നിർമിക്കുക.



ചിത്രം 2.2



ചിത്രം 2.3

11. ഏകപദങ്ങളുടെയും ബഹുപദങ്ങളുടെയും സങ്കലനം

(a) *ഏകപദങ്ങളുടെ സങ്കലനം*

$$5a^2,\ -8xy,\ -2a^2,\ +10xy$$

ഇവയുടെ ഫലം ഒരു ബീജീയതുകയായി കിട്ടുന്നു.

$$5a^2 + (-8xy) + (-2a^2) + (+10xy)$$

ഈ തുക മററൊരുരീതിയിലും എഴുതിനോക്കാം.

$$5a^2 - 2a^2 - 8xy + 10xy$$

സമരൂപപദങ്ങൾ തമ്മിൽ വെവ്വേറെ കൂട്ടിയാൽ $3a^2 + 2xy$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

ഏകപദങ്ങൾ അവയുടെ ചിഹ്നങ്ങളും എഴുതി ഒന്നിനു ശേഷം മററൊന്ന് എന്ന ക്രമത്തിൽ എഴുതി കൂട്ടാവുന്നതാണ് (അതായതു് ഒരു ബീജീയതുക യായി). അതിനുശേഷം സമരൂപപദങ്ങൾ തമ്മിൽ ലഘൂകരിച്ച് ഒരു പദം ആയി എഴുതാവുന്നതാണ്.

83. താഴെപ്പറയുന്നവ ലഘൂകരിക്കുക: (മനക്കണക്ക്)

(1) $10a + (-2a)$ (2) $(-3d) + (-2d)$

84. (1) $\left(\frac{-2}{3}c\right) + \left(\frac{-3}{4}c\right)$

(2) $(0.3x^2) + (+2x)^2$

85. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $\frac{3}{4}a^2b + \left(\frac{-2}{3}ax^2\right) + \left(\frac{-1}{2}a^2b\right) + \left(+1\tfrac{1}{3}ax^2\right)$

(2) $(-1.42ac) + (-0.96c) + (+1.54ac) + (-0.14c)$
$+ (-0.2ac) + (-1.6c)$

86. ഒരു അജ്ഞാതസംഖ്യയുടെ നാലിൽ ഒന്നും ആറിൽ ഒന്നും തമ്മിൽ കൂട്ടിയ തുക ആ സംഖ്യയുടെ പകുതിയേക്കാൾ 5 കുറവാണ്. സംഖ്യ കണ്ടു് ഉത്തരം പരിശോധിക്കുക.

87. ഓട്ട ഉണ്ടാക്കുവാൻ 17 ഭാഗം ചെമ്പും 2 ഭാഗം നാകവും ഒരു ഭാഗം ടിന്നും ആവശ്യമുണ്ട്. എന്നാൽ 2 കി ഗ്രാം ഓട്ട് ഉണ്ടാക്കുന്നതിന് വേണ്ട ഓരോ ലോഹങ്ങളുടെയും തൂക്കം കാണുക.

88. ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ വശങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള അനുപാതം 5 : 4 : 3 ആണ്. അതിൻെറ ചുററളവ് 48 സെമീ ആണ് എങ്കിൽ ആ ത്രികോണത്തിൻെറ വശങ്ങൾ കാണുക.

89. ഒരു കുട്ടി ഒരു പുസ്തകത്തിൻെറ $\frac{2}{3}$ ഭാഗം വായിച്ചു തീർത്തു. ഇനി വായിച്ചു തീർക്കാനുള്ളതു് 240 പേജ് ആണെങ്കിൽ ആ പുസ്തകത്തിൽ ആകെ എത്ര പേജുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും ?

90. തുക കാണുക:

(1) $5a^n + (-2a^n) + (8a^{m+1}) + (+6a^n) + (-a^{n+1})$

(2) $(-9x^{k+1}) + (-4x^k) + (+12x^{k+1}) + (x^{k+1}) + (5x^k)$

91. താഴെപ്പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $(-\frac{3}{4}x) + (-20) + (-1\frac{1}{2}x) - (+8) = 2$

(2) $5x + (-6.2) + (-6.2x) + 2 = 1.8$

92. നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $2x - 3x = 25$ (2) $3x - 2x = 10$

(b) ബഹുപദങ്ങളുടെ സങ്കലനം

93. താഴെ പറയുന്ന സമത പരിശോധിക്കുക:

$$a + (b + c) = a + b + c$$

a, b, c എന്നിവയ്ക്കു് എന്തുമൂല്യം കൊടുത്താലും മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമത ശരിയായിരിക്കും. രണ്ടു സംഖ്യകളോടു കൂടി ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യ കൂട്ടുന്നതിനുള്ള ഒരു നിയമം പറയുക.

94. ആഭ്യാസം 93 ൽ പറഞ്ഞ നിയമം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുവ തമ്മിൽ കൂട്ടുക.

(1) $7a + (2x - 3.5a)$ (2) $5 + (-3y - 1\frac{2}{3})$

95. അഭ്യാസം 93 ഇൽ പറഞ്ഞ നിയമം അനുസരിച്ച് താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുക.

(1) $11a^2 + 7a$ ഉം $9a^2$ $5a$ ഉം

(2) $1.5a^2 + 2b^2$ ഉം $2a^2 - 0.3b^2$ ഉം

ബഹുപദങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുവാൻ, ബഹുപദങ്ങളിലുള്ള എല്ലാ പദങ്ങളുടെയും ചിഹ്നങ്ങൾ ഇട്ടു് ഒന്നിനു ശേഷം മറ്റൊന്നു് എന്ന ക്രമത്തിൽ എഴുതേണ്ടതാണു് (ഒരു ബീജീയതുകയായി).

വ്യംജകത്തിൽ സമരൂപങ്ങളായ പദങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയെ ഒരു പദമായി ലഘൂകരിക്കാവുന്നതാണു്.

ബഹുപദങ്ങളുടെ സങ്കലനത്തിൽ ബ്രാക്കറ്റുകൾ മാററാവുന്നതാണു്.

ബ്രാക്കററുകളുടെ മുമ്പിൽ വരുന്നചിഹ്നം ധനം ആണെങ്കിൽ, ബ്രാക്കററു മാററുമ്പോൾ അതിനകത്തുള്ള ചിഹ്നങ്ങൾക്കു് ബ്രാക്കററുകൾ മാററുമ്പോൾ മാററം വരുന്നില്ല. അതായതു്, എല്ലാ പദങ്ങൾക്കും അവക്കുമുമ്പുണ്ടായിരുന്ന ചിഹ്നങ്ങൾ തന്നെ ഇട്ടാൽ മതി

96. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $(10a - 6b + 5c - 4d) + (9a - 2b - 4c + 2d)$

(2) $(5x^2 - ax + a^2) + 3x^2 + 2ax - 3a^2) + (-4ax + 2a^2 - x^2)$

97. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $(1.2a^4 + 3a^3 - 2a^2 - 0.7a + 15) + (0.8a^4 - 3a^3 + a^2 + 0.7a - 14)$

(2) $(0.9b^5 - 10b^3 + 1.3b^2 - 2b - 3) + 0.1b^2 + b^4 + 10b^3 + 0.7b^2 + 2b + 3)$

(3) $(8a^n - 2b^m + c) + (-4a^n - 5b^m - c)$

98. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക:

$$(2 + 5.7p) + (18.2 - 0.855p) + 3.45p = 36.79$$

ഒരു ബഹുപദം മുഴുവനായി എഴുതുവാനോ ആ ബഹുപദത്തിൻെറ ഒരു ഭാഗം എഴുതുവാനോ ബ്രാക്കററുകൾ നാം സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി, $2x^2 + 76 - 8c$ എന്നതു് മറെറാരു തരത്തിലും എഴുതാം. അതായതു് $2x^2 + (76-8c)$

ബഹുപദങ്ങളുടെ മുമ്പിലുള്ള ചിഹ്നം ധനചിഹ്നം (+) ആണെങ്കിൽ, ബഹുപദങ്ങളെ ബ്രാക്കററിനകത്താക്കി എഴുതുമ്പോൾ ബഹുപദങ്ങൾക്കുള്ള അതേ ചിഹ്നങ്ങൾ തന്നെ ഇട്ടാൽ മതി.

99. താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങളെ രണ്ടു ബഹുപദങ്ങളുടെ തുകയായി വരത്തക്കവണ്ണം എഴുതുക:

(1) $17a^4 - 8a^3x - 6a^2x^2 - ax_3$

(2) $3y^5 + 15y^4z - 12y^3z^2 + 2yz^4 - x^5$

100. താഴെ പറയുന്നവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ ഏററവും എളുപ്പവഴിയിൽ കാണുക.

(1) $216.25 + 853 + 783.75 + 147$

(2) $419.43 + 614.65 - 219.43 + 385.35$

ബഹുപദങ്ങളിലെ ഘാതങ്ങളെ ആരോഹണക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ എഴുതുന്നതുകൊണ്ടു്, അവ വളരെ സൗകര്യപ്രദമായ വിധത്തിൽ കോളങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു് കൂട്ടാവുന്നതാണു്.

ഉദാഹരണമായി, താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടിനോക്കാം:

$(7x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 10x + 11)$ ഉം

$(6x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 3)$ ഉം

x ൻെറ ഘാതങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഓരോ പദങ്ങളെയും ഓരോ കോളത്തിലായി എഴുതിനോക്കാം.

$$\begin{array}{l} 7x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 10x + 11 \\ 6x^4 + 2x^3 - 8x^2 \qquad\quad - 3 \\ \hline 13x^4 - 6x^3 + x^2 - 10x + 8 \end{array}$$

101. താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ കോളങ്ങളിൽ എഴുതി അവ തമ്മിൽ കൂട്ടുക:

(1) $2a^4 - 5a^3 + 7a^2 - 9a + 12)$ ഉം

$(a^3 - 7a^2 + 3a - 5)$ ഉം

(2) $(-11a^2 + 8a^2b - 7ab^2 + 6b^3)$ ഉം
$(9a^3 - 7a^2b + 5ab^2 - 3b^3)$ ഉം
$(3a^3 - a^2b + 2ab^2 - 2b^3)$ഉം

(3) $(-.9a^3 - 1.6a^2b + 2.3ab^2 - 0.3b^3)$ ഉം
$(3.2a^3 - 2.4a^2b + 3.1ab^2 - b^3)$ ഉം
$(-4a^3b + 1.3b^3 - 5.6ab^3 + 0.7a^2)$ ഉം

വിപരീതചിഹ്നങ്ങൾ ഉള്ളവയും ഒരേ പദങ്ങൾ ഉള്ളവയും ആയ രണ്ടു ബഹുപദങ്ങൾ എടുത്തുനോക്കാം:

$$a^2 + 2ay - 5y^2 \text{ ഉം } -a^2 - 2ay + 5y^2 \text{ ഉം}$$

ഒരേ പദങ്ങൾ ഉള്ളവയും ആ പദങ്ങൾ വിപരീതചിഹ്നങ്ങൾ ഉള്ളവയും ആയ ബഹുപദങ്ങളെ *വിപരീതബഹുപദങ്ങൾ* എന്നു പറയുന്നു.

102. താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങൾക്കു് വിപരീതമായ ബഹുപദങ്ങൾ എഴുതുക:

(1) $5a^8 - 7a^6 + 3a^4 - 2a^2 - 10$

(2) $-3b^5 + 4b^4 - 5b^3 + 6b^2 - 8$

103. താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങളുടെ തുകക്കു് വിപരീതമായ ബഹുപദങ്ങൾ എഴുതുക:

(1) $(4b^3 + 7b^2c + c^3)$ ഉം $(2b^3 - 5c^3 - 8bc)$ ഉം

(2) $13x^4 + 9^3x - 7x + 4)$ ഉം
$(7x^4 - 16x^3 + 5x^2 - 3x - 5)$ ഉം

104. തന്നിരിക്കുന്ന ബഹുപദങ്ങൾക്കു് വിപരീതമായ ബഹുപദങ്ങൾ എഴുതി അവയുടെ ജോഡികളുടെ തുകയും കാണുക:

$3a^4 - 5a^2b^2 + 7b$ (2) $5m^2 + 3m - 1$

ഇവയിൽനിന്നും നിങ്ങൾ എന്തു മനസ്സിലാക്കി?

105. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിൻെറ ഒരു വശം $3m + 2n$ ഉം മറെറ വശം ആദ്യത്തെ വശത്തേക്കാൾ $m - n$ വലുതും ആണു്. എന്നാൽ ആ ദീർഘചതുരത്തിൻെറ ചുററളവു കാണുക.

106. 5372, 48936, 392745 എന്നീ സംഖ്യകളെ ബഹുപദങ്ങൾ ആയും ഇവ ഓരോന്നിനെയും 10 ൻെറ ഘാതങ്ങൾ കുറഞ്ഞുകുറഞ്ഞു വരത്തക്ക വിധത്തിലും എഴുതുക:

$$5347 = 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 3 \times 10 + 7$$

107. (1) രണ്ടു ഒററ സംഖ്യകളുടെ തുക ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയായിരിക്കും എന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) ഒരു ഒററ സംഖ്യയുടേയും ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യയുടെയും തുക ഒരു ഒററ സംഖ്യ ആയിരിക്കും എന്നു തെളിയിക്കുക.

108. (1) തുടർച്ചയായ മൂന്നു ഒററസംഖ്യകളുടെ തുകയെ 3 കൊണ്ടു നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം എന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) തുടർച്ചയായ മൂന്നു ഇരട്ടസംഖ്യകളുടെ തുകയെ 6 കൊണ്ടു് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം എന്നു തെളിയിക്കുക.

109. (1) രണ്ടു അക്കമുള്ള ഒരുസംഖ്യയുടെയും ആ സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങൾ പരസ്പരം സ്ഥാംമാററിയിട്ടാൽ കിട്ടുന്നസംഖ്യയുടെയും വ്യത്യാസത്തെ 9 കൊണ്ടു് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം എന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) രണ്ടക്കമുള്ള ഒരു സംഖ്യയുടെയും ആ സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങൾ പരസ്പരം സ്ഥാനം മാററിയിട്ടാൽ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയുടെയും തുകയെ 11 കൊണ്ടു നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം എന്നു തെളിയിക്കുക.

110. മൂന്നു വീടുകളിലായി ആകെ 4500 പേർ താമസിക്കുന്നു. അവയിൽ രണ്ടാമത്തെ വീട്ടിൽ ആദ്യത്തെ വീട്ടിലുള്ള ആളുകളുടെ രണ്ടുമടങ്ങു് ആളുകളും മൂന്നാമത്തേതിൽ രണ്ടാമത്തേതിൽ ഉള്ളതിനേക്കാൾ 500 പേർ കുറവും ആളുകളും താമസിക്കുന്നു. എന്നാൽ ഓരോ വീട്ടിലും താമസിക്കുന്ന ആളുകൾ എത്ര?

111. A B C എന്ന ത്രികോണത്തിൽ A B എന്ന വശം A C യേക്കാൾ 1 സെ. മീ വലുതും B C, A B യേക്കാൾ 1 സെ. മീ വലുതും ആണു്. ആ ത്രികോണത്തിൻെറ ചുററളവ്' 15 സെ മീ ആണെങ്കിൽ ഓരോ വശവും കാണുക.

12. ഏകപദങ്ങളുടെയും ബഹുപദങ്ങളുടെയും വ്യവകലനം

(a) *ഏകപദങ്ങളുടെ വ്യവകലനം*

m^2x-ൽ നിന്നു് $5m^2x$ കുറയ്ക്കണം എന്നിരിക്കട്ടെ അപ്പോൾ

$9m^2x - (+5m^2x)$ ഇതായിരിക്കും ഉത്തരം

$$9m^2x - (^+5m^2x)$$
$$= 9m^2x + (-5m^2x)$$

ഏകപദങ്ങളുടെ സങ്കലനനിയമമനുസരിച്ചു് താഴെ പറയുന്ന ഉത്തരം കിട്ടുന്നു.

$$9m^2x + (-5m^2x) = 9m^2x - 5m^2x = 4m^2x$$

ഒരു ഏകപദം മറ്റൊരു ഏകപദത്തിൽ കുറയ്ക്കുന്നതിന്, ആ ഏകപദത്തിന്റെ വിപരീത ഏകപദം വ്യവകല്യത്തോടു കൂടി കൂട്ടിയാൽമതി. സമരൂപ പദങ്ങൾ ലഘൂകരിച്ച് ഒരേയൊരു പദം ആക്കി എഴുതാവുന്നതാണ്.

112. കുറയ്ക്കുക: (മനക്കണക്കായി)

(1) 4x–ൽ നിന്ന് $-7x$

(2) $-c^4$–ൽ നിന്ന് $-3c^4$

(3) 0 ത്തിൽ നിന്നു k

(4) 0 ത്തിൽ നിന്ന് $-7q$

113. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $0{\cdot}8a^2 - (+1{\cdot}2a^2)$

(2) $-9a^{2n+1} - (-3a^{2n+1})$

(3) $-0{\cdot}2m^2n - (-1{\cdot}2m^2n)$

(4) $5a - (+2a)$

114. താഴെ എഴുതിയിരിക്കുന്ന സമതകളിലെ വിട്ടുപോയ പദങ്ങൾ എഴുതുക

(1) $? + (-8bc^3) = 2bc^3$

(2) $(-15y^3) - ? = -2y^3$

(3) $(-18a^2b^7) - ? = 0$

115. (1) $4{\cdot}72n^4p$ യും $-1{\cdot}28n^4p$ യും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം $2.38n^4p$ യുടെയും $-1{\cdot}48n^4p$ യുടെയും തുകയോട് കൂട്ടുന്നു.

(2) $-8{\cdot}39k^3n^4$, $5{\cdot}29k^3n^4$ എന്നീ ഏകപദങ്ങളുടെ തുക $2{\cdot}57k^3n^4$ ഉം $-1{\cdot}43k^3n^4$ ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിൽ നിന്നും കുറയ്ക്കുക.

116. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $-1{\cdot}4a^3) - (-0{\cdot}9a^3) + (-1{\cdot}5a^3) + 2a^3$

(2) $\left(-\frac{p}{5}\right) - \left(-\frac{2b}{3}\right) - \left(+\frac{p}{4}\right) + \left(-\frac{p}{60}\right)$

(b) ബഹുപദങ്ങളുടെ വ്യവകലനം

117. താഴെ പറയുന്ന സമത പരിശോധിക്കുക:

$a-(b+c) = a-b-c$

ഇതിൽ $a = 10,\ b = 4,\ c = 2$ ആണെങ്കിൽ

മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമതയ്ക്ക് സംഗതമായ ഒരു തത്വം പറയുക. $4a^2-2ab-b^2$ ഇതിൽ നിന്ന് a^2+b^2-2ab കുറയ്ക്കണം എന്നു വിചാരിക്കുക.

ശരിയായ വിധത്തിൽ എഴുതുമ്പോൾ ഇപ്രകാരം കിട്ടുന്നു:

$$4a^2-2ab-b^2+(-a^2-b^2+2ab)$$

സങ്കലനനിയമം അനുസരിക്കുമ്പോൾ ഉത്തരം ഇങ്ങനെ കിട്ടുന്നു:

$$4a^2-2ab-b^2+(-a^2-b^2+2ab)$$
$$=4a^2-2ab-b^2-a^2-b^2+2ab=3a^2-2b^2$$

ഒരു ബഹുപദത്തിൽ നിന്നു് മറ്റൊരു ബഹുപദം കുറയ്ക്കുന്നതിനു്, വ്യവകലിതത്തിന്റെ എല്ലാ പദങ്ങളിലെയും ചിഹ്നങ്ങൾ വിപരീതചിഹ്നങ്ങൾ ആക്കി മാററി വ്യവകലനത്തോടു കൂടി കൂട്ടിയാൽമതി.

വ്യംജകത്തിൽ സമരൂപപദങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ, അവയെ ഒരേയൊരു പദമാക്കി ലഘൂകരിക്കാവുന്നതാണു്,

118. കുറയ്ക്കുക:

(1) $5m+6n$-ൽ നിന്നു് $2m-3n$

(2) a^2+7a യിൽനിന്നു് $6a^2-5a$

119. ലഘൂകരിയ്ക്കുക:

(1) $(13x-11y\ 10z)-(-15x+10y-15z)$

(2) $(14ab-37bc-2cd)-(16bc+11cd)$

(3) $1-(-3p^2+2p+1)$

(4) $0-(-x^2-y^2-1)$

120. കുറയ്ക്കുക:

(1) $(\frac{1}{2}x^2y^2-\frac{2}{3}ab-\frac{5}{6}a^2b^2-1)$ ൽ നിന്നു്
$\left(a^2b^2-\dfrac{1}{3}x^2y^2-\dfrac{1}{12}ab-\dfrac{1}{4}\right)$ കുറയ്ക്കുക.

(2) $(\frac{2}{3}x^3-3x^2y+\frac{1}{4}xy^2-2y^2-1)$ ൽ നിന്നു്
$(3x^3-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}x^2y-2y^2)$ കുറയ്ക്കുക

ബഹുപദങ്ങളുടെ സങ്കലനത്തിൽ ചെയ്തതു പോലെ തന്നെ ബഹുപദത്തിലുള്ള എല്ലാ പദങ്ങളെയും ഓരോ കോളങ്ങളിൽ എഴുതുകയാണെങ്കിൽ ബഹുപദങ്ങളുടെ വ്യവകലനവും കൂടുതൽ സൗകര്യപ്രദവും എളുപ്പവും ആയിത്തീരും.

ഉദാഹരണമായി:

$7a^3+10a^2-7a-13-(5a^3-2a^2+6a-8)$ എന്നതിനു് സമമായി താഴെ പറയുംപ്രകാരം എഴുതാം:

$$\begin{array}{l} 7a^3+10a^2-7a-13 \\ \underline{-5a^3+2a^2-6a+8} \\ 2a^3+12a^2-13a-5 \end{array}$$

121. താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ കോളങ്ങളിൽ എഴുതി നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $(0{\cdot}8a^3b^2c-0{\cdot}15a^4b^3c^2+16a^5b^4c^3)$
$-(3{\cdot}2a^3b^2c+2{\cdot}1a^4b^3c^2-0{\cdot}02a^5b^4c^3)$

(2) $(1{\cdot}4x^2+2{\cdot}24xy-1{\cdot}5y^2)$
$-(-\frac{5}{8}xy-10\frac{3}{4}x^2-1\frac{1}{2}y^2)$

122. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $(3a^{n+3}-9a^{n+3}+5a^{n+1}-2a^n)-(a^n+10a^{n+3}-$
$5a^{n+1}-7a^{n+2})$

(2) $(y^{n+1}-5y^n-7y^{n-1})-(-6y^n-8y^{n-1}+y^{n-2})$

123. $(7x^3+13x^2-19x-25)-[(17-15x+10x^2-4x^3)$
$-(42-11x^3-2x^2+4x)]$

124. നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $(2\frac{1}{2}x-1\frac{1}{3})-(3\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x)+(-x-1)=8\frac{5}{8}$

(2) $(0{\cdot}15b-\frac{3}{4})+(2{\cdot}36-0{\cdot}25)-(2-\frac{1}{4}b)=3{\cdot}12$

സാധാരണയായി ഋണചിഹ്നങ്ങൾ മുമ്പു വരുന്ന ബ്രാക്കററുകൾ മാറേറണ്ടതായും ബ്രാക്കററുകളുടെ അകത്തുള്ള ബഹുപദങ്ങളുടെ ചിഹ്നം ഋണമായും വരാറുണ്ട്. അങ്ങനെ വരുന്ന അവസരത്തിൽ ബ്രാക്കററുകൾ മാറേറണ്ടതായി വരുമ്പോൾ ബ്രാക്കററിനകത്തുള്ള എല്ലാ പദങ്ങളുടെയും വിപരീതചിഹ്നങ്ങൾ എഴുതിയാൽ മതി (ബ്രാക്കററുകൂടാതെ).

അതുപോലെ ബ്രാക്കററുകൾക്ക് മുമ്പുവരുന്ന ചിഹ്നം ഋണചിഹ്നമാണ് എങ്കിൽ ബ്രാക്കററിനകത്ത് എഴുതുന്ന ബഹുപദങ്ങളുടെ ഓരോ പദത്തിൻെറയും ചിഹ്നങ്ങൾ മാററി ഇടേണ്ടതാണ്.

125. $2x+5x^2y-4xy-y^3$ എന്ന വ്യംജകത്തിലെ ബാഹ്യപദങ്ങളെ ബ്രാക്കററിൻെറ മുമ്പിലുള്ള ചിഹ്നം ധനം (അധികം) (+) ആകത്തക്കവിധത്തിലും മധ്യപദങ്ങളെ ബ്രാക്കററിൻെറ മുമ്പിലുള്ള ചിഹ്നം ഋണം (−) ആകത്തക്കവിധം എഴുതുക.

126. രണ്ടു ബഹുപദങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വിധത്തിൽ താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ എഴുതുക.

(1) $13x^6-6x^4-5x^3+7x^2+8x+4$

(2) $3y^2-y+1$

127. ത്രിപദം $2a^2-6a+4$ എന്നതു് വ്യവകലിതം $6a$ ആയിരിക്കുന്ന രണ്ടു പദങ്ങളുടെ വ്യത്യാസത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്ന വിധത്തിൽ എഴുതുക.

128. ബ്രാക്കററുകൾ മാററി ലഘൂകരിക്കുക.

(1) $(4a^2-ab-b^2)-(-a^2+b^2-2ab)+(3a^2-ab+b^2)$

(2) $(5a^2-3b^2)+[-(a^2-2ab+b^2)+(5a^2-2ab-3b^2)]$

(3) $(3m+5n)-[9m-\{6m+2n-(12n-10m)\}-m-(7m-4n)]$

129. താഴെ പറയുന്ന വ്യംജകങ്ങൾ ലഘൂകരിച്ചവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

(1) $N=A-[B-(C-D)]$. ഇതിൽ A,B,C,D ഇവ തന്നിരിക്കുന്നു.

$A=5x^3-4x^2-7x+10$

$B=3x^3+5x^2-13x+2$

$C=-x^3+8x-2x^2-9$

$D=-x^3-7x^2+12x-1$ ഇതിൽ $x=\frac{1}{2}$

(2) $N=(2A-3B)-[3A-(2A+4B-C)]$ ഇതിൽ,

$A=3t^2-5tu+u^2$,

$B=2t^2+tu-u^2$,

$C=4t^2-4tu+2u^2$. ഇതിൽ $t=-0{\cdot}6$ ഉം, $u=0{\cdot}8$ ഉം ആണ്.

130. താഴെ പറയുന്ന വ്യംജകങ്ങളെ അവയുടെ മൂല്യത്തിൽ യാതൊരു മാററവും വരുത്താതെ തന്നെ ബ്രാക്കററുകളുടെ മുമ്പിലുള്ള ചിഹ്നം മാററി അതിന്റെ വിപരീത ചിഹ്നം എഴുതുക.

(1) $a-(2b-3a)$ (2) $x-y-(y-x)$

131. 8·5 മീററർ നീളമുള്ള ഒരു തടിക്കഷണം മൂന്നു ഭാഗങ്ങളായി അറുത്തെടുത്തു. ഇവയിൽ നടുവിലത്തെ ഭാഗം ആദ്യത്തെ ഭാഗത്തേക്കാൾ 2 മീററർ നീളം കൂടുതലും അവസാനത്തെ ഭാഗത്തേക്കാൾ 1·5 മീററർ നീളം കുറവും ആണ്. എന്നാൽ ഓരോ ഭാഗത്തിന്റെയും നീളം കാണുക.

132. ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ വശങ്ങൾ തുടർച്ചയായ മൂന്ന് ഒററസംഖ്യകൾ ആണ്. ഇവയിൽ ഏററവും വലിയ വശം മററുരണ്ടുവശങ്ങളുടെ തുകയേക്കാൾ 16 സെ. മീ കുറവാണ്. എന്നാൽ ആ ത്രികോണത്തിൻെറ ചുററളവു കാണുക.

133. ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ ഒരു കോണം രണ്ടാമത്തെ കോണത്തേക്കാൾ 25° കൂടുതലും മൂന്നാമത്തെ കോണം ആദ്യത്തെതിനേക്കാൾ 20° കുറവും ആണ്. എന്നാൽ ഓരോ കോണവും എത്ര ഡിഗ്രി എന്നു കാണുക.

134. രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസം 72 ഉം അവയിൽ ഒന്നിനെ മറേറതുകൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലം 4 ഉം ആണ്. ആ സംഖ്യകൾ കാണുക.

135. രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക 45 ഉം അവ തമ്മിലുള്ള അനുപാതം 7:8 ഉം ആണ്. സംഖ്യകൾ കാണുക.

136. ഒരു ആവിയന്ത്രത്തിന്റെ (കപ്പലിന്റെ) നീരൊഴുക്കിന് അനുകൂലമായ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 18 കി. മീററും പ്രതികൂലമായ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 14 കി. മീററും ആണ്. എന്നാൽ അതിന്റെ നിശ്ചലജലത്തിലെ വേഗത കാണുക.

137. മെഡഗാസ്കർ ദ്വീപിന്റെ വിസ്തീർണം ക്യൂബാദ്വീപിന്റെ വിസ്തീർണത്തേക്കാൾ 482 ആയിരം ച. കി. മീററർ കൂടുതലും ക്യൂബയുടെ വിസ്തീർണം സിലോണിന്റെ വിസ്തീർണത്തേക്കാൾ 42 ആയിരം ച. കി. മീ കൂടുതലും ആണ്. സിലോണിന്റെയും ക്യൂബയുടെയും വിസ്തീർണങ്ങളുടെ തുകയേക്കാൾ മെഡഗാസ്കർ ദ്വീപിന്റെ വിസ്തീർണം 416 ആയിരം ച. കി. മീററർ കൂടുതലാണെങ്കിൽ ദ്വീപുകൾ ഓരോന്നിന്റെയും വിസ്തീർണം കാണുക.

138. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്ത് x ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

(1) $(x+a)+(x+2a)-(x-3a)=8a$

(2) $x^2-(x+t)-(x^2-2x-3t)=0$

(3) $(x-a-b)+(2x+3a+b)=(2a-b)-(2a-5b)$

139. ലഘൂകരിക്കുക.

$10-(6{\cdot}7y+5y^2)+\{(3y^2-1{\cdot}5y+2{\cdot}3)$
$-(6y^2+6y-1{\cdot}1)+(2y^2-0{\cdot}9y+1{\cdot}3)\}$

140. രണ്ടു ബഹുപദങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം ആയി വരത്തക്കവിധത്തിൽ താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ പറയുക:

(1) $4x^2-2x-y-y^2$, ഇവിടെ വ്യവകലിതം $4x^2-y$ ആണ്.

(2) a^4+2a^3-9 ഇതിൽ വ്യവകലിതം $2a^3$ ആണ്.

141. താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുക.

(1) $m+k-p$. ഇതിൽ $m=3a^2-b^2+5c^2$
$k=a^2-2b^2+c^2$, $p=8a^2+4b^2-c^2$

(2) $x-y+z$. ഇതിൽ $z=5a^2-9a+13$;
$y=-2a^2+-6a-8$, $z=5a^2-7a-5$

142. താഴെ പറയുന്ന പ്രശ്നം ഒരു സമീകരണംവഴി നിർധാരണം ചെയ്യുക: ഒരു സമദ്വിഭുജത്രികോണത്തിന്റെ ചുററളവ് 48 സെ. മീ. ആണ്. അതിന്റെ പാദം മററു രണ്ടു വശത്തേക്കാൾ 3 സെ. മീ. വീതം കൂടുതൽ ആണ്. എന്നാൽ ആ ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കാണുക.

143. തുടർച്ചയായ ഏതെങ്കിലും ഏഴ് ഏകാദികളുടെ തുകയെ 7 കൊണ്ടു് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം എന്നു തെളിയിക്കുക.

13. ഏകപദങ്ങളുടെയും ബഹുപദങ്ങളുടെയും ഗുണനം

(a) *ഗുണനത്തിൽ ഘാതങ്ങളുടെ പ്രയോജനം*

144. താഴെ കാണുന്നവയുടെ തുക എളുപ്പവഴിയിൽ കാണുക:

(1) $(0.25) \times (-0.46) \times (-4)$

(2) $(3/19) \times (-80) \times (19)$

145. ക്രിയ ചെയ്തു് ഉത്തരം കാണുക:

(1) $c \times c^{11}$ (2) $k^3 \times k \times k^4$

ഉദാഹരണം:

$$b^3 \times b = b \times b \times b \times b = b^4 = b^{3+1}$$

ഒരേ സംഖ്യയുടെ രണ്ടു ഘാതങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം എന്നതു്, ആ സംഖ്യയുടെ ഘാതാങ്കങ്ങളുടെ തുകയാണു്.

(b) *ഏകപദങ്ങളുടെ ഗുണനം*

$2xy^2$ നെ $3x^3y$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കണം എന്നിരിക്കട്ടെ. അതായതു്, $2xy^2 \times 3x^3y$ യുടെ മൂല്യം കാണണം എന്നു വ്യക്തം.

ഗുണനത്തിന്റെ ക്രമവിനിമേയനിയമവും സാഹചര്യനിയമവും ഉപയോഗിച്ചാൽ,

$$2xy^2 \times 3x^3y = (2 \times 3) \times (x \times x^3) \times (y^2 \times y) = 6x^4y^3$$

എന്നു കിട്ടുന്നു.

146. ഗുണിക്കുക:

(1) $2a^2 \times (-a)$ (2) $0.3a^2x \times 2ay$

(3) $(1.52) \times (-0.25)$ (4) $(-3a) \times (+2b) \times (-c)$

ഏകപദങ്ങൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ,

(1) അവയുടെ സംഖ്യാത്മകമായ ഗുണാംകങ്ങൾ തമ്മിൽ ആദ്യം ഗുണിക്കുക.

(2) ഒരേ സഹഘടകങ്ങളുടെ ഘാതാങ്കങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുക.

(3) അതിനു ശേഷം വരുന്ന സംഖ്യ എഴുതുക.

147. ഗുണിക്കുക (മനക്കണക്കായി):

(1) $(-b) \times (-b)^{2n-1}$

(2) $(-x)^{2n+4} \times (-x)^{2n+3}$

(3) $(-m) \times (-n) \times 0$

(4) $0 \times (-b)^k \times (-b)^{k-1}$

148. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $(0.06a^4xy) \times (+1.5xy^3)$

(2) $(+2.4k^2b^4) \times (-\frac{1}{2}k^3)$

(3) $(-4.7bx^3) \times (-4.3b^2x)$

149. ഗുണിക്കുക:

(1) $(-5x^{m+1}) \times (-2x^2)$

(2) $(a-b)^5 \times (a-b)^4$

(3) $-(x-2)^3 \times (x-2)^7$

150. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $(2a^2)^2 \times (-3a)$

(2) $(+5x^n)^2 \times (+2xy)^2$

(3) $(+x^ny^m)^2 \times (-x^ny^m)^3$

(4) $[-(-a)^2]^2$

(5) $-(-3ab)^2$

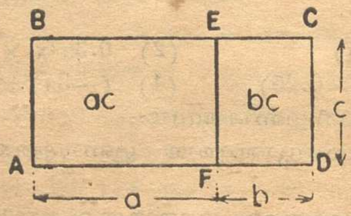
(c) ഒരു ബഹുപദത്തെ ഒരു ഏകപദം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം

151. താഴെ പറയുന്ന ക്രിയകൾ രണ്ടു തരത്തിൽ ചെയ്യുക:

(1) $(18 + 15) \times 4$

(2) $(5/19 - 1/5) \times 190$

152. താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ചിത്രത്തിലുള്ള ദീർഘചതുരം A B C D യുടെ വിസ്തീർണം രണ്ടു വിധത്തിൽ കാണുക:



ചിത്രം 2.4

(i) ദീർഘചതുരം ABCD = ദീർഘചതുരം ABEF + ദീർഘചതുരം EFDC

$= BE \times AB + EC \times CD$

$= ac + bc$

(ii) ദീർഘചതുരം $ABCD = BC \times CD$

$$= (BE + EC) \times CD$$
$$= (a + b) \times c$$
$$= ac + bc$$

153. ലഘൂകരിക്കുക (മനക്കണക്കായി):

(1) $(z - 2n) \times k$ (2) $(11a - 7c) \times 9$

(3) $(2a + 3b - 5c) \times 5a$

(4) $(3c - 2b + 7a) \times 4n$

ഒരു ബഹുപദത്തെ ഒരു ഏകപദം കൊണ്ടു ഗുണിക്കുവാൻ, ബഹുപദത്തിലുള്ള ഓരോ പദത്തെയും ഏകപദം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചുകിട്ടുന്ന ഫലങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടിയാൽ മതി.

154. ഗുണിക്കുക:

(1) $- 1\frac{1}{2}p^2 - \frac{3}{4}(pq + q^2) \times (- 2pq)$

(2) $(1\frac{1}{3}ab) \times (\frac{3}{4}a^2b - 1\frac{1}{2}ab^2 - \frac{5}{6}b^2)$

(3) $(2.25x^2 - 1.5xy + 2.5y^2) \times (- 1)$

(4) $(3a^2 - 5df - 1\frac{1}{2}f^2) \times 0$

155. ഗുണിക്കുക:

(1) $\frac{1}{8}p^m - \frac{3}{4}(p^{11-m}q^4) \times (- 4p^mq^{m-n})$

(2) $- 6m^xn^x \times (- \frac{1}{3}m^{2-x} - \frac{1}{2}n^{n-x})$

156. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $a(a + b) + b(a-b)$

(2) $- 3(a - b) - 2(a + b) - 3a - 2b) + 5(a - 2b)$

(3) $5(2.4 - 0.9x + 0.16x^2) - 4(- 1 + 1.5x + 0.2x^2)$

(4) $4y - 2(x - 3) - 3[x - 3(4-2x) + 8]$

157. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $5(y + \frac{2}{3}) - 4(3y - \frac{1}{2}) = 3$

(2) $\frac{a - 1}{1} + \frac{3a + 1}{5} = 6$

(3) $\frac{5(21 - 5m)^5}{12} - 14 = 1$

(4) $\frac{3p + 41}{2} - \frac{p - 3}{5} - \frac{9 - 2p}{6} = 0$

സമീകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക.

158. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളം അതിന്റെ വീതിയുടെ 2 മടങ്ങാണ്. ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വീതി 3 മീ വർധിക്കുകയാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ വിസ്തീർണം 24 ച മീ ($24m^2$) വർധിക്കും. എന്നാൽ ആ ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളവും വീതിയും കാണുക.

159. ഒരു ജോലിക്കാരൻ ദിവസംതോറും 187 പണിയായുധങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. 24 ദിവസം കൊണ്ട് ആദ്യത്തെ ജോലിക്കാരൻ ഉണ്ടാക്കിയ പണിയായുധങ്ങൾ രണ്ടാമത്തെ ജോലിക്കാരൻ 25 ദിവസം കൊണ്ടുണ്ടാക്കിയവയേക്കാൾ 213 എണ്ണം കൂടുതലായിരുന്നു. എന്നാൽ രണ്ടാമത്തെ ആൾ ഓരോ ദിവസവും എത്ര പണിയായുധങ്ങൾ വീതം ഉണ്ടാക്കുന്നു?

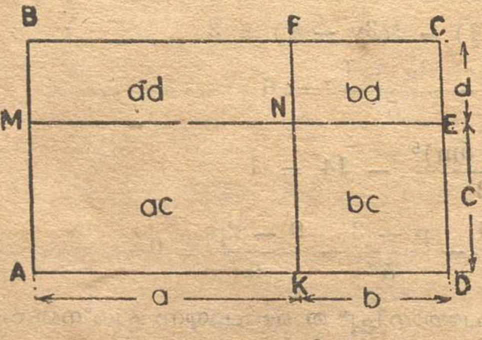
160. (1) ആകെ 26 നാണയങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കത്തക്കവിധത്തിൽ 1 രൂപയെ 5 പൈസ നാണയങ്ങളായും 3 പൈസ നാണയങ്ങളായും മാറ്റുക.

(2) ഒരു സ്കൂളിലെ വയലിൽ മുയലുകളും പിടക്കോഴികളും കൂടി ആകെ 1000 എണ്ണം ഉണ്ടായിരുന്നു. ഇവയ്ക്ക് എല്ലാററിനും കൂടി ആകെ 3150 കാലുകൾ ഉണ്ട്. എന്നാൽ മുയലുകളുടെയും പിടക്കോഴികളുടെയും എണ്ണം കാണുക.

(d) ഒരു ബഹുപദത്തെ മറെറാരു ബഹുപദം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം

161. (1) താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണം കാണുക.

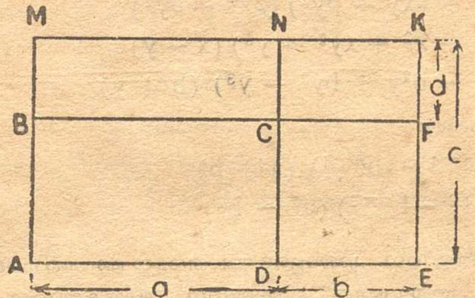
$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$



ചിത്രം 2.5

(2) ABCD എന്ന ദീർഘചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീർണം കണക്കാക്കി താഴെ പറയുന്നതു തെളിയിക്കുക.

$$(a+b)(c-d) = ac + bc - bd - ad$$



ചിത്രം 2.6

162. $(a+b)(m+n) = am + bm + an + bn$ എന്ന സമത പരിശോധിക്കുക. ഇതിൽ a, b, m, n ഇവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

No.	1	2	3	4
$a =$	5	10	$\frac{3}{4}$	0.5
$b =$	2	−6	$-\frac{1}{2}$	0.3
$m =$	3	20	4	−5
$n =$	6	−4	2	−8

ഒരു ബഹുപദത്തെ മറ്റൊരു ബഹുപദം കൊണ്ടു ഗുണിക്കുവാൻ, ആ ബഹുപദത്തിലുള്ള ഓരോ പദത്തെയും മറ്റൊരു ബഹുപദത്തിൻെറ ഓരോ പദം കൊണ്ടും വെവ്വേറെ ഗുണിച്ച ശേഷം അവ തമ്മിൽ കൂട്ടുകയാണ് വേണ്ടതു്.

163. ഗുണനഫലം കാണുക:

(1) $(5p + 2q)(9m - 7n)$

(2) $(6a^2 + 5b^2)(2a^2 - 4b^2)$

(3) $(-7x^2 - 8y^2)(-x^2 + 3y^2)$

(4) $(x^2 + 2xy - 5y^2)(2x^2 - 3y^2)$

(5) $(x^3 + x^2 + xy^2 + y^3)(x - y)$

(6) $(b^3 - b^2y + by^2 - y^3)(b + y)$

164. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $(3a^{n-1} + b^{n-1})(a + b)$

(2) $(a^{x+2} - b^{x-2})(a^2 - b^2)$

രണ്ടു ബഹുപദങ്ങളിലെ പദങ്ങളുടെ ഘാതങ്ങൾ അവരോഹണക്രമത്തിലാണ് സാധാരണയായി എഴുതാറുള്ളത്. അങ്ങനെ എഴുതുകയാണെങ്കിൽ, അവ കോളങ്ങൾ വഴി ഗുണിക്കുന്നതായിരിക്കും കൂടുതൽ സൗകര്യപ്രദം.

ഉദാഹരണമായി,

$(3x^2 + 11 - 5x) \times (8x - 6 + 2x^2)$ എന്നതു് താഴെ പറയും പ്രകാരം എഴുതിനോക്കാം.

$$\begin{array}{r} 3x^2 - 5x + 11 \\ 2x^2 + 8x - 6 \\ \hline 6x^4 - 10x^3 + 22x^2 \\ + 24x^3 - 40x^2 + 88x \\ - 18y^2 + 30x - 66 \\ \hline 6x^4 + 14x^3 - 36x^2 + 118x - 66 \end{array}$$

165. താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങൾ കോളംമാർഗം ഉപയോഗിച്ചു് ഗുണിക്കുക:

(1) $(15a - 2a^2 - 9)$ നെ $(-6a + 10 - a^2)$ കൊണ്ടു്.

(2) $(5x + 2x^4 + 1)$ നെ $(2 + x^2 - 3x)$ കൊണ്ടു്.

*166. താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണനക്രിയ ചെയ്യാതെ തന്നെ അവയിലെ അചരവും ഏററവും വലിയ ഘാതമുള്ള പദവും കാണുക:

(1) $(7 + 3a^2 - 5a)(-a + 1 - a^2)$

(2) $(x^6 - 11x^5 + 2{\cdot}3x^7 - 7x + 0.75)(1.5x^3 - 8x^2 + 6x)$

*167. ശരിയായ ഗുണനക്രിയക്കു ശേഷം,

$$(x + a)(x + b) = a^2 + (a + b)x + ab$$

എന്നു കിട്ടുന്നു. ഇതു് ഒരു സൂത്രമായി ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

168. ചോദ്യം 167ൽ പറഞ്ഞ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്നവ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുക:

(1) $(x+3)(x+5)$ (2) $(n+9)(n-2)$
(3) $(m-2)(m-3)$ (4) $(x-12)(x+1)$

169. താഴെ പറയുന്നവ ലഘൂകരിച്ച്, ആ വ്യംജകങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുക:
$N=(2x^3+x^2y+3xy^2-y^3)(x+5y)-$
$(x^3-2x^2y+3xy^2-5y^3)(2x-y)$
ഇതിൽ $x=\frac{1}{2}$, $y=3$ ആണ്.

170. സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $6x^3-(2x-3)(3x+2)=2$
(2) $3(x+1)(x+2)-(3x-4)(x+2)=36$

171. ഒരു സമചതുരത്തിൻെറ ഒരു വശം 8 മീററർ വർധിപ്പിക്കുകയും മറെറ വശം 5 മീററർ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്തു. അപ്പോൾ ഉണ്ടായ ദീർഘചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീർണം സമചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീർണത്തേക്കാൾ 4 ച മീ ($4m^2$) കുറവാണ് എങ്കിൽ ആ സമചതുരത്തിൻെറ വശം കാണുക.

172. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിൻെറ നീളം 4 സെ. മീ കുറയുകയും വീതി 5 സെ. മീ വർധിക്കുകയും ചെയ്തപ്പോൾ ഉണ്ടായ ദീർഘചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീർണം ആദ്യത്തെ ദീർഘചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീർണത്തേക്കാൾ 40 ച സെമീ ($40\ cm^2$) വർധിക്കുന്നു. ആ ദീർഘചതുരത്തിൻെറ വീതി 15 സെമീ ആണെങ്കിൽ അതിൻെറ നീളം കാണുക.

173. തുടർച്ചയായ രണ്ടു ഏകാദികളുടെ ഗുണിതം, ആദ്യത്തെ രണ്ട് ഏകാദികൾക്കു ശേഷം വരുന്ന തുടർച്ചയായ രണ്ട് ഏകാദികളുടെ ഗുണിതത്തേക്കാൾ 38 കുറവാണ്. എന്നാൽ ആ സംഖ്യകൾ കാണുക.

174. (1) തുടർച്ചയായ നാലു സംഖ്യകൾ എഴുതുക. അവയിലെ മധ്യത്തിലുള്ള രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ ഗുണിതം രണ്ട് ബാഹ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണിതത്തേക്കാൾ 2 കൂടുതൽ ആയിരിക്കും എന്നു തെളിയിക്കുക.

(2) തുടർച്ചയായ 4 ഒററസംഖ്യകൾ എടുക്കുക. അവയിലെ ബാഹ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണിതം മധ്യസംഖ്യകളുടെ ഗുണിതത്തേക്കാൾ 8 കുറവായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

175. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ നീളം അതിൻെറ വീതിയുടെ 2 മടങ്ങാണ്. വീതി 4 മീററർ വർധിപ്പിക്കുകയും നീളം 5 മീററർ കുറയുകയും ചെയ്താൽ, ആ ദീർഘചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീർണം 16 ച മീ ($16m^2$) വർധിക്കും. എന്നാൽ ദീർഘചതുരത്തിൻെറ നീളവും വീതിയും കാണുക.

176. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $(2x+3)(5x-1)-(4x-6)(1-3x)$

(2) $(a^2+2a-1)(a^3-1)-(a^2-a+1)(a^2+1)$

177. താഴെ പറയുന്ന സമതകൾ ശരിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക:

(1) $2(3a-4b)-5[(2a+b)-(a-2b)]$
$-[3(a-b)-6(2a-b)]=10a-26b$

(2) $a(3a-x)-2x[(-5a+1)-(1-x)]$
$-[x(a-x)-a(2x-a)]=2a^2+10ax-x^2$

178. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $(3x-1)(2x-3)-(6x-5)(x-2)+4=0$

(2) $(3y^2+7y-6)(2y-5)-(2y^2-3y+10)(3y+4)=3$

179. ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു സ്കൂൾ കളിസ്ഥലത്തിന്റെ നീളം 41.5 മീററും വീതി 27.5 മീററും ആണ്. ആ കളിസ്ഥലത്തിനു ചുററും പുറത്തായി ഒരു പാതയുണ്ട്. പാതയുടെ ചുററളവ് 154 മീററർ ആണെങ്കിൽ പാതയുടെ വീതി കാണുക.

180. രണ്ടു സിലിണ്ടറുകൾ ചരിഞ്ഞ ഒരു തലത്തിൽ കൂടി കറങ്ങിക്കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. അവയിൽ ഒന്നിന്റെ പരിധി 2 ഡെ മീററും മററേതിന്റെ പരിധി 3 ഡെ മീററും ആണ്. ആദ്യത്തെ സിലിണ്ടർ രണ്ടാമത്തെ സിലിണ്ടർ കറങ്ങുന്ന അതേ ദൂരം തന്നെ കറങ്ങുവാൻ രണ്ടാമത്തേതിനേക്കാൾ 7 ഭ്രമണങ്ങൾ കൂടുതൽ എടുക്കുന്നു. എങ്കിൽ ചരിവിന്റെ നീളം കാണുക.

14. ഒരു ഘാതംകൊണ്ട് ബഹുപദങ്ങളെ വികസിപ്പിക്കൽ

ചെറിയ ഗുണനങ്ങൾക്കുള്ള സൂത്രങ്ങൾ

ഒരു ബഹുപദത്തെ ഒരു ഘാതം കൊണ്ടു വികസിപ്പിക്കുക എന്നുവച്ചാൽ, വികസിപ്പിക്കേണ്ട ഘാതത്തിന്റെ അത്രയും പ്രാവശ്യം കൊണ്ടു തന്നെ ബഹുപദങ്ങൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുക എന്നതാണ് അർഥം.

ഉദാഹരണമായി:

$$(2x^2-x+1)^2=(2x^2-x+1)(2x^2-x+1)$$

$$(3x^2-b)^3=(3x^2-b)(3x^2-b)(3x^2-b)$$

ഇത്തരത്തിലുള്ള വ്യംജകങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുവാൻ മേല്പറഞ്ഞ ഘാതങ്ങളുടെ ചില പ്രത്യേക അവസ്ഥകൾ സഹായിക്കുന്നു.

ഈ പ്രത്യേക അവസ്ഥകളെ നിയമങ്ങളായോ സൂത്രങ്ങളായോ കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്. താഴെ പറയുന്ന അവസ്ഥകൾ ശ്രദ്ധിക്കുക:

(a) ഏകപദങ്ങളെ ഘാതങ്ങൾ കൊണ്ടു് വികസിപ്പിക്കൽ

x^2, അതിൻെറ മൂന്നാം ഘാതമായോ ഘാതം മൂന്നായോ വികസിപ്പിച്ചു നോക്കുക.

$$(x^2)^3 = x^2 \times x^2 \times x^2 = x^{2+2+2} = x^6$$

അതുപോലെതന്നെ:

$$(b^4)^2 = b^4 \times b^4 = b^{4+4} = b^8$$

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ:

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \ldots (n \text{ പ്രാവശ്യം})$$
$$= a^{m \times n} = a^{mn}$$

ഒരു ഘാതം മററൊരു ഘാതമായി വികസിപ്പിക്കുമ്പോൾ, ഘാതാങ്കങ്ങൾ തമ്മിൽ പരസ്പരം ഗുണിക്കുകയും അധിഷ്ഠാനസംഖ്യക്കു് (ആധാരസംഖ്യക്കു്) മാററം സംഭവിക്കാതിരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

181. ലഘൂകരിക്കുക (മനക്കണക്കായി):

(1) $(z^5)^k$ (2) $(z^k)^5$

(3) $(y^n)^8$ (4) $(x^{k-1})^4$

182. നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $(-c^8)^2$ (2) $(-c^{2n+1})^2$

(3) $(-y^{2n+1})^{2n}$ (4) $[-(-y)^{2n}]^3$

ഏകപദം $3m^2p$ യെ അതിൻെറ മൂന്നാം ഘാതത്തിലേക്കു് വികസിപ്പിച്ചു നോക്കാം.

$$(3m^2p)^3 = 3m^2p \times 3m^2p \times 3m^2p$$
$$= 3^2 \times (m^2)^3 \times p^3$$
$$= 27m^6p^3$$

ഇതുപോലെ തന്നെ:

$$(\tfrac{1}{2}x^2yz^3)^2 = \tfrac{1}{2}x^2yz^3 \times \tfrac{1}{2}x^2yz^3$$
$$= (\tfrac{1}{2})^2 \times (x^2)^2y^2 \times (z^3)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}x^4y^2z^6$$

ഒരു ഏകപദത്തെ ഒരു ഘാതം കൊണ്ടു് വികസിപ്പിക്കുന്നതിനു്, ഘടകങ്ങളിൽ ഓരോന്നിനേയും അതേ ഘാതം കൊണ്ടു വികസിപ്പിച്ച ശേഷം ലഭിക്കുന്ന ഗുണിതങ്ങൾ തമ്മിൽ ഗുണിച്ചാൽ മതി.

183. ബ്രാക്കററിൻെറ പുറകളിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന ഘാതം കൊണ്ട് ഏക പദത്തെ വികസിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഉത്തരം എഴുതുക:

(1) $(\frac{1}{3}b^3)^2$ (2) $(-0.3xz^2)^3$

(3) $-(2\frac{1}{2}x^4y^3)^3$ (4) $5(-a^3b^2c)^3$

(5) $(-3\frac{1}{3}a^nb^2)^3$ (6) $4(-\frac{2}{3}x^3y^4)^3$

184. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $(a^{n-1})^3$ (2) $(0.2a^{2k-11}x^{10-k})^4$

(3) $(0.5^{k+1}y^{3k})^3$ (4) $(a^3)^{2k+15}$

185. താഴെ പറയുന്ന വ്യംജകങ്ങളിൽ തുല്യമായവ ഏവ എന്നു പറയുക:

(1) $-x^2$ ഉം $(-x)^2$ ഉം

(2) $-x^3$ ഉം $(-x)^3$ ഉം

(3) $-(2a)^4$ ഉം $(-2a)^4$ ഉം

(4) $-(2a^5)$ ഉം $(-2a)^5$ ഉം

186. ഗുണിക്കുക:

(1) $(a^5b^2)^3$ നെ $(a^2b^3)^2$ കൊണ്ട്

(2) $(b^4e^6)^4$ നെ $(bc^2)^2$ കൊണ്ട്

(3) $\left(\frac{1}{9}a^2c^4\right)$ നെ $(3a^5c^2)^5$ കൊണ്ട്

(4) $(-15a^4x)^3$ നെ $(\frac{1}{3}ax^4)^4$ കൊണ്ട്

(5) $(-12a^5y^3)$ നെ $\left(\frac{1}{18}a^3y^2\right)^2$ കൊണ്ട്

(b) ഒരു ബഹുപദത്തിൻെറ വർഗം (രണ്ടു രാശികളുടെ തുക)

187. താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗം എഴുതുക:

(1) m ൻെറയും k യുടെയും (2) b യുടെയും c യുടെയും

(3) $-3a$ യുടെയും x ൻെറയും (4) $2a^2b$ യുടെയും $\frac{1}{2}ay$ യുടെയും

x, y എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗം കണ്ടുനോക്കാം.

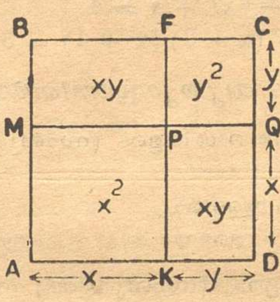
$$(x+y)^2 = (x+y)\times(x+y)$$
$$= x^2 + xy + xy + y^2$$

അതിൽ നിന്നും:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെ വർഗം, ആ സംഖ്യകളുടെ ഗുണിതത്തിൻെറ 2 മടങ്ങും ആ രണ്ടു രാശി (സംഖ്യ) കളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയും കൂട്ടിക്കിട്ടുന്ന തുകക്കു തുല്യമാണ്.

188. ABCD എന്ന സമചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീർണം കാണുക.
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ എന്നു തന്നിട്ടുണ്ട്.



ചിത്രം 2.7

189. മുകളിൽ പറഞ്ഞ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്നവയുടെ മൂല്യം കാണുക:

(1) $(a + 5)^2$ (2) $(3c + 1)^2$

(3) $(3ax^3 + 8a^3x)^2$ (4) $\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{3}\right)^2$

(5) $(m + 1\frac{1}{2})^2$

190. താഴെ പറയുന്ന വ്യംജകങ്ങൾ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് വികസിപ്പിക്കുക:
(1) $(a^m + b)^2$ (2) $(\frac{1}{2}a^{n-1}b^2 + a^{n+1})^2$

191. താഴെ പറയുന്ന സമതകളിലെ വിട്ടുപോയ പദങ്ങൾ പൂരിപ്പിച്ച് എഴുതുക:
(1) $(2a + ?)^2 = 4a^2 + ? + 25b^2$
(2) $(? + 10a)^2 = 16b^2 + ? + ?$

192. താഴെ പറയുന്ന ത്രിപദങ്ങളിൽ നിന്ന് ദ്വിപദങ്ങളുടെ വർഗങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുക. അപ്പോൾ കിട്ടുന്ന ശിഷ്ടം ചോദ്യത്തിൻെറ അവസാനം എഴുതുക.
(1) $a^2 + 6a + 13$
(2) $x^2 + 8x + 21$
(3) $4a^2 + 12ab + 10b^2$
(4) $1 + 10b + b^2$

ഉദാഹരണമായി:

$$p^2 + 14p + 50 = p^2 + 14p + 49 + 1$$
$$= (p + 7)^2 + 1$$

193. താഴെ പറയുന്നവയുടെ മൂല്യം കാണുവാൻ സൂത്രം ഉപയോഗിക്കുക:
(1) $(103)^2$ (2) $(5.1)^2$

194. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $x^2 - (x + 2)^2 = 8$

(2) $(2x + 5)^2 - 4x^2 + x = 4$

(3) $(x + 1)^2 - (x - 2)(x + 1) = 3$

C. *രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം*

195. താഴെ പറയുന്ന രണ്ടു രാശികളുടെ (സംഖ്യകളുടെ) വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം എഴുതുക.

(1) a യുടെയും b യുടെയും

(2) 2x ന്റെ യും y യുടെയും

രണ്ടു രാശികളുടെ (സംഖ്യകളുടെ) വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം കണ്ടുനോക്കാം.

$$(x - y)^2 = (x - y) \times (x - y)$$
$$= x^2 - xy - xy + y^2$$

അതിൽ നിന്നു്:

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

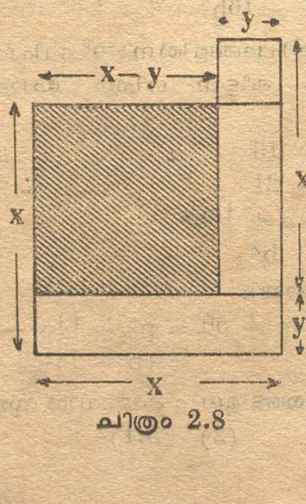
രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ വ്യത്യാസത്തിന്റെ വർഗം, ആ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ തുകയും അവയുടെ ഗുണിതത്തിന്റെ ഋണം (കുറവ്) രണ്ടു മടങ്ങും ആയിരിക്കും.

196. താഴെ പറയുന്നവയുടെ വർഗങ്ങൾ കാണുക (മനക്കണക്കായി):

(1) $(c - d)$ (2) $(a - 4)$

(3) $(3a - b)$ (4) $(0.1b - 2)$

197. ABCD എന്ന സമചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണം കാണുക.
$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ എന്നു തന്നിട്ടുണ്ടു്.



ചിത്രം 2.8

198. താഴെ പറയുന്നവ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് വികസിപ്പിക്കുക.

(1) $(a^7b^5 - b^5)^2$ (2) $(0.2a^5x^3 - 5b^3y)^2$

(3) $(0.2y^2 - 0.3y^3)^2$ (4) $(2.4p^3 - 5q^2)^2$

(5) $(a^m - a)^2$ (6) $(2xy^{p-1} - y^4)^4$

199. താഴെ പറയുന്ന സൂത്രവാക്യങ്ങൾ തമ്മിൽ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

താഴെ പറയുന്ന വിധത്തിൽ എഴുതി അവ തമ്മിലുള്ള സാദൃശ്യവും വ്യത്യാസവും ചൂണ്ടികാണിക്കുക:

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$$

200. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $(1.2x^2y - 0.5x^3y^2)^2$

(2) $(-2.5m^2n^3 - 0.2m^3n^2)^2$

(3) $(-1\frac{2}{3}a^{3n} - 1\frac{1}{5}a^{5-3n})^2$

201. $(a - b)^2$ നോട് എന്തു കൂട്ടിയാൽ $(a + b)^2$ കിട്ടും ?

202. താഴെ പറയുന്ന വ്യംജകങ്ങൾ ഓരോന്നും ഓരോ പൂർണവർഗം ആകത്തക്കവിധത്തിൽ വിട്ടുപോയ സ്ഥലത്തു വേണ്ട പദം എഴുതി പൂരിപ്പിക്കുക:

(1) $m^2 - 2mn + ?$ (2) $1 - 2a + ?$

(3) $x^2 - ? + 25p^2$ (4) $? - 12a^2x + 9x^2$

203. താഴെ പറയുന്ന ത്രിപദങ്ങളിൽ നിന്നു് ചില ദ്വിപദങ്ങളുടെ വർഗങ്ങൾ എഴുതുക:

(1) $x^2 - 20x + 3$ (2) $x^2 - 10x + 27$

(3) $a^2 - 12a - 1$ (4) $9x^2 - 30x + 20$

204. താഴെ പറയുന്ന സമതകളിലെ വിട്ടുപോയ പദങ്ങൾ എഴുതുക:

(1) $(? - 3x)^2 = 49b^2 - ? + 9x^2$

(2) $(8ab - ?)^2 = ? - ? + 9b^2$

205. $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്നവയുടെ മൂല്യം കാണുക:

(1) $(999)^2$ (2) $(4.9)^2$

206. താഴെ പറയുന്നവ ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $3(5x - 2y)^2 + (3x - 5y)^2$

(2) $2(7a - 3x)^2 - 3(a - 14x)$

(3) $(3a - 5b)^2 + (2a + 9b)^2 - (2a + 3a)(27b - 16a)$

(4) $(4p - 7q)^2 + (3p + 4q)^2 - 2(2p + 3q)(4p - 17q)$

207. താഴെ പറയുന്ന സർവസമീകരണങ്ങൾ ശരിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക:

(1) $(a - b)^2 = (b - a)^2$

(2) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$

(3) $(2p - q)^2 (p + q) - (2p + q)^2 (p - q) = 2q^3$

208. സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $9x^2 - (3x - 5)^2 = 20$

(2) $(13z - 2)^2 - (12z - 5)^2 - (5z + 4)^2 = 19$

d. *രണ്ടു രാശികളുടെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിൻെറയും ഗുണിതം*

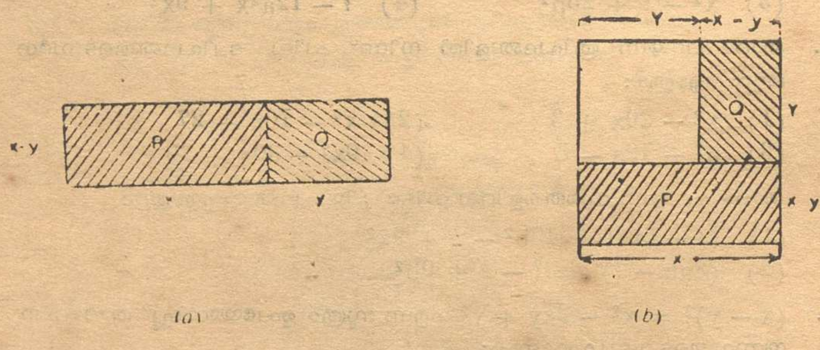
ശരിയായ ഗുണനത്തിൽ നിന്നും,

$$(x + y)(x - y) = x^2 + xy - xy - y^2$$
$$= x^2 - y^2$$

അതിൽ നിന്നും:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

ചിത്രം 2.9 ൻെറ സഹായത്തോടു കൂടി മുകളിൽ പറഞ്ഞ സൂത്രം വിശദീകരിക്കുക.



ചിത്രം 2.9

അതിൽ നിന്നും, രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുകയുടെയും വ്യത്യാസത്തിൻെറയും ഗുണിതം, ആ സംഖ്യകളുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം ആയിരിക്കും എന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

209. താഴെ പറയുന്ന ദ്വിപദങ്ങളുടെ ഗുണിതം കാണുക (മനക്കണക്കായി):

(1) $(a-c)(c+a)$ (2) $(a-1)(1+a)$

(3) $(2a+b)(2a-b)$ (4) $(2d-\frac{1}{2})(2d+\frac{1}{2})$

(5) $(a^2+b^2)(b^2-a^2)$ (6) $(\frac{1}{3}x-0.5y)(\frac{1}{3}x+0.5y)$

210. മുകളിൽ പറഞ്ഞ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്നവ ലഘൂകരിക്കുക.

(a) (1) $(2\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}y)(2\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y)$

(2) $(0.02t-0.5u)(0.5u+0.02t)$

(3) $(2.3k+\frac{1}{3}f)(\frac{1}{3}f-2.3k)$

(4) $(a^4+b^4)(a^4-b^4)$

(b) (1) 38×42 (2) 101×99

(3) 57^2-43^2 (4) $\dfrac{40^2-17^2}{44^2-25^2}$

211. താഴെ പറയുന്ന സർവസമീകരണങ്ങൾ ശരിയാണെന്നു തെളിയിക്കുക:

(1) $5a^3-3(a+1)(a-1)=2a^2+3$

(2) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)=x^8-y^8$

(3) $(a+b-a)(a+b+c)=a^2+2ab+b^2-c^2$

212. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $(m+1)^2+3(m-1)^2-5(m+1)(m-1)$

(2) $-(3+x)^2+5(1-x)^2-3(1-x)(1+x)$

(3) $(2x-3y)(2x+3y)(2x+3y)(4x^2+9y^2)$

(4) $(\frac{1}{2}x^2+2y-xy)(\frac{1}{2}x^2-2y+xy)$

213. നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $(3x+5)(3x-5)-(3x-1)^2=10$

(2) $2(2x+1)^2-8(x+1)(x-1)=34$

(3) $(10x-3)^3-4(5x-1)(5x+1)=-7$

214. (1) $x+\frac{1}{x}=4$ ആണെങ്കിൽ $x^2+\frac{1}{x^2}$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(2) $x-\frac{1}{x}=3$ ആണെങ്കിൽ $x^2+\frac{1}{x^2}$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(3) $x^2+\frac{1}{x^2}=7$ ആണെങ്കിൽ $x+\frac{1}{x}$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(4) $x^2+\frac{1}{x^2}=11$ ആണെങ്കിൽ $x-\frac{1}{x}$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

215. താഴെ പറയുന്ന സർവസമീകരണങ്ങൾ ശരിയാണ് എന്നു തെളിയിക്കുക:

$(a+b+c)(b+c-a)+(b+c-a)(c+a-b)$
$+(c+a-b)(a+b-c)+(a+b-c)$
$(a+b+c)=4b(a+c)$

216. താഴെ പറയുന്നവ ഗുണനക്രിയ ചെയ്യാതെ തന്നെ അവയിലെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ എടുത്തെഴുതുക.

(1) $(2a^3+1)(a^2-a+1)$ എന്നിവയുടെ ഗുണിതത്തിൽ a^3 ന്റെ
(2) $(1+3y)(1+2y-3y^2+y^4)$ എന്നിവയുടെ ഗുണിതത്തിൽ y^2 ന്റെ

217. (1) ഏതു ഒറ്റ സംഖ്യയുടെ വർഗത്തിൽ നിന്നു് 1 കുറച്ചാലും, ആ സംഖ്യയെ 8 കൊണ്ടു നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം എന്നു പറയുക.

(2) തുടർച്ചയായ മൂന്നു ഏകാദികളുടെ ഘനങ്ങളുടെ തുകയെ 3 കൊണ്ടു നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാം എന്നു തെളിയിക്കുക.

218. (1) 2522 നെ ഏതു സംഖ്യ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 105 ഹരണഫലവും 2 ശിഷ്ടവും കിട്ടും.

(2) 1239 നെ ഏതു സംഖ്യ കൊണ്ടു ഹരിച്ചാൽ 103 ഹരണഫലവും 3 ശിഷ്ടവും ലഭിക്കും ?

15. ഏകപദങ്ങളുടെയും ബഹുപദങ്ങളുടെയും ഹരണം

ഒരു ഏകാദിയെ മറ്റൊരു ഏകാദി കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ എല്ലായ്പ്പോഴും ശിഷ്ടം കൂടാതെ മറ്റൊരു ഏകാദി ഹരണഫലമായി ലഭിക്കുന്നില്ല എന്നു നാം അങ്കഗണിതത്തിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഉദാഹരണമായി, 17 നെ 5 കൊണ്ടു് ശിഷ്ടം കൂടാതെ ഹരിക്കുവാൻ സാധ്യമല്ലല്ലോ.

ഇത്തരം അവസ്ഥകളിൽ ഹാര്യത്തെ അംശമായും ഹാരകത്തെ ഛേദമായും എഴുതി ഹരണഫലം ഒരു ഭിന്നസംഖ്യയായി എഴുതുന്നു.

ഉദാഹരണമായി

$$17 \div 5 = \frac{17}{5},$$

$$3 \div 8 = \frac{3}{8}$$

ഏതൊരു സംഖ്യയേയും പൂജ്യം ഒഴിച്ചുള്ള മറ്റേതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യ കൊണ്ടു ഹരിക്കുവാൻ സാധ്യമാണു് എന്നു് ഭിന്നസംഖ്യയുടെ പ്രാരംഭത്തിൽ നിന്നു തന്നെ നാം മനസ്സിലാക്കി കഴിഞ്ഞു. ഈ നിയമം തന്നെ ബീജീയ

വ്യംജകങ്ങളിലും പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണ്. ഒരു പൂർണബീജീയവ്യംജകത്തെ ഹരിക്കുമ്പോഠം കിട്ടുന്ന ഹരണഫലം ഒരു പൂർണബീജീയവ്യംജകം ആണെങ്കിൽ, ഹാര്യത്തെ ഹാരകം കൊണ്ടു് നിശ്ശേഷം ഹരിച്ചു എന്നു പറയുന്നു. ചില ഉദാഹരണങ്ങഠം പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

(1) $2ab \div b$

ഇവിടെ ഹരണം സാധ്യമാണ്; ഹരണഫലം ഒരു പൂർണബീജീയവ്യംജകം ആയ $2a$ ആണ്.

(2) $(2ab + c) \div b$

ഇവിടെ $(2ab + c)$ യെ b കൊണ്ടു് ശിഷ്ടം കൂടാതെ ഹരിച്ചു് ഹരണഫലം ഒരു പൂർണബീജീയവ്യംജകം കിട്ടുക എന്നതു് അസാധ്യം ആണ്. അതായതു്, ശിഷ്ടം കൂടാതെ ഹരിക്കുവാൻ സാധ്യമല്ല. ഹാര്യം അംശമായി എഴുതി, ഒരു ഹരണഫലം ഒരു ഭിന്നവ്യംജകമായി എഴുതാവുന്നതാണ്. ഉദാഹരണത്തിനു്:

$$(2ab + c) \div b = \frac{2ab + c}{b}$$

പൂജ്യം കൊണ്ടുള്ള ഹരണം അസാധ്യം ആയതു കൊണ്ടു് (നിർവചിക്കാൻ സാധ്യമല്ലാത്തതു കൊണ്ടു്) ഹാരകം ഒരിക്കലും പൂജ്യത്തിനു തുല്യമായിരിക്കരുതു് എന്നു നമുക്കറിയാമല്ലോ.

അതായതു്, ഒന്നോ അതിൽ കൂടുതലോ അക്ഷരങ്ങഠം ഹാരകത്തിൽ ഉണ്ടായിരിക്കുകയും അവയുടെ ഗുണിതം പൂജ്യം ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ ഹരണം അസാധ്യം ആയിരിക്കും. ഈ സംഗതി (വസ്തുത) ഓർമിച്ചാൽ ബീജീയവ്യംജകത്തിന്റെ ഹരണവും സാധ്യമാക്കാവുന്നതാണ്.

താഴെതന്നിരിക്കുന്ന വ്യംജകത്തിലെ ഛേദം പൂജ്യത്തിനു തുല്യമാണെങ്കിൽ, ആ അക്ഷരങ്ങഠംക്കു് എന്തു മൂല്യം കൊടുത്താലും ശരി, ആ വ്യംജകത്തിനു് യാതൊരു അർഥവും ഇല്ല. ഉദാഹരണമായി, വ്യംജകം $a/(b - b)$ എന്നതിനു് യാതൊരു അർഥവും ഇല്ല.

(a) ഒരേ ആധാര (അധിഷ്ഠാന) സംഖ്യയുടെ ഘാതങ്ങഠം തമ്മിലുള്ള ഹരണം

$$2^5 \div 2^2 = (2^2 \times 2^3) \div 2^2 = 2^3 = 2^{5-2}$$
$$3^6 \div 3^4 = (3^4 \times 3^2) \div 3^4 = 3^2 = 3^{6-4}$$
$$a^7 \div a^4 = (a^4 \times a^3) \div a^4 = a^3 = a^{7-4}$$

അതായതു്,

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \ (m > n)$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ തത്വം പരിശോധിച്ചു നോക്കാം. $a^{m-n} \times a^n = a^m$ എന്നു കിട്ടുന്നു. ആയതിനാൽ $a^m \div a^n = a^{m-n}$.

അതിൽ നിന്നും, ഒരേ ആധാര (അധിഷ്ഠാന) സംഖ്യയുടെ ഘാതങ്ങൾ തമ്മിൽ ഹരിക്കുമ്പോൾ ഹാര്യത്തിലെ ഘാതാങ്കത്തിൽ നിന്നും ഹാരകത്തിലെ ഘാതാങ്കം കുറച്ചാൽ മതിയെന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

$m = n$ ആണെങ്കിൽ, അതായതു് ഹാര്യവും ഹാരകവും തുല്യമാണു് എങ്കിൽ, ഹരണഫലം 1 ആയിരിക്കും.

അതിൽ നിന്നും,

$$a^m \div a^m = a^{m-m} = a^0 = 1$$

219. താഴെ പറയുന്നവ തമ്മിൽ ഹരിക്കുക (മനക്കണക്കായി):

(1) $9^8 \div 9^6$ (2) $m^7 \div m^4$

(3) $c^5 \div c^4$ (4) $p^8 \div p^4$

(5) $x^m \div x^m$ (6) $0 \div a^6$

220. ഹരിക്കുക:

(1) $y^3 \div (-y)$ (2) $-z^7 \div z^5$

(3) $(-p^k) \div (-p^k)$ (4) $a^{m+1} \div a^m$

(5) $x^{m+1} \div x^{m+1}$ (6) $c^{2n+1} \div c^{n+1}$

b. ഏകപദങ്ങളെ ഏകപദങ്ങൾ കൊണ്ടു തന്നെയുള്ള ഹരണം

$10a^5b^3c$ യെ $4a^3b$ കൊണ്ടു ഹരിക്കണമെന്നു സങ്കല്പിക്കുക.

പല സംഖ്യകളുടെ ഗുണിതത്തെ ഒരു സംഖ്യ കൊണ്ടും ഒരു സംഖ്യയെ പല സംഖ്യകളുടെ ഗുണിതം കൊണ്ടും ഹരിക്കുവാനുള്ള അതേ നിയമം തന്നെ ഇവിടെയും പ്രയോഗിച്ചു നോക്കാം.

$$10a^5b^3c \div 4a^3b = (10 \div 4)(a^5 \div a^3)(b^3 \div b)c = 2.5a^2b^2c$$

$4a^3b$ യെ $2.5a^2b^2c$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ ഹാര്യമായ $10a^5b^3c$ കിട്ടുന്നു. ആയതിനാൽ, ഈ ഹരണക്രിയ ശരിയാണെന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

221. ഹരിക്കുക:

(1) $16x^3y^3$ നെ $4x^2y$ കൊണ്ടു്

(2) $6b^2cd$ യെ $3bc$ കൊണ്ടു്

(3) $15m^2n^3$ നെ $(-5m^2n^2)$ കൊണ്ടു്

(4) $18c^2d^2$ നെ $18c^3d^2$ കൊണ്ടു്

222. താഴെ പറയുന്ന ഏകപദങ്ങളെ ശിഷ്ടം കൂടാതെ നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാൻ സാധ്യമാണോ ?

(1) $5a^2b$ യെ $4ab$ കൊണ്ടു്

(2) $15x^2y^2$ നെ $(-3x^4y)$ കൊണ്ടു്

ഇവയുടെ ഹരണഫലം ഭിന്നിതരൂപത്തിൽ എഴുതുക.

ഒരു ഏകപദത്തെ മറെറാരു ഏകപദം കൊണ്ടു് ഹരിക്കുവാൻ, താഴെ പറയുന്ന സംഗതികൾ ചെയ്താൽ മതി.

(1) ഹാര്യത്തിലെ ഗുണാങ്കത്തെ ഹാരകത്തിലെ ഗുണാങ്കം കൊണ്ടു് ഹരിക്കുക.

(2) ഹാര്യത്തിലെ ഘടകങ്ങളിലെ ഘാതാങ്കങ്ങളിൽ നിന്നു് ഹാരകത്തിലെ അതേ ഘടകങ്ങളിലുള്ള ഘാതാങ്കങ്ങൾ കുറയ്ക്കുക.

ഈ നിയമം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ താഴെ പറയുന്ന വസ്തുതകൾ കൂടി ഓർക്കേണ്ടതാണു്.

(1) ഏതെങ്കിലും ഒരു അക്ഷരം ഹാര്യത്തിൽ മാത്രമെ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നുള്ളുയെങ്കിൽ, അതേ അക്ഷരം തന്നെ അതേ ഘാതാങ്കത്തോടു കൂടി ഹരണഫലത്തിലും ഉണ്ടായിരിക്കും.

(2) ഹാര്യത്തിലെ ചില അക്ഷരങ്ങളിലുള്ള ഘാതാങ്കങ്ങളും ഹാരകത്തിലെ അതേ അക്ഷരങ്ങളിലുള്ള ഘാതാങ്കങ്ങളും തുല്യമാണു്. എങ്കിൽ, അത്തരം അക്ഷരങ്ങൾ ഹരണഫലത്തിൽ ഉണ്ടായിരിക്കുകയില്ല.

താഴെ പറയുന്ന അവസ്ഥകളിൽ (ഏകാദികളുടെ ഘാതാങ്കങ്ങളിൽ മാത്രം ഉള്ള അവസ്ഥയിൽ) ഏകപദങ്ങളെ ശിഷ്ടം കൂടാതെ ഹരിക്കുവാൻ സാധിക്കും.

(1) ഹാരകത്തിലെ ഒരു അക്ഷരത്തിലുള്ള ഘാതാങ്കം ഹാര്യത്തിലെ അതേ അക്ഷരത്തിലുള്ള ഘാതാങ്കത്തേക്കാൾ വലുതു് ആയിരിക്കുകയാണെങ്കിൽ

(2) ഹാര്യത്തിൽ ഇല്ലാത്ത ഒരു അക്ഷരം ഹാരകത്തിൽ ഉണ്ടെങ്കിൽ

223. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $20m^4n^3 \div (5m^2n^2)$ (2) $-8p^4c^2 \div (-2pc)$

(3) $(-12mn) \div 4mn$ (4) $4a^2b^2c \div (-abc)$

(5) $(-1.2a^8b^3c^4) \div (-0.3a^5bc^4)$ (6) $\dfrac{-72c^3y^8}{-48c^2y^4}$

224. ഹരിക്കുക :

(1) $0.5a^m b^n c^3$ നെ $\dfrac{-2}{3}a^2bc$ കൊണ്ടു്

(2) $-0.35b^3 \times 2c^5$ നെ $0.14b^2c^5$ കൊണ്ടു്

225. ലഘൂകരിക്കുക :

(1) $\dfrac{12a^5b^{n+8}c}{10a^5b^{4n-1}}$ (2) $\dfrac{(3a^5b^3)^4 \times (2a^3b^2)^5}{(6a^7b^4)^5}$

(3) $(x^5)^4 \times (x^5)^3$ (4) $\dfrac{81^{n+1} \times 3^{n+4}}{27^n \times 9^{n-1}}$

226. ഹരണഫലം ഒരു ഭിന്നിതം ആയി എഴുതുക :

(1) $a \div 6$ (2) $8 \div c$

(3) $-7b \div (-2c)$ (4) $5ab \div 4pq$

(c) ബഹുപദങ്ങളെ ഏകപദങ്ങൾ കൊണ്ടുള്ള ഹരണം

താഴെ പറയുന്ന സമത പരിശോധിക്കുക.

$a = 36, \quad b = 24, \quad m = 4$ ആണു് എങ്കിൽ

$$(a + b) \div m = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$$

227. ഹരിക്കുക :

(1) $(10a + 5)$ നെ 5 കൊണ്ടു്

(2) $(16 - 20b)$ യെ 4 കൊണ്ടു്

താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യകൾ തമ്മിൽ ഹരിക്കണമെന്നു വിചാരിക്കുക :

$$(6a^4b^2 - 7a^3b + 8a^2b^3) \div 2a^2b$$

ബഹുപദത്തിലെ ഓരോ പദത്തേയും $2a^2b$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ, താഴെ പറയുന്ന സംഖ്യ ഹരണഫലമായി കിട്ടുന്നു.

$$3a^2b - 3.5a + 4b^2.$$

ഈ ഉത്തരം പരിശോധിക്കാം :

$$(3a^2b - 3.5a + 4b^2) \times 2a^2b = 6a^4b^2 - 7a^3b + 8a^2b^3$$

ഒരു ബഹുപദത്തെ ഒരു ഏകപദംകൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ, ബഹുപദത്തിലുള്ള ഓരോ പദത്തേയും തന്നിട്ടുള്ള ആ ഏകപദം കൊണ്ടു ഹരിക്കു

കയും അപ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഹരണഫലങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുകയും ചെയ്യേണ്ടതാണു്.

228. ക്രിയചെയ്യുക :

(1) $(a^2b + a) \div a$

(2) $(x^2 - ax^2) \div x$

(3) $(9xy^2 - 15x^3y^4) \div (-3xy^2)$

(4) $(-10x^3 - 5x^2 - 20x) \div (-5x)$

(5) $(a^5y - a^4y^3) \div (2a^4)$

(6) $(x^2y - xy^2) \div 4xy$

229. ലഘൂകരിക്കുക :

(1) $(-4x^2 + 12x^3y^2 - 16x^4y^3) \div (-4x^2)$

(2) $(18a^4x^3 + 24a^3x^4 + 6a^2x^5) \div 6a^2x^3$

(3) $(4m^3 + 6m^2 - m) \div \left(\frac{-1}{2}m\right)$

(4) $(-2n^4 - 3n^3 + n^2) \div \frac{1}{3}n$

(5) $(p^4 + 4p^3 - 6p^2 - 8p) \div (0{\cdot}2p)$

(6) $(-4m^5n^2 - 4m^4n^5 + \frac{2}{3}m^3n^6) \div \frac{2}{3}m^3n^2$

230. താഴെ പറയുന്ന സമതകളിൽ വിട്ടുപോയ ഏകപദങ്ങൾ പൂരിപ്പിക്കുക:

(1) $\frac{36a - 24a}{?} = 3a - ?$

(2) $\frac{144x^7y^5 - ?}{?} = 9x^3y^4 - 2x^2y$

(3) $\frac{? - (42b^3c^4)}{28b^2c^2} = 2{\cdot}5b^5c^8 - ?$

231. ലഘൂകരിക്കുക :

(1) $(10a - 5) \div 5 - 6(a - 1)$

(2) $(6x + 3) \div 3 - (20x - 20) \div 10$

(3) $(a - 1) \times a - (2a^2 + 4a) \div 2a$

(4) $x(x - 3) - (6x^3 - 12x^2) \div 6x$

232. ലഘൂകരിക്കുക :

(1) $[(5a - 2b)^2 - a^3b^7 \div (-0.125a^3b^4)] \div 5a -$
$[(3a - 5b)^2 - 4b^2]$

ഇതിൽ $a = 2, b = 3$ ആണ്. എങ്കിൽ ഈ വ്യംജകത്തിൻെറ മൂല്യം കാണുക.

(2) $\left[(3a + 2b)^2 + 5a^5b^{n+1} \div \left(\frac{-1}{8} a^5b^{n-1}\right)\right] \div 9a$
$+ (a - 3b)^2 - 4b^2$

ഇതിൽ $a = 5, b = 2$ ആണ്. എങ്കിൽ ഈ വ്യംജകത്തിൻെറ മൂല്യം കാണുക.

233. സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക :

(1) $20x^3 \div 4x^2 - 14 + x = 4$

(2) $8p - 12p^4 \div 6p^3 + 15 = 45$

234. താഴെ പറയുന്നവ തമ്മിൽ ഹരിച്ച് ഹരണഫലം ശരിയാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക :

(1) $(5a^2b^5 - 3a^3b^4 - 15a^4b^3 + 12a^2b^3) \div 3a^2b^3$

(2) $(2.8a^5b^3 - 0.12a^4b^4 - a^3b^5) \div (0.4a^3b^3)$

16. ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണധർമങ്ങൾ

പരിമേയസംഖ്യകൾക്കുമേൽ ഉള്ള ബഹുപദങ്ങളുടെ താഴെ പറയുന്ന ഗുണധർമങ്ങൾ ഉദാഹരണസഹിതം പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

(a) *സങ്കലനത്തിൻെറ നിയമങ്ങൾ*

(1) രണ്ടു ബഹുപദങ്ങളുടെ തുക എല്ലായ്പോഴും ഒരു ബഹുപദം തന്നെ ആയിരിക്കും.

(2) Aയും Bയും രണ്ടു ബഹുപദങ്ങൾ ആണ്. എങ്കിൽ,

$$A + B = B + A$$

(3) A, B, C എന്നിവ മൂന്നു ബഹുപദങ്ങൾ ആണ്. എങ്കിൽ,

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

(4) Aയും 0 ഉം ഓരോ ബഹുപദങ്ങൾ ആണ്. എങ്കിൽ,

$$A + 0 = 0 + A$$

(5) ഓരോ ബഹുപദത്തിനും, അതായതു് Aയ്ക്കു്, ഒരു വിപരീതബഹുപദം (— A) ഉണ്ടായിരിക്കും. എന്തെന്നാൽ,

$$A + (-A) = 0$$

(*b*) *ഗുണനനിയമങ്ങൾ*

(1) രണ്ടു ബഹുപദങ്ങളുടെ ഗുണിതം എപ്പോഴും ഒരു ബഹുപദം തന്നെ ആയിരിക്കും.

(2) Aയും Bയും രണ്ടു ബഹുപദങ്ങൾ ആണു്. എങ്കിൽ,

$A \cdot B = B \cdot A$ ആയിരിക്കും.

(3) A, B, C എന്നിവ മൂന്നു ബഹുപദങ്ങൾ ആണു്. എങ്കിൽ

$(A \cdot B)\, C = A\, (B \cdot C)$ ആയിരിക്കും.

(4) A ഒരു ബഹുപദം ആണു്. എങ്കിൽ

$A \times 1 = A$ ആയിരിക്കും.

(5) Aയും Bയും Cയും മൂന്നു ബഹുപദങ്ങൾ ആണു്. എങ്കിൽ

$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ ആയിരിക്കും.

ഇനി ഒരു ബഹുപദത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമം കാണാൻ നോക്കാം. $x^2 + 1$ എന്നതു് ഒരു ബഹുപദമായി എടുക്കാം. അപ്പോൾ $(x^2 + 1) \times \frac{1}{(x^2 + 1)}$ എന്നതു് 1 നു് തുല്യമാണു് എന്നു് കിട്ടുന്നു. ആയതിനാൽ $x^2 + 1$ ന്റെ വ്യുൽക്രമം ആണു് $\frac{1}{x^2 + 1}$. എന്നാൽ $\frac{1}{x^2 + 1}$ എന്നതു് ഒരു ബഹുപദം അല്ല. സാധാരണയായി A എന്നതു് ഒരു ബഹുപദം ആണു്. എങ്കിൽ,

$$A \times \frac{1}{A} = \frac{1}{A} \times A = 1 \; (A \neq 0)$$

അതുകൊണ്ടു് Aയും $\frac{1}{A}$ യും പരസ്പരം വ്യുൽക്രമങ്ങൾ ആണു്. എന്നാൽ $\frac{1}{A}$ എന്നതു് ഒരു ബഹുപദം അല്ല. ആയതിനാൽ ബഹുപദത്തിനു ഒരു വ്യുൽക്രമം ഉണ്ടായിരിക്കുകയില്ല.

അധ്യായം 3

ഒരു അജ്ഞാതസംഖ്യയുള്ള രേഖീയ സമീകരണം

1. ഗണം

ഈ അധ്യായത്തിൽ *'ഗണം'* എന്ന വാക്കിൻെറ അർത്ഥത്തെപ്പററി വിശദീകരിക്കാം. സ്കൂളിലുള്ള അച്ചടിച്ച പുസ്തകങ്ങളുടെ കൂട്ടത്തെപ്പററിയോ ഒരു ഫുട്ബാറം മത്സരം കാണാൻ വരുന്ന ആറംക്കൂട്ടത്തെപ്പററിയോ നാം പറയാറുണ്ട്. ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ ഒരു കൂട്ടം പദാർത്ഥങ്ങറം എന്നതിന് *'ഗണം'* എന്ന പദം ഉപയോഗിക്കുന്നു. ആ പദാർത്ഥങ്ങളെ ആ ഗണത്തിൽ ഉള്ള *അംഗങ്ങറം* എന്നു വിളിക്കുന്നു. അവ { } ചിഹ്നത്തിൻെറ ഉള്ളിൽ ഇട്ടിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 1

$$\{ 1, 2, 3 \}$$

4 നേക്കാറം ചെറിയ ഏകാദികളുടെ ഗണത്തെ ഇതു് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 2

$$\{ a, b, c, d \}$$

ഇതു് ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ ആദ്യത്തെ നാലു് അക്ഷരങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ചിലപ്പോറം ഒരു ബ്രാക്കററിനകത്തു് ഒരു കൂട്ടം അംഗങ്ങളെ ഉറംപ്പെടുത്തികൊണ്ടുള്ള ഒരു ഗണം ഉണ്ടാക്കാൻ സമയക്കുറവോ മററു പല വൈഷമ്യങ്ങളോ കൊണ്ടു് സാധിച്ചെന്നു വരികയില്ല. ഉദാഹരണമായി, 1000 ത്തിൽ താഴെയുള്ള എല്ലാ ഏകാദികളും ബ്രാക്കററു ഉപയോഗിച്ചു് സൂചിപ്പിക്കണമെന്നു സങ്കല്പിക്കുക. അപ്പോറം താഴെ പറയുന്ന അങ്കനം സ്വീകരിക്കാവുന്നതാണു്.

$$\{ 1, 2, 3, 4, \ldots, 998, 999 \} \qquad (1)$$

ഇവിടെ കുത്തുകൾ 5 മുതൽ 997 വരെയുള്ള ഏകാദികളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

1. 6 കൊണ്ടു് നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്നതും 54 നേക്കാൾ ചെറുതുമായ സംഖ്യകൾ (അംഗങ്ങൾ) ഉള്ള ഒരു ഗണം ഉണ്ടാക്കുക.
2. 1 നും 52 നും ഇടക്കുള്ള അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ ഒരു ഗണം ഉണ്ടാക്കുക.
3. 1000 ത്തിൽ താഴെയുള്ള എല്ലാ ഒററ സംഖ്യകളുടെയും ഒരു ഗണം ബ്രാക്കററ് ഉപയോഗിച്ചു് എഴുതുക.
4. താഴെ പറയുന്ന ഗണത്തിൽ എത്ര അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടു് ?

$$\{ 3, 6, 9, \ldots, 102 \}$$

ഒരു ഗണത്തിലുള്ള അംഗങ്ങൾ സാന്തം ആണു് എങ്കിൽ ആ ഗണത്തെ *സാന്ത ഗണം* എന്നു പറയുന്നു. എന്നാൽ, നിങ്ങൾ ക്ലാസ്സുകളിൽ പഠിച്ച എല്ലാ അഖണ്ഡസംഖ്യകളെയും പരിമേയസംഖ്യകളെയും ഒരു ഗണത്തിൽ ഉൾപ്പെടുത്താൻ സാധിക്കുന്നില്ല. അത്തരം ഗണങ്ങൾക്കു് *അനന്തഗണം* എന്നു പറയുന്നു. ഒരു അനന്തഗണത്തിൽ എണ്ണമററ അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 3

അഖണ്ഡസംഖ്യകളെ താഴെ പറയുന്ന വിധത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണു്.

$$\{ 0, 1, 2, 3, \ldots \}$$

ഇവിടെ കുത്തുകൾ ഒരു സാന്തഅംഗം ഇല്ലാത്ത ഒരു അനന്തഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 4

3 ന്റെ എല്ലാ ധനഗുണാങ്കങ്ങളും താഴെ പറയും പ്രകാരം എഴുതാം.

$$\{ 0, 3, 6, 9, 12, \ldots \}$$

5. താഴെ പറയുന്നവയിൽ സാന്തഗണങ്ങളും അനന്തഗണങ്ങളും ഏവ ?
   (a) $\{ 1, 2, 3, 4, \ldots 100 \}$
   (b) എല്ലാ ധനപൂർണ സംഖ്യകളുടെയും വർഗം.
   (c) ഇന്ത്യയിലെ എല്ലാ പൗരന്മാരുടേയും ഗണം.
   (d) 10^9 നേക്കാൾ ചെറുതായ എല്ലാ ധനപൂർണ സംഖ്യകളും.
   (e) 10^9 നേക്കാൾ വലുതായ എല്ലാ ധനപൂർണ സംഖ്യകളും.
   (f) എല്ലാ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടേയും ഗണം.
   (g) പരിമേയസംഖ്യകൾ $\frac{1}{100}$ ന്റെയും $\frac{2}{100}$ ന്റെയും ഇടയ്ക്കുള്ള പരിമേയ സംഖ്യകളുടെ ഗണം.

6. താഴെ പറയുന്ന ഗണങ്ങൾ ഒരു ബ്രാക്കററിനകത്തു് എഴുതുക.

(a) ചോദ്യം 5b യിലെ ഗണം.

(b) ചോദ്യം 5d യിലെ ഗണം.

(c) ചോദ്യം 5c യിലെ ഗണം.

സാധാരണയായി ഗണങ്ങളെ വലിയ അക്ഷരങ്ങൾ കൊണ്ടാണു് സൂചിപ്പിക്കുന്നതു്. ഉദാഹരണമായി, ഏകാദികളുടെ ഗണത്തെ N എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ടും അഖണ്ഡസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ W കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കുന്ന ചില പ്രാമാണികഅങ്കനങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

$$N = \{ 1, 2, 3, \ldots, \}$$
$$W = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots, \}$$
$$I = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots, \}$$

(ഇവിടെ -3 നു് മുമ്പു് ഇട്ടിരിക്കുന്ന കുത്തുകൾ -3 നു് മുമ്പു അനന്തമായ നിരവധി അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടെന്നു് നിരീക്ഷിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.)

$Q = \left\{ \frac{a}{b} \right.$ രൂപത്തിലുള്ള എല്ലാ ഭിന്നിതങ്ങളും, ഇവിടെ aയും bയും പൂർണസംഖ്യകളും $b \neq 0$ ഉം ആണെങ്കിൽ $\left. \right\}$

(എല്ലാ പരിമേയ സംഖ്യകളുടെയും ഗണമാണു് Q. കൂടാതെ വാചികമായ വിവരണത്തേയും ബ്രാക്കററുകളെയും കൂട്ടിയോജിപ്പിക്കാം എന്നും കാണുക).

പച്ചനിറത്തിലുള്ള എല്ലാ പോത്തുകളുടേയും ഗണത്തെ എഴുതണം എന്നു സങ്കല്പിക്കുക. മുകളിൽ പറഞ്ഞ വാക്യം ഒരു ഗണത്തെ വിവരിക്കുന്നു എന്നു സങ്കല്പിക്കാമെങ്കിലും ആ ഗണത്തിൽ അത്തരത്തിൽപ്പെട്ട ഒരു അംഗവും ഇല്ല എന്നു നമുക്കു അറിയാം. ആ ഗണത്തെ അതായതു് അംഗങ്ങൾ ഇല്ലാത്ത ഗണത്തെ *ശൂന്യഗണം* എന്നു് വിളിക്കുന്നു. ശൂന്യഗണം φ കൊണ്ടു് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 5

ഗണം A, ഗണം B എന്നിവ രണ്ടിലും ഉള്ള അഖണ്ഡസംഖ്യകളുടെ ഗണം C ശൂന്യമാണു്. അതായതു് $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ ഉം $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ ഉം ആണു്. ആയതിനാൽ ഗണം C ശൂന്യം ആണു്. അപ്രകാരം $C = \varphi$ ആണു്.

ഉദാഹരണം 6

ഗണം A യിലും B യിലും കൂടി ഉൾപ്പെടുന്ന അംഗങ്ങൾ ഗണം C യിൽ ഉണ്ടു്. $A = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$ ഉം $B = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ ഉം ആണു്. ഇവിടെ

രണ്ടു ഗണത്തിലും കൂടി പൊതുവായി 0 ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് $C = \{0\}$ ആണ് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ഇവിടെ ഒരു അംഗമെങ്കിലും ഉൾപ്പെട്ടതുകൊണ്ട്, അതായത് 0 ഉള്ളതുകൊണ്ട് ഗണം C, ϕ ന് തുല്യമല്ലാ എന്നതു് അതിപ്രധാനമായ ഒരു വസ്തുതയാണ്. 94763

7. താഴെ പറയുന്ന ഗണത്തിനു് വിവരണം കൊടുക്കുക.

$$\{2, 4, 6, 8 \ldots\}$$

8. 31, 37 എന്നീ സംഖ്യകളുടെ ഇടക്കുള്ളതും അഭാജ്യസംഖ്യകൾ ഉൾക്കൊള്ളുന്നതും ആയ പൂർണസംഖ്യകളുടെ ഗണം എഴുതുക.

9. താഴെ പറയുന്ന ഗണത്തിലുള്ള അംഗങ്ങളെ ഒരു ബ്രാക്കററിനകത്തു് എഴുതുക.

(a) 99 നേക്കാൾ വലുതും 2 സ്ഥാനം ഉള്ളതും ആയ പൂർണസംഖ്യകളുടെ ഗണം.

(b) 98 നേക്കാൾ വലുതും 2 സ്ഥാനം ഉള്ളതും ആയ ഇരട്ട സംഖ്യകളുടെ ഗണം.

(c) 4 കൊണ്ടു നിശ്ശേഷം ഹരിക്കാവുന്നതും 20 നും 40 നും ഇടക്കുള്ളതും ആയ എല്ലാ അഖണ്ഡസംഖ്യകളുടെയും ഗണം.

(d) 5 ൻെറ എല്ലാ ഗുണിതങ്ങളുടെയും (പൂജ്യത്തിനേക്കാൾ വലുതു്) ഗണം.

2. തുറന്ന പ്രസ്താവനകൾ

താഴെ പറയുന്ന വാക്യങ്ങളും വാചകങ്ങളും പരിശോധിച്ചുനോക്കുക:

(i) 13 ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയാണ്.

(ii) മദ്രാസ് ദൽഹിയുടെ വടക്കു സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.

(iii) നെഹ്റു

(iv) വാതിൽ തുറക്കുക.

(v) $3 \times 7 = 24$

(vi) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < 1$

ഇവിടെ (i) ഉം (vi) ഉം സത്യവാചകങ്ങളും (ii) ഉം (v) ഉം അസത്യവാചകങ്ങളും ആണ് എന്ന് നമുക്കറിയാം. എന്നാൽ (iii) ഉം (iv) ഉം സത്യമോ അസത്യമോ ആണെന്നു പറയുവാൻ സാധ്യമല്ല. സത്യമോ അസത്യമോ എന്നു പറയുവാൻ സാധിക്കുന്ന (എന്നാൽ സത്യവും അസത്യവും ആയിരിക്കുകയില്ല) ഒരു വാചകത്തെ ഒരു *പ്രസ്താവന* എന്നു പറയുന്നു.

10. താഴെ പറയുന്ന വാക്യങ്ങളിലെയും വാചകങ്ങളിലെയും പ്രസ്താവനകൾ ഏവ?

(i) a (ii) $3 + 6 = 9$ (iii) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} < 1$

ഉദാഹരണം 7

താഴെ പറയുന്ന വാചകം പരിശോധിച്ചു നോക്കുക.

"അദ്ദേഹം ഇന്ത്യയുടെ രാഷ്ട്രപിതാവ് ആയിരുന്നു"—ഇതു് ഒരു പ്രസ്താവന ആകുന്നില്ല. എന്തെന്നാൽ ഇവിടെ അദ്ദേഹം എന്നു പറഞ്ഞാൽ ആരാണ് എന്നു വ്യക്തമാക്കിയിട്ടില്ല. മററൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, 'അദ്ദേഹം' എന്നതിനു പകരം, ആ സ്ഥാനത്തിനു് അവകാശികളായ ആളുകളുടെ ഗണം അതായതു് {നെഹ്റു, ഗാന്ധിജി, രാജേന്ദ്രപ്രസാദ്} ഇവരിൽ ആരുടെയെങ്കിലും പേർ തിരഞ്ഞെടുക്കുകയാണെങ്കിൽ അതു് ഒരു പ്രസ്താവന ആയിത്തീരും. ഗാന്ധിജി എന്നു തിരഞ്ഞെടുക്കുകയാണെങ്കിൽ അതു് ഒരു സത്യപ്രസ്താവന ആയിരിക്കും. എന്നാൽ രാജേന്ദ്രപ്രസാദ് എന്നോ നെഹ്റു എന്നോ പറയുകയാണെങ്കിൽ ആ പ്രസ്താവനകൾ അസത്യമായിരിക്കും.

ഈ വാചകം തുറന്ന പ്രസ്താവനക്കുള്ള ഒരു ഉദാഹരണമാണ്. ഗണം {ഗാന്ധിജി} എന്നതു് തുറന്ന പ്രസ്താവനയുടെ സത്യഗണം ആണ്. 'അദ്ദേഹം' എന്നതു് ഒരു സാന്ത അംഗത്തെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നതെങ്കിലും, {നെഹ്റു, ഗാന്ധിജി, പ്രസാദ്} എന്ന ഗണത്തിൽ നിന്നു് ശരിയായ (അനുയോജ്യമായ) പേർ തിരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ്.

അനേകം ഗണിതീയ ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

ഉദാഹരണം 8

ഗണം {5, 6, 7, 8} ൽ നിന്നു് x നു വേണ്ട മൂല്യം തിരഞ്ഞെടുത്തു് "$3 + x = 9$" എന്നതു് ഒരു തുറന്ന പ്രസ്താവനയാക്കി മാററുക.

പ്രതിസ്ഥാപനം കൊണ്ട്.

$x = 5$	$3 + 5 = 9$	തെററ്
$x = 6$	$3 + 6 = 9$	ശരി
$x = 7$	$3 + 7 = 9$	തെററ്
$x = 8$	$3 + 8 = 9$	തെററ്

എന്നു കാണാവുന്നതാണ്.

ഇവിടെ സത്യഗണം {6} ആണ്. x ഒരു ചരം ആണെന്നും അതിന്റെ മൂല്യം സങ്കല്പനീയം ആണെന്നും നിങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കിയിട്ടുണ്ടല്ലോ. ഇവിടെ x ഒരു സാന്ത സംഖ്യയെയാണ് സൂചിപ്പിക്കുന്നതു്. എങ്കിലും തന്നിരിക്കുന്ന സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിൽ നിന്നു് തെററായ സംഖ്യകൾ മാററി ശരിയായ സംഖ്യ

തിരഞ്ഞെടുക്കേണ്ടതാണ് [{5, 6, 7, 8,} ഇവയിൽ നിന്നു്]. ആ ഗണത്തിനു് ഒരു പേർ പറയുന്നതിനു് അതായതു് ചരത്തിൻെറ ശരിയായ മൂല്യം കാണുവാൻ അതായതു് ചരത്തിൻെറ ഡൊമെയ്ൻ എഴുതിയാൻ അതു് വളരെ സൗകര്യപ്രദമായിരിക്കും. അതിനു് നാം ചില ലഘുവായ പ്രതീകങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി,

$A = \{1, 2, 3\}$ എന്നു് എടുക്കുക. ഗണം A യിൽ 1 ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നതിനു പകരം $1 \in A$ എന്നു് എഴുതുന്നു. പ്രതീകം $\in$ എന്നതു് ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നാണു് വായിക്കുന്നതു്. $\frac{1}{2}$ എന്നതു് A യിൽ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നില്ല എന്നു നമുക്കറിയാം. അപ്പോൾ

$\frac{1}{2} \notin A$ എന്നു എഴുതുന്നു.

ഡൊമെയ്ൻ (D) തന്നിരിക്കുന്ന ഒരു തുറന്ന പ്രസ്താവന എടുക്കുക. ആ പ്രസ്താവനയിൽ അടങ്ങിയിട്ടുള്ള അതേ അംഗങ്ങൾ തന്നെ D യിലും അടങ്ങിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ ആ പ്രസ്താവന സത്യപ്രസ്താവന ആണെന്നും അതു കൊണ്ടു് ആ പ്രസ്താവനയെ *സത്യ ഗണപ്രസ്താവന* എന്നു പറയുന്നു. ഉദാഹരണം 8 ൽ പറഞ്ഞ സത്യഗണം താഴെ പറയും പ്രകാരം എഴുതാവുന്നതാണു്.

$x \in \{5, 6, 7, 8$ അതായതു് $3 + x = 9\}$ എന്നതിൽ വാക്യത്തിനു പകരം ':' എന്ന പ്രതീകം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$\{x \in D : 3 + x = 9\}$ ഇതിൽ $D = \{5, 6, 7, 8\}$

കുറിപ്പു്: രണ്ടു ഗണങ്ങളിൽ ഒരേ അംഗങ്ങൾ അടങ്ങിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ അവ രണ്ടും തുല്യമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 9

തുറന്ന പ്രസ്താവനകളുള്ള സത്യഗണം തീരുമാനിക്കുക.

$$\{x \in Q : x + \tfrac{1}{2} = 1\} = \{\tfrac{1}{2}\}$$

വായിക്കുക: പരിമേയസംഖ്യകളിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന എല്ലാ x ൻെയും ഗണത്തെ $x + \frac{1}{2} = 1$ എന്നു വായിക്കുന്നു.

പരിമേയസംഖ്യ $\frac{1}{2}$ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന ഗണത്തിനു് തുല്യമാണെങ്കിൽ അതു് സത്യഗണം ആയിരിക്കുമെന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

സത്യഗണം എഴുതുമ്പോൾ അംഗം $\frac{1}{2}$ യെ ഒരു ബ്രാക്കററിനകത്തു് എഴുതുന്നു എന്നും മനസ്സിലാക്കുക.

ഉദാഹരണം 10

താഴെ പറയുന്ന തുറന്ന പ്രസ്താവനയുടെ സത്യഗണം ഏതാണ് എന്നു നിശ്ചയിക്കുക.

$$\{x \in N : x + \frac{1}{2} = 1\}$$

ഇവിടെ ഏകാദികം ഇല്ല എന്നു കാണാം

ആയതിനാൽ $\{x \in N : x + \frac{1}{2} = 1\} = \varphi$

11. താഴെ പറയുന്ന വാക്യങ്ങളിലേയും വാചകങ്ങളിലേയും പ്രസ്താവനകളും തുറന്ന പ്രസ്താവനകളും ഏവ?

(a) ഓരോ സമചതുരവും ഒരു സമാന്തര ചതുർഭുജം (സമാന്തരികം) ആണ്

(b) ഒരു സമചതുരം അല്ലാത്ത ഒരു സമാന്തര ചതുർഭുജം (സമാന്തരികം) ഉണ്ട്

(c) 7 ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയാണ്

(d) ഇന്ത്യ

(e) അദ്ദേഹം ഒരു രാജാവാണ്

(f) 2

(g) $2 + 3 < 7$

(h) $3x = 9$

(i) $3x = 9$. ഇതിൽ $x \in W$

(j) $3 + x = x + 3$.

എല്ലാ x ഉം $x \in Q$ ആണ്

12. താഴെ പറയുന്ന തുറന്ന പ്രസ്താവനകളിലെ സത്യഗണം തീരുമാനിക്കുക:

(a) x എന്നതു് ഏഷ്യയിലെ ഏററവും വലിയ നഗരം ആണ്. ആ ചരത്തിന്റെ (x ന്റെ) ഡൊമെയ്ൻ ഇന്ത്യയിലെ എല്ലാ നഗരങ്ങളും ആണ്.

(b) $x \in N$ ആണെങ്കിൽ $x \in 3$.

3. സമീകരണങ്ങളും അസമീകരണങ്ങളും

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ ബാക്കിയുള്ള ഭാഗങ്ങളിൽ രണ്ടു തരം തുറന്ന പ്രസ്താവനകളെപ്പററി നമുക്ക് പഠിക്കാം—അതായതു് സമീകരണങ്ങളും അസമീകരണങ്ങളും.

നിർവചനം: സമതാചിഹ്നം ഉള്ള തുറന്ന പ്രസ്താവനയെ ഒരു *സമീകരണം* എന്നു പറയുന്നു.

നിർവചനം: $<, \leqslant, >, \geqslant$ എന്നീ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉള്ള തുറന്ന പ്രസ്താവനയെ ഒരു *അസമീകരണം* എന്നു പറയുന്നു (ഈ അധ്യായത്തിൻെറ അവസാനം ഈ നിർവചനത്തിലേക്കു് ഒന്നു എത്തിനോക്കാം).

തുറന്ന പ്രസ്താവനയ്ക്കു് സംഗതമായ സത്യഗണം നാം നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ടു കഴിഞ്ഞാൽ സമീകരണം (അസമീകരണം) നിർധാരണം ചെയ്തുകഴിഞ്ഞു എന്നു നാം പറയുന്നു. അതിലുള്ള അംഗങ്ങളെ നിർധാരണങ്ങൾ (സാധനങ്ങൾ) എന്നു പറയുന്നു (ഒരു സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യണമെങ്കിൽ സത്യഗണത്തിലെ അംഗങ്ങൾക്കുള്ള അതേ മൂല്യങ്ങൾ തന്നെ ഉപയോഗിക്കുന്നു). അപ്പോൾ സമീകരണം (അസമീകരണം) നിർധാരണം ചെയ്യുവാൻ അതിലുള്ള ആ അംഗങ്ങൾ തന്നെ മതിയെന്നു നാം പറയുന്നു.

ചരത്തിലെ ഡൊമെയ്ൻ സാന്തമാണെങ്കിൽ, ഉദാഹരണം 3 ൽ കാണിച്ച പ്രതിസ്ഥാപനം കൊണ്ടു് സമീകരണത്തിലെ (അസമീകരണത്തിലെ) നിർധാരണങ്ങൾ കാണാവുന്നതാണു്. ഡൊമെയ്നിലുള്ള ഓരോ അംഗത്തേയും പരിശോധിച്ചുനോക്കിയാൽ അവ സത്യഗണത്തിലോ അസത്യഗണത്തിലോ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നു പറയാവുന്നതാണു്.

ഡൊമയ്നിലുള്ള അംഗങ്ങൾ അനന്തമാണെങ്കിൽ ഈ മാർഗം ഉപയോഗിച്ചു് നിർധാരണം ചെയ്യുവാൻ സാധ്യമല്ല.

ഉദാഹരണം 11

താഴെ പറയുന്നവയുടെ സത്യഗണം കാണുക.

$$\{x \in D : x^4 + 3x^2 + x - 3 = 0\}$$

ഇതിൽ $D = \{-1, 0\}$ ആണു്.

നിർധാരണം

$x = -1$. അപ്പോൾ $(-1)^4 + 3(-1)^2 + (-1) - 3 = 0$ · ശരിയാണു്

$x = 0$ അപ്പോൾ $0^4 + 3 \cdot 0^2 + 0 - 3 = -3$ തെററാണു്

സത്യഗണം $\{-1\}$ ആണു്.

ഉദാഹരണം 12

താഴെ പറയുന്നവയുടെ സത്യഗണം കാണുക.

$$\{x \in D : 4x + 2 < 2x + 1\}$$

ഇതിൽ $D = \{-2, -1, 0, 1\}$

നിർധാരണം

പ്രതിസ്ഥാപനം കൊണ്ടു് $x = -2$ എന്നു ലഭിക്കുന്നു. അപ്പോൾ

$4(-2) + 2 < 2(-2) + 1$ അതായതു് $-8 + 2 < -4 + 1$.

$-6 < -3$ എന്നതു് ശരിയാണു്.

$x = -1$ എന്നു് എടുക്കുക. അപ്പോൾ:

$4(-1) + 2 < 2(-1) + 1$

അപ്പോൾ, $-2 < -1$ എന്നു കിട്ടുന്നു. അതും ശരിയാണു്.

$x = 0$ എന്നും എടുക്കുക. അപ്പോൾ,

$4.0 + 2 < 2.0 + 1$, അതായതു്

$2 < 1$. അതു് തെററാണു്.

$x = 1$ എന്നു് എടുക്കുക. അപ്പോൾ $4.1 + 2 < 2.1 + 1$

അതായതു്, $6 < 3$. അതു് തെററാണു്.

ഉത്തരം :

സത്യഗണം $\{-2, -1\}$ ആണു്.

സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുവാൻ ആരംഭിക്കുന്നതിനു മുമ്പു് പൂജ്യത്തിന്റെ ഗുണനത്തിന്മേൽ ഉള്ള താഴെപ്പറയുന്ന നിയമങ്ങൾ ഓർമിക്കേണ്ടതാണു്.

രൂപം M_1 :

$a \cdot b = 0$ ത്തിനു് സമാനമാണു്.

$a = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $b = 0$ (രണ്ടും പൂജ്യത്തിനു് തുല്യമായിരിക്കുകയും ആവാം). $a \in Q$ വും $b \in Q$ വും സമാനങ്ങൾ ആയിരിക്കും.

രൂപം M_2 :

$a \cdot c = b \cdot c$ സമാനമാണു്. $a = b$ എന്നോ $c = 0$ എന്നോ (ഇവ മൂന്നും പൂജ്യത്തിനു തുല്യമായിരിക്കുകയും ആവാം) ആയതിനാൽ $a \in Q$, $b \in Q$, $c \in Q$ ഇവ സമാനങ്ങൾ ആയിരിക്കും.

"സമാനമാണു്" എന്ന വാക്യത്തിനു പകരമായി $\Leftrightarrow$ എന്ന പ്രതീകം നാം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

അപ്പോൾ

രൂപം

M_1 : $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $b = 0$ (അതല്ലെങ്കിൽ അവ രണ്ടും പൂജ്യമായിരിക്കും). അതുകൊണ്ടു് $a \in Q, b \in Q$.

ഗുണം M_2 : $a \cdot c = b \cdot c \Leftrightarrow a = b$ അല്ലെങ്കിൽ $c = 0$ (അല്ലെങ്കിൽ ഇവ മൂന്നും 0). അതുകൊണ്ട് എല്ലാ a യും b യും $c \in Q$.

ആറാം ക്ലാസ്സിൽ ഗുണം 2 ലെ ഉദാഹരണങ്ങൾ നിങ്ങൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ.

അതായത്

$4x = 8$

$4x = 8 \Leftrightarrow 4x = 4 \times 2 \Leftrightarrow x \times 4 = 2 \times 4 \Leftrightarrow x = 2.$

4. ഒരു സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ

വ്യത്യസ്തമായ വാക്യങ്ങൾ ഉള്ള താഴെപ്പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

ഉദാഹരണം 13

(a) $\{x \in Q : 2x - 1 = 0\}$ എന്നതിന്റെ സത്യഗണം എന്തെന്നു കാണുക.

ഉത്തരം : $\{\frac{1}{2}\}$

(b) സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക.

$$2x - 1 = 0,$$

ചരസംഖ്യയുടെ ഡൊമെയ്ൻ ഒരു പരിമേയസംഖ്യ ആണ്. ചുരുക്കിപ്പറഞ്ഞാൽ $x \in Q$ വും ആണ്.

ഉത്തരം : $x = \frac{1}{2}$ (സമീകരണത്തിനു ഒരു മൂലമേയുള്ളു).

ഉദാഹരണം 14

(a) $\{x \in Q : (x - 1)(x + 1) = 0\}$ എന്നതിന്റെ നിർധാരണഗണം തീരുമാനിക്കുക.

നിർധാരണം:

$$(x - 1)(x + 1) = 0$$

$$x = 1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } x = -1$$

ഉത്തരം : $\{1, -1\}$

(b) $(x - 1)(x + 1) = 0$ എന്ന സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക. $x \in Q$ ആണ്.

ഉത്തരം : $x_1 = -1$; $x_2 = 1$ (സമീകരണത്തിനു രണ്ടു മൂലങ്ങൾ ഉണ്ട്).

ഉദാഹരണം 15

(a) $\{x \in Q : x + 5 = x + 1\}$ എന്നതിൻെറ സത്യഗണം കാണുക.

ഉത്തരം : ശൂന്യഗണം.

(b) $x + 5 = x + 1$ എന്ന സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക. ഇതിൽ $x \in Q$ ആണ്.

ഉത്തരം : ഇത്തരത്തിലുള്ള ഒരു പരിമേയസംഖ്യ ഉണ്ടായിരിക്കുകയില്ല. (സമീകരണത്തിനു് മൂലങ്ങൾ ഇല്ല).

ഉദാഹരണം 16

(a) $\{x \in Q : (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1\}$ എന്നതിലെ സത്യഗണം കാണുക.

ഉത്തരം : Q (എല്ലാപരിമേയസംഖ്യകളുടെയും ഗണം)

(b) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ എന്ന സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക.

ഇതിൽ $x \in Q$ ആണ്.

ഉത്തരം : സമീകരണം എല്ലാ $x \in Q$ വിനും എല്ലായ്പോഴും ശരിയായിരിക്കും (സമീകരണത്തിനു് അനന്തമായ നിരവധിമൂലങ്ങൾ ഉണ്ടു്).

മേല്പറഞ്ഞ ഉദാഹരണങ്ങൾ ഓരോന്നും വ്യത്യസ്തരീതിയിലാണ് പ്രതിപാദിച്ചിരിക്കുന്നതെന്നു് നമുക്കു് മനസ്സിലാക്കാം. മുകളിൽപ്പറഞ്ഞ ഉദാഹരണങ്ങൾ ഓരോന്നിലും സമീകരണങ്ങൾക്കും അസമീകരണങ്ങൾക്കും പാർട്ട് b യിൽ ഉപയോഗിച്ച രൂപങ്ങൾ തന്നെയാണ് സാധാരണയായി ഉപയോഗിക്കാറുള്ളതു്. അതുകൊണ്ടു് ചരങ്ങളുടെ ഡൊമെയ്ൻ ആയി Q വിനെ എടുക്കാം.

ഉദാഹരണം 14 നിർധാരണം ചെയ്യുന്നതിനു് ഉപയോഗിച്ച M_1 ഉം M_2 ഉം കൊണ്ടു് സ്ഥാപിച്ച സങ്കലന നിയമത്തിനു്, സമരൂപമായ നിയമം തന്നെ ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

$$A : a + c = b + c \Leftrightarrow a = b$$

എല്ലാ $a \in Q$ ഉം $b \in Q$ ഉം $c \in Q$ ഉം.

കുറിപ്പ് 1. $a = b$ ആയതിനാൽ $a + c = b + c$ ($a = b$ എന്നാൽ 'a' യും 'b' യും ഒരേ സംഖ്യകൾ ആണ് എന്നും അവയോടുകൂടി ഒരേ സംഖ്യകൾ കൂട്ടിയാൽ തുക തുല്യമായിരിക്കും എന്നും മനസ്സിലാക്കാം. അതായതു്, $a + c = b + c$ ആയിരിക്കും. $a = b$ ആയതുകൊണ്ടു് $a + c = b + c$ എന്ന മറെറാരു പ്രസ്താവന പരിമേയസംഖ്യകൾക്കുള്ള അടിസ്ഥാനപരമായ ഒരു നിയമം തന്നെ ആയി പരിഗണിക്കാവുന്നതാണ്).

കുറിപ്പ് 2. $a + x = b : x \in Q; a, b \in Q$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള സമീകരണങ്ങൾക്ക് ഒരേ ഒരു മൂലം മാത്രമേ ഉണ്ടായിരിക്കുകയുള്ളു എന്നു തെളിയിക്കാൻ വളരെ എളുപ്പമുണ്ട്.

താഴെപ്പറയുന്ന സമീകരണത്തിന്, അതായത് x_1 നും x_2 വിനും രണ്ടു മൂലങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കുമെന്നു സങ്കല്പിക്കുക. അപ്പോൾ

$$a + x_1 = b \text{ യും}$$
$$a + x_2 = b \text{ യും ആണ്.}$$

$A, a + x_1 = a + x_2 \Leftrightarrow x_1 + a = x_2 + a \Leftrightarrow x_1 = x_2$ എന്നു വ്യക്തമാകുന്നു.

x നുള്ള ഒരു മൂല്യം ഇവിടെ ഉണ്ട്. അതായത്

$$a + x = b$$

എന്നതു് സങ്കലനത്തിന്റെ താഴെപ്പറയുന്ന അടിസ്ഥാനപരമായ നിയമങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചു നിൽക്കുന്നു.

എല്ലാ $a \in Q$ വിനും $b \in Q$ വിനും ചില $x \in Q$ കൾ ഉണ്ട്. അതായത്

$$a + x = b$$

ഓരോ സമീകരണവും ഇങ്ങിനെ എഴുതാവുന്നതാണ്.

$$a + x = b$$

ഇതിൽ $a \in Q$, Q വിൽ ഒരു മൂലം മാത്രമേ ഉള്ളു. അതുകൊണ്ട്

$$x = b - a \text{ എന്നു നമുക്കെഴുതാം.}$$

ഉദാഹരണം 17

Q വിലെ താഴെ പറയുന്ന സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക.

(a) $2x + 5 = x + 4$

(b) $x - 3 + 5x = 5x + 5$

നിർധാരണം:

(a) $2x + 5 = x + 4 \overset{A}{\Leftrightarrow} x + x + 5 = x + 4$

$\Leftrightarrow x + 5 + x = 4 + x \overset{A}{\Leftrightarrow} x + 5 = -1 + 5$

$\overset{A}{\Leftrightarrow} x = -1.$

(b) $x - 3 + 5x = 5x + 5 \Leftrightarrow x - 3 + 5x = 8 - 3 + 5x$

$\overset{A}{\Leftrightarrow} x = 8$

നിങ്ങളുടെ നിർധാരണം ശരിയാണോ എന്നു പരിശോധിക്കുവാൻ, സമീകരണത്തിൻെറ ഇടതുഭാഗത്തുള്ളതിൻെറ മൂല്യവും വലതുഭാഗത്തുള്ളതിൻെറ മൂല്യവും തുല്യമാണോ എന്നു നോക്കിയാൽ മതി. ഇവ രണ്ടും തുല്യമാവുകയാണെങ്കിൽ ഉത്തരം ശരിയായിരിക്കും.

ചരത്തിൻെറ മൂലം താഴെപ്പറയും പ്രകാരം പ്രതിസ്ഥാപിക്കാവുന്നതാണ്.

(a) $x = -1$ എന്നതിൽ നിന്ന്

$$\text{ഇ. വ.} = 2(-1) + 5 = 3$$
$$\text{വ. വ.} = -1 + 4 = 3$$
$$\therefore x = -1 \text{ ഒരു മൂലമാണ്.}$$

(b) $x = 8$ എന്നതിൽ നിന്ന് :

$$\text{ഇ. വ.} = 8 - 3 + 5{\cdot}8 = 45$$
$$\text{വ. വ.} = 5{\cdot}8 + 5 = 45$$
$$\therefore x = 8 \text{ ഒരു മൂലമാണ്.}$$

രണ്ടോ അതിൽ കൂടുതലോ ഉദാഹരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്തുനോക്കുമ്പോൾ, M_1, M_2, A എന്നിവയുടെ നിയമങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 18

Q വിൽ ഉള്ള താഴെപ്പറയുന്ന സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക.

$$(x + 4)(x - 2)(x - 1) = 0.$$

നിർധാരണം

$$(x + 4)(x - 2)(x - 1) = 0.$$

$\Leftrightarrow x + 4 = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $x - 2 = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $x - 1 = 0 \ldots M_1$

അപ്പോൾ $x + 4 = 0 \overset{A}{\Leftrightarrow} x + 4 = 4 - 4 \Leftrightarrow x = -4$ ഉം

$x - 2 = 0 \overset{A}{\Leftrightarrow} x - 2 = 2 - 2 \Leftrightarrow x = 2$ ഉം

$x - 1 = 0 \overset{A}{\Leftrightarrow} x - 1 = 1 - 1 \Leftrightarrow x = 1$ ഉം ആണ്.

ഉത്തരം : $x = -4$, അല്ലെങ്കിൽ 2, അല്ലെങ്കിൽ 1.

-4, 2, 1 എന്നിവ സമീകരണത്തിലെ മൂലങ്ങൾ ആണ്.

ഉദാഹരണം 19

Q വിലെ താഴെപ്പറയുന്ന സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക :

$$(2x - 1)(x + 2) = 0$$

നിർധാരണം

$$(2x - 1)(x + 2) = 0 \overset{M_1}{\Leftrightarrow} 2x - 1 = 0 \text{ അഥവാ } x + 2 = 0.$$

$$2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 + 1 = 0 + 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\, 2x = \tfrac{1}{2} \cdot 1$$

$$\Leftrightarrow x = \tfrac{1}{2}$$

$$x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 2 - 2 = 0 - 2$$

$$\Leftrightarrow x = -2$$

ഉത്തരം: $x = \frac{1}{2}$ അല്ലെങ്കിൽ $x = -2$.

$\frac{1}{2}$ ഉം -2 ഉം സമീകരണത്തിലെ മൂലങ്ങൾ ആണ്.

അതിൽ നിന്ന്,

(i) ഒരു സമീകരണത്തിന് ഒരു മൂലം മാത്രം ഉണ്ടായിരിക്കും. ഉദാഹരണമായി, $2x - 1 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന് ഒരേ മൂലം മാത്രമേ ഉള്ളു.
അതായത് $x = \frac{1}{2}$.

(ii) പല മൂലങ്ങൾ ഉള്ള സമീകരണങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. അതായത് സമീകരണം $(x-1)(x+1)(x-2) = 0$. ഇതിന് മൂന്നു മൂലങ്ങൾ ഉണ്ട്. $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$ എന്നിവ.

(iii) ചില സമീകരണങ്ങൾക്ക് ഒരു മൂലവും ഉണ്ടായിരിക്കയില്ല. ഉദാഹരണമായി, സമീകരണം $x + 5 = x + 1$ എന്നതിന് ഒരൊററ മൂലവും ഇല്ല.

(iv) അവസാനമായി, ഒരു സമീകരണത്തിൽ അനവധി അനന്ത മൂലങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. സമീകരണം $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ എന്നതിന് സംഖ്യാതീതമായ അനേകം മൂലങ്ങൾ ഉണ്ട്. എന്തെന്നാൽ x ന് എന്തു മൂല്യം കൊടുത്താലും ഈ സമീകണം ശരിയായിരിക്കും. ഇത്തരം പ്രകരണങ്ങളിൽ, ഇങ്ങനെയുള്ള സമീകരണത്തെ *സർവസമീകരണം* എന്നു പറയുന്നു.

13. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾക്ക് എത്ര മൂലങ്ങൾ ഉണ്ട്?

(a) $x(x + 5) = 0$ (b) $2x - 1 = 5$

(c) $x^2 + 5 = 9$ (d) $4x + 1 = 4x + 3$

(e) $5(x - 2) = 5x - 10$.

14. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങളിൽ നിന്നും സർവസമീകരണങ്ങൾ ഏവയെന്നു പറയുക.

(a) $5x + 3 = 3 + 5x$ (b) $4 - x = x$

(c) $y = -y$ (d) $x + (x + 1) = 2x + 1$

15. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങളിൽ നിന്നും സർവസമീകരണങ്ങൾ ഏവ യെന്നും മൂലങ്ങൾ ഇല്ലാത്ത സമീകരണങ്ങൾ ഏവയെന്നും പറയുക.

(a) $2m + 1 = 2(m + 2)$

(b) $5a - 3a - 15 - 16 = 2a - 25$

(c) $4z - 3z + 3 + 4 = z + 7$

(d) $3x - 12 = 3(x - 4)$

16. താഴെ പറയുന്ന മൂലങ്ങൾ ഉള്ളതും ഒരു അജ്ഞാത സംഖ്യ ഉള്ളതും ആയ ഒരു സമീകരണമെഴുതുക.

(a) 4 (b) 0 (c) -1

17. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലം $y = 3$ ആയിരിക്കാത്തതു് എന്തുകൊണ്ടാണു് എന്നു വിശദീകരിക്കുക:

$$\frac{5}{y-3} = \frac{2}{y-1}$$

5. സമാനസമീകരണങ്ങൾ

സമീകരണങ്ങൾ ഓരോന്നിലും ഒരുപോലെയുള്ള മൂലങ്ങൾ ഉണ്ടു്. അവയെ സമാന സമീകരണങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം 20

$3x + 9 = 15$, $x + 3 = 5$ എന്നീ സമീകരണങ്ങൾ രണ്ടും സമാനങ്ങൾ ആണു് അവ രണ്ടിലും $x = 2$ എന്ന ഒരേ മൂലമാണുള്ളതു്.

ഇതിനു വിപരീതമായി $x - 3 = 0$ ഉം $(x-3)(x-4) = 0$ ഉം സമാനങ്ങൾ അല്ല. എന്തെന്നാൽ ആദ്യത്തെ സമീകരണത്തിനു് ഒരു മൂലം മാത്രമേയുള്ളു. അതായതു് $x = 3$. എന്നാൽ മറേറതിനു് രണ്ടു മൂലങ്ങൾ ഉണ്ടു്; $x_1 = 3$ ഉം $x_2 = 4$ ഉം.

മൂലങ്ങൾ ഇല്ലാത്ത സമീകരണങ്ങളെയും സമാനങ്ങൾ ആയി എടുക്കാവുന്നതാണു്.

ആയതിനാൽ $x + 3 = x + 4$ ഉം $2x - 1 = 2x - 5$ ഉം സമാന സമീകരണങ്ങൾ ആണു്.

നിർവചനത്തിനു് അനുയോജ്യമാകത്തക്കവിധം സർവസമമായിരിക്കുന്ന സമീകരണങ്ങളെയും സമാനങ്ങൾ ആണെന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം 21

$4x + 3 = 3 + 4y$ യും $3z + 6 = (z + 2) \times 3$ യും സമാന സമീകരണങ്ങളാണ്.

18. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ സമിനങ്ങളാണോ?

(1) $x + 2 = 0$ ഉം $(x - 2)(x + 2) = 0$ ഉം

(2) $5x + 1 = 2$ ഉം $10x + 2 = 4$ ഉം

(3) $2x + 1 = 2x + 2$ ഉം $4x - 5 = 4x - 1$ ഉം

(4) $x(x - 5) = 0$ ഉം $x - 5 = 0$ ഉം

19. താഴെ പറയുന്ന സമീകണങ്ങൾക്ക് സമാനമായ സമീകരണങ്ങൾ എഴുതുക.

(a) $2x - 1 = 5$ (b) $x - 1 = \frac{2x - 2}{2}$

(c) $2x + 3 = 2x - 1$

20. $2x + 1 = x = 3$ ന് സമാനമായതും സമീകരണത്തിന്റെ ഒരേ ഒരു മൂലം അതായത് $x = 4$ ഉം ആയ ഒരു സമീകരണം എടുക്കുക.

21. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക.

(a) $11 + 4x = 3x - 1$

(b) $2 - 0.5x = 1.4 - 1.5x$

(c) $5 - 6z - 4 = 4 - 7z$

(d) $2\frac{1}{3}x + 1 = 1\frac{1}{2} + 1\frac{1}{3}x$

22. ഒരേ സാംഖ്യാത്മകമൂല്യം ഉള്ള രണ്ടു വ്യംജകങ്ങൾ $2x - 1$, $x + 1$ എന്നിവയിൽ x ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

23. $4y + 3 - 3y$ എന്ന വ്യംജകം 4 ന് തുല്യമാണെങ്കിൽ y യുടെ മൂലം എന്തായിരിക്കും?

24. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക.

(a) $-7x = 14$ (b) $2\frac{1}{4}y = -4\frac{1}{2}$

(c) $-x = -1$ (d) $-0.65x = 1.95$

(e) താഴെ പറയുന്ന സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുവാൻ ഒരു കുട്ടിയോടു് പറഞ്ഞു.

$$3x - 9 = 2x - 6$$

കുട്ടി താഴെ പറയും പ്രകാരം ഉത്തരം എഴുതി.

$$3(x - 3) = 2(x - 3) \text{ അതായത് } 3 = 2$$

എന്നാൽ കുട്ടികൾ പററിയ തെററു കാണുക.

25. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(a) $x - 7 + 8x = 9x - 3 - 4x$

(b) $x + 1\frac{1}{2}x + 3 = \frac{2}{3}x + 4 + \frac{5}{6}x - \frac{6}{5}x + \frac{1}{5}$

(c) $3 + 2{\cdot}25y + 2{\cdot}6 = 2y + 5 + 0{\cdot}4y$

(d) $5z + 0{\cdot}48 - 2{\cdot}35z = 5{\cdot}381 - 2{\cdot}9z + 10.42$

(e) $2\,|x| - 1 = |x| + 7$

(f) $|x + 3| = -1.$

26. താഴെപ്പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക.

(1) $17(2 - 3n) - 5(n + 12) = 8(1 - 7n)$

(2) $(x + 5)(x + 2) - 3(4x - 3) = (x - 5)^2$

(3) $3(z + 1)^2 + (z - 4)^3 = 101 + (z - 3)^3$

(4) $(m + 1)^3 - (m - 1)^3 = 6(m^2 + m + 1)$

(5) $\frac{3a}{2} + \frac{a}{6} - \frac{2a}{9} = 13$

(6) $\frac{1 - 9y}{5} = \frac{19 - 3y}{8}$

6. സമീകരണങ്ങൾ വഴിയുള്ള പ്രശ്നനിർധാരണം

താഴെ പറയുന്ന പദ്ധതിക്കു് അനുയോജ്യമായ സമീകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പ്രശ്നങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

(1) പ്രശ്നത്തിന്റെ നിബന്ധനകൾക്കു് അനുയോജ്യമായ അജ്ഞാത മൂല്യം കാണുവാൻ ആ മൂല്യത്തെ x കൊണ്ടു് സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.

(2) x ഉം ഏകാദികളും ഉപയോഗിച്ച് ദത്തം വഴി രണ്ടു വ്യംജകങ്ങൾ കാണാവുന്നതാണ്.

(3) തന്നിരിക്കുന്ന പ്രശ്നത്തിന്റെ നിബന്ധനകൾക്കു് അനുയോജ്യമായി ലഭിച്ച വ്യംജകങ്ങളെ സമീകരിക്കുക.

(4) സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്തു് അജ്ഞാതസംഖ്യ x ന്റെ മൂല്യം നിർണയിക്കുക.

(5) x ന്റെ ഈ മൂല്യത്തിൽ നിന്നു് നമുക്കു ഉത്തരം ലഭിക്കുന്നു.

(6) പ്രശ്നത്തിൻെറ നിബന്ധനക്കു് അനുയോജ്യമായ നിരവധി സംഖ്യകൾ നിർണയിക്കപ്പെട്ടു കഴിഞ്ഞെങ്കിൽ, x ൻെറ മൂല്യങ്ങളും നിർണയിക്കപ്പെട്ടു കഴിഞ്ഞിരിക്കും.

പ്രശ്നത്തിൻെറ നിബന്ധനക്കു് അനുയോജ്യമായ സംഗതികൾ ഒരു പ്രത്യേക പട്ടികയിൽ എഴുതി ക്രിയചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ അതു് വളരെ എളുപ്പമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 22

ഒരാൾ കുട്ടികൾക്കായി ചെറുതും വലുതുമായി 14 പന്തുകൾ വാങ്ങി. അവ 24.4 രൂപക്കു് അവർക്കു കൊടുത്തു. ഒരു വലിയ പന്തിൻെറ വില 2.5 രൂപയും ചെറിയതിൻെറ വില 1.2 രൂപയും ആണു്. എന്നാൽ ഓരോന്നും എത്ര വീതം ഉണ്ടു്?

	പന്തുകളുടെ എണ്ണം	ഒരു പന്തിന്റെ വില	ആകെ പന്തുകളുടെ വില
വലിയപന്തുകൾ	x	2.5	2.5x
ചെറിയപന്തുകൾ	16 − x	1.2	1.2(16−x)

പ്രശ്നത്തിൻെറ നിബന്ധനക്കു് അനുയോജ്യമായി:

$$2.5x + 1.2\,(16 - x) = 24.4$$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

താഴെ പറയുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ സമീകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചു് നിർധാരണം ചെയ്യുക.

27. ഒരു സ്കൂളിൽ മൂന്നു ക്ലാസ്സുകളിലായി ആകെ 119 കുട്ടികൾ ഉണ്ടു്. ആദ്യത്തെ ക്ലാസ്സിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം രണ്ടാമത്തേതിനേക്കാൾ 4 കൂടുതലും മൂന്നാമത്തെ ക്ലാസ്സിലുള്ളതിനേക്കാൾ 3 കുറവും ആണു്. എന്നാൽ, ഓരോ ക്ലാസ്സിലും എത്ര കുട്ടികൾ വീതം ഉണ്ടു്?

28. മൂന്നു ക്ലാസ്സുകളിലും കൂടി ആകെ 121 കുട്ടികൾ ഉണ്ടു്. ആദ്യത്തെ ക്ലാസ്സിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം രണ്ടാമത്തേതിനേക്കാൾ 4 കുറവും മൂന്നാമത്തേതിനെക്കാൾ 3 കൂടുതലുമാണു്. എന്നാൽ, ഓരോ ക്ലാസ്സിലും എത്ര കുട്ടികൾ വീതം ഉണ്ടു്?

29. ഒരു എൻജിൻെറ പിന്നിലുള്ള വാഗണിൻെറ തൂക്കം, അതു് നിറഞ്ഞിരിക്കുമ്പോൾ 122.8 മെട്രിക്ടൺ ആണു്. അതിൽ കൽക്കരിയുടെ തൂക്ക

ത്തിനെക്കാറം 3 മെട്രിക് ടൺ കൂടുതൽ തൂക്കം വെള്ളമുണ്ട്. ശൂന്യമായ വാഗണിന്റെ തൂക്കം കൽക്കരിയുടെ തൂക്കത്തിനെക്കാറം 45.8 മെട്രിക് ടൺ കൂടുതൽ ആണ്. എന്നാൽ വെള്ളം, കൽക്കരി, വാഗൺ എന്നിവ ഓരോന്നിന്റെയും തൂക്കം കാണുക.

30. ABC എന്ന ത്രികോണത്തിലെ കോണം A മററു കോണങ്ങളുടെ തുകക്കു തുല്യമാണ്. കോണങ്ങറം B യുടെയും C യുടെയും അനുപാതം 4 : 5 ആണെങ്കിൽ ആ ത്രികോണത്തിലെ ഓരോ കോണവും കാണുക.

31. ഒരു ത്രികോണത്തിലെ കോണങ്ങറം 2 : 7 : 11 എന്ന അനുപാതത്തിൽ ആണെങ്കിൽ ആ ത്രികോണത്തിലെ കോണങ്ങറം എത്ര ഡിഗ്രി വീതമാണ് എന്നു കാണുക.

32, ഒരു സമദ്വിഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ പാദം മററു രണ്ടു വശങ്ങളുടെ $\frac{3}{4}$ ഭാഗത്തിനു തുല്യമാണ്. അതിന്റെ ചുററളവ് 22 സെ. മീററർ ആണെങ്കിൽ, ആ ത്രികോണത്തിലെ വശങ്ങറം കാണുക.

33. ഒരു സ്റ്റോറിൽ ഉള്ള ധാന്യത്തിന്റെ തൂക്കം മറെറാരു സ്റ്റോറിൽ ഉള്ളതിന്റെ 2 മടങ്ങാണ്. ആദ്യത്തെ സ്റ്റോറിൽ നിന്നു 750 മെട്രിക് ടൺ ധാന്യവും രണ്ടാമത്തേതിൽ നിന്നു 350 മെട്രിക് ടൺ ധാന്യവും എടുത്താൽ രണ്ടിലും തുല്യമാവും. എന്നാൽ ഓരോ സ്റ്റോറിലുമുള്ള ധാന്യത്തിന്റെ തൂക്കം എന്തായിരിക്കും?

34. ഒരു ഖനിയിൽ ഉള്ള കൽക്കരി മറെറാരു ഖനിയിലുള്ളതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. ആദ്യത്തേതിൽ 80 മെട്രിക് ടൺ കൽക്കരിയും രണ്ടാമത്തേതിൽ 145 മെട്രിക് ടൺ കൽക്കരിയും കൂടി കൂട്ടിച്ചേർത്താൽ രണ്ടിലും ഉള്ള കൽക്കരിയുടെ തൂക്കം ഒപ്പമാകും. എന്നാൽ, ഓരോ ഖനിയിലും ഉള്ള കൽക്കരിയുടെ തൂക്കം കാണുക.

35. ഒരു ടാങ്കിൽ ഉള്ള പെട്രോളിന്റെ വ്യാപ്തം മറെറാരു ടാങ്കിൽ ഉള്ളതിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണ്. ആദ്യത്തെ ടാങ്കിൽ നിന്നും 25 ലിററർ പെട്രോറം എടുത്തു് രണ്ടാമത്തേതിലേക്കു ചേർത്താൽ രണ്ടിലും ഉള്ള പെട്രോളിന്റെ വ്യാപ്തം തുല്യമാവും. എന്നാൽ, ഓരോ ടാങ്കിലും ഉള്ള പെട്രോളിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

36. അച്ഛന്റെ ഇപ്പോഴത്തെ വയസ്സ് 40 ഉം മകന്റെ വയസ്സ് 16 ഉം ആണ്. ഇനി എത്ര കൊല്ലം കഴിയുമ്പോറം അച്ഛന്റെ വയസ്സ് മകന്റെ വയസ്സിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാവും ?

37. (i) ഒരു സംഖ്യയിൽ നിന്നു് $2\frac{1}{2}$ കുറയ്ക്കുമ്പോറം 3.15 കിട്ടുന്നു. എന്നാൽ സംഖ്യ കാണുക.

(ii) ഒരു സംഖ്യയുടെ $\frac{2}{5}$ ഭാഗവും $\frac{1}{2}$ ഭാഗവും കൂടിയപ്പോരം സംഖ്യ 7.4 ആയിത്തീർന്നു. എന്നാൽ സംഖ്യ കാണുക.

(iii) ഒരു സംഖ്യയുടെ 3 മടങ്ങും 0.011 ഉം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 7.3 ആണ്. എന്നാൽ സംഖ്യ കാണുക.

38. (i) തുടർച്ചയായ മൂന്നു പൂർണസംഖ്യകളുടെ തുക 120 ആണ്. എന്നാൽ ആ സംഖ്യകരം കാണുക.

(ii) തുടർച്ചയായ 4 സംഖ്യകളുടെ തുക 30 ആണ്. എന്നാൽ ആ സംഖ്യകരം കാണുക.

39. ഒരു സംഖ്യയിൽ രണ്ടു അക്കങ്ങരം ഉണ്ട്. ആ സംഖ്യയിലെ പത്താം സ്ഥാനത്തെ അക്കം ഒററയുടെ സ്ഥാനത്തെ അക്കത്തിൻെറ 3 മടങ്ങ് ആണ്. അക്കങ്ങരം പരസ്പരം മാററിയിട്ടാൽ ഉണ്ടാവുന്ന പുതിയ സംഖ്യ ആദ്യത്തെ സംഖ്യയേക്കാരം 36 ചെറുതാണ്. എന്നാൽ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ കാണുക.

40. രണ്ടു അക്കമുള്ള ഒരു സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 11 ആണ്. സംഖ്യയോടു കൂടി 63 കൂട്ടിയാൽ, അക്കങ്ങരം പരസ്പരം സ്ഥാനം മാറിയ സംഖ്യ കിട്ടും. എന്നാൽ സംഖ്യ കാണുക.

41. രണ്ടു അക്കമുള്ള ഒരു സംഖ്യയിലെ അക്കങ്ങളുടെ തുക 12 ആണ്. അക്കങ്ങരം പരസ്പരം മാററിയിട്ടാൽ ഉണ്ടാകുന്ന പുതിയ സംഖ്യ ആദ്യത്തെ സംഖ്യയേക്കാരം 18 കൂടുതൽ ആണ്. എന്നാൽ ആദ്യത്തെ സംഖ്യ കാണുക.

42. രണ്ടു സംഖ്യകളുടെ തുക 2490 ആണ്. അവയിൽ ഒരു സംഖ്യയുടെ 6.5 ശതമാനവും മറെറ സംഖ്യയുടെ 8.5 ശതമാനവും തുല്യമാണ്. എങ്കിൽ ആ സംഖ്യകരം കാണുക.

43. രണ്ടു പട്ടണങ്ങരം തമ്മിലുള്ള ദൂരം 340 കിമീററർ ആണ്. രണ്ടു തീവണ്ടികരം ആ പട്ടണങ്ങളിൽ നിന്നും പരസ്പരം കണ്ടുമുട്ടുന്നതിനായി ഒപ്പം പുറപ്പെടുന്നു. ഒരു തീവണ്ടിയുടെ വേഗത മറേറതിനേക്കാരം മണിക്കൂറിൽ 5 കിമീററർ കൂടുതലാണ്. അവ രണ്ടും രണ്ടു മണിക്കൂർ വീതം സഞ്ചരിച്ചതിനു ശേഷം അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരം 30 കിമീ ആയിതീർന്നു. എന്നാൽ ആ തീവണ്ടികളുടെ ഒരു മണിക്കൂറിലെ വേഗത കാണുക.

44. A, B എന്നീ രണ്ടു പട്ടണങ്ങരം തമ്മിലുള്ള ദൂരം 230 കിമീററർ ആണ്. രണ്ടു മോട്ടോർ സൈക്കിരം യാത്രക്കാർ വിപരീതദിശയിൽ ഒപ്പം പുറപ്പെടുന്നു. മൂന്നു മണിക്കൂർ സഞ്ചരിച്ച ശേഷം അവർ തമ്മിലുള്ള ദൂരം

20 കിമീററർ ആയിത്തീർന്നു. അവരിൽ ഒരാളുടെ വേഗത മററെ ആളുടെ വേഗതയേക്കാൾ മണിക്കൂറിൽ 10 കി മീററർ കുറവാണെങ്കിൽ അവരുടെ വേഗത കാണുക.

45. ഒരു ഹെലികോപ്ററർ 4-30 AM ന് A എന്ന പട്ടണത്തിൽ നിന്നു് B എന്ന പട്ടണത്തിലേക്കു് മണിക്കൂറിൽ 250 കിമീററർ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. B എന്ന പട്ടണത്തിൽ ചെന്നിട്ടു് അവിടെ 30 മിനിററ് കിടക്കുകയും അവിടെ നിന്നു് 11-45 AM ന് മണിക്കൂറിൽ 200 കി മീററർ വേഗതയിൽ A യിലേക്കു് മടങ്ങി എത്തുകയും ചെയ്യുന്നു. എന്നാൽ A യും B യും തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാണുക.

46. ഒരു വയൽ ആകെ 14 ദിവസം ഉഴവു ചെയ്തു. കൂടുതലായി 20 ഹെക്ടർ നിലം കൂടി ഓരോ ദിവസവും ഉഴവു ചെയ്തിരുന്നു എങ്കിൽ, ആ ജോലി 10 ദിവസം കൊണ്ടു് പൂർത്തിയാകുമായിരുന്നു. എന്നാൽ, ഓരോ ദിവസവും ഉഴവു ചെയ്ത വയലിൻെറ വിസ്തീർണവും ആകെ വയലിൻെറ വിസ്തീർണവും കാണുക.

47. ഒരു ആവിക്കപ്പൽ രണ്ടു തുറമുഖങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം 2 മണിക്കൂർ 30 മിനിററു കൊണ്ടു് സഞ്ചരിക്കുന്നു. ആവിക്കപ്പലിൻെറ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 6 കി മീ കുറയുകയാണു് എങ്കിൽ ആ ദൂരം സഞ്ചരിക്കാൻ 3 മണി 15 മിനിററു സമയം വേണ്ടിവരും. എന്നാൽ ആ ആവികപ്പലിൻെറ വേഗതയും തുറമുഖങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരവും കാണുക.

48. A എന്ന സ്ഥലത്തു നിന്നു് B എന്ന സ്ഥലത്തേക്കു് എഴുത്തുകൾ കൊണ്ടു പോകാൻ ഒരു പോസ്റ്റ്മാനു് 35 മിനിററു സമയം വേണം. മടക്കത്തിൽ അയാളുടെ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 0.6 കി മീ വർധിപ്പിച്ചപ്പോൾ 30 മിനിററു കൊണ്ടു് A എന്ന സ്ഥലത്തു് തിരിച്ചെത്തി. എന്നാൽ A യും B യും തമ്മിലുള്ള ദൂരവും പോസ്റ്റ്മാൻെറ രണ്ടു വേഗതയും കാണുക.

49. ഒരു ആവിക്കപ്പൽ രണ്ടു തുറമുഖങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം നീരൊഴുക്കിനു് അനുകൂലമായി 4 മണിക്കൂർ കൊണ്ടു് സഞ്ചരിക്കുന്നു. അതേദൂരം തന്നെ നീരൊഴുക്കിനു് പ്രതികൂലമായി 5 മണിക്കൂർ കൊണ്ടും സഞ്ചരിക്കുന്നു. നീരൊഴുക്കിൻെറ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 2 കി മീ ആണു്, എങ്കിൽ ആ തുറമുഖങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാണുക.

50. ഒരു ഹെലികോപ്ററർ രണ്ടു പട്ടണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാററിനു് അനുകൂലമായി 5 മണിക്കൂർ 30 മിനിററു കൊണ്ടും അതേ ദൂരം തന്നെ കാററിനു പ്രതികൂലമായി 6 മണിക്കൂർ കൊണ്ടും സഞ്ചരിക്കുന്നു. കാററിന്റെ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 10 കി മീററർ ആണെങ്കിൽ ആ പട്ടണ

ങ്ങരം തമ്മിലുള്ള ദൂരവും ഹെലികോപ്റ്ററിന്റെ കാററില്ലാത്തപ്പോരം ഉള്ള വേഗതയും കാണുക.

51. യന്ത്രങ്ങരം ഉണ്ടാക്കുന്നതിന്റെ ഒരു ജോലി 15 ദിവസം കൊണ്ടു് പൂർത്തിയാകുന്നു. ഒരു ദിവസം 2 എഞ്ചിൻ കൂടി കൂടുതൽ ഉണ്ടാക്കുകയാണെങ്കിൽ നിർദിഷ്ടപദ്ധതിയുടെ രണ്ടു ദിവസം മുമ്പു തന്നെ 6 എഞ്ചിൻ കൂടി അവർക്കു നിർമിക്കാമായാരുന്നു. എന്നാൽ എത്ര യന്ത്രങ്ങരം ഉണ്ടാക്കപ്പെടുന്നു ?

52. ഒരു പവർസ്റ്റേഷൻ ഉണ്ടാക്കുവാൻ കുറെ ജോലിക്കാർ ഉണ്ടു്. അവർ ദിവസം തോറും കണക്കനുസരിച്ച് 860 സെ മീ നിലം കുഴിക്കുന്നു. അവരുടെ ജോലി 20% കൂടി വർധിപ്പിച്ചാൽ, നിർദിഷ്ടജോലി രണ്ടു ദിവസം മുമ്പു തന്നെ പൂർത്തിയാകുമായിരുന്നു. എന്നാൽ ആദ്യത്തെ കണക്കനുസരിച്ച് ആ പണി തീരുവാൻ എത്ര ദിവസം വേണ്ടിവരും ?

53. ഒരു ഇരുമ്പുകഷണത്തിന്റെയും ഒരു ചെമ്പുകഷണത്തിന്റെയും കൂടി ആകെ തൂക്കം 1280 ഗ്രാം ആണു്. ഇതിൽ ചെമ്പുകഷണത്തിന്റെ വ്യാപ്തം ഇരുമ്പുകഷണത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിന്റെ രണ്ടു മടങ്ങാണു്. ഒരു ഘന സെ മീററർ ഇരുമ്പിന്റെ തൂക്കം 7.8 ഗ്രാമും ഒരു ഘന സെ മീററർ ചെമ്പിന്റെ തൂക്കം 8.9 ഗ്രാമും ആണെങ്കിൽ ഇവ ഓരോന്നിന്റേയും വ്യാപ്തം കാണുക.

54. ഒരു പ്രശ്നം നിർധാരണം ചെയ്തപ്പോരം താഴെ പറയുന്ന ഒരു സമീകരണം കിട്ടി:

$$5x = (x - 10)$$

രണ്ടു കാറുകളുടെ സഞ്ചാരങ്ങരം ഈ സമീകരണത്തിനു് സംഗതമായി വരത്തക്കവിധത്തിൽ ഒരു പ്രശ്നം എഴുതുക.

7. കൂട്ടുപലിശ

ഒരാരം ഒരു ഫിനാൻസിങ്ങ് (ധനകാര്യ) കമ്പനിയിലേക്കു് 1000 രൂപ 10 % പലിശ നിരക്കിൽ കടം കൊടുത്തു. എന്നാൽ ഒരു കൊല്ലം കഴിയുമ്പോരം അയാരംക്കു് എന്തു പലിശ കിട്ടും ? അപ്പോഴത്തെ പലിശ അടക്കം മുതൽ എന്തായിരിക്കും ? ആ സംഖ്യ മുഴുവനും (1 ാം കൊല്ലത്തെ പലിശ അടക്കം മുതൽ) അയാരം ഒരു കൊല്ലത്തേക്കു കൂടി വീണ്ടും നിക്ഷേപിക്കുന്നു. എന്നാൽ രണ്ടാം കൊല്ലാവസാനത്തിലും രണ്ടു കൊല്ലം കഴിഞ്ഞതിനു ശേഷവും അയാരംക്കു് കിട്ടുന്ന പലിശ എന്തായിരിക്കും ?

ഒരു കൊല്ലം കഴിഞ്ഞപ്പോരം കിട്ടുന്ന പലിശ $= \frac{1000 \times 10}{100} = 100$ രൂപ

$\therefore$ ഒന്നാം വർഷാവസാനത്തെ പലിശ അടക്കം മുതൽ $\left.\right\}$ = 1000 + 100 രു = 1100 രു

അതേ കമ്പനിയിൽ തന്നെ അയാരം 1100 രൂപ വീണ്ടും നിക്ഷേപിക്കുന്നു. ഇവിടെ നിങ്ങരം എന്താണ് മനസ്സിലാക്കുന്നതു്? ഒന്നാം കൊല്ലത്തെ പലിശ അടക്കം മുതൽ രണ്ടാം കൊല്ലത്തെ മുതൽ ആയിതീർന്നു.

$$\therefore \text{രണ്ടാം വർഷത്തിലെ പലിശ} = \frac{1100 \times 1 \times 10}{100}$$

$$= 110 \text{ രു}$$

$\therefore$ രണ്ടു കൊല്ലം കഴിയുമ്പോരം ആകെ കിട്ടുന്ന പലിശ $\left.\right\}$ = 100 രു + 110 രു = 210 രു

ഇതിൽ ആദ്യത്തെ കൊല്ലത്തെ പലിശ രണ്ടാമത്തെ കൊല്ലത്തെ പലിശയേക്കാരം കൂടുതൽ ആണോ? അതിൻെറ കാരണം പറയാമോ?

ഇവിടെ രണ്ടാമത്തെ പ്രകരണത്തിൽ പലിശ കണക്കാക്കിയതു് 1100 രൂപക്കാണ് (ഈ 1100 രൂപ ആദ്യത്തെ കൊല്ലത്തെ മുതലും പലിശയും കൂടിയ സംഖ്യയാണ്). (1000 + 100) എന്നതു വ്യക്തമാണല്ലോ. അതുകൊണ്ടു് രണ്ടാം കൊല്ലത്തെ പലിശ, പലിശ മേൽ പലിശ കണക്കാക്കുന്നു. ഈ പ്രകാരത്തിലുള്ള പലിശയെ *കൂട്ടപലിശ* എന്നു പറയുന്നു.

കൂട്ടപലിശയുടെ പ്രകരണത്തിൽ, പലിശ കണക്കാക്കുന്നതു് ആവർത്തകമായിട്ടാണ്. ഒരു നിശ്ചിതകാലത്തേക്കുള്ള പലിശ കണക്കാക്കി ആ പലിശ മുതലിനോടു കൂടി കൂട്ടുന്നു. ആ തുക അടുത്ത കൊല്ലത്തെ മുതൽ ആയി മാറുന്നു. സാധാരണയായി കാലം ക്ലിപ്തപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ടായിരിക്കുകയില്ല. എന്നാൽ ബാങ്കുകളിലും പോസ്റ്റ് ഓഫീസുകളിലും അതുപോലുള്ള മററു സ്ഥാപനങ്ങളിലും ഈ കാലം 6 മാസമായി കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു. ആ കാലം വ്യക്തമാക്കുവാൻ *അർധവർഷം*, *പ്രതിവർഷം* എന്നീ വാക്കുകരം ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 24

ഒരാരം ഒരു സേവിങ്സ് ബാങ്ക് അക്കൗണ്ടിൽ (ലഘുസമ്പാദ്യപദ്ധതി) 5000 രൂപ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. അർധവർഷമായി കൊടുക്കണമെന്ന വ്യവസ്ഥയിൽ ആ സംഖ്യക്കു് 4 % പലിശ നിരക്കിൽ 1 കൊല്ലത്തെ പലിശ എന്തായിരിക്കും? പലിശ അടക്കം മുതൽ കാണുക.

$$\text{ആദ്യത്തെ അർധവർഷത്തെ പലിശ} = \frac{5000 \times 1 \times 4}{2 \times 100}$$

$$= 100 \text{ രൂപ}$$

അർധവർഷം കഴിഞ്ഞപ്പോരം ഉള്ള മുതൽ = 5100 രൂപ

$\therefore$ രണ്ടാം അർധവർഷത്തെ പലിശ $= \dfrac{5100 \times 1 \times 4}{2 \times 100}$

$= 102$ രൂപ

$\therefore$ 1 കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ ഉള്ള പലിശ അടക്കം മുതൽ 5000 രൂപ + 100 രൂപ + 102 രൂപ = 5202 രൂപയും കൂട്ടുപലിശ 100 രൂപ + 102 രൂപ = 202 രൂപയും ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 25

പലിശ കൊല്ലം തോറും കൊടുക്കണമെന്ന കരാറിന്മേൽ 500 രൂപക്കു് 5% പലിശ നിരക്കിൽ 2 കൊല്ലത്തെ കൂട്ടുപലിശയടക്കം മുതൽ കാണുക.

500 രൂപക്കു് ആദ്യത്തെ കൊല്ലത്തെ പലിശ $= \dfrac{(500 \times 1 \times 5)}{100}$

$\therefore$ ഒരു കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ ഉള്ള പലിശയടക്കം മുതൽ $= \left[500 + \dfrac{500 \times 5}{100}\right]$

$= 500\left(1 + \dfrac{5}{100}\right)$

അതിനു ശേഷം രണ്ടാം കൊല്ലത്തെ പലിശ കാണാം.

രണ്ടാം കൊല്ലത്തെ മുതൽ $= 500\left(1 + \dfrac{5}{100}\right)$

രണ്ടാം കൊല്ലത്തെ പലിശ $= \dfrac{500\left(1 + \dfrac{5}{100}\right) \times 1 \times 5}{100}$

$\therefore$ 2 കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ ഉള്ള പലിശയടക്കം മുതൽ = മുതൽ + പലിശ

$$= \left[500\left(1 + \frac{5}{100}\right) + \frac{500\left(1 + \frac{5}{100}\right) \times 1 \times 5}{100}\right] \text{ രൂപ}$$

$$= 500\left(1 + \frac{5}{100}\right) \times \left[1 + \frac{5}{100}\right] \text{ രൂപ}$$

$$= 500\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 \text{ രൂപ}$$

$$= 500 \times \frac{21}{20} \times \frac{21}{20} \text{ രൂപ}$$

$$= \frac{2205}{4} \text{ രൂപ} = 551.25 \text{ രൂപ}$$

മുതൽ P യും നിരക്ക് r ഉം കാലം n കൊല്ലവും ആണെങ്കിൽ കൂട്ടപലിശ അടക്കം മുതൽ കാണാൻ ഒരു സൂത്രം ഉണ്ടാക്കാൻ ശ്രമിച്ചുനോക്കാം.

മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്നു്,

P രൂപക്കു് 1 കൊല്ലത്തെ പലിശ $= \frac{P \times r \times 1}{100} = \frac{P \times r}{100}$

∴ ഒന്നാം കൊല്ലത്തെ പലിശയടക്കം മുതൽ $(A_1) = P + \frac{P \times r}{100}$

$$= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

ഒന്നാം കൊല്ലത്തെ പലിശയടക്കം മുതൽ (A_1) രണ്ടാം കൊല്ലത്തെ മുതൽ ആയി മാറുന്നതിനാൽ, A_1 ൻെറ രണ്ടാം കൊല്ലത്തെ പലിശ കണക്കാക്കാവുന്നതാണു്.

$$= \frac{A_1 \times r \times 1}{100} = \frac{A_1 \times r}{100}$$

$$= A_1 \times \frac{r}{100} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right) \times \frac{r}{100}$$

(A_1 നു് മൂല്യം കൊടുക്കുക)

∴ രണ്ടാം കൊല്ലത്തെ പലിശ അടക്കം മുതൽ (A_2)

$$= A_1 + P\left(1 + \frac{r}{100}\right) \times \frac{r}{100}$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{100}\right) + P\left(1 + \frac{r}{100}\right) \times \frac{r}{100}$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$$

അതിൽ നിന്നു് മൂന്നാംവർഷത്തെ പലിശയടക്കം മുതൽ A_3

$$= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3$$

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ,

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

ഇവിടെ n എന്നതു് പൂർത്തിയായ വർഷങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ്.

$$\therefore \text{ കൂട്ടപലിശ } = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - P$$

$$= P\left[\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1\right]$$

പലിശ അർധവർഷമായി കൊടുക്കണം എന്നവരികയാണെങ്കിൽ ഈ സൂത്രത്തിൽ എന്തു മാററമാണു് വരുത്തേണ്ടതു് ?

മുകളിൽ പറഞ്ഞ പ്രകരണത്തിൽ r എന്നതിനു പകരം $\frac{r}{2}$ എന്നു് എഴുതണം. എന്തെന്നാൽ പലിശ അർധവർഷമായിട്ടാണു് കൊടുക്കേണ്ടതു്. n നു് പകരം 2n എന്നു് എഴുതണം. പൂർത്തിയായ അർധവർഷങ്ങളുടെ എണ്ണം 2 ആയതു കൊണ്ടാണു് 2n എന്നു് എഴുതുന്നതു്.

$$\therefore A = P\left(1 + \frac{r}{200}\right)^{2n}$$

സാധാരണപലിശയും കൂട്ടപലിശയും തമ്മിൽ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക. അങ്ങനെ താരതമ്യപ്പെടുത്തുമ്പോൾ താഴെ പറയുന്ന കാര്യങ്ങൾ വ്യക്തമാകും.

(i) പലിശ കൊടുക്കേണ്ട ആദ്യത്തെ പിരിയഡിലെ (കാലാവധിയിലെ) പലിശയടക്കം മുതൽ, ഒരേ മുതലിനും ഒരേ നിരക്കിനും സാധാരണപലിശയിലും കൂട്ടപലിശയിലും തുല്യമായിരിക്കും.

(ii) കൂട്ടപലിശ ആദ്യത്തെ പിരിയഡു കഴിഞ്ഞാൽ ക്രമാനുഗതമായി (തുടർച്ചയായി) വർധിക്കുകയും സാധാരണപലിശ ഓരോ പിരിയഡിലും തുല്യമായിരിക്കുകയും ചെയ്യും. അതിനാൽ, പലിശ കൊടുക്കേണ്ട ആദ്യത്തെ പിരിയഡിനു ശേഷമുള്ള കൂട്ടപലിശ സാധാരണപലിശയേക്കാൾ വലുതു് ആയിരിക്കും.

(iii) പലിശ കൊടുക്കേണ്ട ആദ്യത്തെ പിരിയഡിനു ശേഷമുള്ള കൂട്ടപലിശയടക്കം മുതൽ, അതേ കാലത്തേക്കു തന്നെ അതേ തുകക്കുള്ള സാധാരണപലിശയടക്കം മുതലിനേക്കാൾ വലുതു് ആയിരിക്കും.

(iv) രണ്ടു പിരിയഡുകളിലുള്ള രണ്ടു പലിശയടക്കം മുതലുകളിൽ ചെറുതു് മുതലായും വലുതു് പലിശയടക്കം മുതലായും കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു. പിരിയഡുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിലെ കൂട്ട

പലിശയും ആ പലിശയടക്കം മുതലുകരം തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും തുല്യമായിരിക്കും.

55. $A = P\left(P + \frac{r}{100}\right)^n$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് കൂട്ടപലിശയടക്കം മുതൽ കാണുക. മുതലും നിരക്കും കാലവും (പിരിയഡും) താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

(i) P = 500 രൂ, r = 5%, n = 2 കൊല്ലം, പലിശ കൊല്ലംതോറും കൊടുക്കണം.

(ii) P = 800 രൂ, r = 10%, n = 3 കൊല്ലം, പലിശ കൊല്ലംതോറും കൊടുക്കണം.

(iii) P = 2000 രൂ, r = 8%, n = 1 കൊല്ലം, പലിശ അർധവർഷമായി കൊടുക്കണം.

(iv) P = 1500 രൂ, r = 4%, n = 1 കൊല്ലം, പലിശ അർധവർഷമായി കൊടുക്കണം.

56. താഴെ പറയുന്ന സൂത്രത്തിലെ വിട്ടുപോയ പദത്തിൻെറ മൂല്യം കാണുക.

$$A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

വസ്തുതകരം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

(i) A = 676, P = 625, r = 4% പലിശ പ്രതിവർഷം കൊടുക്കുന്നു.

(ii) A = 1210, r = 10%, n = 2 കൊല്ലം. പ്രതിവർഷം പലിശ കൊടുക്കുന്നു.

(iii) P = 1000, r = 4%, n = 1 കൊല്ലം, പലിശ അർധവർഷമായി കൊടുക്കുന്നു.

(iv) A = 520, P = 500, n = 1 കൊല്ലം. പലിശ പ്രതിവർഷം കൊടുക്കുന്നു.

57. വർഷംതോറും പലിശ കൊടുക്കണം എന്ന വ്യവസ്ഥയിന്മേൽ ഒരാരം 10.2% കൂട്ടപലിശക്രമത്തിനു് 1000 രൂപ ഒരാരംക്കു് കടം കൊടുത്തു. മററെ ആരം അർധവർഷമായി പലിശ കൊടുക്കണമെന്ന വ്യവസ്ഥയിന്മേൽ അതേ തുക തന്നെ 10% കൂട്ടപലിശക്രമത്തിനും വേറൊരാരംക്കും കടം കൊടുത്തു. എന്നാൽ, ഒരു കൊല്ലം കഴിയുമ്പോരം ആർക്കാണു് കൂടുതൽ ലാഭം കിട്ടുന്നതു്? എത്ര കൂടുതൽ?

58. പലിശ കൊല്ലംതോറും കൊടുക്കണമെന്ന കരാറിന്മേൽ ജാനകി 1600 രൂപ $5\frac{1}{2}$% കൂട്ടപലിശ നിരക്കിനു് കടം വാങ്ങി. പലിശ അർധവർഷമായി കൊടുക്കാം എന്ന കരാറിന്മേൽ അതേ തുക തന്നെ 5% കൂട്ടപലിശ

നിരക്കിനു് ശങ്കറും കടം വാങ്ങി. ഒരു കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ ആർക്കാണു് കൂടുതൽ പലിശ കൊടുക്കേണ്ടതു് ? എത്ര കൂടുതൽ ?

59. സുരേഷ് അവൻെറ സേവിങ്സ് അക്കൗണ്ടിൽ 1250 രൂപ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. പലിശ കൊല്ലംതോറും കൊടുത്തുകൊണ്ടിരിക്കും എന്ന വ്യവസ്ഥയിന്മേൽ 4% പലിശനിരക്കിൽ 3 കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ അയാൾക്കു് എത്ര രൂപ പലിശ കിട്ടും ?

60. പലിശ കൊല്ലംതോറും കൊടുത്തു തീർക്കണമെന്ന കരാറിന്മേൽ ഒരു തയ്യൽ മെഷിൻ വാങ്ങാൻ 400 രൂപ കൂട്ടുപലിശക്രമത്തിനു് വിമല കടം വാങ്ങി. അവൾ 2 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ മുതലും പലിശയും ഉൾപ്പെടെയുള്ള തുക കൊടുത്തു. പലിശനിരക്കു് 5% ആണെങ്കിൽ അവൾക്കു് മുതലും പലിശയും ഉൾപ്പെടെ എത്ര രൂപ കൊടുക്കണം ?

61. പലിശ ആറുമാസം കഴിയുമ്പോൾ മുതലിനോടു കൂടി ചേർക്കും എന്ന സമ്പ്രദായമുള്ള സെൻട്രൽ ബാങ്കിൽ സേവിങ്സ് ഡെപ്പോസിററിൽ 4% കൂട്ടുപലിശ അനുവദിക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ 1000 രൂപ ഞാൻ നിക്ഷേപിക്കുകയാണെങ്കിൽ, ഒരു കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ എനിക്കു് എത്ര രൂപ പലിശ കിട്ടും ?

62. $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു് കൂട്ടുപലിശ കാണുന്നതിനുള്ള ഒരു വ്യംജകം എഴുതുക. $P = 625$ രൂപ, $r = 4\%$, $n = 2$ കൊല്ലം. പലിശ കൊല്ലംതോറും കൊടുക്കുകയാണു് എങ്കിൽ കൂട്ടുപലിശ കാണുക.

63. വിട്ടുപോയസ്ഥലത്തു് ശരിയായതു് എഴുതി പൂരിപ്പിക്കുക.

(i) $\ldots\ldots = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

(ii) $A = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{\ldots\ldots}$

(iii) $C{\cdot}I = A - \ldots\ldots\ldots$

(iv) $C{\cdot}I = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^{\cdot\cdot} - \ldots\ldots$

(v) $A = \ldots\ldots\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

(vi) $A = P\left(1 + \frac{\ldots}{100}\right)^n$

ഉദാഹരണം 26

ഞാൻ എന്റെ കൂട്ടുകാരന്നു് $2\frac{1}{2}\%$ സാധാരണപലിശക്കു് 3200 രൂപ 3 കൊല്ല ത്തേക്കു് കടം കൊടുത്തു. സാധാരണപലിശക്കു പകരം കൂട്ടുപലിശക്കാണു് ഈ തുക കടം കൊടുത്തതെങ്കിൽ എനിക്കു് പലിശ എത്ര രൂപ കൂടുതൽ കിട്ടും? (ഇതിൽ നിരക്കും കാലവും ഒരു പോലെ തന്നെ ആണു്.)

3200 രൂപക്കു് $2\frac{1}{2}\%$ നിരക്കിൽ 3 കൊല്ലത്തെ സാധാരണപലിശ

$$= \frac{3200 \times 3 \times 5}{100 \times 2} = 240 \text{ രൂ.}$$

3200 രൂപയ്ക്കു് $2\frac{1}{2}\%$ നിരക്കിൽ 3 കൊല്ലത്തെ കൂട്ടുപലിശയടക്കം മുതൽ

$$= 3200\left(1 + \frac{5}{200}\right)^3$$

$$= 3200\left(1 + \frac{1}{40}\right)^3$$

$$= 3200 \times \frac{41}{40} \times \frac{41}{40} \times \frac{41}{40}$$

$$= \frac{68921}{20} = 3446{\cdot}05 \text{ രൂ.}$$

$\therefore$ കൂട്ടുപലിശ $= A - P = 3446{\cdot}05 - 3200$
$= 246{\cdot}05$ രൂ.

$\therefore$ ലാഭം $= 246{\cdot}05 - 240 = 6{\cdot}05$ രൂ.

64. ഫിനാൻസ് കമ്പനിയിൽ പണം നിക്ഷേപിക്കുന്ന ഓരോരുത്തർക്കും 12% സാധാരണപലിശ കൊടുക്കുകയും അവിടെ നിന്നു് കടം വാങ്ങുന്നവർക്കു് അതേ നിരക്കിൽ തന്നെ കൂട്ടുപലിശ ഈടാക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഒരു പ്രത്യേക കരാറിന്മേൽ 2 കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ 9 രൂപ കൂടി കൊടുക്കുന്നു. എന്നാൽ ഇടപാടു തുക കാണുക.

65. 4% കൂട്ടുപലിശ ലഭിക്കുന്ന സേവിങ്സ് അക്കൗണ്ടിൽ കൃഷ്ണൻ X രൂപ 2 കൊല്ലത്തേക്കു് നിക്ഷേപിച്ചു. ആ സംഖ്യ സാധാരണപലിശക്കാണു് നിക്ഷേപിച്ചതെങ്കിൽ 8 രൂപ കുറച്ചേ കിട്ടുമായിരുന്നുള്ളു. എന്നാൽ X കാണുക.

66. പ്രതിവർഷം പലിശ കണക്കാക്കുന്ന 'ഗ്ലോബ് ഫിനാൻസേഴ്സി' ലേക്കു് ഒരാൾ P രൂപ 10% കൂട്ടുപലിശക്കു് കടംകൊടുക്കുന്നു. കമ്പനി അർധവാർഷികമായി പലിശയിൽ Y രൂപ ലാഭം കിട്ടത്തക്കവിധത്തിൽ അതേസംഖ്യ അതേ നിരക്കിൽ മററു ചിലർക്കു് കടം കൊടുക്കുന്നു. Y യുടെ ഒരു വ്യംജകം എഴുതുക. Y = 40 ആണെങ്കിൽ P കാണുക.

KOTTAYAM PUBLIC LIBRARY KOTTAYAM

67. കൊല്ലംതോറും പലിശ ഈടാക്കുന്നു എന്നു കാണിക്കുന്ന ഒരു ചോദ്യം നിർധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ ഒരു കുട്ടിക്കു് ഒരു സമീകരണം കിട്ടി. $A = P \times \frac{26}{25} \times \frac{26}{25}$. എന്നാൽ ആ കുട്ടി കണക്കാക്കിയ കൂട്ടുപലിശയുടെ നിരക്കും കാലവും കാണുക. $P = 625$ രൂപയാണെങ്കിൽ A കാണുക.

68. താഴെ പറയുന്ന സൂത്രത്തിൽ P, A യുടെ പദത്തിൽ ആണെന്നു സ്ഥാപിക്കുക.

$$A = P \times \frac{41}{40} \times \frac{41}{40} \times \frac{41}{40}, \quad A = 2825761 \text{ ആണെങ്കിൽ } P$$

കാണുക.

69. $605 = 500\left(1 + \frac{10}{100}\right)^n$ എങ്കിൽ n കാണുക.

94763

70. രണ്ടു കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ 1210 രൂപ പലിശയടക്കം മുതൽ ലഭിക്കുന്ന ഒരു ഫിനാൻസ് കമ്പനിയിൽ ഒരാൾ കുറച്ചു രൂപ നിക്ഷേപിച്ചു. പക്ഷേ 2 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ അയാൾ ആ പണം തിരിയെ എടുത്തില്ല. 4 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ അയാൾക്കു് ആകെ 1464 രൂപ 10 പൈസ ലഭിച്ചു. പലിശ പ്രതിവർഷം കണക്കാക്കുകയാണെങ്കിൽ നിരക്കു കാണുക.

71. രാമൻ വർഷംതോറും പലിശ കണക്കാക്കുമെന്ന വ്യവസ്ഥയിന്മേൽ 8000 രൂപ 5% കൂട്ടുപലിശ നിരക്കിനും അയാളുടെ കൂട്ടുകാരൻ വിജയൻ 5% സാധാരണ പലിശനിരക്കിനു് 8200 രൂപ ഭൂമി വാങ്ങുവാനായും കടം വാങ്ങി. 3 കൊല്ലം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ പലിശ ഉൾപ്പെടെയുള്ള കടം മുഴുവൻ അവർ അടച്ചു തീർത്തു. എന്നാൽ ആരാണു് കൂടുതൽ പലിശ കൊടുത്തതു്? എത്ര കൂടുതൽ?

72. 10% കൂട്ടുപലിശ നിരക്കുള്ള ഒരു ഫിനാൻസ് കമ്പനിയിൽ ഒരാൾ 2000 രൂപ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. അയാളുടെ സുഹൃത്തു് 10% സാധാരണപലിശ നിരക്കുള്ള മറ്റൊരു കമ്പനിയിൽ 2200 രൂപയും നിക്ഷേപിക്കുന്നു. രണ്ടു കൊല്ലം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ അവർക്കു് മുതലും പലിശയും ഉൾപ്പെടെയുള്ള തുക കിട്ടി. എന്നാൽ ആർക്കാണു് കൂടുതൽ പലിശ കിട്ടിയതു്? എത്ര കൂടുതൽ?

73. കൊല്ലംതോറും തവണകളായി അടച്ചുതീർക്കാമെന്ന കരാറിന്മേൽ ഒരു പുരയിടം വാങ്ങി. അയാൾ ആരംഭത്തിൽ 500 രൂപയും ഒരു കൊല്ലം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 425 രൂപയും രണ്ടു കൊല്ലം കഴിഞ്ഞപ്പോൾ 289 രൂപയും അടച്ചു തീർത്തു. പ്രതിവർഷം $6\frac{1}{4}\%$ വീതം കൂട്ടുപലിശ കണക്കാക്കുന്ന

വെങ്കിൽ, ആരംഭത്തിൽ തന്നെ മുഴവൻ പണവും കൊടുക്കുകയാണെങ്കിൽ ആ പുരയിടത്തിന്റെ വില എന്തായിരിക്കും?

74. ആദ്യത്തെ കൊല്ലത്തെ പലിശനിരക്കു് 4% ഉം രണ്ടാമത്തെ കൊല്ലത്തെ പലിശനിരക്കു് 5% ഉം ആണെങ്കിൽ 18750 രൂപക്കു് 2 കൊല്ലത്തെ കൂട്ടു പലിശ കാണുക.

75. 10% പലിശ നിരക്കുള്ളതും രണ്ടു കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ മുതലും പലിശയും ഉൾപ്പെടെ 4840 രൂപ ലഭിക്കുന്നതുമായ ഒരു ബാങ്കിൽ സുരേഷിനു് X രൂപ സ്ഥിരനിക്ഷേപം ഉണ്ടായിരുന്നു. എന്നാൽ X കാണുക. പലിശയടക്കം മുതൽ 5856·40 രൂപ ആകണമെങ്കിൽ ആ പണം എത്ര കാലം കൂടി ബാങ്കിൽ നിക്ഷേപിക്കണം?

8. അസമീകരണങ്ങൾ

താഴെ പറയുന്ന നിർവചനം പരിശോധിച്ചു നോക്കാം

നിർവചനം: $a \in Q$ ഉം $b \in Q$ ഉം ആണെങ്കിൽ

$a < b$ എങ്കിൽ മാത്രം $(b - a) \in Q_+$ ആണ്

ഇവിടെ Q_+ ധനപരിമേയസംഖ്യകളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 27

$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ അതു പോലെ $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \in Q_+$

താഴെ പറയുന്ന സൂചകങ്ങൾ കൂടി ഓർമിക്കുക.

$a \leqslant b$ എന്നതു് $a < b$ യോ $a = b$ യോ ആയിരിക്കും.

$a \geqslant b$ എന്നതു് $a > b$ യോ $a = b$ യോ ആയിരിക്കും.

നിർവചനം: $<, \leqslant, >, \geqslant$ എന്നീ പ്രതീകങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു തുറന്ന പ്രസ്താവനയെ ഒരു *അസമീകരണം* എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം 28

നിർധാരണം ചെയ്യുക:

$2x(x + 1) < 3x + 6$, ഇതിൽ $x \in D = \{0, 1, 2, 3\}$

നിർധാരണം:

D യിൽ വളരെ കുറച്ചു് അംഗങ്ങൾ മാത്രമേയുള്ളു എങ്കിൽ ഇതു് പ്രതിസ്ഥാപനമാർഗം വഴി നിർധാരണം ചെയ്യാം.

x ന്റെ മൂല്യം	പ്രസ്താവന	ശരിയോ തെറ്റോ
0	$0 < 6$	ശരി
1	$4 < 9$	ശരി
2	$12 < 12$	തെറ്റ്
3	$24 < 15$	തെറ്റ്

ഉത്തരം:

സത്യഗണം {0, 1} ആണ്

അസമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യേണ്ടിവരുമ്പോൾ—ഇവിടെ ചരത്തിന്റെ ഡൊമെയ്ൻ 'വലിയ' ഗണം ആണെങ്കിൽ— A, M_2 ഇവക്കു സദൃശ്യമായി അസമീകരണങ്ങളുടെ ഗുണധർമങ്ങൾ നമുക്ക് ഉപയോഗിക്കേണ്ടതായി വരും.

$1 \cdot A : a < b \Leftrightarrow a + c < b + c$ ഇവിടെ എല്ലാ

$a \in Q, b \in Q, C \in Q$

ഉദാഹരണം 29

Q വിലെ x ന്

$5 - 2x < - 3x + 2$ എന്നതു് ശരിയാണോ?

നിർധാരണം:

$5 - 2x < - 3x + 2$

$1 \cdot A$

$\Leftrightarrow 5 - 2x + 3x < - 3x + 2 + 3x$

$\Leftrightarrow 5 + x < 2$

$\Leftrightarrow x + 5 < - 3 + 5$

$1 \cdot A$

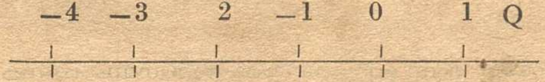
$\Leftrightarrow x < - 3$

ഉത്തരം:

$\{x \in Q : 5 - 2x < - 3x + 2\}$

$= \{x \in Q : x < - 3\}$

നിർധാരണഗണം ഒരു സംഖ്യാരേഖയിൽ സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.



രണ്ടാമത്തെ നിയമം താഴെ പറയും പ്രകാരം സ്ഥാപിക്കാവുന്നതാണ്:

$1 \cdot M : a < b \Leftrightarrow a \cdot c < b \cdot c$

എല്ലാ $a \in Q$, $b \in Q$, $c \in Q_+$ കൾക്കും. ഇതിൽ Q_+ എന്നതു് ധനപരിമേയസംഖ്യകളുടെ ഗണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

പ്രകരണം $c \in Q_+$ ഉം $c \in Q_-$ ഉം തമ്മിൽ താരതമ്യവിവേചനം നടത്തി അവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം മനസ്സിലാക്കുവാൻ താഴെപ്പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന ഉദാഹരണം നോക്കിയാൻ മതി.

ഉദാഹരണം 30

$- 2 > - 5 \Leftrightarrow (- 2)(4) > (- 5)(4)$ എന്നാൽ

$- 2 > - 5 \Leftrightarrow (-2)(- 4) < (-5)(- 4)$

ഉദാഹരണം 31

Q വിലെ താഴെ പറയുന്ന അസമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക.

$$\frac{x}{5} + \frac{1}{4} < 0$$

നിർധാരണം

$$\frac{x}{5} + \frac{1}{4} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{5} + \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{4}\right) < -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{5} < -\frac{1}{4}$$

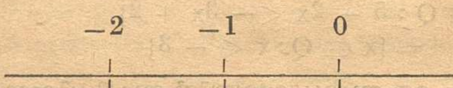
$$\Leftrightarrow \frac{x}{5} \times 5 < -\frac{1}{4} \times 5$$

$$\Leftrightarrow x < -\tfrac{5}{4}$$

ഉത്തരം:

$$\left\{x \in Q : \frac{x}{5} + \frac{1}{4} < 0\right\} = \left\{x < -\tfrac{5}{4}\right\}$$

ജ്യാമിതീയ വിശദീകരണം



ഉദാഹരണം 32

താഴെ പറയുന്ന തുറന്ന പ്രസ്താവനയുടെ സത്യഗണം കാണുക.

$$\{x \in Q : 1 + x^2 < 2x\}$$

നിർധാരണം:

$$1 + x^2 < 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 - 2x < 2x - 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 - 2x < 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - x)^2 < 0$$

ഒരു പരിമേയസംഖ്യയുടെ വർഗം ഒരിക്കലും $\geqslant 0$ ആയിരിക്കയില്ല.

ഉത്തരം:

$$\{x \in Q : 1 + x^2 < 2x\} = \Phi \text{ (ശൂന്യഗണം)}$$

താഴെ പറയുന്നവയുടെ സത്യഗണങ്ങൾ നിർണയിച്ച് അവ ഒരു സംഖ്യാരേഖയിൽ സൂചിപ്പിക്കുക (പററുന്നതു്).

77. $\{x \in z : 0 < x\}$
78. $|x| < 0$, ഇതിൽ $x \in Q$
79. $2x + | < 5$, ഇതിൽ $x \in Q$
80. $|x| < \frac{1}{2}$, ഇതിൽ $x \in Q$
81. $|x| > -1$, ഇതിൽ $x \in Q$
82. $2x + 4 < 3x + 2$, ഇതിൽ $x \in 1$
83. $3x + 8 < 7x + 10$, ഇതിൽ $x \in Q$
84. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} < \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}$, ഇതിൽ $x \in Q$
85. $\{x \in Q : 2 - \frac{3}{4}x < 3x + \frac{1}{2}\}$
86. $\{x \in Q : 6 - x < 5 - x\}$
87. $\{x \in Q : 2x^2 < x^2\}$
88. $2x + 4 < 3x + 2$, ഇതിൽ $x \in I$
89. $2x < 1 + x$, ഇതിൽ $x \in I$
90. $1 - x/2 < x$ ഉം $x < 4 - x$ ഉം ഇതിൽ $x \in Q$.

അധ്യായം 4

ബഹുപദങ്ങളുടെ ഘടകക്രിയ

---

1. താഴെ പറയുന്നവ വിതരണ നിയമം ഉപയോഗിച്ച് ലഘൂകരിക്കുക:
   (a) $596 \times 23 + 404 \times 23$
   (b) $5.4 \times 2.123 - 0.123 \times 5.4$
   (c) $24\frac{7}{8} \times 1\frac{1}{4} - 4\frac{7}{8} \times 1\frac{1}{4}$

രണ്ടു ബീജീയവ്യംജകങ്ങളുടെ ഗുണിതം കാണണമെന്നു വിചാരിക്കുക. അതായതു് x ഉം $a - b + c$ യും തമ്മിലുള്ള ഗുണിതം.

ഇവയുടെ ഗുണിതം താഴെ പറയുന്ന വിധത്തിൽ കിട്ടുന്നു.

$$x(a - b + c) = ax - bx + cx$$

ഈ സമത വിതരണനിയമം ഉപയോഗിച്ച് മുകളിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ എഴുതാവുന്നതാണ്.

$$ax - bx + cx = x(a - b + c)$$

ഇതിൽ നിന്നും ബഹുപദം $ax - bx + cx$ നെ രണ്ടു ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണിതമായി പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ സാധിക്കുമെന്ന് സ്പഷ്ടമാണല്ലോ. അവയിൽ ഒരു ഘടകം x ഉം മററതു് $(a - b + c)$ യും ആണ്.

ഒരു ബഹുപദത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക. എന്നാൽ, അതിനെ രണ്ടോ അതിൽ കൂടുതലോ ഘടങ്ങളുടെ ഗുണിതം കൊണ്ടു് സർവസമമായി (സമരൂപമായി) രൂപാന്തരപ്പെടുത്തുക എന്നതാണ് അർഥം (ബഹുപദങ്ങളേയോ ഏകപദങ്ങളെയോ).

ബീജീയവ്യംജകങ്ങളെ ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കലും അങ്കഗണിതത്തിൽ ഏകാദികളെ ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കലും ഒരു പോലെയാണ്. ബീജീയ

ഭിന്നിതങ്ങളുമായി ക്രിയ ചെയ്യുമ്പോഴം, ബീജീയവ്യംജകങ്ങളുടെ സംഖ്യാത്മകമായ മൂല്യം നിർണയിച്ച്, ചില സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുകയും ചെയ്യേണ്ടതാണ്. അപ്രകാരം ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുന്നതിന്റെ ആവശ്യകത മനസ്സിലാകുന്നു.

ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുന്നതിന് ഉപയോഗിക്കുന്ന വിവിധ മാർഗങ്ങൾ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

1. രീതി I: വിതരണനിയമം ഉപയോഗിച്ച്

2. ഏററവും എളുപ്പവഴിയിൽ ക്രിയ ചെയ്ത് മൂല്യം കാണുക.
   (a) $23.4 \times 8 + 56.6 \times 8$
   (b) $34 \times 1.78 + 25 \times 1.78 + 41 \times 1.78$

$6a^2 - 8ab + 4a$ എന്ന ഒരു ബഹുപദം തന്നിട്ടുണ്ട് എന്നു വിചാരിക്കുക. ഈ ബഹുപദത്തിലെ എല്ലാ പദങ്ങളിലും $2a$ അടങ്ങിയിട്ടുണ്ട് എന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

$6a^2 - 8ab + 4a$ എന്ന ബഹുപദം $2a \times 3a - 2 \times 4b + 2a \times 2$ എന്ന് എഴുതുവാൻ സാധിക്കും. ഗുണനത്തിന്റെ വിതരണനിയമം ഉപയോഗിച്ചാൽ, $6a^2 - 8ab + 4a = 2a \times 3a - 2a \times 4b + 2a \times 2 = 2a(3a-4b+2)$ എന്നു കിട്ടുന്നു. അതായത് ബഹുപദത്തെ രണ്ടു ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണിതമായി സൂചിപ്പിക്കാം എന്നു മനസ്സിലാകുന്നു; അവയിൽ ഒന്ന് ഏകപദം $2a$ യും മറേറത് ബഹുപദം $3a - 4b + 2$ ഉം ആണ്.

ഒരു ബഹുപദത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുവാൻ അതിലുള്ള പൊതു ഗുണകം എടുത്തു മാറേറണ്ടതു് അത്യാവശ്യമാണ്.

(1) ആ പൊതു ഗുണകം എടുക്കുക
(2) അതുകൊണ്ട് തന്നിരിക്കുന്ന ബഹുപദത്തെ ഹരിക്കുക.
(3) പൊതു ഗുണകവും ഹരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടിയ ഹരണഫലവും വെവ്വേറെ രണ്ടു ബ്രാക്കററുകൾക്ക് അകത്താക്കി അവയുടെ ഇടക്ക് ഗുണന ചിഹ്നവും ഇടുക.

ഒരു ഉദാഹരണം പരിശോധിച്ചു നോക്കാം:

$12x^4y^2 - 18x^3y^2 + 24x^2yz^3$ എന്ന ബഹുപദത്തിൽ

(a) ഗുണാംകങ്ങളിലെ പൊതുഗുണകം ആണ് 6;
(b) ആദ്യത്തെ അക്ഷരം x ബഹുപദത്തിലെ ആദ്യത്തെ പദത്തിൽ 4-ാം ഘാതമാണ്. രണ്ടാമത്തെ പദത്തിൽ മൂന്നാം ഘാതവും മൂന്നാമത്തെ പദത്തിൽ രണ്ടാം ഘാതവും ആയതിനാൽ, ബഹുപദത്തെ x^2 കൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്നതാണ്.

(c) അതുപോലെ തന്നെ ബഹുപദത്തെ y കൊണ്ടും ഹരിക്കാവുന്നതാണ് എന്നു മനസ്സിലാക്കാം.

(d) ബഹുപദത്തിലെ ഒന്നും രണ്ടും പദങ്ങളിൽ z ഉൾപ്പെടാതിരിക്കുന്നതു കൊണ്ടു് z എടുക്കേണ്ടതില്ല. ആയതിനാൽ ഏകപദം $6x^2y$ എന്നതു് തന്നിരിക്കുന്ന ബഹുപദത്തിലെ പൊതു ഗുണകം ആണു്.

അപ്പോൾ $12x^4y^2 - 18x^3y^2 + 24x^2y\,z^2$

$$= 6x^2y\,(2x^2y - 3xy + 4z^2)$$

എന്നു കിട്ടുന്നു.

3. താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങളിലെ ഹാരകങ്ങൾ കാണുക:

(i) $3a + 3b$ (ii) $6nk - 18np$

(iii) $9x^2 - 18x^3$ (iv) $7by^2 - 14by^2 + 112y^3$

4. ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക:

(i) $2x + 2y$ (ii) $ax - ay$ (iii) $-2a - 5ab$

ഒരു ഉദാഹരണം കൂടി എടുത്തു നോക്കാം:

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ബഹുപദത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കി മാറ്റുക:

$$10m^3p - 6mp^2 + 2m$$

ഈ ബഹുപദത്തിലെ പൊതുഗുണകം ആണു് $2m$.

ആയതിനാൽ $10m^3p - 6mp^2 + 2m = 2m\,(5m^2p - 3p^2 + 1)$

5. താഴെ പറയുന്നവ ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക:

(i) $mn + n$ (ii) $mx - n$

(iii) $5 - 15y$ (iv) $5mn - 5m$

(v) $-15ax - 20ay$ (vi) $-2mn - 4n$

6. (i) $a^2 - ab$ (ii) $x^4 - x^2$

(iii) $y^3 - y^4$ (iv) $p^5 - p^7 - p^9$

(v) $-b^5 + b^4 + 2b^3$ (vi) $-n^6 - n^8 - n^{12}$

(vii) $6z^4 - 12z^6$ (viii) $x^2y - xy^2$

(ix) $6a^2x + 12ax^2$ (x) $18ab^3 - 9b^4$.

7. (i) $a^m + a^{m+1}$ (ii) $a^{3n} - a^{2n}$

(iii) $5^n - 5^{n-2}$ (iv) $c^{2k+1} - c^{2k} - 2c^{2k-1}$.

ഗുണകം ഒരു ബഹുപദവും ആകാം.

താഴെ പറയുന്ന ഉദാഹരണം പരിശോധിച്ചു നോക്കുക.

$$5(a - b) - 4x\,(a - b) + 7y\,(a - b)$$

ഇതിൽ $(a - b)$ എന്നതു് പൊതുഗുണകം ആണു്. അതിൽ നിന്നും

$$5(a - b) - 4x\,(a - b) + 7y\,(a - b)$$
$$= (a - b)(5 - 4x + 7y)$$

ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക:

8. (i) $3a(a - b) + 2b(a - b)$
(ii) $7q(p - q) - 2b(7 - d)$
(iii) $2b(x + y) - c(x + y) - 2(x + y)$

9. (i) $2m(x - 3) - 5n(3 - x)$
(ii) $m^2(b - 2) + m(2 - b)$
(iii) $2x(a - b) - 3y(b - a)$
(iv) $2a(x - y) - (y - x)$

10. താഴെ പറയുന്ന സർവസമീകരണങ്ങൾ ശരിയാണ് എന്നു തെളിയിക്കുക:

(i) $(a - 2d)(a^2 - 5ab + b^2) - (a - 2b)(a^2 - 6ab + b^2)$
$= ab(a - 2b)$

(ii) $(a - 3c)(2a^2 - 7ac - c^2) + (3c - a)(a^2 - 7ac - c^2)$
$= a^2(a - 3c)$

11. താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങളെ ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിച്ച് അവയുടെ സംഖ്യാത്മകമായ മൂല്യം കാണുക.

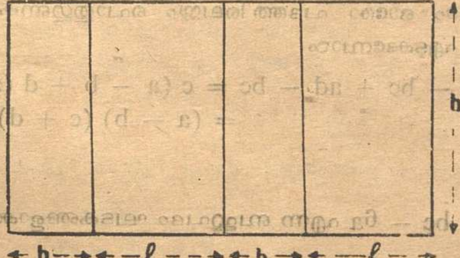
(i) $7x^2 - 14a^2x$ ഇതിൽ $x = -4, a = -0.5$
(ii) $a(b - c) + 3(c - b) + (b - c)$ ഇതിൽ $a = 2$, $b = 1.007,\ c = -0.06$

12. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(i) $x^2 - 4x = 0$ (ii) $7x^2 + 2x = 0$

13. ഒരു മുറിയുടെ ഭിത്തികളിൽ വർണക്കടലാസുകൾ ഒട്ടിക്കുന്നതിനും വെള്ളയടിക്കുന്നതിനും നാലു ഭിത്തികളുടെയും വിസ്തീർണം അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ടതു് അത്യാവശ്യമാണ്. ഭിത്തികളുടെ വിസ്തീർണം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു:

$$A = 2h(l + b)$$



ചിത്രം 4.1

ഇതിൽ l നീളത്തെയും b വീതിയെയും h മുറിയുടെ ഉയരത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഈ സൂത്രം ലഭിക്കുവാൻ ചിത്രം 4.1 നോക്കുക.

നിങ്ങളുടെ ക്ലാസ്സുമുറിയുടെ നീളവും വീതിയും ഉയരവും അളന്ന് ഭിത്തികളുടെ വിസ്തീർണം കണക്കാക്കുക. ഭിത്തി വെള്ളയടിക്കുന്നതിനും വർണക്കടലാസുകൾ ഒട്ടിക്കുന്നതിനും ഉള്ള ചെലവ് ക്രിയചെയ്ത് കാണുക.

2. രീതി II: ഗ്രൂപ്പുതിരിക്കുന്ന രീതി

താഴെ പറയുന്ന വ്യംജകത്തെ ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക:

$$c(a-b)+d(a-b)$$

പൊതുഗുണകം പുറത്തു എടുത്തുകഴിയുമ്പോൾ,

$$c(a-b)+d(a-b)=(a-b)(c+d)$$

എന്നു കിട്ടുന്നു.

ഈ ബഹുപദം $ac-ad-bc+bd$ എന്നായിരുന്നുവെങ്കിൽ പൊതുഗുണകം കാണുവാൻ സാധിക്കുകയില്ല.

ആദ്യത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളിലെ പൊതുഗുണകം c ആണ് എന്നും ശേഷിച്ച രണ്ടു പദങ്ങളിലെ പൊതുഗുണകം d ആണെന്നും മനസ്സിലാക്കാം. അതിനാൽ ഈ പദങ്ങളെ രണ്ടു ഗ്രൂപ്പുകളാക്കി തിരിച്ച് എഴുതണം. ഇവയിൽ ഒരു ഗ്രൂപ്പിൽ c യും മറെറ ഗ്രൂപ്പിൽ d യും അടങ്ങിയിരിക്കത്തക്കവിധത്തിൽ തിരിച്ചു എഴുതുക. അപ്പോൾ ബഹുപദം താഴെ പറയും പ്രകാരം എഴുതാവുന്നതാണ്:

$ac-bc+ad-bd=(ac-bc)+(ad-bd)$ ഓരോ ഗ്രൂപ്പിൽ നിന്നും പൊതുഗുണകങ്ങൾ പുറത്തേക്കു എടുക്കുമ്പോൾ

$$\begin{aligned} ac-bc+ad-bd &= (ac-bc)+(ad-bd) \\ &= c(a-b)+d(a-b) \end{aligned}$$

എന്നു കിട്ടുന്നു.

അതിൽ നിന്നും ഓരോ പദത്തിലെയും പൊതുഗുണകം $a-b$ ആണ്. അതു് പുറത്തേക്കു എടുക്കുമ്പോൾ

$$\begin{aligned} ac-bc+ad-bc &= c(a-b+d(a-b) \\ &= (a-b)(c+d) \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 1

$2ac+3b-bc-6a$ എന്ന ബഹുപദം ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക.

ഈ ബഹുപദത്തിലെ പദങ്ങളെ ഗ്രൂപ്പുതിരിക്കുമ്പോൾ $(2ac+3b)-(bc+6a)$ എന്നു കിട്ടുന്നു. എന്നാൽ അവയിൽ ഒരു ഗ്രൂപ്പിൽ നിന്നും ഒരു

പൊതുഗുണകം കിട്ടുന്നില്ല. അതിനാൽ വേറെ മാർഗം ഉപയോഗിച്ച് അതിനെ ഗ്രൂപ്പുതിരിക്കാൻ നോക്കാം.

$2ac + 3b - bc - 6a = (2ac - bc) + (3b - 6a)$ പൊതുഗുണകം പുറത്തേക്കു എടുക്കുമ്പോൾ

$$\begin{aligned} 2ac + 3b - bc - 6a &= (2ac - bc) + 3b - 6a) \\ &= c(2a - b) + 3(b - 2a) \\ &= c(2a - b) - 3(2a - b) \\ &= (2a - b)(c - 3) \end{aligned}$$

എന്നു കിട്ടുന്നു.

ബഹുപദങ്ങളെ മറെറാരു തരത്തിലും ഗ്രൂപ്പുതിരിക്കാവുന്നതാണ്.

$$2ac + 3b - bc - 6a = 2ac - 6a + 3b - bc$$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ അതേ ഘടകങ്ങൾ തന്നെ ആയിരിക്കും ഇപ്പോഴും കിട്ടുന്നതു്.

14. അവസാനത്തെ രണ്ടു പദങ്ങളെ ബ്രാക്കററുകളിലാക്കി ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക:

(i) $2a(x + y) + x + y$ (ii) $k(p - q) + p - q$

(iii) $3b(a + b) - a - b$ (iv) $2y(x - y) - x + y$

15. ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക:

(i) $a(x - y) + bx - by$ (ii) $ax - ay + bx - by$

(iii) $m^2 + mn - 5m - 5n$ (iv) $x^2 - xy - 2x + 2y$

16. താഴെ പറയുന്ന വ്യംജകങ്ങളുടെ മൂല്യം എളുപ്പവഴിയിൽ കാണുക:

(i) $48 \times 29 + 27 \times 11 + 43 \times 11 + 27 \times 29$

(ii) $12.7 \times 3.4 + 8.2 \times 1.4 - 1.4 \times 12.7 - 3.4 \times 8.2$

17. ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക:

(i) $4x^2 - 4xz - 3x + 3z$

(ii) $3ax - 4by - 4ay + 3bx$

(iii) $10a^2 - 21xy - 14ax - 15ay$

18. ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിച്ച് മൂല്യം കാണുക:

(i) $a^2b - b + ab^2 - a$. ഇതിൽ $a = -1\frac{5}{8}$, $b = \frac{-8}{13}$

(ii) $3x^3 - 2y^3 - 6x^2 + xy$. ഇതിൽ $x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{2}$

19. നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക:

$x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$

സൂചന: വ്യംജകം ആദ്യം ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക,

20. താഴെ പറയുന്ന സർവസമീകരണം ശരിയാണ് എന്നു തെളിയിക്കുക:

$$x^2 - xy + 2x - 2y = (x - y)(x + 2)$$

21. ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക:

(i) $ax^2 + bx^2 - bx - ax + a + b$

(ii) $ax^2 + bx^2 - bx - ax + cx^2 - cx$

3. രീതി III: സൂത്രങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ബഹുപദങ്ങളുടെ ഘടകക്രിയ

ഗുണനത്തിലുള്ള സൂത്രങ്ങളെ പ്രതിലോമ (വിപരീത) ക്രമത്തിൽ എഴുതുകയാണെങ്കിൽ,

(i) $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

(ii) $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$

(iii) $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$

എന്നു കിട്ടുന്നു

മററു ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ കൂടി പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

ഉദാഹരണം 2

$$25b^2 - 81a^2 = (5b)^2 - (9a)^2$$

ഇതു് 5b, 9a എന്ന പദങ്ങളുടെ വർഗങ്ങളുടെ വ്യത്യാസമാണ് എന്നു കാണാം.

ആദ്യത്തെ സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് തന്നിരിക്കുന്ന വ്യംജകത്തെ താഴെ പറയുന്ന വിധത്തിൽ ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കാവുന്നതാണ്.

$$25b^2 - 81a^2 = (5b)^2 - (9a)^2$$
$$= (5b + 9a)(5b - 9a)$$

ഉദാഹരണം 3

$$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2(x \times 5) + 5^2$$

ഇവിടെ മൂന്നാമത്തെ സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

$$x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2(x \times 5) + 5^2$$
$$= (x - 5)^2$$
$$= (x - 5)(x - 5)$$

22. ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക (മനക്കണക്കായി):

(i) $x^2 - y^2$ (ii) $m^2 - n^2$

(iii) $a^2 - 4$ (iv) $t^2 - 9$

23. താഴെ പറയുന്നവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ മനക്കണക്കായി കാണുക:

(i) $85^2 - 15^2$ (ii) $388^2 - 312^2$

(iii) $(5\frac{3}{4})^2 - (2\frac{1}{4})^2$ (iv) $(5.6)^2 - (4.4)^2$

24. ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക:

(i) $c^2 - 36$ (ii) $1 - m^2$

(iii) $m^2 - 4n^2$ (iv) $36p^2 - 25$

25. (i) $a^2 d^2 - 4$ (ii) $49 - p^2 q^2$

(iii) $\frac{4}{9}x^2 \quad \frac{16}{25}y^2$ (iv) $1 - 0.01a^2$

26. (i) $100a^4 - 81b^2$ (ii) $a^6 - 4$

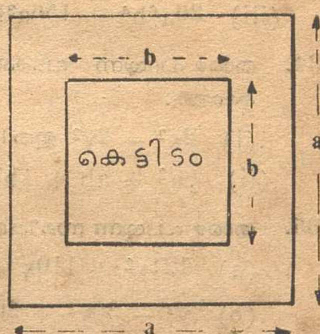
27. ചിത്രം 4.2 ൽ ഒരു സ്ഥലത്തിന്റെ പ്ലാനാണ് കാണിച്ചിരിക്കുന്നത്. ആ സ്ഥലത്തിന്റെ നടുവിലായി ഒരു കെട്ടിടമുണ്ട്.

(i) ആ സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രവാക്യം നിർമിക്കുക.

(a) കെട്ടിടം സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണം

(b) കെട്ടിടം ഒഴിച്ചുള്ള സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണം

(ii) ആ സ്ഥലത്തിന്റെയും കെട്ടിടത്തിന്റെയും കൂടി ആകെ വിസ്തീർണം എന്തായിരിക്കും?



ചിത്രം 4.2

ഇതിൽ $a = 15.5$ മീറ്ററും $b = 14.5$ മീറ്ററും ആണ്.

28. ഘടകക്രിയ ചെയ്യുക:

(i) $(a + b)^2 - c^2$ (ii) $(p - q)^2 - r^2$

(iii) $(3a - b)^2 - 9b^2$ (iv) $(3a + 1)^2 - \frac{1}{4}a^2$

29. (i) $p^2 - (p - r)^2$ (ii) $(b - c)^2 - 0.04b^2$

(iii) $9a^2 - (b^2 + c)^2$ (iv) $1 - (2a - 3b)^2$

(v) $4(x - y)^2 - 9$ (vi) $16(a - 5b)^2 - 25b^2$

30. (i) $(m + n)^2 - (m - n)^2$ (ii) $(x + 2y)^2 - (x - 2y)^2$

(iii) $(m + n + p)^2 - (m - n - p)^2$

(iv) $(a + bc)^2 - (a^2 - b + c)$

31. നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(i) $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ (ii) $x^2 - 1.44 = 0$

(iii) $9x^2 - 16$

32. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ എന്നീ സൂത്രവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്ന ബഹുപദങ്ങളെ ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക:

(i) $x^2 - 2x + 1$ (ii) $4a^2 + 4a + 1$

(iii) $9m^2 - 6m + 1$ (iv) $-a^2 - 2a - 1$

(v) $-6a - a^2 - 9$ (vi) $x^4 - 2bx^2 + b^2$

(vii) $-x^4 - 2nx^2 - n^2$ (viii) $9c^2 + 12cd^2 + 4d^4$

(ix) $25x^4 - 10x^2y^2 + y^4$ (x) $36p^4 + 12p^2q^2 + q^4$

33. താഴെ പറയുന്നവയിലെ വിട്ടുപോയപദങ്ങൾ പൂരിപ്പിച്ചെഴുതുക:

(i) $64a^2 - \ldots\ldots + 49b^2 = (\ldots\ldots - \ldots\ldots)^2$

(ii) $144x^2 + \ldots\ldots + 25y^2 = (\ldots\ldots + \ldots\ldots)^2$

(iii) $36a^6b^4 + 156a^3b^2c^4 + \ldots. = (\ldots. + \ldots.)^2$

34. താഴെ പറയുന്ന ഘടകങ്ങളായിതിരിച്ച് അവയുടെ സംഖ്യാത്മകമൂല്യം കാണുക.

(i) $2x^2 - 2y^2$ ഇതിൽ $x = 55, y = 45; x = 86, y = 36.$

(ii) $\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2$, ഇതിൽ $a = 64, \ b = 36$

35. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(a) $121x^2 + 110x + 25 = 0$

(b) $y^3 - 30y^2 + 300y - 1000 = 0$

36. ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക:

(i) $x^3 - x$ (ii) $5a^2 - 5a$

(iii) $p^4q^2 - p^2q^4$ (iv) $5a^3 + 10ab + 5b^2$

(v) $2a - 4ab + 2ab^2$ (vi) $m^2 + 2mn + n^2 - p^2$

(vii) $x^2 + 2xy + y^2 - 1$ (viii) $9 - x^2 + 2xy - y^2$

(ix) $4 - a^2 - 2ab - b^2$ (x) $a^2 - b^2 - a + b$

(xi) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 - 2cd - d^2$.

37. ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക:

(i) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$ (ii) $a^4 + a^3 + a + 1$

(iii) $x^4 + x^3 - x - 1$ (iv) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$

(v) $m^4 - n^4$ (vi) $x^4 - x^3 - x + 1$

(vii) $c^5 - c^4 - c + 1$

ഒരു ദ്വിഘാതത്രിപദങ്ങളെ രണ്ടു രീതിയിൽ ഘടകക്രിയ ചെയ്യാവുന്നതാണ്:

(1) വർഗം പൂരിപ്പിച്ച്.

ഉദാഹരണം:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= x^2 + 6x + 9 - 9 + 8 \\ &= (x + 3)^2 - 1^2 \\ &= (x + 3 + 1)(x + 3 - 1) \\ &= (x + 4)(x + 2) \end{aligned}$$

(2) രണ്ടു പദങ്ങളുടെ തുകയായി മധ്യപദത്തെ തിരിച്ച്.

ഉദാഹരണം:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= x^2 + 2x + 4x + 8 \\ &= (x^2 + 2x) + (4x + 8) \\ &= x(x + 2) + 4(x + 2) \\ &= (x + 2)(x + 4) \end{aligned}$$

38. താഴെ പറയുന്ന ത്രിപദങ്ങളെ ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക:

(i) $x^2 - 5x + 6$ (ii) $x^2 - x - 12$

(iii) $x^2 + x - 12$ (iv) $2a^2 + 10a + 12$

(v) $3p^2 + 27p + 54$

അങ്കഗണിതത്തിൽ നിന്ന് താഴെ പറയുന്ന വസ്തുത അറിയാവുന്നതാണ്.

$$\frac{2772}{28} = \frac{2^2 \times 7 \times 3^2 \times 11}{2^2 \times 7} = 3^2 \times 11 = 99$$

അതുപോലെ തന്നെ ബീജഗണിതത്തിലും ബഹുപദങ്ങളുടെ ഹരണം നിർധാരണം ചെയ്യാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 4

$x^5 - a^4 x$ നെ $x^2 + ax$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുക:

$$(x^5 - a^4x) \div (x^2 + ax) = \frac{x^5 - a^4x}{x^2 + ax}$$

$$= \frac{x(x^4 - a^4)}{x(x + a)} = \frac{x(x^2 + a^2)(x^2 - a^2)}{x(x + a)}$$

$$= \frac{x(x^2 + a^2)(x + a)(x - a)}{x(x + a)}$$

$$= (x^2 + a^2)(x - a)$$

ഗുണനത്തിന്റെ സൂത്രവാക്യങ്ങൾ അറിയാം എങ്കിൽ, ഹരണത്തിനുള്ള സൂത്രവാക്യങ്ങളും എഴുതാം.

$$\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b$$

39. ഹരിക്കുക (മനക്കണക്കായി):

(i) $x^2 - 9$ നെ $3 + x$ കൊണ്ടു്

(ii) $a^2 - 4$ നെ $2 - a$ കൊണ്ടു്

(iii) $m^2 - 1$ നെ $1 + m$ കൊണ്ടു്

(iv) $k^2 - 4$ നെ $2 - k$ കൊണ്ടു്

40. ഹരിക്കുക:

(i) $16 - m^2 n^2$ നെ $mn + 4$ കൊണ്ടു്

(ii) $\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{9} b^2$ നെ $\frac{1}{2} a + \frac{1}{3} b$ കൊണ്ടു്

(iii) $\frac{4}{25} x^2 - \frac{9}{16} y^2$ നെ $\frac{3}{4} y - \frac{2}{5} x$ കൊണ്ടു്

(iv) $\frac{9}{16} c^2 - \frac{4}{25} d^2$ നെ $\frac{2}{5} d - \frac{3}{4} c$ കൊണ്ടു്

41. ലഘൂകരിക്കുക:

$$(x^2 - 4x + 4) \div (x - 2)$$

ഭിന്നിത ബീജീയവ്യംജകങ്ങൾ

1. ബീജീയഭിന്നിതങ്ങളുടെ അങ്കനം

താഴെ പറയുന്നവ ഭിന്നിതബീജീയ വ്യംജകങ്ങൾക്കുള്ള ഉദാഹരണങ്ങൾ ആണ്.

$$\frac{m}{2a},\ \frac{a^2-x}{2b-y},\ \frac{3(p+q)-11}{7x^3},\ \frac{(a+b)^3-(x-y)^2}{m^2-p+n^2}$$

ഇവയിലെ അംശവും ഛേദവും ഭിന്നിതമാകാം. ഉദാഹരണമായി;

$$\frac{\frac{a+x}{y}}{4a^3},\quad \frac{\frac{a-b}{a+b}}{\frac{4}{3x}}$$

നിർവചനം: രണ്ടു ബീജീയവ്യംജകങ്ങളുടെ ഹരണഫലം ആണ് ഒരു *ഭിന്നിതബീജീയവ്യംജകം.*

ഏതു ബഹുപദവും ഒരു ഭിന്നിതമായി എഴുതാം. ഉദാഹരണമായി;

$$a^2-y=\frac{a^2-y}{1}$$

അംശത്തിലുള്ള അക്ഷരങ്ങൾക്ക് എന്തു മൂല്യവും സങ്കല്പിക്കാവുന്നതാണ് (നിർവചനത്തിലെ ഡൊമെയ്ൻെറ പരിധിയിൽ).

ഛേദത്തിനു് പൂജ്യം ഒഴിച്ചുള്ള എന്തു മൂല്യവും കൊടുക്കാവുന്നതാണ് (പൂജ്യത്തിനു് തുല്യമല്ലാത്ത മൂല്യങ്ങളാണ് ഛേദത്തിനു് അനുവദനീയമായ മൂല്യങ്ങൾ).

1. താഴെ പറയുന്ന ബീജീയവ്യംജകങ്ങളിൽ ഓരോന്നിന്റേയും ഹരണഫലം ഭിന്നിതങ്ങൾ ആയി എഴുതുക.

(a) $a \div b$ (b) $5 \div x$
(c) $y \div z$ (d) $(a + b) \div 4$
(e) $9 \div (m - n)$ (f) $(x + y) \div (x - y)$
(g) $3x \div (2a + 3b)$ (h) $(a^2 - b) \div (2x^2 + y - 1)$

2. ഒരു ടൈപ്പിസ്റ്റ് എഴുതാനുള്ള കുറെ കാര്യങ്ങൾ a മണിക്കൂർ കൊണ്ടു് ടൈപ്പ ചെയ്യുന്നു; മറ്റൊരാൾ b മണിക്കൂർ കൊണ്ട ടൈപ്പ ചെയ്യുന്നു. എന്നാൽ അവർ ഓരോരുത്തരും 1 മണിക്കൂർ കൊണ്ടു് ആ വസ്തുതകളുടെ എത്ര ഭാഗം ടൈപ്പ ചെയ്യും ? അവർ രണ്ടുപേരും കൂടി ഒരു മണിക്കൂറിൽ എത്ര ഭാഗം ടൈപ്പ ചെയ്യും ? അവർ ഒരുമിച്ചാണു് ടൈപ്പ ചെയ്യിരുന്നതു് എങ്കിൽ അതിന്നു് ആകെ എത്ര സമയം വേണം ?

(i) $a = 4,\ b = 6$ (ii) $a = 2\frac{1}{2},\ b = 1\frac{1}{4}$.

3. ഒരു പട്ടണത്തിൽ ആകെ a ആളുകൾ ഉണ്ടു്. ആ പട്ടണത്തിലെ ജനസംഖ്യ കൊല്ലം തോറും $p\%$ വീതം വർധിക്കുന്നു. എന്നാൽ ഒരു കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ ആ പട്ടണത്തിൽ ആകെ എത്ര ആളുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കും ?

(i) $a = 15{,}000,\quad p = 5$
(ii) $a = 70000,\quad p = 3.4$
(iii) $a = 1000000,\quad p = 8.5$

4. ഒരു സ്കൂട്ടർ മണിക്കൂറിൽ v കി. മീ വേഗതയിൽ t മണിക്കൂറും മണിക്കൂറിൽ v_1 കി. മീ വേഗതയിൽ t_1 മണിക്കൂറും സഞ്ചരിക്കുന്നു. എന്നാൽ അതിന്റെ മണിക്കൂറിലെ v_0 കി. മീ വേഗത അതായതു് അതിന്റെ ശരാശരി വേഗത കാണുക. ഇതിൽ $t = 2.2$ മണിക്കൂർ, $v = 55$ കി മീ. $t_1 = 1.5$ മണിക്കൂർ, $v_1 = 7.2$ കി. മീ ആണെങ്കിൽ v_0 കാണുക.

5. ഒരാൾ ഒരു കടലിൽ (ജലപ്രവാഹത്തിൽ) കൂടി t മണിക്കൂറു കൊണ്ടു് a കി. മീ ദൂരം സഞ്ചരിക്കുന്നു. ജലപ്രവാഹത്തിന്റെ വേഗത മണിക്കൂറിൽ v കി. മീ ആണു്. എങ്കിൽ അയാൾക്കു് തിരിച്ചുവരാൻ എത്ര സമയം വേണ്ടി വരും ? ഇതിൽ $a = 18.2$ കി. മീ, $t = 2$ മണിക്കൂർ 12 മിനിററ്, $v = 1.8$ കി. മീ. എന്നാൽ അയാൾക്കു മടങ്ങിവരാൻ എത്ര മിനിററു സമയം വേണ്ടി വരും ?

അക്ഷരങ്ങളുടെ സംഖ്യാത്മകമൂല്യങ്ങൾ തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ അവയെ ഒരു ഭിന്നിതമായി പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ ആ ഭിന്നിതത്തിന്റെ സാംഖ്യാത്മകമൂല്യം ലഭിക്കുന്നു. ഉദാഹരണമായി, $a = 6,\ b = 3$ ആണെങ്കിൽ, a/b എന്ന ഭിന്നിതത്തിന്റെ സംഖ്യാത്മകമൂല്യം 2 ആണു്.

$a = 0$ എന്നും $b = 5$ എന്നും എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ a/b യുടെ സംഖ്യാത്മക മൂല്യം പൂജ്യമായിരിക്കും.

ഒരു ഭിന്നിതത്തിലെ ഛേദം പൂജ്യമായി വരികയാണെങ്കിൽ ആ ഭിന്നിതത്തിനു് യാതൊരു അർഥവും ഇല്ല.

6. താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക:

(i) $\frac{0}{a} (a \neq 0)$ (ii) $\frac{0}{2b} (b \neq 0)$ (iii) $\frac{0}{x - y} (b \neq 0)$

7. താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങൾ പൂജ്യത്തിനു തുല്യമാണെങ്കിൽ m ൻെറ മൂല്യം എന്തായിരിക്കും:

(i) $\frac{m - 2}{3}$ (ii) $\frac{m + 5}{m}$

(iii) $\frac{m - 3}{m + 1}$ (iv) $\frac{m(m - 10)}{m + 15}$

(v) $\frac{(m + 2)(m - 3)}{m + 5}$ (vi) $\frac{(m + 1)(m - 4)}{m - 3}$

8. താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങൾ അർഥശൂന്യങ്ങൾ ആയിത്തീരണമെങ്കിൽ x ൻെറ മൂല്യം എന്തായിരിക്കണം ?

(i) $\frac{5}{x - 1}$ (ii) $\frac{1}{x + 1}$ (iii) $\frac{x}{x - c}$

(iv) $\frac{x}{2x - 8}$ (v) $\frac{x - 1}{x + 1}$

9. പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	9	15
$z = \frac{x-3}{x+1}$									

10. (a) താഴെ പറയുന്നവ കൊണ്ടു് അർഥശൂന്യങ്ങളാകത്തക്കവിധത്തിലുള്ള ബീജീയഭിന്നിതങ്ങൾ എഴുതുക:

(i) $x = 8$

(ii) $x = 7$

(iii) $x = 4$ ഉം $x = -4$ ഉം

(iv) $x = 5$

(v) $x = 0$

(b) പൂജ്യത്തിനു തുല്യമായി വരുന്ന ബീജീയഭിന്നിതങ്ങൾ എഴുതുക:

(i) $a = 0$ (ii) $a = 10$

(iii) $a = -4$ (iv) $a = 3$

(v) $a = 20$

11. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങളെ നിർധാരണം ചെയ്തു് a ക്കു് എന്തു മൂല്യം കൊടുത്താലാണു് സമീകരണങ്ങൾക്കു് മൂലങ്ങൾ ഒന്നും ഉണ്ടാകാതിരിക്കുന്നതു് എന്നു് നിർണയിക്കുക:

(i) $ax - 6 = x$ (ii) $ax + 7 = 11 - 2x$

(iii) $ax - a = 10x + 9$ (iv) $a - ax = 2 - 3x$

2. ബീജീയഭിന്നിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനനിയമം

ഒരു ഭിന്നിതത്തിലെ അംശവും ഛേദവും ഏതെങ്കിലും പരിമേയസംഖ്യകൾ ആണെങ്കിൽ (ഛേദം പൂജ്യത്തിനു തുല്യമായിരിക്കരുതു്), ആ ഭിന്നത്തിനു് താഴെ പറയുന്ന ഗുണം ഉണ്ടു്.

ഭിന്നിതത്തിലെ അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും ഒരേ സംഖ്യ കൊണ്ടു് (പൂജ്യത്തിനു് തുല്യമല്ലാത്ത) ഗുണിക്കുകയാണെങ്കിൽ, മൂല്യത്തിനു് യാതൊരു മാററവും വരുന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി;

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm} \quad \text{ഇതിൽ } m \neq 0$$

അതുപോലെ തന്നെ ബീജീയഭിന്നിതങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനനിയമവും ഗുണവും സ്ഥാപിക്കാവുന്നതാണു്.

ഒരു ബീജീയഭിന്നിതത്തിലെ അംശത്തെയും ഛേദത്തേയും ഒരേ ബഹുപദം കൊണ്ടു് ഗുണിക്കുകയാണെങ്കിൽ, തന്നിട്ടുള്ള ഭിന്നിതത്തിനു തുല്യമായി മറെറാരു ഭിന്നിതം കിട്ടുന്നു.

ഇതു് ഒരു ഉദാഹരണം കൊണ്ടു് വിശദീകരിക്കാം. $\frac{x+2}{x-3}$ എന്ന ഭിന്നിതത്തിലെ അംശത്തേയും ഛേദത്തേയും ദ്വിപദം $x - 2$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.

അപ്പോൾ $\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}$ എന്ന ഒരു ഭിന്നിതം കിട്ടുന്നു.

x നു് 3 ഉം 2 ഉം ഒഴികെ മറേറതെങ്കിലും മൂല്യം കൊടുക്കുക ($x = 3$ ഓ 2 ഓ ആണെങ്കിൽ ഭിന്നിതത്തിലെ ഛേദം പൂജ്യത്തിനു് തുല്യമായിത്തീരും).

$\frac{(x+2)}{(x-3)}$, $\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}$ എന്നീ രണ്ടു ഭിന്നിതങ്ങളിൽ x നു് ഒരു മൂല്യം കൊടുക്കുക. അപ്പോൾ കിട്ടുന്ന ഫലം രണ്ടിലും ഒരുപോലെ ആയിരിക്കും.

അതുകൊണ്ട്,

$$\frac{x+2}{x-3} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}$$

അതായതു്

$$\frac{x+2}{x-3} = \frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$$

12. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങളിൽ നിന്നു് സർവസമീകരണങ്ങൾ ഏവയെന്നു പറയുക:

(i) $\frac{a}{a+b} = \frac{an}{an+bn}$ (ii) $\frac{am+b}{cn+d} = \frac{a+b}{c+d}$

(iii) $\frac{x+1}{y+3} = \frac{x^2+1}{xy+3}$ (iv) $\frac{b}{c} = \frac{by-d}{c-d}$

13. x നെയും y യേയും 10 കൊണ്ടു ഒപ്പം ഗുണിക്കുകയാണെങ്കിൽ, താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾക്കു് മാററം വരുമോ? താഴെ പറയുന്നവ ചെയ്തുനോക്കുക.

(i) $\frac{x}{y}$ (ii) $\frac{x}{3y}$ (iii) $\frac{x+y}{x-y}$ (iv) $\frac{x-1}{y-1}$

(v) $\frac{3x}{x+y}$ (vi) $\frac{x^2}{x+y}$ (vii) $\frac{y-4}{x-4}$

3. ഭിന്നിതങ്ങളെ ലഘൂകരിക്കൽ

പ്രതിലോമ (വിപരീത) ക്രമത്തിൽ മുകളിൽ പറഞ്ഞ സമത എഴുതാവുന്നതാണു്. അതായതു്,

$$\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \frac{x+2}{x-3}$$

$\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}$ എന്ന ഭിന്നിതത്തെ എങ്ങിനെയാണു് $\frac{x+2}{x-3}$ എന്ന ലഘു ഭിന്നിതമാക്കി രൂപാന്തരപ്പെടുത്തിയതു് എന്നു നോക്കാം. ഭിന്നിതത്തിലെ അംശത്തേയും ഛേദത്തേയും പൊതുഘടകമായ $x-2$ കൊണ്ടു ഹരിക്കുമ്പോൾ മേല്പറഞ്ഞ ഭിന്നിതത്തെ $\frac{x+2}{x-3}$ എന്ന ഭിന്നിതമാക്കി ലഘൂകരിക്കാവുന്നതാണു്.

ഭിന്നിതത്തിലെ അംശത്തേയും ഛേദത്തേയും ഒരേ ബഹുപദം കൊണ്ടു ഹരിച്ചാലും ഭിന്നത്തിൻെറ മൂല്യത്തിനു് യാതൊരു മാററവും വരുന്നില്ല. ഈ നിയമം ഉപയോഗിച്ചു് ഒരേ പൊതുഘടകം കൊണ്ടു് ഭിന്നിതത്തിലെ അംശത്തേയും

ഛേദത്തേയും ഹരിച്ച് അതിനെ ലഘൂകരിക്കാവുന്നതാണ്. ഇത്തരത്തിലുള്ള ലഘൂകരണത്തെ *'ഭിന്നിതത്തിൻെറ ഏററവും താഴ്ന്നപദമാക്കിയുള്ള ലഘൂകരണം'* എന്നു പറയുന്നു.

14. താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങളെ ഏററവും ചെറിയ ഭിന്നിതങ്ങളായി ലഘൂകരിക്കുക.

(i) $\frac{8}{12}$, $\frac{45}{120}$, $\frac{84}{210}$, $\frac{435}{1215}$

(ii) $\frac{15a}{20b}$, $\frac{ab}{ac}$ (iii) $\frac{10mn}{15mp}$

(iv) $\frac{8ax}{16ay}$ (v) $\frac{2a^3}{3ab}$

15. (i) $\frac{5x}{5xy}$ (ii) $\frac{24xy}{56x^2y}$

(iii) $\frac{45a^3}{64a^4b}$ (iv) $\frac{270a^{10}b^8c^7}{405a^8b^{12}c^{14}}$

(v) $\frac{1080a^{11}bc^{15}}{1008a^{10}b^{14}c^{16}}$

16. (i) $\frac{3a\,(x+y)^2}{9a^2\,(x+y)}$ (ii) $\frac{10a^2b\,(x-y)^2}{15a^4b\,(x-y)^3}$

(iii) $\frac{3\,(a-b)(a-c)^2}{6\,(a-b)\,(a-c)}$ (iv) $\frac{a\,(b+c)}{a\,(b+c)}$

17. (i) $\frac{a^2}{a^k}$ (ii) $\frac{b^3}{b^n}$ (iii) $\frac{x^3}{x^{n+3}}$

(iv) $\frac{z}{z^{k-3}}$ (v) $\frac{4x^{n+3}}{x^{n+3}}$

ഒരു ഭിന്നിതത്തിൻെറ അടിസ്ഥാനനിയമത്തിന് അനുസരണമായി, ഭിന്നിതത്തിലെ ഛേദത്തെയും അംശത്തെയും 1 കൊണ്ട് ഗുണിക്കുകയാണെങ്കിലും ആ ഭിന്നിതത്തിൻെറ മൂല്യത്തിന് യാതൊരു മാററവും സംഭവിക്കുന്നില്ല.

ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{7}{12} = \frac{7\times(-1)}{12\times(-1)} = \frac{-7}{-12} \text{ ഉം}$$

$$\frac{2}{-3} = \frac{2\times(-1)}{-3\times(-1)} = \frac{-2}{3} \text{ ഉം}$$

ഏതൊരുസംഖ്യയെയും -1 കൊണ്ടു് ഗുണിക്കുമ്പോൾ സംഖ്യയുടെ ധനചിഹ്നങ്ങൾ ഋണചിഹ്നങ്ങളായും ഋണചിഹ്നങ്ങൾ ധനചിഹ്നങ്ങളായും മാറുന്നു. ഭിന്നിതത്തിലും അംശത്തിനും ഛേദത്തിനും അവയുടെ വിപരീത ചിഹ്നങ്ങൾ ഇടുകയാണെങ്കിലും ആ ഭിന്നിതത്തിൻെറ മൂല്യം മാറുന്നില്ല. അപ്രകാരം,

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$$

അംശത്തിൻെറ ചിഹ്നമോ ഛേദത്തിൻെറ ചിഹ്നമോ ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നു മാറുകയാണെങ്കിൽ; തന്നിരിക്കുന്ന ഭിന്നിതത്തിൻെറ വിപരീതഭിന്നിതമാണു് കിട്ടുന്നതു്.

ഉദാഹരണമായി,

$\frac{2}{3}$ ഉം ${}^{-}\frac{2}{3}$ ഉം; $\frac{2}{3}$ ഉം ${}_{-}\frac{2}{3}$ ഉം.

$-(\frac{2}{3}) = {}^{-}\frac{2}{3}$ ഉം $-(\frac{2}{3}) = {}_{-}\frac{2}{3}$ ഉം

$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b}$ ഉം $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ യും

$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$ യും $\frac{a}{b} = -\frac{a}{-b}$ ഉം

ഭിന്നിതത്തിലെ പദങ്ങളിൽ ഒന്നിൻെറ ചിഹ്നം മാററുകയും ആ ഭിന്നിതൻെറ വിപരീതചിഹ്നമായി മാററുകയും ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ ആ ഭിന്നിതത്തിന്റെ മൂല്യത്തിനു് യാതൊരു മാററവും വരുന്നില്ല.

ഉദാഹരണമായി,

$$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}$$

18. ഭിന്നിതത്തിൻെറ മൂല്യത്തിനു് മാററം വരാതെ, താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഭിന്നിതങ്ങളിലെ അംശത്തിൻെറയും ഛേദത്തിൻെറയും ചിഹ്നങ്ങൾ മാററുക.

(i) $\frac{-2a}{-5b}$ (ii) $\frac{8c^2}{-15x}$

(iii) $-\frac{-3m}{4n}$ (iv) $-\frac{-x}{-y}$

(v) $-\frac{3x^2y}{-10z}$ (vi) $\frac{-4ab}{-cd}$

19. താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ മാററം വരാത്തവിധം, മുമ്പിൽ ഋണചിഹ്നങ്ങൾ ഇട്ട് ഭിന്നിതങ്ങളെ രൂപാന്തരപ്പെടുത്തുക.

(i) $\frac{m}{1-m}$ (ii) $\frac{a-b}{c+d}$

(iii) $\frac{a-x}{b-x}$ (iv) $\frac{-a-b}{c+d}$

20. താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങളെ ലഘൂകരിക്കുക.

(i) $\frac{a(x-a)}{b(a-x)}$ (ii) $\frac{5a(x-y)}{15a(y-x)}$

(iii) $\frac{3m(x-1)}{9m^2(1-x)}$

21. (i) $\frac{ac-bc}{ac+bc}$ (ii) $\frac{ax+bx}{ax-bx}$

(iii) $\frac{a^2}{a^2+ab}$ (iv) $\frac{xy}{x-xy}$

(v) $\frac{ac-bc}{c^2+cd}$ (vi) $\frac{k^2+k}{kx-ky}$

22. (i) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$ (ii) $\frac{x-x^2}{x^2-1}$

(iii) $\frac{a^2-1}{1-a}$ (iv) $\frac{m-n}{(n-m)^2}$

23. (i) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$ (ii) $\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6a^2-6b^2}$

24. (i) $\frac{ax+ay-bx-by}{ax-ay-bx+by}$ (ii) $\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$

(iii) $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$ (iv) $\frac{1-3y+3y^2-y^3}{z-zy+x-xy}$

25. $\frac{a^2-b^2}{a^2-a-b-b^2}$

26. (i) $\frac{a}{a}$ (ii) $\frac{-b}{|b|}$

(iii) $\frac{x-y}{x-y}$ (iv) $\frac{|m-n|}{m^2-mn}$

27. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങളിൽ നിന്ന് x നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക:

(i) $2x = 3d$ (ii) $ax = b + c$

(iii) $a^2x - ab = a$ (iv) $4mn - 2nx = 6n^2$

(v) $bx - cx = a$ (vi) $ax + x = a^2 + 2a + 1$

(vii) $m^2x + 2mnx + n^2x = 3m^2 - 3n^2$

4. ഭിന്നിതങ്ങളെ പൊതുഛേദമാക്കി ലഘൂകരിക്കൽ

വ്യത്യസ്തഛേദങ്ങളുള്ള ഒരു ബീജീയഭിന്നിതത്തെ ഒരേ ഛേദങ്ങളുള്ള ഭിന്നിതങ്ങളാക്കി രൂപാന്തരപ്പെടുത്തുവാൻ ഭിന്നിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനനിയമം പ്രയോജനപ്പെടുന്നു.

ഇത്തരത്തിലുള്ള രൂപാന്തരണത്തെ 'ഭിന്നിതങ്ങളെ പൊതുഛേദമാക്കിയുള്ള ലഘൂകരിക്കൽ' എന്നു പറയുന്നു.

ഇതു് ഉദാഹരണസഹിതം പറയാവുന്നതാണ്.

(a) *ഛേദങ്ങൾ ഏകപദങ്ങൾ ആയിട്ടുള്ള ഭിന്നിതങ്ങൾ*

ഉദാഹരണം 1

$$\frac{n}{4a\,b^5},\ \frac{n}{6a^3\,c^2},\ \frac{p}{9a^4\,b^2}$$

ഈ ഭിന്നിതങ്ങളുടെ പൊതുഛേദം ഏതാണ് എന്നു് പരിശോധിച്ചുനോക്കാം:

(1) 36 എന്ന സംഖ്യ, ഗുണാങ്കങ്ങൾ 4, 6, 9 എന്നിവയുടെ ലഘുതമ സാധാരണഗുണിതം (L. C. M.)ആണ്.

(2) പൊതുഛേദത്തിൽ ഘടകം a^4 ഉണ്ടായിരിക്കണം

(3) പൊതുഛേദത്തിൽ ഘടകം b^5 ഉണ്ടായിരിക്കണം

(4) പൊതുഛേദത്തിൽ ഘടകം c^2 ഉണ്ടായിരിക്കണം

അതുകൊണ്ടു്, തന്നിരിക്കുന്ന ഭിന്നിതങ്ങളുടെ പൊതുഛേദമായി $36a^4\,b^5\,c^2$ കിട്ടുന്നു. ഛേദം $36a^4\,b^5\,c^2$ ആയ ഭിന്നിതം കിട്ടുവാൻ, ഭിന്നിതത്തിലെ ഓരോ പദത്തെയും യഥാക്രമം $9a^3\,c^2$, $6ab^5$, $4b^3\,c^2$ കൊണ്ടു് ഗുണിക്കണം. അപ്പോൾ

$$\frac{m}{4a\,b^5} = \frac{9a^3\,c^2\,m}{36a^4\,b^5\,c^2},\quad \frac{n}{6a^3\,c^2} = \frac{6ab^5\,n}{36a^4\,b^5\,c^2},$$

$$\frac{p}{9a^4\,b^2} = \frac{4b^3\,c^2\,p}{36a^4\,b^5\,c^2}$$

നിഗമനം: ഛേദങ്ങൾ ഏകപദങ്ങൾ ആയുള്ള ഭിന്നിതങ്ങളുടെ ഏററവും ചെറിയ ഛേദം, ഛേദങ്ങളുടെ ലഘുതമ സാധാരണഗുണിതം ആണ്. അതു കൊണ്ട് ഛേദങ്ങളെ എന്തുകൊണ്ട ഗുണിച്ചാൽ ആ പൊതുഛേദം കിട്ടുമോ ആ സംഖ്യകൾ കൊണ്ട തന്നെ അംശത്തെയും ഗുണിക്കേണ്ടതാണ്.

28. താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങളെ പൊതുഛേദമാക്കി ലഘൂകരിക്കുക:

(a) $\dfrac{1}{24a^8 x^5 y}$ ഉം $\dfrac{7}{60a^6 x^4}$ ഉം

(b) $\dfrac{xy}{18a^{10} b^6}$ ഉം $\dfrac{yz}{45a^6 b^5 c^3}$ ഉം

(c) $\dfrac{a}{x^n}$ ഉം $\dfrac{b}{x^{n+2}}$

(b) ഛേദങ്ങൾ ബഹുപദങ്ങളായുള്ള ഭിന്നിതങ്ങൾ

ഉദാഹരണം 2

താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങൾ പരിശോധിച്ചു നോക്കുക.

$$\frac{a}{4x^2 - 4y^2}\ ;\ \frac{b}{5x^2 + 10xy + 5y^2}\ ;\ \frac{c}{10x^2 - 20xy + 10y^2}$$

ആദ്യമായി അവയുടെ ഛേദങ്ങളെ ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക.

$$4x^2 - 4y^2 = 4(x^2 - y^2) = 4(x + y)(x - y)$$
$$5x^2 + 10xy + 5y^2 = 5(x^2 + 2xy + y^2) = 5(x + y)^2$$
$$10x^2 - 20xy + 10y^2 = 10(x^2 - 2xy + y^2) = 10(x - y)^2$$

ഛേദങ്ങൾ ഏകപദങ്ങൾ ആയിട്ടുള്ള ഭിന്നിതത്തിൽ ചെയ്തതുപോലെ തന്നെ ഇവയിൽ നിന്നും പൊതുഘടകം എടുക്കുക.

$20(x + y)^2 (x - y)^2$ ആണ് പൊതുഘടകം.

അതിനശേഷവും ഓരോ ഭിന്നിതവും പൊതു ഛേദമാക്കി മാററുക. അപ്പോൾ താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങൾ കിട്ടുന്നു.

$$\frac{a}{4x^2 - 4y^2} = \frac{a}{4(x + y)(x - y)}$$
$$= \frac{5a(x + y)(x - y)}{20(x + y)^2 (x - y)^2}$$

$$\frac{b}{5x^2 + 10xy + 5y^2} = \frac{b}{5(x + y)^2}$$
$$= \frac{4b(x - y)^2}{20(x + y)^2 (x - y)^2}$$

$$\frac{c}{10x^2 - 20xy + 10y^2} = \frac{c}{10(x-y)^2}$$

$$= \frac{2c(x+y)^2}{20(x+y)^2(x-y)^2}$$

നിഗമനം: ഛേദങ്ങരം ബഹുപദങ്ങരം ആയിട്ടുള്ള ഭിന്നിതങ്ങളെ ലഘൂകരിക്കുവാൻ അവയെ ഒരു പൊതുഛേദമാക്കി മാറേറണ്ടതാണ്.

(i) ഛേദങ്ങളെ ഘടകങ്ങളാക്കി തിരിക്കുക.

(ii) ഛേദങ്ങളുടെ ലഘുതമസാധാരണഗുണിതം കാണുക.

ഈ ലഘുതമസാധാരണഗുണിതം എല്ലാ ബീജീയഭിന്നിതങ്ങളുടെയും പൊതു ഛേദം ആയിരിക്കും.

29. താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങളെ ഒരു പൊതുഛേദമാക്കി ലഘൂകരിക്കുക:

(a) $\frac{m}{(a-b)^2}$ ഉം $\frac{p}{a^2 - b^2}$ ഉം

(b) $\frac{f}{abc - a^2d}$ ഉം $\frac{t}{b^2c - abd}$ ഉം

(c) $\frac{5}{4b^2 - 1}$ ഉം $\frac{6s}{6b - 3}$ ഉം $\frac{3p}{4b + 2}$

5. ഭിന്നിതങ്ങളുടെ ക്രിയകരം

(a) *സങ്കലനം*

30. കൂട്ടുക (മനക്കണക്കായി):

$\frac{3}{7}$ ഉം $\frac{2}{7}$ ഉം, $\frac{a}{4}$ ഉം $\frac{b}{4}$ ഉം

$\frac{5a}{6}$ ഉം $\frac{a}{6}$ ഉം, $\frac{2p^2}{5}$ ഉം $\frac{p^2}{5}$ ഉം

ഉദാഹരണം 3

ഒന്നാം ക്ലാസ്സിനു് a കോപ്പി പുസ്തകങ്ങളും രണ്ടാം ക്ലാസ്സിനു് b കോപ്പി പുസ്തകങ്ങളും ഒരു സ്കൂളിൽ നിന്നും കൊടുത്തു. ഓരോ കുട്ടിക്കും m പുസ്തകം വീതം കിട്ടിയെങ്കിൽ രണ്ടു ക്ലാസ്സിലും കൂടി ആകെ എത്ര കുട്ടികരം ഉണ്ടു്?

നിർധാരണം:

ഒന്നാമത്തെ മാർഗം

(1) ഒന്നാം ക്ലാസ്സിൽ ആകെ എത്ര കുട്ടികൾ ഉണ്ടു്?

$$a \div m = \frac{a}{m} \text{ കുട്ടികൾ}$$

(2) രണ്ടാം ക്ലാസ്സിൽ എത്ര കുട്ടികൾ ഉണ്ടു്?

$$b \div m = \frac{b}{m} \text{ കുട്ടികൾ}$$

(3) രണ്ടു ക്ലാസ്സിലും കൂടി ആകെ കുട്ടികൾ

$$= \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$$

രണ്ടാമത്തെ മാർഗം

(1) രണ്ടു ക്ലാസ്സിലേക്കും കൂടി കൊടുത്ത പുസ്തകങ്ങൾ എത്ര?

$$= a + b \text{ പുസ്തകങ്ങൾ}$$

(2) രണ്ടു ക്ലാസ്സിലുംകൂടിയുള്ള ആകെ കുട്ടികൾ എത്ര?

$$= \frac{a + b}{m}$$

അതിനുശേഷം ഈ രണ്ടു ഫലങ്ങളെയും കൂടി താരതമ്യപ്പെടുത്താം. അതായതു്,

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} \text{ഉം} \quad \frac{a + b}{m} \text{ഉം}$$

ഇവ രണ്ടും തുല്യമാണു്. അതുകൊണ്ടു്

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a + b}{m}$$

a യുടെയും b യുടെയും m ൻെറയും എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും (m ഒരിക്കലും പൂജ്യത്തിനു തുല്യമായിരിക്കരുതു്) ഈ സമത ശരിയായിരിക്കും.

ഇതു് മറെറാരു തരത്തിലും പറയാവുന്നതാണു്, അതായതു്

$$\frac{a + b}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m}$$

ഈ സമത പ്രതിലോമ (വിപരീത) ക്രമത്തിൽ നാം വായിക്കുകയാണു് എങ്കിൽ, താഴെ പറയുന്ന സമത ലഭിക്കുന്നു.

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a + b}{m}$$

നിഗമനം: ഒരേ ഛേദങ്ങൾ ഉള്ള ഭിന്നിതങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുവാൻ, അവയുടെ അംശങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടി ആ തുകയെ പൊതുഛേദം കൊണ്ടു് ഹരിച്ചാൽ മതി.

31. താഴെ പറയുന്നവയുടെ തുക കാണുക:

(1) $\frac{a+b}{3}$ ഉം $\frac{a}{3}$ ഉം (2) $\frac{m-n}{a}$ ഉം $\frac{m+n}{a}$ ഉം

(3) $\frac{a+b}{x+a}$ ഉം $\frac{a-b}{x+a}$ ഉം (4) $\frac{x+4}{a-2}$ ഉം $\frac{x-3}{a-2}$ ഉം

32. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{1-x}$ (2) $\frac{m}{2p-q} + \frac{n}{q-2p}$

(3) $\frac{a+1}{a-1} + \frac{a-2}{1-a}$ (4) $\frac{m+n}{p-q} + \frac{m+4}{q-p}$

വ്യത്യസ്ത ഛേദങ്ങളുള്ള ഭിന്നിതങ്ങൾ തമ്മിൽ കൂട്ടുവാൻ, അവയിലെ ഛേദങ്ങളെ പൊതുഛേദമാക്കി ലഘൂകരിക്കേണ്ടതാണു്.

ഉദാഹരണം 4

$\frac{a}{6m}$ ഉം $\frac{b}{8n}$ ഉം തമ്മിൽ കൂട്ടുക.

ഈ ഭിന്നിതങ്ങൾ ഓരോന്നിനെയും പൊതുഛേദമാക്കി മാറേറണ്ടതാണു്. അപ്പോൾ

$$\frac{a}{6m} = \frac{4an}{24mn} \text{ ഉം } \frac{b}{8n} = \frac{3bm}{24mn} \text{ ഉം}$$

ആയിരിക്കും.

$$\therefore \frac{a}{6m} + \frac{b}{8n} = \frac{4an}{24mn} + \frac{3bm}{24mn} = \frac{4an+3bm}{24mn}$$

33. തുകകാണുക:

(1) $\frac{3}{a} + \frac{5}{b}$ (2) $\frac{3x-2}{5} + \frac{5x-3}{3}$

(3) $\frac{2a-3}{4} + \frac{5a+3}{3}$

34. (1) $\frac{1}{4a} + \frac{1}{2b}$ (2) $\frac{3x-2}{5} + \frac{5x-3}{3}$

(3) $\frac{2a-3}{4} + \frac{5a+3}{3}$

35. (1) $\frac{x}{ab} + \frac{x}{ac}$ (2) $\frac{3c^2 + 5ab}{ac} + \frac{b^2 - 3ac}{bc}$

(3) $\frac{1}{m^4 n^3} + \frac{2}{m^3 n^4}$

(b) *വ്യവകലനം*

ഭിന്നിതങ്ങളുടെ സങ്കലനത്തിനു് നേരെ വിപരീതമായ ഒരു ക്രിയയാണു് വ്യവകലനം. വ്യവകലനത്തിനുള്ള നിയമം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

ഒരേ ഛേദങ്ങളുള്ള രണ്ടു ഭിന്നിതങ്ങളുടെ വ്യവകലനത്തിനു്, വ്യവകല്യത്തിന്റെ അംശത്തിൽ നിന്നു് വ്യവകലനത്തിന്റെ അംശം കുറക്കുകയും തൽഫലമായി ലഭിക്കുന്ന വ്യത്യാസത്തെ പൊതു ഛേദം കൊണ്ടു് ഹരിക്കുകയും ചെയ്താൽ മതി.

ഉദാഹരണം 5

$\frac{a}{m}$ ഇതിൽ നിന്നു് $\frac{b}{m}$ കുറക്കുക:

$$\frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a - b}{m}$$

36. കുറക്കുക:

(1) $\frac{b}{10}$ ൽ നിന്നു് $\frac{a^2}{10}$

(2) $\frac{5x + 1}{2}$ ൽ നിന്നു് $\frac{x}{b}$

(3) $\frac{a + 3}{4}$ ൽ നിന്നു് $\frac{a + 1}{4}$

(4) $\frac{3p - q}{m}$ ൽ നിന്നു് $\frac{p - q}{m}$

37. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $\frac{2x}{a - b} - \frac{x}{b - a}$ (2) $\frac{5y^2}{a - b} - \frac{2y^2}{2 - a}$

(3) $\frac{x + y}{x - 4} - \frac{y + 2x}{y - x}$ (4) $\frac{a}{x^2 - 1} - \frac{b}{1 - x^2}$

വ്യത്യസ്തഛേദങ്ങളുള്ള ഭിന്നിതങ്ങളുടെ വ്യവകലനത്തിനു്, അവയിലെ ഛേദങ്ങളെ പൊതുഛേദമാക്കി ലഘൂകരിച്ച് അതിനുശേഷം മുകളിൽ പ്രസ്താവിച്ച തത്വം തന്നെ പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണു്.

38. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $\frac{15}{28} - \frac{13}{42}$ (2) $\frac{x}{5} - \frac{y}{8}$

(3) $\frac{13x}{120} - \frac{11x}{90}$ (4) $\frac{7}{x} - \frac{4}{y}$

39. കുറക്കുക:

(1) $\frac{3}{a} - \frac{2}{ab}$ (2) $\frac{x}{ab} - \frac{y}{ac}$

(3) $\frac{4p + 3q}{10} - \frac{2p - q}{15}$

(4) $\frac{2b^2 - 3a^2}{5} - \frac{5a^2 - b^2}{4}$

40. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $\frac{x - 1}{4} - \frac{x + 3}{4} - \frac{x - 3}{4}$

(2) $\frac{x + 1}{a - b} - \frac{x + 1}{b - a} - \frac{x - 1}{a - b}$

(3) $\frac{5a}{6b^2c} - \frac{7b}{12ac^2} + \frac{11c}{18a^2b}$

(4) $\frac{5(2a - b)}{8} - \frac{3(a - 4b)}{2} + \frac{7(a - b)}{6}$

41. (1) $m + \frac{1}{n}$ (2) $\frac{x^2 + y}{x} - y$

(3) $5 - \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ (4) $a - b - \frac{a^2 + b^2}{a}$

(5) $-\frac{x - y}{8} + \frac{x - y}{4} - y$

(6) $\frac{2x - 5y}{2} - y - \frac{3x - y}{4}$

താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

42. (1) $10 - \frac{3x - 1}{2} = \frac{6x + 3}{11}$

(2) $\frac{x+6}{2}+\frac{5-4x}{3}-\frac{7-x}{6}=0$

(3) $\frac{7+9x}{4}-1+\frac{2-x}{9}=7x$

(4) $x+2\frac{1}{2}=\frac{4x+3}{4}-\frac{2-3x}{8}$

(5) $\frac{5z-6}{3}-\frac{5z+6}{12}=1$

(6) $\frac{9p-5}{2}-\frac{3+2p}{3}-\frac{8p-2}{4}=2$

(7) $\frac{x+4}{5}-x+5=\frac{x+3}{3}-\frac{x-2}{x}$

(8) $14\frac{1}{2}-\frac{2(m+3)}{5}=\frac{3m}{2}-\frac{2(m-7)}{3}$

43. (1) $\frac{1}{2}(z+1)+\frac{1}{3}(z+2)=3-\frac{1}{4}(z+3)$

(2) $x-\frac{3}{17}(2x-1)=\frac{7}{34}(1-2x)+\frac{10x-2}{2}$

(3) $\frac{2(2-3x)}{0.01}-2.5=\frac{0.02-2x}{2.02}-7.2$

44. ഒരു പദമാക്കി ലഘൂകരിക്കുക :

(1) $\frac{3}{x+y}-\frac{5}{x}$ (2) $\frac{4x}{5(x-3)}-\frac{3x}{2(x-3)}$

(3) $\frac{11a+13b}{3(a-b)}+\frac{15a+17b}{4(b-a)}$

(4) $\frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}$ (5) $\frac{1}{3a-b}+\frac{1}{3a+b}$

(6) $\frac{x}{a-b}-\frac{x}{a+b}$

45. ലഘൂകരിക്കുക :

(1) $\frac{a}{3a+3b}-\frac{2a}{6a+6b}$

(2) $\frac{5b}{ax + ay} - \frac{2a}{bx + by}$

(3) $\frac{3m}{an + am} + \frac{2n}{bn + bm}$

(4) $\frac{x + 4y}{2x(y + x)} - \frac{y - 4x}{2x(y - x)}$

(5) $\frac{2x^2 + x + 10}{4x^2 - 25} + \frac{x}{5 - 2x}$

(6) $\frac{2z}{4 - 3z} + \frac{6z^2 + 2z - 8}{9z^2 - 16}$

46. (1) $\frac{1}{a + 2} + \frac{1}{a - 2} - \frac{4}{a^2 - 4}$

(2) $\frac{b}{2a + 2b} + \frac{a}{b - a} - \frac{- a^2}{a^2 - b^2}$

(3) $\frac{1}{c^2 - cd} + \frac{1}{d^2 - cd} + \frac{4}{c^2 - d^2}$

(4) $\frac{5}{2x^2 + 6x} - \frac{4 - 3x^2}{x^2 - 9} - 3$

(5) $\frac{2}{n + 2} + \frac{x + 3}{n^2 - 4} - \frac{3x + 1}{n^2 - 4n + 4}$

(6) $\frac{3}{a + 2} + \frac{a + 1}{a^2 - 9} - \frac{a - 1}{(a + 3)(a + 2)}$

47. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ ശരിയാണെന്നു് തെളിയിക്കുക.

(1) $$\frac{2}{3a + 6} - \frac{a - 2}{2a^2 + 7a} - \frac{2}{3a^2 + 12a + 12} - \frac{4}{3a(a + 2)^2} = \frac{1}{6a}$$

(2) $$\frac{1 + x}{(x - y)(1 - xz)} - \frac{1 + y}{(x - y)(1 - yz)} - \frac{1 + z}{(1 - xz)(1 - zy)} = 0$$

(3) $$\frac{ab + cd}{(a + c)(b - c)} + \frac{ac + bd}{(a + b)(c - b)} + \frac{ad + bc}{(a + b)(a + c)} = 1$$

48. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $$\frac{2}{a - 1} + \frac{5}{a + 1} - \frac{3a}{(a + 1)^2}$$

(2) $$\frac{1}{p - 3} - \frac{3}{2p + 6} - \frac{p}{12p^2 - 2p + 18}$$

(3) $$\frac{1}{x - 2a} + \frac{3}{x + 2a} + \frac{8a^2}{4a^2x - x^3}$$

49. നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $a - \frac{x}{a} = c$ (2) $a(x + b) =$

(3) $m(1 + x) = n$ (4) $ax - bx =$

(5) $$\frac{x}{a - b} + \frac{a^2 - x}{a} = a + b$$

(6) $$\frac{x - kn}{k - n} - \frac{x}{k} = n$$

50. എളുപ്പവഴിയിൽ ക്രിയ ചെയ്ത് ഉത്തരം കാണുക:

$$\frac{59^2 - 38^2 - 97 \times 11}{61^2 - 36^2} + \frac{56^2 - 26^2}{66^2 - 16^2}$$

നിർധാരണം ചെയ്യുക.

51. ഒരു കാർ 15600 രൂപക്ക് വാങ്ങി. ആദ്യത്തെ കൊല്ലം അതിന്റെ വില 20 % താഴുകയും തുടർന്നുള്ള ഓരോ കൊല്ലവും 15 % വീതം താഴുകയും ചെയ്യുന്നു. എന്നാൽ, 3 കൊല്ലം കഴിയുമ്പോൾ ആ കാറിന്റെ വില എന്തായിരിക്കും ?

52. ആദ്യത്തെ (ഒന്നാമത്തെ) കൊല്ലം ജീവിതതോത് 10 % വർധിക്കുകയും അടുത്തകൊല്ലം $12\frac{1}{2}$ % വും പിന്നീടുള്ള കൊല്ലങ്ങളിൽ 5 % വീതവും വർധിക്കുന്നു. എന്നാൽ, ഓരോ കൊല്ലാവസാനത്തിലെയും ജീവിതസൂചിക കാണുക. ആദ്യത്തെ കൊല്ലത്തെ ജീവിതതോത് 100 രൂപ എന്നെടുത്ത് ഓരോ വർഷാവസാനത്തിലെയും ജീവിതസൂചിക കാണുക.

53. പാററ്, മൈക്ക് എന്നീ രണ്ടു ബഹിരാകാശസഞ്ചാരികൾ ഭൂമിക്കു ചുററും വ്യത്യസ്ത റോക്കററുകളിലായി സഞ്ചരിച്ചു കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. അവർ ഒരേ ദിശയിലും ഒരേ തലത്തിലുമാണ് സഞ്ചരിച്ചുകൊണ്ടിരിക്കുന്നത്. ഇവരിൽ പാററ് 3 മണിക്കൂറും മൈക്ക് $7\frac{1}{2}$ മണിക്കൂറും സഞ്ചരിക്കുന്നു. ദൽഹി സമയം ഉച്ചക്ക് 12 മണിക്ക് മൈക്ക് കൃത്യം തന്റെ താഴെയായി പാററിനെ കാണുന്നു. എന്നാൽ, പിന്നീട് ഏതു സമയത്തായിരിക്കും ഒരാൾ മററെ ആളുടെ നേരെ മുകളിൽ വരുന്നത്?

54. ഒരു വയൽ 5 പുരുഷന്മാരോ 8 സ്ത്രീകളോ 20 ദിവസം കൊണ്ടു കൊയ്യുന്നു. എന്നാൽ, അതേ ജോലി 5 പുരുഷന്മാരും 8 സ്ത്രീകളും കൂടി എത്ര ദിവസം കൊണ്ടു ചെയ്തുതീർക്കും?

(i) 10 പുരുഷന്മാർക്കും 8 സ്ത്രീകൾക്കും കൂടി കൊയ്യാൻ വേണ്ട ദിവസവും കാണുക.

(ii) 10 പുരുഷന്മാർക്കും 16 സ്ത്രീകൾക്കും കൂടി കൊയ്യാൻ വേണ്ട ദിവസവും കാണുക.

55. ഒരു ജോലി 3 പുരുഷന്മാരോ 7 കുട്ടികളോ x ദിവസം കൊണ്ടു ചെയ്തുതീർക്കും. എന്നാൽ

(i) 3 പുരുഷന്മാരും 7 കുട്ടികളും (ii) 6 പുരുഷന്മാരും 7 കുട്ടികളും (iii) 3 പുരുഷന്മാരും 14 കുട്ടികളും (iv) 6 പുരുഷന്മാരും 14 കുട്ടികളും കൂടി ആ ജോലി എത്ര ദിവസം കൊണ്ടു ചെയ്തുതീർക്കും?

56. x പുരുഷന്മാരോ y സ്ത്രീകളോ z കുട്ടികളോ ഒരു ചുമർ 6 മണിക്കൂർ കൊണ്ടു ചായമടിക്കുന്നു. എന്നാൽ (i) x പുരുഷന്മാരും y സ്ത്രീകളും (ii) y സ്ത്രീകളും z കുട്ടികളും (iii) x പുരുഷന്മാരും y സ്ത്രീകളും z കുട്ടികളും കൂടി ആ ജോലി എത്ര ദിവസം കൊണ്ടു ചെയ്തു തീർക്കുമെന്നു കാണുക.

57. ഒരു ആശാരി x ദിവസം കൊണ്ട് ഒരു ചുമർ പണിയുന്നു. അയാൾക്കു സഹായത്തിനായി വേറെ ഒരാൾ കൂടി ഉണ്ടെങ്കിൽ ആ ജോലി ആദ്യത്തെ ആൾ y ദിവസം കൊണ്ടു ചെയ്തുതീർക്കുന്നു. എന്നാൽ, രണ്ടാമത്തെ ആൾ തന്നെയാണ് ആ ജോലി നിർവഹിക്കുന്നതെങ്കിൽ, അതു് പൂർത്തിയാക്കുവാൻ അയാൾക്കു എത്ര ദിവസം വേണ്ടി വരും? ഇതിൽ $x = 12$, $y = 8$ ആണെങ്കിൽ ഉത്തരം കാണുക.

താഴെ പറയുന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്കു സമീകരണങ്ങൾ എഴുതി ഉത്തരം കാണുക.

58. ഒരു സംഖ്യയുടെ $\frac{1}{3}$ നോടു കൂടി അതിന്റെ $\frac{1}{5}$ കൂട്ടിയാൽ 16 കിട്ടും. എന്നാൽ, ആ സംഖ്യ കാണുക.

59. ഒരു സംഖ്യയെ 7 കൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോൾ 3 ഹരണഫലവും 4 ശിഷ്ടവും കിട്ടി. എന്നാൽ ആ സംഖ്യ കാണുക.

60. ഒരു സംഖ്യയെ 4 കൊണ്ടു ഗുണിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയ സംഖ്യയിൽ നിന്നു് 6 കുറച്ചപ്പോൾ കിട്ടുന്ന സംഖ്യയെ 18 കൊണ്ടു ഹരിച്ചപ്പോൾ 3 ഹരണ ഫലം കിട്ടി. എന്നാൽ ആ സംഖ്യ കാണുക.

61. ഒരു ഭിന്നിതത്തിന്റെ അംശവും ഛേദവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം 6:11 ആണു്, അംശത്തിൽ നിന്നും ഛേദത്തിൽ നിന്നും 3 വീതം കുറക്കുക യാണെങ്കിൽ ആ ഭിന്നിതം $\frac{1}{2}$ നു് തുല്യമായി വരും. എന്നാൽ, ആദ്യ ത്തെ ഭിന്നിതം കാണുക.

62. അഹമ്മദ് തന്റെ യാത്രയുടെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം കാറിലും $\frac{1}{4}$ ഭാഗം ടാക്സിയിലും ബാക്കിയുള്ള ദൂരം തീവണ്ടിയിലും സഞ്ചരിക്കുന്നു. തീവണ്ടിയിൽ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം 50 കി. മീററർ ആണെങ്കിൽ അയാൾ ആകെ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം കാണുക.

63. ഒരു ലായിനിയിൽ 60 ഗ്രാം പഞ്ചസാരയും 300 ഗ്രാം വെള്ളവും അട ങ്ങിയിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ, പഞ്ചസാരയും വെള്ളവും കൃത്യം പകുതി വീതം ആകത്തക്കവിധത്തിലുള്ള ലായനി ഉണ്ടാകുവാൻ ആദ്യത്തെ ലായനിയുടെ കൂടെ എത്ര ഗ്രാം പഞ്ചസാര കൂടി ചേർക്കണം ?

64. ഒരു ഭിന്നിതത്തിലെ അംശം ഛേദത്തേക്കാൾ 7 കുറവാണു്. അംശ ത്തോടും ഛേദത്തോടും 2 വീതം കൂട്ടുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ഭിന്നിതം $\frac{1}{2}$ ആയി ലഘൂകരിക്കാം. എന്നാൽ, ആദ്യത്തെ ഭിന്നിതം കാണുക.

65. ഒരു ഭിന്നിതത്തിലെ ഛേദം അംശത്തേക്കാൾ 18 വലുതാണു്. അംശ ത്തിൽ നിന്നും ഛേദത്തിൽ നിന്നും 7 വീതം കുറക്കുകയാണെങ്കിൽ ആ ഭിന്നിതം പൂജ്യമായിത്തീരുന്നു. എന്നാൽ ആ ഭിന്നിതം കാണുക.

66. ഒരാൾ തന്റെ വരവിന്റെ $\frac{1}{3}$ ഭാഗം ഭക്ഷണത്തിനും $\frac{1}{4}$ ഭാഗം കുട്ടികളുടെ വിദ്യാഭ്യാസത്തിനും 7/48 ഭാഗം മററു പല ഇനങ്ങൾക്കുമായി ചിലവാ ക്കുന്നു. ശേഷിച്ചതു് ഒരു പോസ്റ്റ് ഓഫീസിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു. എന്നാൽ അയാൾ പോസ്റ്റ് ഓഫീസിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നതു് ആകെ വര വിന്റെ ഏതു ഭാഗമാണു് എന്നു കാണുക.

7. ഗുണനം

ബീജീയഭിന്നിതങ്ങളുടെ ഗുണനനിയമവും അങ്കഗണിതത്തിലെ ഗുണന നിയമവും ഒരുപോലെയാണു്.

ഭിന്നിതങ്ങൾ തമ്മിൽ ഗുണിക്കുമ്പോൾ, ആദ്യം അംശങ്ങൾ തമ്മിലും പിന്നീടു് ഛേദങ്ങൾ തമ്മിലും ഗുണിച്ചാൽ മതി. അവയിൽ ആദ്യത്തെ

ഗുണിതം പിന്നീടുണ്ടാകുന്ന ഭിന്നിതത്തിൻെറ അംശവും മറേറതു് ഛേദവും ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 6

a/b യുടെയും c/d യുടെയും ഗുണിതം കാണുക.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

ഗുണ്യം ഒരു പൂർണവ്യംജകം ആണെങ്കിൽ, ഛേദം 1 ആയ ഭിന്നിതത്തെ ഒരു പൂർണവ്യംജകമായി പരിഗണിച്ചു് മേല്പറഞ്ഞ ഈ നിയമം തന്നെ പ്രയോഗിക്കാവുന്നതാണു്.

67. താഴെ പറയുന്നവയുടെ ഗുണിതം കാണുക:

(1) $\frac{15}{28} \cdot \frac{2}{3}$ (2) $\frac{3ab}{4xy} \cdot \frac{10x^2y}{21a^2b}$

(3) $\frac{4a}{15c^2} \cdot 3$ (4) $35x^4 \cdot \frac{8a^2}{7x^3}$

(5) $32x^3y^2 \cdot \frac{y}{48x^3}$ (6) $\frac{1}{x} \cdot y$

68. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $-\frac{9}{16} \cdot \frac{c}{a^4}$ (2) $\frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{3a}{5}\right)$

(3) $\frac{-25y^4y^3}{14a^2} \cdot \left(\frac{-21ab}{10x^3y^2}\right)$

(4) $8a^2b^4 \cdot \left(\frac{-3a}{4b^3}\right)$

(5) $-3m \cdot \frac{n}{12m}$ (6) $-50a^2b^2 \cdot \left(\frac{-6^3}{125a^2}\right)$

69. താഴെ പറയുന്നവയുടെ ഗുണിതം കാണുക:

(1) $\frac{6xy \cdot 3ab}{5ab \quad 4xy} \cdot \frac{4bx}{3axy}$

(2) $\frac{6m^3n^2}{35p^4} \cdot \frac{49n^4}{m^6p^3} \cdot \frac{5m^4p^7}{42n^6}$

(3) $\left(\frac{-32a^8b^5}{45c^{10}}\right) \cdot \left(\frac{55a^2c^6}{24b^4}\right) \cdot \left(\frac{27c^4}{22a^9b}\right)$

(4) $\left(\frac{-51a^6x^9}{56y^{11}}\right) \cdot \left(\frac{-40xy^8}{9a^5}\right) \cdot \left(\frac{-21y^3}{85ax^{10}}\right)$

70. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $\frac{a^2 - ab}{b} \cdot \frac{b^2}{a}$ (2) $\frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{a^4}{(a+b)^2}$

(3) $\frac{-(a+b)^2}{(a-b)^2} \cdot \frac{3(a-b)^2}{4(a+b)^3}$

(4) $\frac{5m - 5n}{4m + 4n} \cdot \frac{8m + 8n}{15m - 15n}$

(5) $\frac{ax + ay}{x^2 - 2xy + y^2} \cdot \frac{2x + 2y}{ax^2 + 2axy + ay^2}$

(6) $\frac{2a^3 - 2b^3}{3a + 3b} \cdot \frac{6a^2 - 6b^2}{a^2 - 2ab + b^2}$

(7) $\frac{5x^2 - 10xy}{x^2 + 4y^2} \cdot \frac{x^4 - 16y^4}{15(x - 2y)^2}$

(8) $\frac{a^2 - 10ax - b^2 + 25x^2}{4a^3 - ab^2} \cdot \frac{b - 2a}{a + b - 5x}$

8. ഹരണം

ഗുണനത്തിനു് വിപരീതമായ ക്രിയയായി ഹരണത്തെ കണക്കാക്കുകയാണെങ്കിൽ ഭിന്നിതങ്ങളുടെ ഹരണത്തിനു് താഴെ പറയുന്ന നിയമം ലഭിക്കുന്നു.

ഒരു ഭിന്നിതത്തെ മറ്റൊരു ഭിന്നിതം കൊണ്ടു ഹരിക്കുവാൻ, ഹാര്യത്തെ ഹാരകത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമഭിന്നിതം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ മതി.

ഉദാഹരണം 7

a/b യെ c/d കൊണ്ടു ഹരിക്കുക.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

മറിച്ച്, ഹരണഫലത്തെ ഹാരകം കൊണ്ടു ഗുണിച്ചാൽ ഹാര്യവും ലഭിക്കും.

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

ഹാര്യവും ഹാരകവും അഖണ്ഡ (പൂർണ്ണ) സംഖ്യകൾ ആണെങ്കിൽ, മേല്പറഞ്ഞ ഈ നിയമം ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണു്,

71. ഹരണഫലം കാണുക:

(1) $5a \div \frac{15a}{b}$ (2) $\frac{12xy}{25z} \div 8x^2$

(3) $\frac{8c}{21d^2} \div \frac{6c^2}{7cd}$ (4) $\left(-10a^2b^3\right) \div \frac{8a^2}{b}$

(5) $36a^4b^5 \div \left(\frac{-12a^5}{b^5}\right)$

(6) $-\left(\frac{42x^4}{25y^3}\right) \div \left(-14x^3y^2\right)$

72. ഹരണഫലം കാണുക:

(1) $\frac{a^2b^3}{16c^4} \div \frac{a^3b^2}{80c^5}$ (2) $\frac{a^5x^4}{10c^9} \div \frac{a^4x^5}{54c^8}$

(3) $\frac{144a^{10}y^8}{65b^4z^3} \div \frac{60a^9y^7}{13b^3z^5}$

(4) $\left(\frac{8b^2cd}{9a^5} \div \frac{7cd}{12a^3}\right) \cdot \frac{28a^4}{3b^2}$

(5) $\frac{3p^2mq}{2a^2b^2} \cdot \frac{3abc}{8x^2y^2} \div 9a^2b^2c^3$

(6) $\frac{2ax}{yz} \div \frac{3bx}{ay} \div \frac{9b^2z}{8a^2xy}$

73. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $\frac{x^2 - y^2}{6x^2y^2} \div \frac{x + y}{3xy}$

(2) $\frac{-a^3 - 2a^2b}{72b^8} \div \frac{2b^3 - ax^3}{4b^6}$

(3) $\frac{2x^3 - 3xy^3}{160y^2} \div \left(\frac{-3y^5 - 2x^2y^3}{400y}\right)$

(4) $\frac{5 - 5a}{(1 + a^2)} \div \frac{10 - 10a^2}{3 + 3a}$

74. ഒരു ഭിന്നിതത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനനിയമം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്നവ ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{3}{8}}$ (2) $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$

(3) $\dfrac{\dfrac{a}{b}-1}{\dfrac{a}{b}+1}$ (4) $\dfrac{\dfrac{2x-y}{5}-a}{\dfrac{2x+y}{5}+a}$

(5) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}}$ (6) $\dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{a}{b}-\dfrac{b}{a}}$

ചോദ്യം നമ്പർ 74 (5) ൻെറ നിർധാരണം

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}} = \frac{\frac{y+x}{xy}}{\frac{y-x}{xy}}$$

$$= \frac{y+x}{xy} \times \frac{xy}{y-x}$$

$$= \frac{x+y}{y-x}$$

ഉദാഹരണം 8

താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതത്തിൻെറ പൂർണസംഖ്യാഭാഗം കാണുക:

$$\frac{2b+3c}{b+c}$$

$$\frac{2b+3c}{b+c} = 2 + \frac{c}{b+c}$$

ഇതിലെ പൂർണസംഖ്യാഭാഗം 2 ആണ്.

75. താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങളിലെ പൂർണസംഖ്യാഭാഗം കാണുക:

(1) $\dfrac{x+2y}{x+y}$ (2) $\dfrac{1+a^2+a}{1+a}$

(3) $\dfrac{2+a+a^2}{1+a^2}$ (4) $\dfrac{3+x+x^2}{3+x^2}$

9. ഭിന്നിതത്തെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഘാതമായി ഉയർത്തൽ

$$\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 = \tfrac{2}{3}\cdot\tfrac{2}{3} = \frac{2\,.\,2}{3\,.\,3} = \frac{4}{9}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3\,.\,3\,.\,3}{5\,.\,5\,.\,5} = \frac{3^3}{5^3}$$

$$= \frac{27}{125}$$

ഒരു ഭിന്നിതത്തെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഏകാദിഘാതം കൊണ്ട് ഉയർത്തുവാൻ, ഭിന്നിതത്തിലെ അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും ഈ ഘാതം കൊണ്ട് ഉയർത്തിയാൽ മതി.

ഉദാഹരണം 9

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \left(n \text{ ഒരു ഏകാദി}\right)$$

എന്നു തെളിയിക്കുക:

നിർധാരണം

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\,\ldots\ldots n \text{ പ്രാവശ്യം}$$

$$= \frac{a\cdot a\cdot a\ldots n \text{ പ്രാവശ്യം}}{b\cdot b\cdot b\ldots n \text{ പ്രാവശ്യം}}$$

$$= \frac{a^n}{b^n}$$

76. താഴെ പറയുന്ന ഭിന്നിതങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുക:

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ (2) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ (3) $\left(\frac{x}{y}\right)^5$

(4) $\left(\frac{5a}{4b}\right)^2$ (5) $\left(\frac{a^8b}{cd^2}\right)^2$ (6) $\left(\frac{5c^2d^2}{3a^3b^3}\right)^2$

77. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $\left(\frac{-n^6k^3}{10b^4}\right)^2$ (2) $\left(\frac{-a^2}{b^3}\right)^2$

(3) $\left(\frac{-a}{x^3}\right)^n$ (4) $\left(\frac{-b^2}{c^2}\right)^{2k+1}$

(5) $\left(\frac{-9x^7y^6}{a^{12}}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{3x^5y^4}\right)^3$

(6) $\left(\frac{-2a^8b^3}{c^7}\right) \div \left(\frac{-4a^{10}b^4}{c^9}\right)^4$

ഉദാഹരണം 10

ലഘൂകരിക്കുക:

$$\left(\frac{a}{a+1}+1\right) \div \left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$$

നിർധാരണം:

$$\left(\frac{a}{a+1}+1\right) \div \left(1-\frac{3a^2}{1-a^2}\right)$$

$$= \frac{a+a+1}{a+1} \div \frac{1-a^2-3a^2}{1-a^2}$$

$$= \frac{(2a+1)}{(a+1)} \times \left(\frac{1-a^2}{1-4a^2}\right)$$

$$= \frac{(2a+1)\times(1-a)\times(1+a)}{(a+1)\times(1-2a)\times(1+2a)}$$

$$= \frac{(2a+1)\times(1-a)\times(a+1)}{(a+1)\times(1-2a)\times(2a+1)}$$

$$\frac{1-a}{1-2a} = \frac{a-1}{2a-1}$$

78. ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $\left(\frac{a+1}{2a-2}+\frac{6}{2a^2-2}-\frac{a+3}{2a+2}\right)\left(\frac{4a^2-4}{3}\right)$

(2) $\left(\frac{9n^2-16m^2}{7n}\right)\left(\frac{3m-4n}{4m^2-3mn}\right)-\left(\frac{3m+4n}{4m^2+3mn}\right)$

(3) $\left(\frac{2}{a}-\frac{4}{a+2}\right)\left(2+\frac{a^2+4}{a-2}\right)$

(4) $(x^2-1)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}-1\right)$

(5) $\left(x-\frac{x+y}{x-y}+y\right) \div \left(1-\frac{2y+1}{x^2-y^2}\right)$

79. ക്രിയചെയ്തു് ഉത്തരം കാണുക:

(1) $\left(\frac{x}{x-a} - \frac{a}{x+a}\right) \div \left(\frac{x+a}{a} - \frac{x-a}{x}\right)$

(2) $\left(\frac{b}{a^2-ab} + \frac{a}{b^2-ab}\right)\left(\frac{a^2b+ab^2}{a^2-b^2}\right)$

80 ലഘൂകരിക്കുക:

(1) $\left(\frac{1}{2a-b} + \frac{3b}{b^2-4a^2} - \frac{2}{2a+b}\right) \div \left(\frac{4a^2+b^2+1}{4a^2-b^2}\right)$

(2) $\left(m + \frac{1}{1-m}\right) \div \left(m - \frac{m^2}{m-1}\right)$

81. താഴെ പറയുന്ന സർവസമീകരണങ്ങൾ ശരിയാണെന്നു് തെളിയിക്കുക:

(1) $\frac{2}{mn} \div \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)^2 - \frac{m^2+n^2}{(m-n)^2} = -1$

(2) $\left[\frac{p^2-q^2}{pq} - \frac{1}{p+q} \cdot \left(\frac{p^2-q^2}{qp}\right)\right] \div \frac{p-q}{p} = \frac{p}{p+q}$

ഉദാഹരണം 11

താഴെ പറയുന്ന സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക:

$$\frac{1}{10x-1} + \frac{1}{5x-2} = 0$$

നിർധാരണം

സമീകരണത്തിന്റെ ഇരുവശവും $(10x-1)\ (5x-2)$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കുക.

$$\frac{(10x-1)\ (5x-2)}{10x-1} + \frac{(10x-1)\ (5x-2)}{5x-2} = 0$$

$5x - 2 + 10x - 1 = 0$

$15x = 0 + 3$

$15x = 3$

$\frac{15x}{15} = \frac{3}{15}$

$x = \frac{1}{5}$

82. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $\frac{3}{x-2} + \frac{7}{x+2} = \frac{10}{x}$

(2) $\frac{3t-1}{3t+1} = 2 - \frac{t-3}{t+3}$

(3) $\frac{y+5}{3y-6} - \frac{1}{2} = \frac{2y-3}{2y-4}$

83. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ സമാനങ്ങൾ ആയിരിക്കുമോ?

(1) $x - 2 = 5$ ഉം $\frac{x-2}{x-3} = \frac{5}{x-3}$ ഉം

(2) $x + 7 = 2$ ഉം $\frac{x+7}{x+4} = \frac{2}{x+4}$ ഉം

84. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $\frac{2x-1}{2x+1} = \frac{2x+1}{2x-1} + \frac{8}{1-4x^2}$

(2) $\frac{t^2-3}{1-t^2} + \frac{t+1}{t-1} = \frac{4}{1+t}$

(3) $\frac{z+2}{z-2} = \frac{z^2}{z^2-4} - \frac{4}{2+z}$

(4) $\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^2 = \frac{x+1}{x+9}$

(5) $\frac{4}{y^3-8} - \frac{1}{(y-2)^3} = \frac{3}{y^3+2y^2+4y}$

(6) $\frac{2}{(1-3x)(3x+11)} = \frac{1}{(3x-11)^2} - \frac{3}{(3x+11)^2}$

ഉദാഹരണം 12

താഴെ പറയുന്ന സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(i) x ഒരു അജ്ഞാതസംഖ്യയായി എടുത്ത്

(ii) y ഒരു അജ്ഞാതസംഖ്യയായി എടുത്ത്

$$\frac{6-5x}{5-6x} = \frac{2y+3}{3y-2} - \frac{1}{2}$$

നിർധാരണം

സമീകരണത്തിന്റെ ഇരുവശവും $2(5-6x)(3y-2)$ കൊണ്ടു ഗുണിക്കുമ്പോൾ താഴെ പറയുന്നവ കിട്ടുന്നു.

$$2(6-5x)(3y-2) = 2(2y+3)(5-6x) - 1(5-6x)(3y-2)$$

$$2(18y-15xy-12+10x) = 2(10y+15-12xy-18x) - (15y-18xy-10+12x)$$

$$36y-30xy-24+20x = 20y+30-24xy-36x - 15y+18xy+10-12x$$

$$20x-30xy+36y-24 = -48x-6xy+5y+40$$

$$x(20-30y)+36y-24+24-36y = -48x-6xy+5y+40+24-36y$$

$$x(20-30y)+48x+6xy = -48x-6xy+48x+4xy-31y+64$$

$$x(20-30y+48+6y) = -31y+64$$

$$x(68-24y) = 64-31y$$

$$\frac{x(68-24y)}{(68-24y)} = \frac{64-31y}{68-24y}$$

$$x = \frac{64-31y}{68-24y}$$

85. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(i) x ഒരു അജ്ഞാതസംഖ്യയായി എടുത്തു്

(ii) y ഒരു അജ്ഞാതസംഖ്യയായി എത്തു്

$$\frac{5y+8}{y-3} = \frac{3x-7}{x+2}$$

ഉദാഹരണം 13

താഴെ പറയുന്ന സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക:

$$\frac{a}{x} - 1 = \frac{b}{x} - 9$$

നിർധാരണം

$$\frac{a}{x} - 1 = \frac{b}{x} - 9$$

സമീകരണത്തിൻെറ ഇരുവശത്തും x കൊണ്ട് ഗുണിക്കുമ്പോൾ.

$$a - x = b - 9x$$
$$a - x - a = b - 9x - a$$
$$-x + 9x = b - 9x + 9x - a$$
$$8x = b - a$$
$$\frac{8x}{8} = \frac{b-a}{8}$$
$$x = \frac{b-a}{8}$$

86. താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

(1) $\frac{a - bm}{mx} - \frac{c - bn}{nx} = 1$

(2) $\frac{a}{a - x} = \frac{b}{b - x}$

(3) $\frac{a + b}{x - a} - \frac{a - b}{x + a} = 0$

(4) $\frac{x - s}{2x + t} - \frac{3x + 1}{6x - s} = 0$

(5) $\frac{x + a}{2} - \frac{2}{x + a} = \frac{x - a}{2}$

(6) $\frac{m}{x + 1} - \frac{m - 1}{x} = \frac{1}{x - m}$

87. a യെ നിർധാരണം ചെയ്യുക:

$$S = \frac{(a + b)}{2}$$

88. സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്യുക:

$$\frac{1 + a}{1 - a} = \frac{b}{c}$$

(i) a യെ (ii) b യെ (iii) c യെ

89. ഒരു ഭിന്നിതത്തിൻെറ അംശം അതിൻെറ ഛേദത്തേക്കാൾ 3 കുറവാണ്. അംശം 3 മടങ്ങ് വർധിക്കുകയും ഛേദം 20 കൂട്ടുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ഭിന്നിതം 1/8 ആയിതീരുന്നു. എന്നാൽ ആദ്യത്തെ ഭിന്നിതം കാണുക.

നിർധാരണം

ഛേദം x ആയി എടുക്കുക. a ഒരു പൂർണ്ണ (അഖണ്ഡ) സംഖ്യയാണ്.

$\therefore$ അംശം $= x - 3$

അപ്പോൾ ഭിന്നിതം $= \frac{x-3}{x}$

ആദ്യത്തെ പ്രകരണത്തിലെ അംശം $= 3(x - 3)$

$= 3x - 9$

ഛേദം $= x + 20$

$\therefore$ ഭിന്നിതം $= \frac{3x - 9}{x + 20} = \frac{1}{8}$

ഈ സമീകരണം നിർധാരണം ചെയ്തു കഴിയുമ്പോൾ,

$x = 4$ എന്നും

ഭിന്നിതം $\frac{1}{4}$ എന്നും കിട്ടുന്നു.

90. ഒരു ഭിന്നിതത്തിലെ ഛേദം അംശത്തെക്കാൾ 4 കൂടുതലാണ്. അംശം 11 വർധിപ്പിക്കുകയും ഛേദം 1 കുറക്കുകയും ചെയ്തപ്പോൾ ഉണ്ടായ ഭിന്നിതം ആദ്യത്തെ ഭിന്നിതത്തിനു നേരെ വിപരീതമായി തീർന്നു. എന്നാൽ, ആദ്യത്തെ ഭിന്നിതം കാണുക.

91. രണ്ടു അജ്ഞാതസംഖ്യകൾ ഒന്നു മറെറതിനെക്കാൾ 12 വലുതാണ്. അവയിൽ ചെറിയ സംഖ്യയെ 7 കൊണ്ടും വലിയ സംഖ്യയെ 5 കൊണ്ടും ഹരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആദ്യത്തെ ഹരണഫലം രണ്ടാമത്തേതിനേക്കാൾ 4 കുറവായി വരും. എന്നാൽ ആ സംഖ്യകൾ കാണുക.

92. A, B എന്നീ രണ്ടു പട്ടണങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം 50 കി മീ ആണ്. ഒരു സൈക്കിൾ യാത്രക്കാരൻ A യിൽ നിന്നും B യിലേക്കു പുറപ്പെടുന്നു. $1\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ കഴിഞ്ഞശേഷം മറെറാരാൾ ഒരു സ്കൂട്ടറിൽ ആദ്യത്തെ യാത്രക്കാരനെ പിൻതുടരുകയും ആദ്യത്തെ ആൾ എത്തുന്നതിനു 1 മണിക്കൂർ മുമ്പെ എത്തുകയും ചെയ്തു. ഇവരിൽ സ്കൂട്ടർ യാത്രക്കാരൻെറ വേഗത മറെറ യാത്രക്കാരൻെറ വേഗതയുടെ 2.5 മടങ്ങ് ആണെങ്കിൽ ഓരോരുത്തരുടെയും വേഗത കാണുക.

93. രണ്ടു തീവണ്ടികൾ ഒരേ സ്റ്റേഷനിൽ നിന്നും ഒന്നിനു പുറകെ മറെറാന്നായി പുറപ്പെടുന്നു. അവയിൽ ആദ്യത്തെ തീവണ്ടിയുടെ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 36 കി മീ ഉം രണ്ടാമത്തേതിൻെറ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 48 കി മീ ഉം ആണ്. ആദ്യത്തെ തീവണ്ടി രണ്ടാമത്തേതിനെക്കാൾ 2 മണിക്കൂർ മുമ്പെയാണ് പുറപ്പെട്ടതു്. എങ്കിൽ, രണ്ടാമത്തെ തീവണ്ടി ആദ്യത്തേതിനെ കടന്നുപോകുന്നതു് എപ്പോൾ ആയിരിക്കും എന്നു കാണുക.

94. ഒരു ഇലക്ട്രിക് തീവണ്ടിക്ക് രണ്ടു സ്റ്റേഷനുകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം $1\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ കൊണ്ടു് സഞ്ചരിക്കാൻ സാധിക്കും. അതിന്റെ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 10 കി മീ കൂടി വർധിപ്പിച്ചപ്പോൾ, അതേ ദൂരം തന്നെ 1 മണിക്കൂർ 20 മിനിററു കൊണ്ടു് സഞ്ചരിക്കുന്നു. എന്നാൽ, ആ രണ്ടു സ്റ്റേഷനുകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം കാണുക.

95. രണ്ടു വിമാനത്താവളങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം 950 കി മീ ആണു്. രണ്ടു എഞ്ചിൻ ഉള്ള ഒരു വിമാനവും ഒരു റെക്ററീവ് വിമാനവും ഈ വിമാന ത്താവളങ്ങളിൽ നിന്നും വിപരീതദിശയിൽ ഒപ്പം പുറപ്പെടുന്നു. അര മണിക്കൂർ കഴിഞ്ഞപ്പോൾ അവ തമ്മിലുള്ള ദൂരം 150 കി മീ ആയി തീർന്നു. റെക്ററീവ് വിമാനത്തിന്റെ വേഗത മററതിന്റെ വേഗ തയുടെ 3 മടങ്ങാണെങ്കിൽ ഓരോ വിമാനത്തിന്റെയും വേഗത കാണുക.

96. ഒരു വണ്ടിയുടെ ചെറിയചക്രം ഒരു നിശ്ചിതദൂരം സഞ്ചരിക്കുവാൻ അതിന്റെ വലിയചക്രം കറങ്ങുന്നതിനേക്കാൾ 15 പ്രാവശ്യം കൂടുതൽ കറങ്ങുന്നു. ചെറിയ ചക്രത്തിന്റെ ചുററളവ് (പരിധി) 2.5 മീററും വലിയതിന്റെ ചുററളവ് 4 മീററും ആണു്. എന്നാൽ അതിന്റെ ചെറിയ ചക്രം 15 പ്രാവശ്യം കൂടുതൽ കറങ്ങുമ്പോൾ ആ വണ്ടി സഞ്ച രിച്ച ദൂരവും ഓരോ ചക്രങ്ങളുടേയും ഭ്രമണങ്ങളും കാണുക.

97. ഒരു വണ്ടിയുടെ രണ്ടു ചക്രങ്ങൾ തമ്മിൽ ഒരു തോൽ സ്ട്രാപ്പു കൊണ്ടു ബന്ധിച്ചിരിക്കുന്നു. അവയിൽ വലിയ ചക്രത്തിന്റെ ചുററളവ് 60 സെ മീററും ചെറിയതിന്റെ ചുററളവ് 35 സെ മീററും ആണു്. വലിയ ചക്രം ഒരു മിനിട്ടിൽ 84 പ്രാവശ്യം കറങ്ങും. എങ്കിൽ ചെറിയ ചക്രം ഒരു മിനിട്ടിൽ എത്ര പ്രാവശ്യം കറങ്ങും?

98. ഒരു ജോലി 14 ദിവസം കൊണ്ടു് ചെയ്തു തീർക്കണമെന്നു് തീരുമാനി ക്കുന്നു. 6 ജോലിക്കാരെ അതിനായി നിയമിക്കുന്നു. അവർ ഓരോ ദിവസവും 2 ജോലിക്കാരുടെ ജോലി കൂടി കൂടുതൽ ചെയ്തതിനാൽ നേരത്തെ തീരുമാനിച്ചിരുന്ന ദിവസത്തിന്റെ 2 ദിവസം മുമ്പു് ആ ജോലി പൂർത്തിയായി. എന്നാൽ, ആ പദ്ധതി അനുസരിച്ചു് ജോലി തീരണമെങ്കിൽ എത്ര ആളുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കണം?

99. ഒരു ഇലക്ട്രിക് സ്റ്റേഷനു വേണ്ടി ഒരു കുഴി (കിടങ്ങു്) രണ്ടു ജോലിക്കാർ 24 ദിവസം കൊണ്ടു് ഉണ്ടാക്കുന്നു. അവരിൽ ആദ്യത്തെ ജോലിക്കാർ രണ്ടാമത്തെ ജോലിക്കാരനെക്കാൾ $1\frac{1}{2}$ മടങ്ങു് കൂടുതൽ സമയം ആ ജോലി ചെയ്യാൻ എടുക്കുന്നു. അവർ വെവ്വേറെ ജോലിചെയ്യുകയാണെ ങ്കിൽ ആ ജോലി തീർക്കാൻ ഓരോരുത്തർക്കും എത്ര ദിവസം വേണ്ടി വരും?

100. 290 ആയുധങ്ങൾ (പണിയായുധങ്ങൾ) ഉണ്ടാക്കുന്നതിന്ന് രണ്ടു ജോലിക്കാർ ഒരുമിച്ച് 4 മണിക്കൂറും അതിന്നു ശേഷം ആദ്യത്തെ ജോലിക്കാരൻ $3\frac{1}{2}$ മണിക്കൂറും ജോലിചെയ്തു അവ ഉണ്ടാക്കുന്നു. അവർ രണ്ടുപേരും കൂടി ഒരുമിച്ച് 5 മണിക്കൂർ ജോലിചെയ്താൽ, ശേഷിച്ച ജോലി ചെയ്യുവാൻ രണ്ടാമത്തെ ആൾക്ക് $2\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ മതിയാകുമായിരുന്നു. എന്നാൽ ഓരോ മണിക്കൂറിലും ഓരോരുത്തരും എത്ര പണിയായുധങ്ങൾ വീതം ഉണ്ടാക്കുന്നു?

101. 71 പേജ് ടൈപ്പു ചെയ്യാൻ രണ്ടു ടൈപ്പിസ്റ്റുകൾ ഒരുമിച്ച് 4 മണിക്കൂറും അതിന്നു ശേഷം രണ്ടാമത്തെ ടൈപ്പിസ്റ്റ് $2\frac{1}{2}$ മണിക്കൂർ തനിച്ചും ടൈപ്പു ചെയ്യുന്നു. അവർ രണ്ടുപേരും കൂടി $4\frac{1}{4}$ മണിക്കൂർ ജോലിചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെ ടൈപ്പിസ്റ്റിന്നു ആ പണി 45 മിനിററു കൊണ്ടു് പൂർത്തിയാക്കാമായിരുന്നു. എന്നാൽ, ഓരോരുത്തരും ഓരോ മണിക്കൂറിലും ടൈപ്പു ചെയ്ത പേജ് എത്ര?

102. രണ്ടു നിലങ്ങളുടെ സംഗമസ്ഥലത്തുള്ള 120 ഹെക്ടർ സ്ഥലത്ത് ധാന്യം കൃഷിചെയ്തിരുന്നു. ആദ്യത്തെ നിലത്തിലെ വിളവ് ഒരു ഹെക്ടറിൽ 89 മെട്രിക്‌ടണും രണ്ടാമത്തേതിലെ വിളവ് ഒരു ഹെക്ടറിൽ 95 മെട്രിക്‌ടണും ആയിരുന്നു. ആദ്യത്തെ നിലത്തിലെ വിളവ് രണ്ടാമത്തേതിലെ വിളവിനേക്കാൾ 1480 മെട്രിക്‌ടൺ കൂടുതലാണ്. എങ്കിൽ ഓരോ നിലത്തിലേയും വിസ്തീർണം കാണുക.

103. ഒരു പുഴയിൽ ഒരു പലക പൊങ്ങി കിടക്കുന്നു. 50 കി ഗ്രാമും 30 കി ഗ്രാമും വീതം തൂക്കമുള്ള ഈ രണ്ടു കുട്ടികൾ ആ പലകയുടെ രണ്ടററത്തും പിടിച്ചുനിൽക്കുന്നു. ആ പലകയുടെ നീളം 4 മീററർ ആണെങ്കിൽ, പലക തുലനസ്ഥിതിയിൽ ആവുന്നതിനുള്ള ബിന്ദു കാണുക.

104. സ്വർണവും വെള്ളിയും കൂടിചേർന്ന ഒരു കൂട്ടുലോഹത്തിൻെറ തൂക്കം 1.06 കി ഗ്രാമും ആണ്. ഈ കൂട്ടുലോഹത്തിന്റെ വെള്ളത്തിലുള്ള തൂക്കം 0.70 കി ഗ്രാം കുറവ് ആണ്. വെള്ളത്തിൽ വച്ച് സ്വർണത്തിൻെറ തൂക്കം 1/19 ഭാഗവും വെള്ളിയുടെ തൂക്കം 0.1 ഉം കുറവുവരുന്നുവെങ്കിൽ ഈ കൂട്ടുലോഹത്തിലുള്ള ഓരോ ലോഹത്തിൻെറയും തൂക്കം കാണുക.

105. ഒരു കഷണം ഐസ് സമുദ്രത്തിൽ പൊങ്ങികിടക്കുന്നു. ആ ഐസിന്റെ വെള്ളത്തിനു വെളിയിലുള്ള വ്യാപ്തം 2000 cc യാണ്. 1 cc സമുദ്രജലത്തിൻെറ തൂക്കം 1.03 ഗ്രാമും 1 cc ഐസിൻെറ തൂക്കം 0.98 ഗ്രാമും ആണെങ്കിൽ ഐസിൻെറ വ്യാപ്തം കാണുക.

106. ഒരു നിശ്ചിത എണ്ണം പണിയായുധങ്ങൾ പ്രായപൂർത്തിയായ 8 പേർ 6 ദിവസം കൊണ്ടും അത്രയും എണ്ണം തന്നെ 12 കുട്ടികൾ 10 ദിവസം

കൊണ്ടും ഉണ്ടാക്കുന്നു. എന്നാൽ, മൂന്നു പ്രായപൂർത്തിയായവരും 25 കുട്ടികളും കൂടി അത്രയും എണ്ണം തന്നെ പണിയായുധങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുവാൻ എത്ര ദിവസം വേണ്ടിവരും എന്നു കാണുക. പ്രായപൂർത്തിയായവരുടേയും കുട്ടികളുടേയും എണ്ണം രണ്ടുമടങ്ങു വീതം വർധിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ അത്രയും എണ്ണം ആയുധങ്ങൾ ഉണ്ടാക്കുവാൻ എത്ര ദിവസം വേണ്ടിവരും?

107. രണ്ടു പൈപ്പുകൾ യഥാക്രമം 6 മണിക്കൂർ കൊണ്ടും 8 മണിക്കൂർ കൊണ്ടും ഒരു തൊട്ടി നിറക്കുന്നു. ആ നീർത്തൊട്ടിയുടെ മൂന്നിൽ ഒരു ഭാഗം വെള്ളം നിറഞ്ഞിരിക്കുകയാണെങ്കിൽ, അതേ നീർത്തൊട്ടി ആ രണ്ടു പൈപ്പുകളും കൂടി എത്ര സമയം കൊണ്ടു നിറക്കും? ആദ്യത്തെ തൊട്ടിയുടെ 2 മടങ്ങ് വലിപ്പമുള്ളതും ശൂന്യമായതുമായ മറെറാരു തൊട്ടി നിറക്കുവാൻ ഈ രണ്ടു പൈപ്പുകൾക്കും കൂടി ആകെ എത്ര സമയം വേണം?

108. ഗോപി ഒരു ജോലി രാമൻ എടുക്കുന്നതിൻെറ $\frac{1}{2}$ ഭാഗം കൂടുതൽ സമയം കൊണ്ട് എടുക്കുന്നു. രാമൻ ഒരു മണിക്കൂർ കൊണ്ട് ആ ജോലിയുടെ മൂന്നിൽ ഒരു ഭാഗം ചെയ്തുതീർത്തുവെങ്കിൽ, ഗോപിക്ക് ആ ജോലി ചെയ്യുവാൻ എത്ര സമയം വേണ്ടിവരും എന്നു കാണുക.

109. ഒരു സ്ത്രീ വെള്ള അടിക്കുന്നതിൻെറ 5/3 മടങ്ങ് വേഗത്തിൽ ഒരു പുരുഷൻ വെള്ള അടിക്കുന്നു. അവർ രണ്ടു പേരും കൂടി ഒരു വീട് 6 ദിവസം കൊണ്ട് വെള്ളയടിച്ചു തീർക്കുന്നു. ആ സ്ത്രീ തനിച്ചാണ് വെള്ളയടിക്കുന്നതെങ്കിൽ, ആ വീടു മുഴുവൻ വെള്ളയടിക്കുന്നതിന് അവൾക്ക് എത്ര ദിവസം വേണ്ടിവരും എന്നു കാണുക.

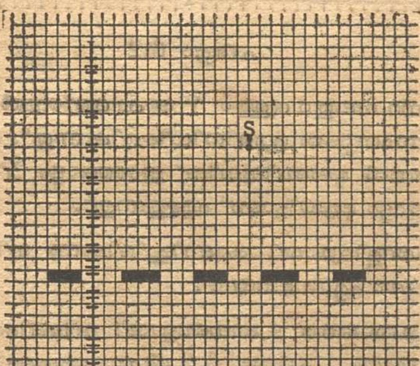
അധ്യായം 6

നിർദേശാങ്കങ്ങൾ

1. തലത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിൻെറ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ

1. ചിത്രം 6.1 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന റെയിൽവെ പാതയിൽ നിന്നും മോട്ടോർ പാതയിൽ നിന്നും S എന്ന സ്ഥലത്തേക്കുള്ള ദൂരം കാണുക.

തോതു്: 1 ചതുരം = 10000 മീററർ

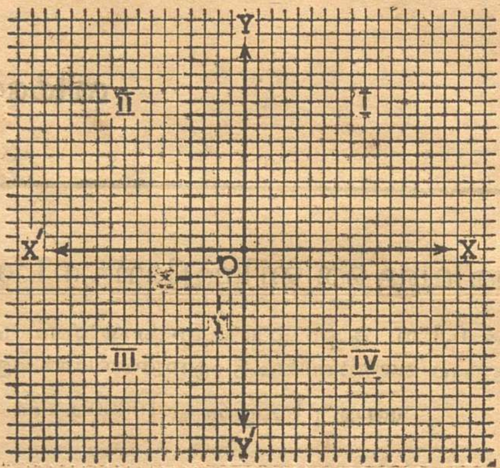


ചിത്രം 6.1

പരസ്പരം ലംബമായിട്ടുള്ള രണ്ടു രേഖകൾ XOX′ ഉം YOY′ ഉം വരക്കുക (ചിത്രം 6.2).

ഈ രേഖകളെ *നിർദേശാക്ഷങ്ങൾ* എന്നു പറയുന്നു. ആദ്യത്തെ അക്ഷം XOX′ നെ X ന്റെ അക്ഷം എന്നോ X–അക്ഷം എന്നോ വിളിക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെ

അക്ഷം YOY′ നെ Y യുടെ അക്ഷം എന്നോ Y അക്ഷം എന്നോ പറയുന്നു. ബിന്ദു O യെ, അക്ഷങ്ങളുടെ ഛേദകബിന്ദുവിനെ, *നിർദേശാങ്ക മൂലബിന്ദു* എന്നോ *ലഘുവായ മൂലബിന്ദു* എന്നോ പറയുന്നു. ഈ ബിന്ദുവിനെ പൂജ്യം ആയോ ആരംഭസ്ഥാനമായോ എടുക്കാവുന്നതാണ്.



ചിത്രം 6.2

X അക്ഷത്തിന്റെ വലതുവശത്തും Y അക്ഷത്തിന്മേൽ മൂലബിന്ദുവിന്റെ മുകളിലും ആണ് ധനസംഖ്യകൾ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതു്. എന്നാൽ, ഋണസംഖ്യകൾ Y അക്ഷത്തിന്മേൽ മൂലബിന്ദുവിന് ഇടത്തോട്ടും Y അക്ഷത്തിന്മേൽ മൂലബിന്ദുവിന്റെ താഴോട്ടും ആയിട്ടാണ് എഴുതുന്നതു്.

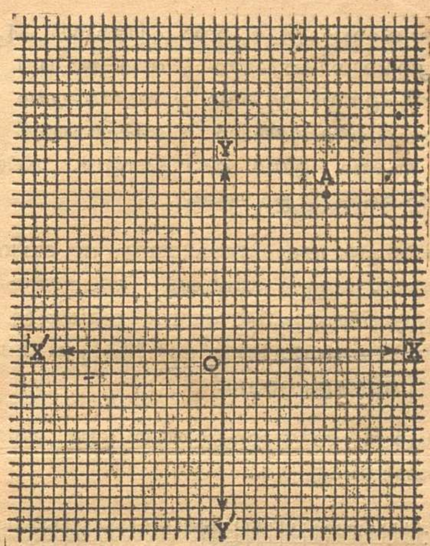
ഈ രണ്ടു അക്ഷങ്ങളിലുമായി കാണിച്ചിരിക്കുന്ന നിർദേശാങ്കങ്ങളുടെ തലത്തെ, *നിർദേശാങ്കതലം* എന്നു പറയുന്നു.

ഈ നിർദേശാങ്കതലത്തെ 4 ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു. അവയെ *ചതുർഥാംശം* എന്നു വിളിക്കുന്നു. ചിത്രം 6.2 ൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ള റോമൻ അക്കങ്ങളെ കൊണ്ടു് ഈ ചതുർഥാംശങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

2. നിർദേശാക്ഷങ്ങളിൽ നിന്നു്, ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിലേക്കു് അതായതു് A യിലേക്കുള്ള ദൂരങ്ങൾ കാണുക (ചിത്രം 6.3 നോക്കുക).

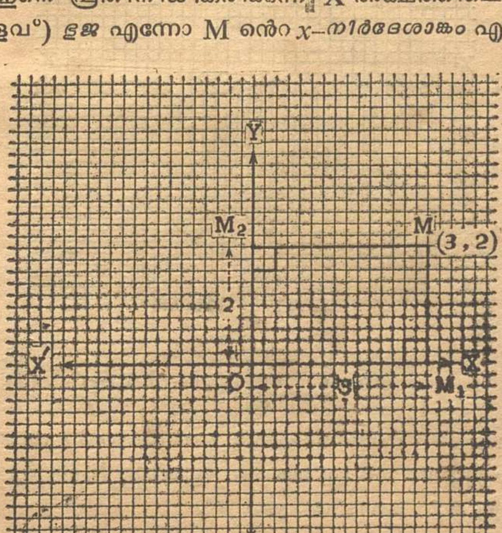
തലത്തിൽ M എന്ന ഒരു ബിന്ദു എടുത്തു് നിർദേശാക്ഷങ്ങളിലേക്കു് M ൽ കൂടി ലംബങ്ങൾ വരക്കുക.

ലംബം MM_1 ന്റെ പാദം ആകത്തക്കവിധത്തിൽ ബിന്ദു M എടുത്തു്, M_1 ൽ നിന്നു് X അക്ഷത്തിലേക്കു് വരക്കുക.



ചിത്രം 6.3
തോതു്: 1 ഭാഗം = 1 മാത്ര

ബിന്ദു M_1 ഇനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു X അക്ഷത്തിലെ ഈ സംഖ്യയെ (OM_1 ൻെറ അളവ്) *ഭുജ* എന്നോ M ൻെറ *x–നിർദേശാങ്കം* എന്നോ വിളിക്കുന്നു.

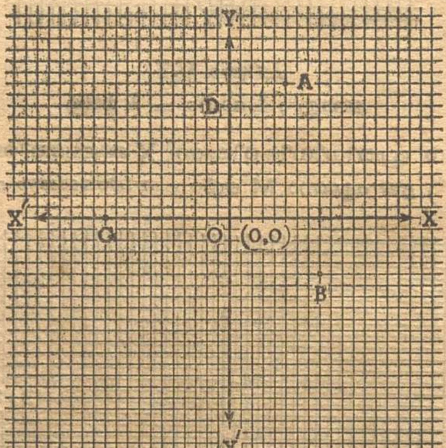


ചിത്രം 6.4
തോതു്: 5 ഭാഗം = 1 മാത്ര

Y അക്ഷത്തിലെ ലംബം MM_2 ൻെറ പാദമായി M_2 എന്ന ബിന്ദുവിനെ എടുക്കുക. M_2 പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന Y അക്ഷത്തിലെ സംഖ്യ (OM_2 ൻെറ അളവ്) യെ *കോടി* എന്നോ M ൻെറ *y–നിർദേശാങ്കം* എന്നോ വിളിക്കുന്നു. നിർദേശാക്ഷങ്ങളുടെ X അക്ഷത്തേയും Y അക്ഷത്തേയും ഭുജത്തിൻെറ അക്ഷം എന്നും കോടിയുടെ അക്ഷം എന്നും കൂടി പറയുന്നു. ചിത്രം 6.4 ൽ, M ൻെറ ഭുജ 3 ഉം, അതിൻെറ കോടി 2 ഉം ആണ്.

ഒരു ബിന്ദുവിൻെറ ഭുജത്തേയും കോടിയേയും ആ ബിന്ദുവിൻെറ *നിർദേശാങ്കങ്ങൾ* എന്നു പറയുന്നു. ഇവ യഥാക്രമം അക്ഷങ്ങൾ Y ൽ നിന്നും X ൽ നിന്നും M ലേക്കുള്ള ദൂരത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇവയും M ലേക്കുള്ള ദൂരവും തുല്യമാണ്; അതായതു്; Y അക്ഷത്തിൽ നിന്നു് MM_2 വിലേക്കുള്ള ദൂരവും X അക്ഷത്തിൽ നിന്നു് MM_1 ലേക്കുള്ള ദൂരവും.

3. ചിത്രം 6.5 ൽ അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ള ഓരോ ബിന്ദുവിൻെറയും നിർദേശാങ്കങ്ങൾ എഴുതുക.



ചിത്രം 6.5
തോത്: 5 ഭാഗം = 1 മാത്ര

ഒരു ബിന്ദുവിൻെറ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ ബിന്ദുവിൻെറ വലത്തായി ബ്രാക്കററുകളുടെ ഉള്ളിൽ എഴുതുന്നു. അതു കൊണ്ടു് പ്രതീകം M(3, 5) എന്നതിലെ 3, M ൻെറ ഭുജവും 5, M ൻെറ കോടിയും ആണ്.

ഒരു ബിന്ദുവിൻെറ നിർദേശാങ്കതലത്തിൽ ഉള്ള വ്യത്യസ്തസ്ഥാനങ്ങൾ പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

ഭുജത്തിന്റെ അക്ഷത്തിന്മേൽ ഒരു ബിന്ദു കിടക്കുകയാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ കോടി പൂജ്യമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി, C എന്ന ബിന്ദുവിനു് നിർദേശാങ്കങ്ങൾ -2 ഉം 0 ഉം ഉണ്ടു് (ചിത്രം 6.5).

കോടികളുടെ അക്ഷത്തിന്മേൽ ഒരു ബിന്ദു കിടക്കുകയാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ ഭുജ പൂജ്യമായിരിക്കും.

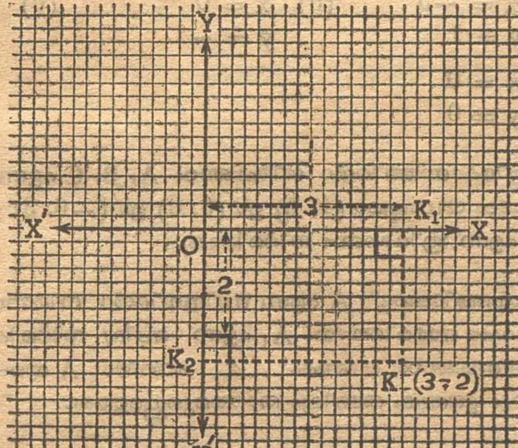
ഉദാഹരണമായി, D എന്ന ബിന്ദുവിനു് നിർദേശാങ്കങ്ങൾ 0 ഉം 2 ഉം ഉണ്ടു്.

അവസാനമായി, മൂലബിന്ദു, O എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ ഭുജവും കോടിയും പൂജ്യത്തിനു തുല്യമാണെന്നു് കാണിക്കുവാൻ $(0, 0)$ എന്നു എഴുതുന്നു.

താഴെ പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ നിർധാരണം ചെയ്തു നോക്കാം:

ഉദാഹരണം 2

തലത്തിലുള്ള K എന്ന ബിന്ദുവും നിർദേശാക്ഷങ്ങളും തന്നിരിക്കുന്നു. K യുടെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക.



ചിത്രം 6.7
തോതു്: 5 വിഭാഗം = 1 മാത്ര

നിർധാരണം

XOX′, YOY′ എന്നീ അക്ഷങ്ങളിലേക്കു് യഥാക്രമം KK_1, KK_2 എന്നീ ലംബങ്ങൾ K യിൽ കൂടി വരക്കുക (ചിത്രം 6.7). ഈ ലംബങ്ങളുടെ പാദ

ങ്ങൾ K യുടെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ ആയിരിക്കും. ഈ പ്രകരണത്തിൽ (+3, −2) ഉം K യുടെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ ആണ്.

x, y എന്നീ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ബിന്ദുവിൻെറ ഭുജയും കോടിയും സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.

4. താഴെ പറയുന്ന നിർദേശാങ്കങ്ങൾ ഉള്ള ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക:

(1) $x = 5, y = 3$ (2) $x = -4, y = 6$

(3) $x = -3, y = -4$ (4) $x = 5, y = -2$

(5) $x = -2, y = 0$ (6) $x = 0, y = -3$

(7) $x = 0, y = 0$ (8) $x = 0, y = -5$

5. താഴെ പറയുന്ന ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്താതെ തന്നെ അവ ഏതു ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിൽ ആണ് കിടക്കുന്നതു് എന്നു പറയുക.

(1) $x = 3$, $y = 5$ (2) $x = -3$, $y = -5$ (3) $x = 2$, $y = -7$

(4) $x = -5$, $y = 1$ (5) $x = 0$, $y = -1$ (6) $x = -1$, $y = 0$

(7) $x = 0$, $y = 0$

6. ഒരു ത്രികോണത്തിൻെറ ശീർഷങ്ങൾ A, B, C എന്നിവയുടെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ യഥാക്രമം (4, 5) ഉം (8, 0) ഉം (−6, 3) ഉം ആണെങ്കിൽ, ABC എന്ന ത്രികോണം നിർമിക്കുക.

7. X അക്ഷത്തിലേക്ക് A എന്ന ബിന്ദുവിൻെറ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ (4, 6) എന്നിവക്കു സമമിതമായ A_1 എന്ന ബിന്ദു നിർമിക്കുക. A_1 ൻെറ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക. A_1 ൻെറയും A യുടെയും കോടികൾ തമ്മിലും ഭുജങ്ങൾ തമ്മിലും താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

8. Y അക്ഷത്തിലേക്ക് B എന്ന ബിന്ദുവിൻെറ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ (−2, 3) എന്നിവക്കു സമമിതമായ B_1 എന്ന ബിന്ദു നിർമിക്കുക. B_1 ൻെറ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ കാണുക. B_1 ൻെറയും B യുടെയും കോടികൾ തമ്മിലും ഭുജങ്ങൾ തമ്മിലും താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

9. മൂലബിന്ദുവിലേക്ക് D എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ (−3, 2) എന്നിവക്ക് സമമിതമായ D_1 എന്ന ബിന്ദു നിർമിക്കുക.

D_1 എന്ന ബിന്ദുവിൻെറ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ ഒരു ഗ്രാഫു വഴി കാണുക. ബിന്ദുക്കൾ D യുടെയും D_1 ൻെറയും കോടികൾ തമ്മിലും ഭുജങ്ങൾ തമ്മിലും താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

10. താഴെ പറയുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഒരു തലത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.

(1) A(1, 3) (2) B(2, 5) (3) C(1, −3)
(4) D(−2, −5) (5) E(−1, 3)

X അക്ഷത്തിലേക്കും Y അക്ഷത്തിലേക്കും മൂലബിന്ദുവിലേക്കും ഈ ബിന്ദുക്കളുടെ നിർദേശങ്കങ്ങൾക്കു സമമിതം ആയ ബിന്ദുക്കൾ കാണുക.

11. (1) A, B, C, D എന്നീ ശീർഷങ്ങളുടെ നിർദേശാങ്കങ്ങൾ യഥാക്രമം (0, 0), (1, 3), (8, 5), (9, 1) എന്നിവയാണ്. ABCD എന്ന ചതുർഭുജം നിർമിക്കുക.

(2) ഈ ചതുർഭുജത്തെ രണ്ടു കർണങ്ങളായി വിഭജിച്ച് (ആദ്യം ഒരു കർണവും, പിന്നീട് മറേറതും) അതിൻെറ വിസ്തീർണം കാണുക.

(3) അപ്രകാരം ലഭിക്കുന്ന രണ്ടു ഉത്തരങ്ങളുടെ സമാന്തരമാധ്യം (ശരാശരി) കണ്ട് അതു് രണ്ട് അക്കമാക്കി സ്ഥൂലനിർണയം ചെയ്യുക.

12. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ ഒരു ദിവസത്തെ (താപനിലയും) സമയവും തന്നിരിക്കുന്നു.

സമയം (മണിക്കൂർ)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
താപനില (സെൻറിഗ്രേഡ്)	−2	0	−3	−5	0	4	6	9	6	3	1	0	−2

(1) ഒരു ദിവസത്തെ താപനിലയുടെ മാററങ്ങളെ കാണിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് വരക്കുക.

(2) ഈ ഗ്രാഫിൽ നിന്നു്, 3 മണി, 9 മണി, 13 മണി, 21 മണി എന്നീ സമയങ്ങളിലെ താപനിലയെ കാണിക്കുന്നവ വായിക്കുക.

(3) − 10°, − 4°, + 2°, + 5° എന്നീ താപനിലകളിൽ ആയിരിക്കുന്ന സമയം ഗ്രാഫിൽ നിന്നും കാണുക.

(4) ആ ദിവസത്തെ ഏററവും കൂടിയതും കുറഞ്ഞതുമായ താപം ഏതു സമയത്തായിരിക്കും എന്നു കാണുക,

13. താഴെ പറയുന്ന പട്ടികകൾ ഉപയോഗിച്ച് x ഉം y ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം ഗ്രാഫ് വഴി കാണുക.

(a)

x	–4	–5	–2	–1	0	1	2	3	4		
y	–2	0.8	0	0.3	1	2	3.2	3.8	4.2		

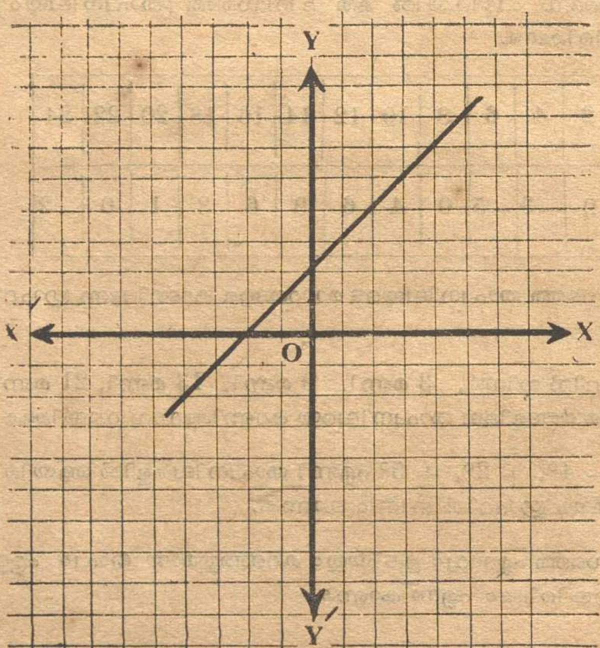
(b)

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	4	2	0.5	0.4	-0.6	-0.8	-0.2	0.8	1	0.6	0.2

(1) y യുടെ മൂല്യം ഋണവും ധനവും പൂജ്യവും ആണെങ്കിൽ മുകളിൽ ഉള്ള പട്ടികയിൽ x ൻെറ മൂല്യം എന്തായിരിക്കും?

(2) y യുടെ മൂല്യം വർധിക്കുകയോ കുറയുകയോ ചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ x ൻെറ മൂല്യം വർധിക്കുകയോ കുറയുകയോ ആണ് ചെയ്യുന്നത്?

14. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് നോക്കി x ഉം y ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കണ്ട് അത് ഒരു പട്ടികയിൽ എഴുതുക.



ചിത്രം 6.8
തോത്: 1 ഡിവിഷൻ = 1 മാത്ര (ക്രമ)

2. അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധം

അങ്കഗണിതത്തിൽ അനുലോമമായി ആനുപാതികമൂല്യങ്ങറം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഉദാഹരണമായി, ഏകസമാനവേഗതയിൽ (ഒരേ വേഗതയിൽ) സഞ്ചരിക്കാൻ വേണ്ട സമയവും അപ്പോറം സഞ്ചരിച്ച ദൂരവും അനുലോമമായി ആനുപാതിക മൂല്യങ്ങളാണ്.

ഒരു ഏകസമാന ചലനത്തിൻെറ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 3 കി മീററർ ആയി എടുക്കുക. ആകെ സഞ്ചരിച്ച ദൂരത്തെ 'y' കൊണ്ടും അതിനുവേണ്ട സമയത്തെ (മണിക്കൂറിനെ) 'x' കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ ദൂരവും സമയവും തമ്മിലുള്ളബന്ധം താഴെ പറയുന്ന വിധത്തിൽ പ്രതിപാദിക്കാവുന്നതാണ്.

$$y = 3x$$

വസ്തുക്കളുടെ (പദാർഥങ്ങളുടെ) വിലയും അവയുടെ എണ്ണവും അനുലോമ ആനുപാതികമൂല്യങ്ങറംക്കുള്ള മറെറാരു ഉദാഹരണമാണ്. ഒരു സാധനത്തിന്റെ വില 8 രൂപയാണെന്നു വിചാരിക്കുക. സാധനങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ 'x' കൊണ്ടും അവയുടെ വിലയെ 'y' കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കുകയാണ് എങ്കിൽ, ഈ രണ്ടു് മൂല്യങ്ങറം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം താഴെ പറയുന്ന വിധത്തിൽ പ്രതിപാദിക്കാവുന്നതാണ്.

$$y = 8x$$

ഇതുപോലെ അനുലോമ ആനുപാതികമൂല്യങ്ങറംക്കുള്ള ഉദാഹരണങ്ങറം ധാരാളം കൊടുക്കാവുന്നതാണ്. ഒരു വസ്തുവിൻെറ പരിധിയുടെ (ചുററളവിന്റെ) നീളവും അതിൻെറ വ്യാസത്തിൻെറ നീളവും ജ്യാമിതിയിൽ നിന്നു് എടുത്ത ഒരു ഉദാഹരണമാണ്. പരിധിയും വ്യാസവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം താഴെ പറയുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്.

$$y = 3.14x \text{ (ഏകദേശം)}$$

(ഇതിൽ x വ്യാസവും y പരിധിയുമാണ്)

താഴെ പറയുന്ന സമീകരണങ്ങറം പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

$$\frac{y}{x} = 3, \quad \frac{y}{x} = 8, \quad \frac{y}{x} = 3.14$$

ഇതിൽ നിന്നും x ൻെറയും y യുടെയും സംഗതമായ മൂല്യങ്ങറം അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികം ആണെന്നും അവയുടെ അനുപാതം എല്ലാപ്പോഴും ഒരു പോലെ ആയിരിക്കുമെന്നും മനസ്സിലാക്കാം.

ആയതിനാൽ x, y എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകറം അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികമാണ് എങ്കിൽ, അനുപാതം y : x കൊണ്ടു് x ൻെറ സംഗതമായ മൂല്യത്തെ ഗുണിക്കുമ്പോറം കിട്ടുന്ന ഗുണിതം y യുടെ ഓരോ മൂല്യത്തിനും തുല്യമായി

രിക്കും. ഇപ്രകാരം രണ്ടു സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെയാണ് *അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധം* എന്നു പറയുന്നത്.

നിർവചനം: x, y എന്നീ രണ്ടു സംഖ്യകൾ തമ്മിലുള്ളബന്ധം $y = kx$ $(k \neq 0)$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കാവുന്നതാണ്. മേല്പറഞ്ഞ ഈ ബന്ധത്തെയാണ് അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധം എന്നു പറയുന്നത്.

k എന്ന സംഖ്യയെ 'ആനുപാതികതയുടെ ഗുണാംകം' എന്നു പറയുന്നു. മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ ഈ ഗുണാംകങ്ങൾ യഥാക്രമം 3 ഉം 8 ഉം 3.14 ഉം ആണ്. ഇതിൽ നിന്നും x ഉം y ഉം പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും ധന സംഖ്യയോ ഋണസംഖ്യയോ ആയിരിക്കും എന്നു വ്യക്തമാണല്ലോ.

15. ഒരു കിലോഗ്രാം മുന്തിരിങ്ങയുടെ വില 4 രൂപയാണ്

(1) മുന്തിരിങ്ങയുടെ വില y ഉം അതിന്റെ തൂക്കം x ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്നതിനുള്ള സൂത്രം നിർമിക്കുക.

(2) ആ സൂത്രത്തിന്റെ ഒരു ഗ്രാഫ് നിർമിക്കുക.

(3) ആ ഗ്രാഫിൽ നിന്നും താഴെ പറയുന്നവയുടെ വില കാണുക.
2 കി ഗ്രാം 500 ഗ്രാം മുന്തിരിങ്ങ, 4 കി ഗ്രാം 250 ഗ്രാം മുന്തിരിങ്ങ, 3 കി ഗ്രാം 750 ഗ്രാം മുന്തിരിങ്ങ.

(4) ആ ഗ്രാഫിൽ നിന്നും 7 രൂപയ്ക്കും 11 രൂപയ്ക്കും 9 രൂപയ്ക്കും വാങ്ങിക്കാവുന്ന മുന്തിരിങ്ങയുടെ തൂക്കം കാണുക.

(5) വാങ്ങിക്കുന്ന മുന്തിരിങ്ങയുടെ തൂക്കം x ഇതിൽ നിന്നും മാററം സംഭവിക്കുകയാണെങ്കിൽ മുന്തിരിങ്ങയുടെ വില y യിൽ എന്തു മാററമുണ്ടാകും.

16. (1) x ഉം y ഉം തമ്മിൽ അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധം ഉണ്ടെന്നു മനസ്സിലാക്കി, താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക.

x	8	6	4	2	1	$\frac{1}{2}$	0	–1	–2	–4	–6	–8
y	4											

(2) x ഉം y ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിന്റെ സൂത്രം എഴുതുക.

(3) ഈ ബന്ധത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക.

3. അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്

മുകളിൽ പറഞ്ഞ പ്രശ്നങ്ങളിൽ, ആനുപാതികബന്ധത്തിനുള്ള ഗ്രാഫുകൾ വരച്ച് നാം അടയാളപ്പെടുത്തിയ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളും ഒരേ രേഖയിൽ തന്നെയാണ് കിടക്കുന്നതു് എന്നു് പരിശോധിക്കുവാൻ ഒരു റൂളർ ഉപയോഗിച്ചാൽ എളുപ്പമുണ്ട്. ആ രേഖ നിർദേശാക്ഷങ്ങളുടെ മൂലബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നു പോകുന്നു.

$y = kx$ എന്ന സൂത്രം ശരിയാകത്തക്ക വിധത്തിൽ തലത്തിലെ ബിന്ദുക്കളുടെ ഒരു ഗണത്തെ, അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധത്തിൻെറ ഗ്രാഫ് എന്നു പറയുന്നു.

നിർദേശാക്ഷങ്ങളുടെ മൂലബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു നേർരേഖയാണ് അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധത്തിന്റെ ഗ്രാഫ്. രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം ഒരു നേർരേഖയിൽ നിർണയിക്കണമെങ്കിൽ, അതായതു് ഒരു നേർരേഖ വരക്കണമെങ്കിൽ, ആ രേഖയിൽ കിടക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനം അറിഞ്ഞാൽ മതി.

ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ ഒന്ന് സ്ഥിരമായിരിക്കുന്ന മൂലബിന്ദുവായിരിക്കും. ആയതിനാൽ, അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധത്തിൻെറ ഗ്രാഫ് വരച്ചാൽ നേർരേഖയിൽ കിടക്കുന്ന ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൻെറ സ്ഥാനം അടയാളപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്.

17. x ഉം y ഉം തമ്മിൽ അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധം ഉണ്ട്. ആനുപാതികതയുടെ ഗുണാംകം 4 ആണ്.

(1) y ഉം x ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിൻെറ സൂത്രം എഴുതുക.

(2) താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക.

x	2	5	7	$\frac{1}{2}$	0.25
y					

(3) ഈ ബന്ധങ്ങളുടെ ഒരു ഗ്രാഫ് വരക്കുക.

18. ബന്ധങ്ങൾ $y = 3x$ ൻെറയും $y = -3x$ ൻെറയും ഗ്രാഫ് ഒരേ ചിത്രത്തിൽ തന്നെ വരക്കുക. ഈ ബന്ധങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ തമ്മിൽ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

19. ഒരേ നിർദേശകാക്ഷങ്ങളുള്ളതും താഴെ പറയുന്ന ബന്ധങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതുമായ ഗ്രാഫ് വരക്കുക:

$$y = \frac{1}{3}x: \quad y = -\frac{1}{3}x$$
$$y = 2x: \quad y = -2x$$

ഈ ബന്ധങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ തമ്മിൽ താരതമ്യപ്പെടുത്തുക.

20. x ഉം y ഉം തമ്മിൽ അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധം ഉണ്ട് എന്നു തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ, താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക പൂരിപ്പിക്കുക:

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
3	12	2			21	8	4	4	6
4		1				10		10	
5		6	12	3			7		24
7		5		4	20	5		20	

21. 10 കൊല്ലം കൊണ്ട് ഒരു കുട്ടിയുടെ ഉയരത്തിൽ വന്ന മാററം താഴെ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു:

വയസ് (കൊല്ലമായി) = y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ഉയരം (സെ. മീററിൽ = h)	70	80	88	95	100	107	113	119	127	129

(1) h ന്റെ ഏതെങ്കിലും മൂല്യങ്ങളുടെ അനുപാതവും y യുടെ സംഗതമൂല്യങ്ങളുടെ അനുപാതവും തുല്യമായിരിക്കുകയില്ലെന്നു കാണിക്കുക.

(2) h ൻെറ ഏതെങ്കിലും മൂല്യങ്ങളുടെ അനുപാതവും y യുടെ സംഗത മൂല്യങ്ങളും ഒരേ സംഖ്യയായിരിക്കുകയില്ലെന്നു കാണിക്കുക.

(3) ഈ ബന്ധത്തിൻെറ ഗ്രാഫ് വരക്കുക: ഇവ ഏതു തരത്തിലുള്ള രേഖകൾ ആയിരിക്കും,

4. ഏകഘാതബന്ധം

ഉദാഹരണം 3

ഒരു കൂട്ടം വിദ്യാർഥികരം ഒരു പട്ടണത്തിൽ നിന്നും പുറപ്പെട്ടു. അപ്പോരം പട്ടണവും അവരും തമ്മിലുള്ള ദൂരം 5 കി മീററർ ആയിത്തീർന്നു. അവർ മണിക്കൂറിൽ 3 കി മീററർ വേഗതയിലാണ് സഞ്ചരിക്കുന്നതു്. എന്നാൽ x മണിക്കൂർ കഴിയുമ്പോരം ആ പട്ടണവും അവർ സഞ്ചരിക്കുന്ന സ്ഥലവും തമ്മിൽ എന്തു ദൂരമുണ്ടായിരിക്കും?

നിർധാരണം:

x മണിക്കൂർ കൊണ്ടു് അവർ 3x കി മീററർ ദൂരവും അതിനുമുമ്പ് 5 കി മീററർ ദൂരവും സഞ്ചരിച്ചു കഴിഞ്ഞു. അതു കൊണ്ടു് x മണിക്കൂർ കഴിയുമ്പോരം അവർ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം (3x + 5) കി മീററർ ആയിരിക്കും. ഈ ദൂരത്തെ y എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ടു് സൂചിപ്പിക്കാം. അപ്പോരം

$$y = 3x + 5$$

ഈ സമത ദൂരവും സമയവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഈ ബന്ധം, ഒരിക്കലും ദൂരത്തിന്റെ അനുപാതവുമായി അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധമുള്ളതു് ആയിരിക്കുകയില്ല. അതായതു്, സമയം ഒരിക്കലും ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യയായിരിക്കുകയില്ല (താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക നോക്കുക).

x =	1	2	3
y =	8	11	14

നിർവചനം: x ന്റെയും y യുടെയും രണ്ടു മൂല്യങ്ങരം തമ്മിലുള്ള ബന്ധം $y = ax + b$ എന്ന സൂത്രവാക്യം കൊണ്ടു് സൂചിപ്പിക്കാമെങ്കിൽ ആ ബന്ധത്തെ *ഏകഘാതബന്ധം* എന്നു പറയുന്നു. ഇതിൽ a യും b യും സംഖ്യകരം ആണ്.

$b = 0$ ആണെങ്കിൽ $y = ax$ ആയിരിക്കും.

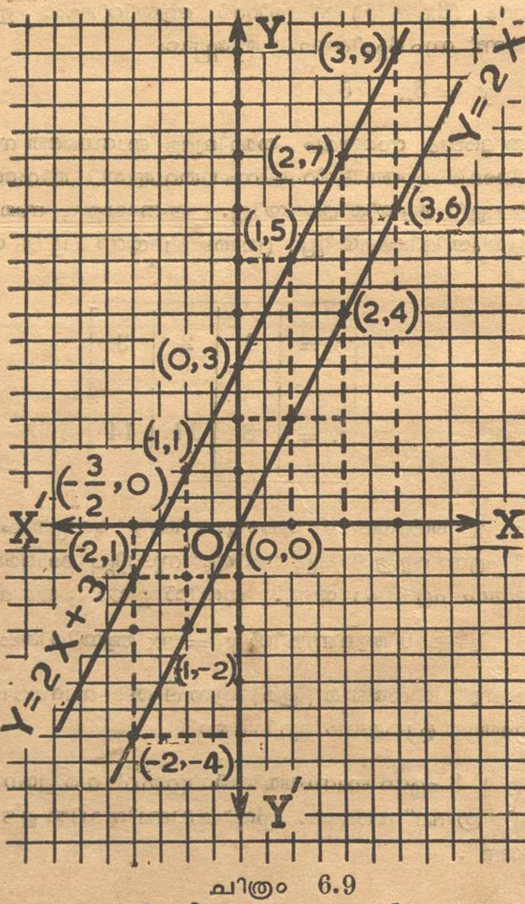
അതു കൊണ്ടു്, അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധം ഏകഘാതബന്ധത്തിനുള്ള ഒരു പ്രത്യേക പ്രകരണം കൂടിയാണ്.

$y = 2x + 3$ എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചുനോക്കാം. ആദ്യമായി $y = 2x$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക. ഇതു് മൂലബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന ഒരു നേർരേഖയാണ്.

$y = 2x$ എന്ന നേർരേഖയിൽ കിടക്കുന്ന $y = 2x + 3$ എന്ന ഗ്രാഫിലെ ബിന്ദു എങ്ങനെ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു എന്നു നോക്കാം.

ഇതിന്ന് താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

x	–2	–1	0	1	2	3
2x	–4	–2	0	2	4	6
2x+3	–1	1	3	5	7	9



ചിത്രം 6.9

തോതു്: 2 ഡിവിഷൻ = 1 മാത്ര

ഇതിൽ ഒരു ഭുജക്കു് ആദ്യത്തെ ഗ്രാഫിലെ ആപേക്ഷിക (പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ട) കോടിയേക്കാരം രണ്ടാമത്തെ ഗ്രാഫിലെ ബിന്ദുവിൻെറ കോടി 3 കൂടുതൽ (വലുതു്) ആയിരിക്കും.

ആയതിനാൽ, രണ്ടാമത്തെ ഗ്രാഫിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൻെറ കോടി ആദ്യത്തെ ഗ്രാഫിലെ ആ ബിന്ദുവിനു സംഗതമായ കോടിയേക്കാരം മാത്രകരം കൂടുതൽ ആയിരിക്കുമെന്നു് വ്യക്തമാണല്ലോ. $y = 2x + 3$ എന്ന ബന്ധത്തിൻെറ ഗ്രാഫ് വരച്ചുകഴിയുമ്പോരം, $y = 2x$ (ചിത്രം 6.9) എന്ന നേർരേഖക്കു് സമാന്തരമായ ഒരു നേർരേഖ ലഭിക്കുന്നതാണു്.

നിഗമനം:

ഏകഘാതബന്ധത്തിൻെറ ഗ്രാഫ് ഒരു നേർ രേഖയാണു്. ഏകഘാത ബന്ധത്തിൻെറ ഒരു ഗ്രാഫ് വരക്കുവാൻ അതിലുള്ള ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കരം കണ്ടാൽ മതി.

സാധാരണയായി, ഈ ഗ്രാഫ് നിർമിക്കുവാൻ നിർദേശാക്ഷങ്ങരം ഉള്ള രണ്ടു സംഗമബിന്ദുക്കരം കണ്ടാൽ മതി.

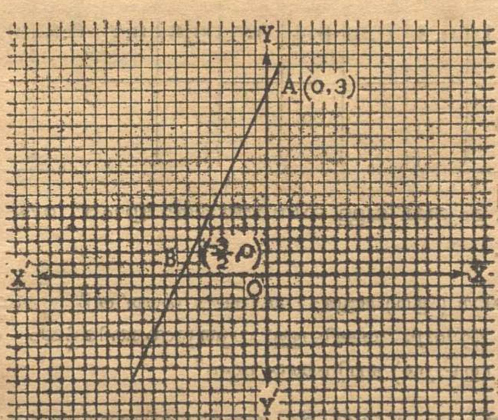
അതുകൊണ്ടു്, $x = 0, y = 3$ ഉം

$$x = \frac{-3}{2}, y = 0 \text{ ഉം ആണു്}$$

എങ്കിൽ

$y = 2x + 3$ യുടെ ഗ്രാഫ് A (0, 3),

$B\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്നുപോകും.



ചിത്രം 6.10

തോതു്: 5 ഡിവിഷൻ = 1 മാത്ര

22. ഒരു ദിവസത്തെ 8 മണിയിലെ താപം 6°F ആയിരുന്നു. അതു് 16 മണിവരെ ഒരേപോലെ താപം 0.5° വീതം ഉയർന്നുകൊണ്ടിരുന്നു.

(1) താപവും സമയവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിൻെറ സൂത്രവാക്യം എഴുതുക.

(2) ഈ ബന്ധത്തിൻെറ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

(3) 10 മണിയിലെ താപവും 12 മണിയിലെ താപവും 13.30 മണിയിലെ താപവും ഗ്രാഫിൽ കാണിക്കുക.

(4) താപവും സമയവും അനുലോമ(ക്രമ) ആനുപാതികമാണോ?

(5) $y = 0.5x + 6$ നെ എന്താണു് പറയുന്നതു്?

23. ഒരു തീവണ്ടി A എന്ന ഒരു സ്റ്റേഷനിൽ നിന്നു പുറപ്പെടുന്നുവെന്നും അതു് 2 കി മീററർ ദൂരം സഞ്ചരിച്ചശേഷം അതിൻെറ വേഗത മണിക്കൂറിൽ 40 കി മീറററാണെന്നും സങ്കല്പിക്കുക.

(1) 0.5 മണിക്കൂർ തുല്യവേഗതയിൽ സഞ്ചരിച്ചുകഴിയുമ്പോരം ആ തീവണ്ടി ആ സ്റ്റേഷനിൽ നിന്നു് എത്ര കി മീററർ അകലെയായിരിക്കുമെന്നു കാണുക.

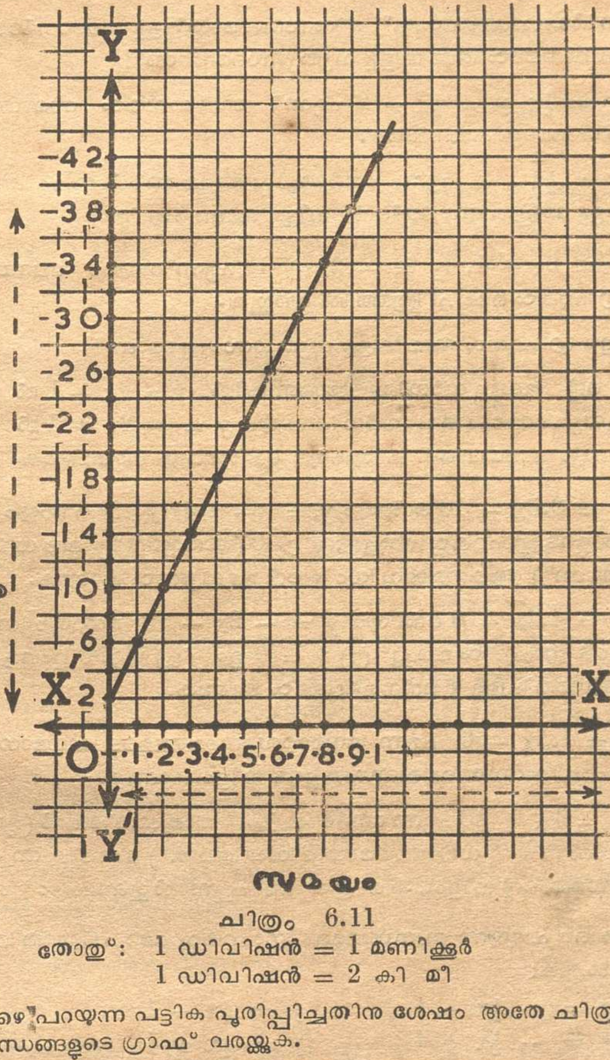
(2) t യുടെ (മണിക്കൂർസമയം) താഴെ പറയുന്ന മൂല്യങ്ങളിൽ നിന്നു് s (ദൂരം കി മീറററിൽ) ൻെറ മൂല്യങ്ങരം കാണുക:

t മണിക്കൂർ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
s കി മീററർ										

(3) s ഉം t ഉം തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തിൻെറ ഗ്രാഫ് വരക്കുക (ചിത്രം 6.11).

(4) അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധത്തിൻെറ ഗ്രാഫും (23.3) ൽ വരച്ച ഗ്രാഫും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിൻേറയും സമരൂപതയുടേയും (തുല്യത) ബിന്ദുക്കരം ഏവ?

(5) മുകളിൽ വരച്ച ഗ്രാഫ് അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികബന്ധത്തിൻെറ ഗ്രാഫ് ആണോയെന്നു് ക്രിയ ചെയ്തു പരിശോധിച്ചു നോക്കുക;



ചിത്രം 6.11

തോതു്: 1 ഡിവിഷൻ = 1 മണിക്കൂർ

1 ഡിവിഷൻ = 2 കി മീ

24. താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക പൂരിപ്പിച്ചതിനു ശേഷം അതേ ചിത്രത്തിൽ ആ ബന്ധങ്ങളുടെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = \frac{1}{2}x$									
$y = \frac{1}{2}x - 2$									

(1) നിർദേശാക്ഷങ്ങളാക്ക് അനുസരണമായിട്ടുള്ള ഈ നേർരേഖയുടെ സ്ഥാനങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമെന്താണ്?

(2) $y = \frac{1}{2}x$, $y = \frac{1}{2}x - 2$ എന്നീ നേർരേഖകൾ സമാന്തരമായിരിക്കുമെന്നു കാണിക്കുക.

(3) $y = \frac{1}{2}x - 2$ എന്ന നേർരേഖ y അക്ഷത്തിൽ ഛേദിക്കുമ്പോൾ ഉള്ള രേഖാഖണ്ഡത്തിൻെറ നീളം കാണുക.

25. (1) $y = 2x + 1$, $y = -2x + 1$ എന്നിവയുടെ ബന്ധങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ ഒരേ ചിത്രത്തിൽ വരയ്ക്കുക.

(2) ഈ ഗ്രാഫുകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം എന്താണ്?

(3) x ന്റെ മൂല്യം വർധിക്കുകയാണെങ്കിൽ, $y = 2x + 1$ ൽ y യുടെ മൂല്യം ഒരേപോലെ വർധിക്കുകയും $y = -2x + 1$ ൽ y യുടെ മൂല്യം ഒരേപോലെ കുറയുകയും ചെയ്യുമെന്നു കാണിക്കുക.

26. (1) $y = 2.5x - 10$ ൻെറയും $y = -1.5x + 3$ ൻെറയും ബന്ധങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരച്ച്, $y > 0$ (അതായത് y ഒരു ധനസംഖ്യയാണ്) ആകത്തക്കവിധം x ൻെറ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

(2) $y = 4.2x - 6$ ൻെറയും $y = -2x - 8$ ൻെറയും ബന്ധങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ വരച്ച് (i) $y = 0$ ഉം (ii) $y > 0$ ഉം ആകത്തക്ക വിധത്തിലുള്ള x ൻെറ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

27. (1) $y = 1.5x - 6$ എന്ന നേർരേഖ അക്ഷങ്ങളുടെ ധനഭാഗങ്ങളിൽ ഛേദിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡങ്ങളുടെ നീളം കാണുക.

(2) $y = kx + 10$ എന്ന നേർരേഖ X — അക്ഷത്തിന്മേൽ (മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ധനാത്മകമായ ദിശയിലേക്ക്) ഛേദിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ നീളം 2.5 മാത്രയാണ് എന്നാൽ ഗുണാംകം k കാണുക.

28. (1) താഴെ പറയുന്ന ബന്ധങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകൾ ഒരേ ചിത്രത്തിൽ തന്നെ വരക്കുക:

$y = -\frac{1}{2}x - 4$ $\quad$ $y = \frac{1}{2}x - 4$

$y = -\frac{1}{2}x + 4$ $\quad$ $y = \frac{1}{2}x + 4$

OX, OY എന്നീ അക്ഷങ്ങളിൽ ഛേദിക്കുന്ന ഈ ഗ്രാഫുകളുടെ ഛേദകബിന്ദുക്കൾ കാണുക.

(2) ഈ നേർരേഖകൾ ഓരോന്നിൻെറയും കോണീയഗുണാംകങ്ങൾ കാണുക.

(3) $y = 3$ (ഓരോ ബന്ധത്തിനും) ആണെങ്കിൽ x ൻെറ മൂല്യം കണ്ട് ഉത്തരം ഗ്രാഫു നോക്കി ശരിയാണോയെന്ന് പരിശോധിക്കുക.

5. പ്രതിലോമ (വിപരീത) ആനുപാതികബന്ധം

അങ്കഗണിതത്തിൽ പ്രതിലോമ (വിപരീത) ആനുപാതിക മൂല്യങ്ങളെപ്പററി പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.

ഉദാഹരണമായി, ഒരു ദീർഘചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീർണം സ്ഥിരമാണെങ്കിൽ അതിൻെറ നീളവും വീതിയും പ്രതിലോമ (വിപരീത) ആനുപാതിക മൂല്യങ്ങൾ ഉള്ളവയാണ്. താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക നോക്കിയാൽ ഇതു് മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്.

നീളം (മീററിൽ)	20	30	40	50	60
വീതി (മീററിൽ)	30	20	15	12	10
വിസ്തീ: (ച. മീററിൽ)	600	600	600	600	600

ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ഒരു സ്ഥലത്തിൻെറ (നിലത്തിൻെറ) നീളത്തെ x കൊണ്ടും വീതിയെ y കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ, അവ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം താഴെ പറയുന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് വിശദീകരിക്കാവുന്നതാണ്.

$$xy = 600. \text{ അതായതു് } y = \frac{600}{x}$$

ദൂരം സ്ഥിരമാണെങ്കിൽ, സമയവും വേഗതയും പ്രതിലോമ (വിപരീത) ആനുപാതികമൂല്യങ്ങൾ ഉള്ളവയായിരിക്കും.

താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക പരിശോധിച്ചു നോക്കാം.

വേഗത (കി മീററിൽ)	10	20	40	50	80
സമയം (മണിക്കൂറിൽ)	20	10	5	4	$2\frac{1}{2}$
ദൂരം (കി മീററിൽ)	200	200	200	200	200

വേഗതയെ x കൊണ്ടും സമയത്തെ y കൊണ്ടും സൂചിപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ വേഗതയും സമയവും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം താഴെ പറയുന്ന സൂത്രവാക്യം കൊണ്ട് വിശദീകരിക്കാവുന്നതാണ്:

$$xy = 200$$

നിർവചനം: x ന്റെയും y യുടെയും രണ്ടു മൂല്യങ്ങൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധം $xy = k$ എന്ന സമത കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്. ഇതിൽ k പൂജ്യത്തിനു തുല്യമല്ലാത്ത ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയായിരിക്കാം. $xy = k$ *എന്ന സമതയാണ് പ്രതിലോമ (വിപരീത) ആനുപാതികബന്ധം* എന്നു പറയുന്നത്. k എന്ന സംഖ്യ, ആനുപാതികതയുടെ ഗുണാംകം ആണ്.

ഇവിടെ x നും y ക്കും പൂജ്യം ഒഴിച്ചുള്ള ഏതെങ്കിലും മൂല്യങ്ങൾ കൊടുക്കാവുന്നതാണ്. ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യയുടെ മൂല്യം പൂജ്യത്തിനു തുല്യമാവുകയാണെങ്കിൽ, $xy = k$ എന്ന സമതയുടെ ഇടതുവശത്തെ തുക നിശ്ചയമായും പൂജ്യത്തിനു തുല്യമായിരിക്കുകയും സമതയുടെ വലതുവശത്തെ തുക പൂജ്യത്തിനു തുല്യമല്ലാതായിരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. അപ്പോൾ തെററായ ഒരു സമത ആയിരിക്കും ലഭിക്കുന്നത്.

ഒരു പ്രതിലോമ (വിപരീത) ആനുപാതികബന്ധത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചു നോക്കാം. ഉദാഹരണമായി, $xy = 9$ എന്നതിന്റെ ഗ്രാഫ്.

x ൽ നിന്ന് y എത്രയാണെന്നു നോക്കാം. അപ്പോൾ $y = 9/x$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

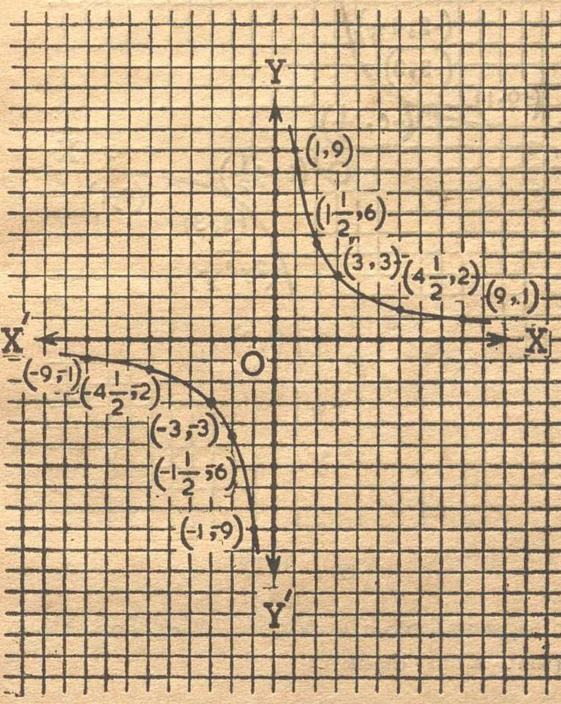
x ന് വേണ്ട മൂല്യങ്ങൾ കൊടുക്കുകയാണ് എങ്കിൽ x ന് സംഗതമായ മൂല്യങ്ങൾ y ക്കും ലഭിക്കുന്നു. അതിനു ശേഷം താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് ക്രിയ ചെയ്യുക.

x	-9	-6	-3	-2	-1	$+1$	$+2$	$+3$	$+6$	$+9$
y	-1	$-1\frac{1}{2}$	-3	$-4\frac{1}{2}$	-9	$+9$	$+4\frac{1}{2}$	$+3$	$+1\frac{1}{2}$	$+1$

x ന് ഇതിൽ കൂടുതൽ മൂല്യങ്ങൾ കൂടി നാം കൊടുക്കുകയാണ്. എങ്കിൽ, ബിന്ദുക്കൾ പരസ്പരം കൂടുതൽ കൂടുതൽ അടുത്തടുത്തായി സ്ഥിതിചെയ്യുന്നതായി കാണാവുന്നതാണ്. $xy = 9$ എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ഒരു വക്രരേഖയാണ് എന്ന് ചിത്രം 6.12 നോക്കിയാൽ കാണാവുന്നതാണ്. ഈ രേഖക്ക് മൂലബിന്ദുവിനു സമമിതമായ രണ്ടു ഭാഗങ്ങൾ ഉണ്ട് (അവയിൽ ഒരു ഭാഗം

x ന്റെ ധനമൂല്യങ്ങൾ ഉള്ളവയും മറേറതു് x ന്റെ ഋണമൂല്യങ്ങൾ ഉള്ളവയും ആണു്).

നിർദേശാങ്കതലത്തിൽ സംഗതമായ ബിന്ദുക്കൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.



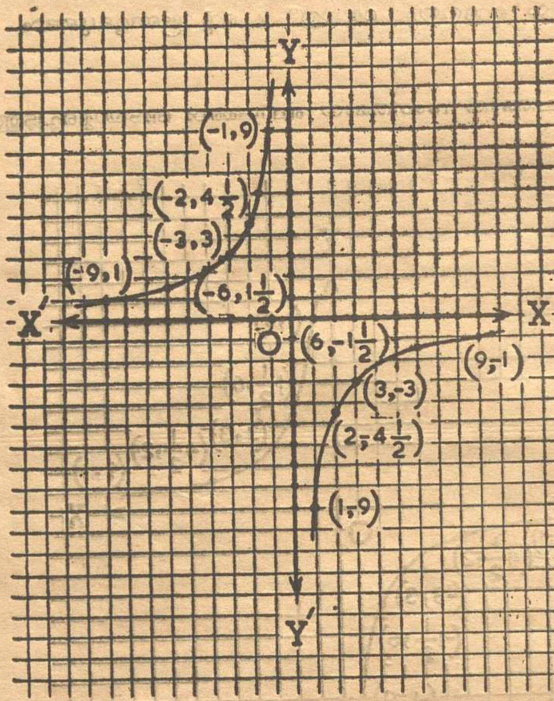
ചിത്രം 6.12

തോതു്: 1 ഡിവിഷൻ = 1 മാത്ര

ഇവയിൽ ഒരു ഭാഗം ആദ്യത്തെ (ഒന്നാമത്തെ) ചതുർഥാംശത്തിലും മറേറതു് മൂന്നാമത്തെ ചതുർഥാംശത്തിലും ആണു്.

പ്രതിലോമ (വിപരീത) ആനുപാതികബന്ധത്തിന്റെ ഗ്രാഫിനെ *ഹൈപർബോള* എന്നു പറയുന്നു.

ചിത്രം 6.13 ൽ $y = -9/x$ എന്ന (ഋണഗുണാംകമുള്ള) ബന്ധത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 6.13

29. ഒരു ദീർഘചതുരത്തിൻെറ വിസ്തീർണ്ണം 12 ച. സെ. മീററർ ആണ്. അതിൻെറ നീളം a സെ. മീററർ ആണ്.

(1) ദീർഘചതുരത്തിൻെറ വീതി b കൊണ്ടു സൂചിപ്പിച്ച് വീതി കാണുക.

(2) താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന പട്ടികയിൽ a യുടെ മൂല്യങ്ങൾ തന്നിരിക്കുന്നു. അതിൽ നിന്നും $b = 12/a$ എന്ന ബന്ധം നോക്കി വീതി കാണുക:

നീളം (സെ. മീറററിൽ) a =	1	2	3	4	5	6	8	12
വീതി (സെ. മീറററിൽ) b =								

a യുടെയും b യുടെയും മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ പറയുന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം പറയുക:

(3) വിസ്തീർണം സ്ഥിരമായിരിക്കുമ്പോൾ ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വീതി അതിന്റെ നീളത്തിനും പ്രതിലോമ (വിപരീത) ആനുപാതികം ആയിരിക്കും എന്നു തെളിയിക്കുക.

(4) ഈ ബന്ധത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക:

(5) $a = 1.5$, $a = 2.4$, $a = 9$ ആണെങ്കിൽ മുകളിൽ വരച്ച ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് b യുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

(6) $b = 10$, $b = 5$, $b = 8$ ആണെങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യങ്ങൾ ഗ്രാഫ നോക്കി കാണുക.

(7) ഈ ഗ്രാഫ് നിർദേശാക്ഷങ്ങളിൽ കൂടി കടന്നുപോകുമോ?

(8) ഈ ചിത്രത്തിൽ തന്നെ $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$, $a = 6$ വീതമുള്ള ദീർഘചതുരങ്ങൾ വരച്ച് ഓരോ ദീർഘചതുരത്തിന്റെയും വിസ്തീർണം 12 ന് തുല്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

30. താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക പൂരിപ്പിച്ചശേഷം $y = -8/x$ എന്ന ബന്ധത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരക്കുക.

x =	–8	–5	–4	–2	–1	1	2	3	4	5	8
y =											

താഴെ പറയുന്ന ചോദ്യങ്ങൾക്ക് ഉത്തരം പറയുക:

(1) x നുള്ള മൂല്യങ്ങൾ ഏവ?

(2) y യുടെ സംഗതമൂല്യങ്ങൾ എന്തായിരിക്കും?

(3) x ന്റെ മൂല്യം മാറുകയാണെങ്കിൽ y യുടെ മൂല്യം എങ്ങനെ മാറും?

(4) ആ ഗ്രാഫിനുള്ള സമമിതി എപ്രകാരമായിരിക്കും?

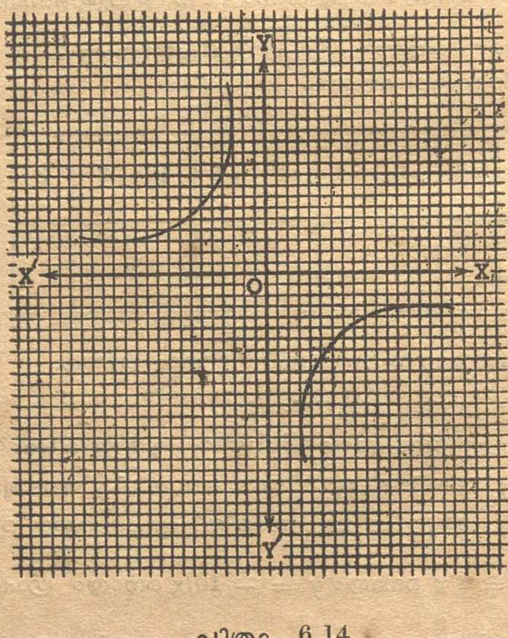
31. $y = 4/x$ ന്റെയും $y = -10/x$ ന്റെയും ഗ്രാഫുകൾ വരക്കുക.

32. x ന്റെയും y യുടെയും മൂല്യങ്ങൾ പ്രതിലോമ (വിപരീത) ആനുപാതികങ്ങൾ ആണെന്നും ആ ആനുപാതികതയുടെ ഗുണാങ്കം -9 ആണ്

എന്നും മനസ്സിലാക്കി, താഴെ പറയുന്ന പട്ടിക പൂരിപ്പിച്ച്, ആ ബന്ധത്തിന്റെ സമീകരണം എഴുതുക:

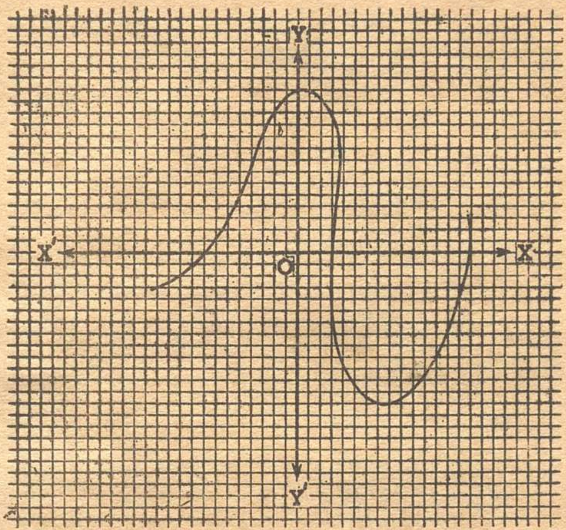
x	–9	–6	–4		–1		4	6			18	36
y				–18		12			36	3		

33. ചിത്രം 6.14 ലെയും 6.15 ലെയും ഗ്രാഫുകളിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള പ്രതിലോമ (വിപരീത) ആനുപാതികബന്ധത്തിന്റെ ഒരു സമീകരണം എഴുതുക.



ചിത്രം 6.14

തോത്: 1 ഡിവിഷൻ = 1 മാത്ര



ചിത്രം 6.15
തോതു്: 1 ഡിവിഷൻ = 1 മാത്ര

KOTTAYAM PUBLIC LIBRARY
KOTTAYAM

ശബ്ദാവലി—സൂചിക

അങ്കഗണിതം	Arithmetic	
അങ്കനം	Notation	117
അചരം	Constant	23
അനുലോമ (ക്രമ) ആനുപാതികം	Direct proportional	159, 160
അസമീകരണം	Inequation	78, 102
ആധാരം	Base	25
ഏകഘാതബന്ധം	Linear dependence	163
ഏകപദം	Monomial	43
കൂട്ടുപലിശ	Compound interest	93
കോടി	Ordinate	
ക്രമവിനിമേയം	Commutative	
ഗണം	Set	72
ഗ്രാഫ്	Graph	161
ഘടകക്രിയ	Factorization	106
ഘനം	Cube	
ഘാതാങ്കം	Exponent	24
ചതുർത്ഥാംശം	Quadrant	
ചരം	Variable	23
ഛേദം	Denominator	
തട്ടം	Identity	12
തലം	Plane	151
തുറന്നപ്രസ്താവന	Open statement	75
നിരപേക്ഷമൂല്യം	Absolute value	5
നിർദേശാങ്കം	Co-ordinate	151
നിർദേശാങ്കതലം	Co-ordinate plane	152
പരിമേയവ്യംജകം	Rational expression	33
പരിമേയസംഖ്യ	Rational number	1
പൊതുഛേദം	Common denominator	125
പ്രതിലോമ (വിപരീത) ആനുപാതികം	Inverse proportional	169, 170
ബഹുപദം	Polynomial	32, 106
ബീജഗണിതം	Algebra	
ബീജീയവ്യംജകം	Algebraic Expression	23, 31

121-74. 12

ഭിന്നിതം (ഭിന്നം)	Fraction	
ഭിന്നിതബീജീയ വ്യംജകം	Fractional Algebraic Expression	117
ഭുജ	Abscissa	
മൂലം	Root	81
മൂലബിന്ദു	Origin	152
രാശി	Quantity	
രേഖീയ സമീകരണം	Linear equation	72
ലഘൂകരിക്കൽ	Reduction	121
വർഗം	Square	
വിതരണ നിയമം	Distributive law	
വ്യവകലനം	Subtraction	
വ്യൽക്രമം	Reciprocal	15
സംഖ്യാരേഖ	Number line	
സംവൃതി	Closure	
സങ്കലനം	Addition	
സത്യ ഗണം	Truth set	77
സമരൂപ പദം	Similar term	37
സമാനസമീകരണം	Equivalent equation	86
സമീകരണം	Equation	78
സാഹചര്യനിയമം	Associative law	
ഹൈപർബോള	Hyperbola	171

KOTTAYAM PUBLIC LIBRARY ★ KOTTAYAM ★

KOTTAYAM PUBLIC LIBRARY
KOTTAYAM

Cl. No. M510 Acc. No. 94763

This book should be returned on or before the date last stamped below.

8 AUG 1991		
4 SEP 1991		
8 NOV 1993		
4 DEC 1993		
29 JAN 1995		
3 MAR 1995		
16 AUG 1996		
1 OCT 1999		
30 JUN 2000		
16 JAN 2004		
27 OCT 2005		
31 AUG 2011		

If the book is not returned on due date a fine of 10 (Ten) Ps. per day will be charged.

17510 94763

ദാമോദരൻ നമ്പൂതിരിപ്പാട്.

കെ. എസ്. പത്രി:

അങ്കഗണിത ബീജഗണിതം

ചില ഗണിതപുസ്തകങ്ങൾ

ഗണനോദയം
പ്രീഡിഗ്രി അടിസ്ഥാനഗണിതം
പ്രീഡിഗ്രി ത്രികോണമിതി
പ്രീഡിഗ്രി ബീജഗണിതം
ആധുനിക ജ്യാമിതികൾ
വിശ്ലേഷക ജ്യാമിതി
ഒന്നു്, രണ്ടു്, മൂന്നു്,......, അനന്തം
സാംഖ്യികം—I
സാമ്പിളിങ്ങ് സർവെ
സംഖ്യാവ്യൂഹങ്ങൾ
സംഖ്യാത്മക വിശ്ലേഷണം
വാസ്തവികസംഖ്യകളും മിതികസ്ഥലങ്ങളും
കംപ്യൂട്ടർ
ഗണിതശാസ്ത്രപ്രവേശിക
ടെൻസർ വിശ്ലേഷണം
പ്രാരംഭിക ടോപ്പോളജി
പ്രഗതകലനം
ഉപരിഗണിതപദ്ധതി—I
ഗണിതവിശ്ലേഷണതത്വങ്ങൾ
കലനവും ജ്യാമിതിയും
അങ്കഗണിത ബീജഗണിതം—I
സംഖ്യാസിദ്ധാന്തം—I

കേരള ഭാഷാ ഇൻസ്റ്റിറ്റ്യൂട്ട്
തിരുവനന്തപുരം